UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

HUDSON DE SOUZA FÉLIX

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E APLICAÇÕES

FORTALEZA
2015

HUDSON DE SOUZA FÉLIX

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E APLICAÇÕES

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, com requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

F36p Félix, Hudson de Souza
Princípio da indução matemática: fundamentação teórica e aplicações / Hudson de Souza Félix. – 2015.
39 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Indução matemática. 2. Números naturais. 3. Demonstrações. I. Título.

CDD 161

HUDSON DE SOUZA FÉLIX

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA:
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 05 / 03 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Luciano Mari
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico esse trabalho em memória a minha mãe Maria Goret, que em todos os momentos acreditou em mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo o Dom da Vida e por ter me capacitado a cada dia, a quem devo toda honra e toda glória.

A minha outra metade (esposa) Fládima Uchôa Ferreira Félix, por oferecer sempre companheirismo, dedicação, amor, compreensão e motivação.

A toda minha família, tias, tios, primos e em especial minha avó Severina por ter sido sempre uma mãe.

Aos meus amigos (irmãos) de infância Luiz Paulo Fernandes Lima e Gylly Peterson Fernandes Lima pela amizade incondicional em todos os momentos e pelos incentivos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, que prontamente me auxiliou para que esse trabalho fosse realizado, assim como também por ser um professor tão dedicado e exemplar para mim.

Aos professores Dr. Marcelo Ferreira Melo, Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, Dr. Fabrício Siqueira Benevides, Dr. José Alberto Duarte Maia, Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior, Dr. Luciano Mari, Dr. Francisco Regis Vieira Alves, dentre outros que tanto se dedicaram para que pudéssemos aprender com tanto refinamento a Matemática.

Aos meus colegas, que durante esses anos de Curso sempre estiveram presentes e ajudando em todos os momentos.

Aos idealizadores do curso de pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) juntamente com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (Capes) por fazerem a Educação básica do Brasil se tornar melhor.

E todos aqueles que de alguma forma direta ou indiretamente me ajudaram nessa caminhada da educação.

RESUMO

O presente trabalho apresenta propriedades e problemas do ensino da matemática que de alguma forma se demonstram ou podem ser resolvidas usando o princípio da indução matemática. Com isso, buscamos despertar o aluno para a importância da demonstração em matemática, saindo do conformismo de aceitar a qualquer fórmula de formatação intuitiva indexada ao números naturais e partir para uma análise matemática mais refinada dos conceitos, propriedades e problemas que se apresentam na matemática.

Palavras-chave: Indução Matemática. Demonstrações. Aplicações. Educação básica.

ABSTRACT

This paper presents properties and mathematics teaching issues that somehow show or can be resolved using the principle of mathematics induction. with this, we seek to awaken students to the importance of demonstration in mathematics , leaving the conformity to accept any intuitive formatting formula indexed to natural numbers and go for a more refined mathematical analysis of the concepts , properties and problems that arise in mathematics.

Keywords: Mathematical Induction . Statements. Applications. Basic education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é abordar o princípio da indução, fortalecendo os aspectos teóricos como também colocando a indução matemática em prática através de exercícios e problemas indexados aos números naturais que vão desde assuntos básicos aos mais refinados.

Atualmente vemos que em um ambiente convencional de sala de aula do ensino básico não há um fortalecimento da parte teórica e muitas menos das demonstrações de propriedades, exercícios e problemas matemáticos por parte do professor. Muitas vezes temos que tais propriedades ou fórmulas são colocas aos alunos como verdades inquestionáveis ou que no momento da explicação elas são tomadas como válida para qualquer número natural, se tendo como prova apenas a observação que vale para o número um, dois, três e etc. e assim válida para qualquer outro número natural, nestes casos perdendo a oportunidade de aplicar o princípio da indução e deixando de fortalecer o ensino da matemática, assim como o enriquecimento do conhecimento por parte dos alunos.

Não a dúvidas que as demonstrações possuem um papel essencial no aprendizado da matemática. Segundo Lázaro (2003, p.243), na história da matemática vimos que os gregos antigos foram os primeiros a utilizarem as demonstrações matemáticas. Euclides (360 a.C./295 a.C.) no seu texto *os elementos*,passou-se a exigir demonstrações para resultados matemáticas, tendo papel fundamental no campo das ciências pelo o seu desenvolvimento do método axiomático.

Apesar da indução Matemática não ser um tópico especifico no programa no ensino médio sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e como também não ser uma matéria abordada pelo Exame Nacional do Ensino Médio - Enem, não a dúvidas da importância do seu estudo, tendo em vista o rigor matemático mínimo no qual a matemática deve ter e que em muitas vezes não é visto nos livros do ensino regular das escolas de educação Básica do Brasil.

Esse trabalho está estruturado em quatro capítulos, o primeiro introdutório, no qual irá trazer informações gerais da pesquisa, o segundo fundamenta os aspectos teóricos da pesquisa, adotando os axiomas de Peano para a construção mais rigorosa e organizada dos números naturais e tendo como consequências algumas propriedades fundamentais demonstrados através da Indução Matemática.

No capitulo três é a parte central no nosso estudo, pois apresenta uma série de aplicações interessantes do princípio da indução em propriedades e problemas clássicos da Matemática. E no quarto capítulo temos a conclusão do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A origem dos números naturais

A origem dos números naturais se remete desde os tempos mais antigos, pela necessidade do ser humano de contar seus objetos, fazendo comparações dos seus conjuntos de objetos com valores abstratos que tornaram mais organizados e preciso a noção de quantidade. E por conta desse processo de contagem termos como consequência uma sequência numérica. Tomando com números naturais os valores 1, 2, 3, 4, ... e como o conjunto desses valores, um conjunto $\mathbb{N}$, chamado de conjunto dos naturais, e daí $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, ... \}$. Mas ainda precisamos ter uma construção mais consistente do que seja o conceito de números naturais.

Essa construção aconteceu no século XIX e por meio de ***Giussepe Peano*** *(1858-1932)* e os seus três axiomas, conhecidos como *axiomas de Peano*, Onde definiremos toda a teoria dos números naturais, de uma forma mais simples, organizada e refinada.

2.2 Os Axiomas de Peano

Tomando como formas indefinidas o conjunto $\mathbb{N}$ onde seus elementos são chamados de números naturais, e uma função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que associa cada $n \in \mathbb{N}$ a um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado sucessor de n.

A função s satisfaz os seguintes axiomas:

i) $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.

ii) $s(n) \neq 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, existe um elemento de $\mathbb{N}$ chamado de "um" que é simbolizado por "1" e que não é sucessor de nenhum $n \in \mathbb{N}$, ou de mesma forma temos $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ um conjunto unitário.

iii) (principio da Indução) Se X é um subconjunto dos $\mathbb{N}$, tais que $1 \in X$ e se para $n \in \mathbb{N}$ implicar em $n + 1 \in \mathbb{N}$, concluimos que $X = \mathbb{N}$.

Onde posteriormente após definirmos a adição tomar $s(n) = n + 1$.

Uma outra forma de se enunciar o principio da indução seria da seguinte forma. Seja P uma propriedade referente aos números naturais, se 1 satisfazer a propriedade P, e supondo que para $n \in \mathbb{N}$ temos a validade da propriedade P e disso implicar que $n + 1 \in \mathbb{N}$, então a propriedade P será satisfeita para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Chamaremos de *demonstração por indução*, as demonstrações que se utilização de iii)(principio da indução).

Usando a correspondência $s(n) = n + 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ e assim aplicando sucessivas vezes o processo de $s(n)$ podemos construir $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

2.3 Propriedades dos Naturais

2.3.1 Adição dos Naturais

A adição de dois números naturais, m e n, é designada por sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ e definida recursivamente da seguinte forma:

i) $m + 1 = s(m)$
ii) $m + s(n) = s(m + n)$

Propriedades da adição:

P.1 (Associativa): $m + (n + p) = (m + n) + p$; $\forall$ m,n e $p \in \mathbb{N}$.
P.2 (Comutativa): $m + n = n + m$; $\forall$ m e $n \in \mathbb{N}$.
P.3 (Lei do corte): $m + p = n + p \Rightarrow m = n$; $\forall$ m,n e $p \in \mathbb{N}$.
P.4 (Tricotomia): dados m, $n \in \mathbb{N}$, ou $m = n$, ou existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. $\forall$ m,$n \in \mathbb{N}$.

Demonstrações:

P.1 Seja $X = \{p;\ m + (n + p) = (m + n) + p,\ \forall\ m,n \text{ e } p \in \mathbb{N}\}$.

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos.

i) Ora, $1 \in X$, pois seja $p = 1$, pela definição temos que para $p = 1$
$m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1$.
ii) suponhamos válido para um $p \in \mathbb{N}$, daí temos
$m + (n + p) = (m + n) + p$.
iii) agora iremos verificar para $p + 1$,
$m + (n + (p + 1)) = m + (n + (s(p)) = m + s(n + p) = s(m + (n + p)) = s((m + n) + p)$(da hipótese ii) $= (m + n) + s(p) = (m + n) + p + 1 \Longrightarrow m + (n + (p + 1)) = (m + n) + p + 1$.

Como 1∈ X, e de p ∈ X ⇒ p + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m + (n + p) = (m + n) + p, ∀ m,n e p ∈ ℕ.

P.2 Seja X = { p; m + p = p + m, ∀ m, p ∈ ℕ }

A prova será feita por indução sobre p, tomando m fixo.

i) tomando p = 1 ,

i.1) se m = 1, temos 1 + 1 = 1 + 1, logo 1∈ X .

i.2) se m ≠ 1, podemos escrever m = m_0 + 1, com isso

m + 1 = (m_0 + 1) + 1 = m_0 + (1+1) = 1 + (m_0 + 1), *(pela associatividade)* ⇒ m + 1 = 1 + m.

ii) suponhamos válido para um p ∈ ℕ, temos m + p = p + m.

iii) agora iremos verificar para p + 1,

m + (p + 1) = (m + p) + 1, (*pela associatividade)* = (p + m) + 1, (de ii) = p + (m + 1) = p + (1 + m) = (p + 1) + m ⟹ m + (p + 1) = (p + 1) + m.

Como 1∈ X, e de p ∈ X ⇒ p + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m + p = p + m, ∀ m, p ∈ ℕ.

P.3 Seja X = { p; m + p = n + p ⇒ m = n, ∀ m,n e p ∈ ℕ }

A prova será feita por indução sobre p, tomando m e n fixos.

i) Ora, 1 ∈ X, pois seja p = 1, temos

m + 1 = n + 1 ⇒ s(m) = s(n) ⇒ m = n (pela injetividade).

ii) suponhamos válido para um p ∈ ℕ, temos m + p = n + p ⇒ m = n.

iii) agora iremos verificar para p + 1,

m + (p + 1) = (m + p) + 1(pela associatividade) = (n + p) + 1 ⇒ s(m + p) = s(n + p) ⇒ m + p = n + p (pela injetividade) ⇒ m = n (por ii) .

Como 1∈ X, e de p ∈ X ⇒ p + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m + p = n + p ⇒ m = n, ∀ m,n e p ∈ ℕ.

P.4 Deixaremos a demonstração para após definirmos a ordem nos naturais.

2.3.2 Multiplicação dos Naturais

A Multiplicação de dois números naturais, m e n, é designada pelo seu produto m.n ∈ ℕ e definida recursivamente da seguinte forma:

i) m.1 = m

ii) m.(n + 1) = m.n + m

Propriedades da multiplicação:

P.1 (Associativa): m.(n.p) = (m.n).p;

P.2 (Comutativa): m.n = n.m;

P.3 (Lei do corte): m.p = n.p ⇒ m = n;

P.4 (Distributiva): m(n+p) = m.n + m.p;

∀ m,n e p ∈ ℕ.

Demonstrações:

Vamos começar demonstrando P.4, pois pela definição já vemos que ela indica a validez para a propriedade associativa.

P.4 Seja X = { p ; m(n+p) = m.n + m.p, ∀ m,n e p ∈ ℕ}.

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n naturais fixos.

i) Ora, 1 ∈ X, pois seja p = 1, temos

m(n+1) = m.n + m (da definição).

ii) suponhamos válido para um p ∈ ℕ, ou seja, m(n+p) = m.n + m.p.

iii) agora iremos verificar para um p + 1,

m(n + (p + 1)) = m((n + p) + 1)) = m(n + p) + m (da definição) = (m.n + m.p) + m = m.n + (m.p + m) (associativa da adição) = m.n + m.(p + 1).

Como 1∈ X, e de p ∈ X ⇒ p + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m(n+p) = m.n + m.p, ∀ m,n e p ∈ ℕ.

P.1 Seja X = { p; m.(n.p) = (m.n).p , ∀ m,n e p ∈ ℕ }.

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n naturais fixos.

i) para p = 1 temos,

m.(n.1) $\stackrel{def}{=}$ m.n $\stackrel{def}{=}$ (m.n) = (m.n).1 , logo 1 ∈ X

ii) suponhamos válido para um p, ou seja, m.(n.p) = (m.n).p (hipótese de indução)

iii) agora iremos verificar para um p + 1 ∈ ℕ, daí

m.(n.(p+1)) $\stackrel{def}{=}$ m.(n.p + n) = m.(np) + m.n (de P.3) = (m.n).p + (m.n).1, (por *ii*) $\stackrel{def}{=}$ (m.n)(p + 1).

Como 1∈ X, e de p ∈ X ⇒ p + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m.(n.p) = (m.n).p , ∀ m,n e p ∈ ℕ.

P.2 Seja X = { n; m.n = n.m , ∀ m e n ∈ ℕ }.

A prova será feita por indução sobre n, tomando m um natural fixo.

i) Ora, 1 ∈ X, pela definição

ii) suponhamos válido para um n ∈ ℕ, ou seja, m.n = n.m.

iii) agora iremos verificar para um n + 1 ∈ ℕ,

m.(n+1) $\stackrel{\text{def}}{=}$ m.n + m = n.m + m, *(por ii)*, pela lei do cancelamento da adição temos que m.n = n.m, logo iii) verdadeiro.

Como 1∈ X, e de n ∈ X ⇒ n + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m.n = n.m , ∀ m e n ∈ ℕ.

P.3 Seja X = { p; m.p = n.p ⇒ m = n, ∀ m,n e p ∈ ℕ}.

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n naturais fixos.

i) para p = 1 temos.

m.1 = n.1 ⇒ m = n pela definição ,portanto 1∈ X.

ii) suponhamos válido para um p, ou seja, m.p = n.p ⇒ m = n.

iii) agora iremos verificar para um p + 1 ∈ ℕ,

m.(p+1) = n.(p+1) ⇒ m.p + m = n.p + n, *(pela definição)* ⇒ m + m = n + n, (por ii) ⇒ m = n .

Como 1∈ X, e de n ∈ X ⇒ n + 1∈ X, concluimos por indução que X = ℕ, ou seja, m.p = n.p ⇒ m = n, ∀ m,n e p ∈ ℕ.

2.3.3 Ordem dos Naturais

Definiremos a ordem dos números naturais em termos da adição. Dados os números naturais m, n dizemos que m é *menor do que* n e escrevemos;

$$m < n$$

Para significar que existe um p ∈ ℕ tal que n = m + p. De forma análoga, podemos definir um m *é maior do que* n e escrevemos como m > n, para significar que existe um q ∈ ℕ tal que m = n + q.

Temos também as notações $m \leq n$ *e* $m \geq n$, que significam respectivamente m *é menor do que ou igual a* n , e m *é maior do que ou igual a* n.

Ora, sendo n ≠ 1, significa que n é sucessor de algum numero natural (axiomas de Peano), ou seja, temos s(m) = n ⇒ m + 1 = n ⇒ n > 1, em outras palavras, 1 é o menor dos números naturais.

Propriedades da ordem

P.1 (Transitividade): se m < n e n < p , então m < p.

P.2 (Comparabilidade): *Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.*

P.3 (Tricotomia): *Dados m, n* ∈ N, *qualquer das afirmações m* < *n,*
m = n, n < *m exclui as outras duas.*

P.4 (Monotonicidade): *Se m* < *n, então m + p* < *n + p* e *mp* < *np*.

Demonstrações:

P.1 sejam m < n e n < p , temos pela definição de ordem que existem r, e s ∈ ℕ tais que m + r = n e p = n + s, daí obtemos que p = (m + r) + s = m + (r + s) ⟹ p = m + (r + s), pela definição temos m < p.

P.2 Diremos que os números naturais *m, n* são *comparáveis* quando se tem *m = n, m* < *n* ou *n* < *m.*

Seja X = { p ; p é comparável a um m, p e m ∈ ℕ}.

i) Ora, 1∈ X, pois como já vimos, sendo m ≠ 1 temos 1 > m.

ii) suponhamos válido para um p ∈ ℕ, ou seja, p é comparável a um numero natural m.

iii) agora iremos verificar para p + 1,

Sabemos de ii, que podemos ter m < p, ou m < p, ou p < m, vamos verificar cada uma das possibilidades;

1°) m < p , temos que p < p + 1 e daí por transitividade teremos que m < p + 1.

2°) m = p, onde m = p < p + 1, então m < p+1.

3°) e por fim, p < m, então m = p + n. neste caso temos as seguintes possibilidades; ou se tem n = 1 e daí m = p + 1 , ou se tem n > 1, e daí n = n_0 + 1 e consequentemente $m = p + (n_0 + 1)$, e então $m > p + 1$. Como isso vimos que $p + 1$ é comparável a qualquer m.

Como $1 \in X$, e de $p \in X \Rightarrow p + 1 \in X$, concluimos por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, *Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.*

P.3 analisaremos as seguintes situações:

1°) se $m < n$ e $m = n$, existiria um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$ e $m = n$, então $n = n + p$, com isso obteremos $n + 1 = (n + p) + 1 \Rightarrow n + 1 = n + (p + 1) \Rightarrow 1 = p + 1 \Rightarrow 1 = s(p)$, absurdo!

2°) se $m < n$ e $m > n$, existiria um p e $q \in \mathbb{N}$, tais que $n = m + p$ e $m = n + q \Rightarrow m = (m + p) + q \Rightarrow m + 1 = m + (p + q) + 1 \Rightarrow 1 = (p + q) + 1 \Rightarrow s(p + q) = 1$, Absurdo!

3°) $m < n$ e $m = n$, análogo a 1°.

P.4

1°) Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$, daí $n + p = (m + r) + p \Rightarrow n + p = (m + p) + r \Rightarrow n + p > m + p$.

2°) Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$, daí $n.p = (m + r).p \Rightarrow n.p = m.p + r.p \Rightarrow n.p > m.p$.

Teorema . ***Não existem números naturais entre n e n + 1***

Supondo por absurdo que exista um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n+1$, como isso temos $n < p$ e $p < n +1$, pela definição de ordem nos naturais temos r, e $s \in \mathbb{N}$ tais que $p = n + r$ e $n + 1 = p + s$, com isso temos $n + 1 = (n + r) + s \Rightarrow n + 1 = n + (r + s) \Rightarrow 1 = r + s \Rightarrow s(r + s) = 1$, Absurdo, portanto Não existe natural entre os naturais n e n+1, e fica claro que eles são consecutivos.

2.4 Princípio da Boa Ordenação

(Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração

Temos as seguintes possibilidade a analisar:

1°) se $1 \in A$, nada há mais o que fazer, pois 1 é o menor elemento.

2°) se $1 \notin A$, daí definamos primeiramente:

I_n= {1, 2, 3, 4, ... , n} e
X = { n ∈ ℕ; $I_n \subset$ ℕ - A}

Logo, se $1 \notin A$, então $1 \in X$. por outro lado, se $n \in X \Longrightarrow n + 1 \notin X$, pois se $n + 1 \in X$, teríamos pelo princípio da indução que X = ℕ, consequêntimente A = ∅, Contradição. Logo teremos n + 1 o menor elemento de A.

Exemplo

Mostre que $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos primeiramente um conjunto $A = \{n \in \mathbb{N};\, S_n \neq \frac{n}{n+1}\}$. A fim de demonstrarmos que o exemplo acima é verdadeiro, basta apenas provar que A é vazio. Suponhamos por absurdo que A não é vazio, com isso pelo princípio da Boa ordenação, A tem um menor elemento, seja *a* esse menor elemento, temos que $S_a \neq \frac{a}{a+1}$ e também $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, logo *1 < a* , daí podemos escrever $S_{a-1} = \frac{a-1}{(a-1)+1} = \frac{a-1}{a}$. Dessa última igualdade somamos $\frac{1}{a(a+1)}$ em ambos os lados, se obtendo

$S_{a-1} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{a-1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} \Rightarrow S_a = \frac{a}{a+1}$, Absurdo. Logo A é vazio.

2.5 A Generalização do Primeiro Princípio da Indução

(Princípio da Indução Generalizado.) *Seja P uma propriedade referente a números naturais, cumprindo as seguintes condições:*

(1)O número natural a goza da propriedade P;

(2)Se um número natural n goza da propriedade P então seu sucessor n + 1 *também goza de P.*

Então todos os números naturais maiores do que ou iguais a a gozam da propriedade P.

Demonstração

Tomemos um conjunto X dos elementos que satisfazem a propriedade P, ou seja, se um conjunto X é tal que $a \in X$ e, além disso, $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, então X contém todos os números naturais ≥ a. Supondo por absurdo que exista $a \in X$, mas no qual os elementos maiores que a não pertençam a X, seja b o menor desses números, daí b > a, como isso temos b = c + 1(Princípio da Boa ordenação), onde pela definição colocada em b, temos $c \in X$ (já que b é o menor dos números maiores que a que não se encontram em X) mas de $c \in X \Rightarrow c + 1 \in X \Rightarrow b = c + 1 \in X \Rightarrow b \in X$ Absurdo.

Exemplos

1. Provar que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$

Usaremos o princípio da indução generalizado.

i) temos que essa afirmação é falsa para n = 1 e n = 2, mas é válida para n = 3, pois $2.3 + 1 < 2^3$.

ii) suponhamos válido para certo $n \geq 3$. (Hipótese de Indução).

iii) nós resta provar a validade para n + 1, com efeito temos

$2.(n + 1) + 1 = 2.n + 2 + 1 < 2 + 2^n$, (por ii)$< 2^n + 2^n = 2.\ 2^n = 2^{n+1}$

$\Rightarrow 2.(n + 1) + 1 < 2^{n+1}$.

portanto, $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$.

2.6 O Segundo Princípio da Indução

(*Segundo Princípio da Indução.*) *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: Dado $n \in N$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X, então $n \in$* X. *Nestas condições,* X = $\mathbb{N}$.

Demonstração

Tomemos um Y = X - $\mathbb{N}$. Resta provar que Y = $\emptyset$

Supomos que Y $\neq \emptyset$, daí pelo Princípio da Boa ordenação Y teria um elemento mínimo b, como isso todos os números naturais n < b pertenceriam a X, e pela hipótese feita sobre X teríamos $b \in X$, uma contradição, Então Y = $\emptyset \Rightarrow$ X = $\mathbb{N}$.

2.7 Segundo método de demonstração por indução

(Segundo método de demonstração por indução.) *Seja P uma propriedade referente a números naturais. Dado $n \in$* N, *se a validade de P para todo número natural menor do que n implicar que P é verdadeira para n, então P é verdadeira para todos os números naturais.*

Demonstração

Ora, pelo enunciado, o Conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P satisfaz a condição do Segundo Princípio da indução. Portanto X = $\mathbb{N}$ onde P é valido para todos os números naturais.

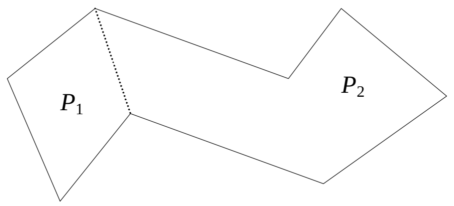
Exemplo:

Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono *P*, de *n* lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre *n* – 3.

A prova será feita pelo segundo princípio da indução.

i) Então suponhamos válido a proposição acima para todo o polígono com menos de n lados.

ii) Nos resta provar a validade para um polígono de n lados, e com isso pelo segundo princípio da indução a proposição acima será válida para qualquer polígono de n lados.



Ora, tomemos uma diagonal fixa no polígono P que o divide em dois polígonos justapostos P_1 e P_2 de n_1 e n_2 lados, tal que $n_1 < n$ e $n_2 < n$. Por i) temos que o número de diagonais usados em P_1 e P_2 é respectivamente $d_1 = n_1 - 3$ e $d_2 = n_2 - 3$, onde $n_1 + n_2 = n + 2$(pois na soma dos lados dos polígonos P_1 e P_2 contamos os n lados do polígono P mais duas vezes a diagonal que foi fixada).

Dai, o número diagonais internas *d* que não se intersectam do polígono P que o dividem em triângulos justapostos podem ser calculada como a soma das diagonais usadas em P_1 e P_2 e mais a diagonal fixada inicialmente. Com isso temos:

$$d = d_1 + d_2 = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = n_1 + n_2 - 5 = n + 2 - 5 = n - 3 \Rightarrow \boldsymbol{d = n - 3}.$$

Provando a validade da proposição acima para qualquer polígono de n lados.

3 APLICAÇÕES

Esse capítulo tem como objetivo a resolução de problemas que podem ser demonstrados pelo Princípio da Indução, onde alguns desses problemas são bem conhecidos e clássicos na Matemática.

Lembrando que o Princípio da Indução se presta a demonstrar proposições que devem ser indexadas pelos naturais, mas se podendo demonstrar demais resultados acerca de outros objetos Matemáticos.

Segundo (OLIVEIRA e FERNÁNDEZ, 2012, p.206) dentro tantos problemas que podem ser resolvidos usando o princípio da indução, podemos dar destaque a três importantes grupos:

1. Demonstração de Identidades;
2. Demonstração de Desigualdades;
3. Demonstração de Problemas de Divisibilidade;

3.1 Demonstração de Identidades

3.1.1 A soma dos n primeiros números naturais.

Determinar uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais:

Um fato curioso a respeito desse problema é que segundo a história, Carl Friedrich Gauss se deparou com um problema parecido com esse aos 10 anos de idade, o problema que foi proposto pelo seu professor de matemática era descobrir o valor da soma dos 100 primeiros números naturais, ou seja, 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100.

A solução dada por Gauss foi feita observando que existia um fato *curioso* em meio aos 100 números, que soma dos pares 1 + 100 = 101; 2 + 99 = 101 ... 50 + 51=101 com essa lógica sempre davam o mesmo valor, onde se tinham ao todo 50 pares. Ou seja, para somar os 1 + 2 + 3 + ...100 = 50.101 = 5050.

Agora vamos a generalização desse problema!

Para somar 1 + 2 + 3 + ... + n, tomaremos as seguintes somas:

1 + n = 2 + (n - 1) = 3 + (n - 2) = ... = $\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)$, onde com n termos formamos $\frac{n}{2}$ pares de soma igual a 1 + n, daí 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n}{2}$.(1 + n) = $\frac{n.(n+1)}{2}$.

Agora por meio do princípio da indução sobre n, vamos provar que:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

i) para n = 1 temos, $1 = \frac{(1+1).1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2.1}{1} \Rightarrow 1 = 1$

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, daí $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(1+n).n}{2}$ (hipótese de indução).

iii) agora tomemos um n + 1, daí

$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(1+n).n}{2} + (n+1)$, *(por ii)* $= \frac{(1+n).n+2(n+1)}{2} = \frac{(1+n).(n+2)}{2} = \frac{(1+n+1).(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(1+n+1).(n+1)}{2}$.

Como i) válido e ii) $\Rightarrow$ iii), então $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(1+n).n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.2 A soma dos n primeiros cubos

Vamos tentar generalizar a soma dos n primeiros cubos. Temos que,

$1^3 = 1 = \left(\frac{1.2}{2}\right)^2$

$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = \left(\frac{2.3}{2}\right)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = \left(\frac{3.4}{2}\right)^2$

.

.

.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$, de forma intuitiva.

Resta-nos provar se realmente essa fórmula será válida para todo n nos naturais. Vamos provar sua validez pelo princípio da indução sobre n.

i) para n = 1 temos, $1^3 = \left(\frac{\mathbf{1}.(\mathbf{1}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} \Rightarrow 1^3 = \left(\frac{\mathbf{1}.(\mathbf{2})}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} \Rightarrow 1^3 = (\mathbf{1})^{\mathbf{2}} \Rightarrow 1 = 1$.

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, daí $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$.

iii) agora tomemos um n + 1, daí,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2 + (n + 1)^3$, *(por ii)* $= \frac{n(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} = \frac{[(n+1)((n+1)+1)]^2}{4} = \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2$.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.3 Diagonais de um polígono

Prove que um polígono convexo de n lados possui $d = \frac{n.(n-3)}{2}$ diagonais, para todo n ≥ 3

A prova será feita por indução sobre n.

Seja uma propriedade P tal que P(n): $\mathrm{d} = \frac{\mathrm{n.(n-3)}}{2}$

i) para n = 3 temos, P(3): $d = \frac{3.(3-3)}{2}$ = 0, que é verdadeiro , pois um triângulo não tem diagonais, ou seja, P(3) válido.

ii) suponhamos válido para um n ∈ ℕ, daí um polígono convexo de n lados possui P(n): $d = \frac{n.(n-3)}{2}$ diagonais, ou seja, P(n) válido.

iii) agora tomemos um polígono convexo n + 1 lados, daí seja o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$, tomemos a diagonal A_1A_n, como isso esse polígono ficará dividido em dois polígonos, são eles o triângulo $A_1A_{n+1}A_n$ e o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$, de tal forma que:

1. Todas as diagonais de $A_1A_2A_3 \dots A_n$ são diagonais de $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$
2. Um dos lados de $A_1A_2A_3 \dots A_n$ é a diagonal de $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$
3. Destacando-se o vértice A_{n+1} de $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$, dele se parte (n +1) - 3 = n - 2 diagonais (pela definição de diagonal: segmento de reta que une dois vértices não consecutivos).

Com isso temos que:

P(n+1) = P(n) + 1 + n - 2 = $\frac{\mathrm{n.(n-3)}}{2}$ + n - 1= $\frac{\mathrm{n.(n-3)+2(n-1)}}{2} = \frac{\mathrm{n^2-3n+2n-2}}{2} = \frac{\mathrm{n^2-n-2}}{2} = \frac{\mathrm{(n+1)(n-2)}}{2} = \frac{\mathrm{(n+1)((n+1)-3)}}{2}$ ⇒ P(n+1):d = $\frac{\mathrm{(n+1)((n+1)-3)}}{2}$

Então todos os números naturais maiores ou igual a 3, gozam pra propriedade P, ou seja, o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é sempre igual a $d = \frac{n.(n-3)}{2}$, para todo n ≥ 3

3.1.4 A pizza de Steiner

Mostre que o maior número de partes possíveis que se pode dividir o plano com n retas deste plano é $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

A prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1 temos, $p_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = \frac{1.2}{2} + 1 = 2$, que é claramente verdadeira, tendo em vista uma única reta passando por um plano o divide no máximo em duas partes.

ii) suponhamos a propriedade válida para um n ∈ ℕ, ou seja, com n retas podemos dividir um plano em $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ partes.

iii) agora tomemos n + 1 retas, ou seja, deve-se fazer mais uma reta de modo que obteremos o maior número de partes. A melhor forma de isso acorrer é que a n +1-ésima reta tem que intersectar as demais n retas em pontos que não sejam interseção de duas retas, ou seja, em n pontos distintos.

Como isso temos que a n +1-ésima reta produz n +1 partes novas, tendo em vista que os n pontos distintos gerados dividem essa reta em n +1 segmentos de reta, e cada um desse segmentos divide uma parte em duas, justificando o aparecimento de n + 1 partes novas, daí,

$p_{n+1} = p_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1)$, *(por ii)* $= \frac{n(n+1) + 2 + 2.(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2) + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1 = \frac{(n+1)((n+1))+1)}{2} + 1 \Rightarrow p_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1))+1)}{2} + 1.$

Então todos os números naturais maiores ou igual a 1, gozam da propriedade P, ou seja, o maior número de partes possíveis que se pode dividir o plano com n retas deste plano é $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, para todo $n \geq 1$.

3.1.5 Definição por recorrência

Seja a ∈ ℕ. Definamos a potência $\boldsymbol{a^n}$ como $\boldsymbol{a^0 = 1, \forall\, a \neq 0, a^1 = a}$ e $\boldsymbol{a^{n+1} = a^n.a}$. Prove que:

a) $\boldsymbol{a^m.a^n = a^{m+n}}$.

b) $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$.

c) $\boldsymbol{(a.b)^n = a^n b^n}$.

A prova será feita por indução sobre n.

a) provar que $a^m.a^n = a^{m+n}$.

vamos tomar um *m* fixo e fazer indução sobre *n.*

i) para n = 1 temos, $a^m.a^1 \overset{\text{def}}{=} a^m.a \overset{\text{def}}{=} a^{m+1} \Longrightarrow a^m.a^1 = a^{m+1}$, portanto válido para n = 1.

ii) suponhamos válido para um n ∈ ℕ, ou seja, $a^m.a^n = a^{m+n}$, para um m e n fixos.

iii) vamos tomar um n +1, daí teremos,

$a^m.a^{n+1} \overset{\text{def}}{=} a^m.a^n.a = a^{m+n}.a, (por\ ii) \overset{\text{def}}{=} a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}$

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então $a^m.a^n = a^{m+n}$, ∀ m, n ∈ ℕ.

b) provar que $(a^m)^n = a^{mn}$

Vamos tomar um *m* fixo e fazer indução sobre *n*.

i) para n = 1 temos, $(a^m)^1 \overset{\text{def}}{=} a^m = a^{m.1} \Rightarrow (a^m)^1 = a^{m.1}$, portanto válido para n = 1.

ii) suponhamos válido para um n ∈ ℕ, ou seja, $(a^m)^n = a^{mn}$, para m e n fixos.

iii) tomemos agora um n + 1, daí,

$(a^m)^{n+1} \overset{\text{def}}{=} (a^m)^n . a^m = a^{mn}.a^m$, (*por ii*) $=a^{mn+m}$, *(do item a)* $=a^{m(n+1)}$ $\Rightarrow (a^m)^{n+1} = a^{m(n+1)}$

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então $(a^m)^n = a^{mn}$, ∀ m, n ∈ ℕ.

c) $(a.b)^n = a^n b^n$

i) para n = 1 temos, $(a.b)^1 = a.b = a^1.b^1 \Rightarrow (a.b)^1 = a^1.b^1$, portanto válido para n=1.

ii) suponhamos válido para n ∈ ℕ , ou seja, $(a.b)^n = a^n b^n$.

iii) tomemos agora um n + 1, daí,

$(a.b)^{n+1} \overset{\text{def}}{=} (a.b)^n.(a.b)^1 = a^n.b^n.a^1.b^1$, *(por i e ii)* $= a^n.a^1.b^n.b^1 \overset{\text{def}}{=} a^{n+1}.b^{n+1} \Rightarrow (a.b)^{n+1} = a^{n+1}.b^{n+1}$.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então $(a.b)^n = a^n b^n$, ∀ m, n ∈ ℕ.

3.1.6 A caracterização da função exponencial

Considere $\boldsymbol{f}$: ℝ → ℝ, não constante, tal que ∀x, y ∈ ℝ, $\boldsymbol{f(x+y)}$= $\boldsymbol{f(x).f(y)}$ e prove que $\boldsymbol{f(n.x)}$=$\boldsymbol{f(x)^n}$, ∀ $\boldsymbol{n}$ ∈ ℕ.

A prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1, temos, $f(1.x)$=$f(x)$= $f(x)^1 \Rightarrow f(1.x) = f(x)^1$

ii) suponhamos válido para um n ∈ ℕ, ou seja, $f(n.x)$=$f(x)^n$.

iii) tomemos agora um n + 1, daí

$f((n+1).x)$= $f(n.x+x) \overset{\text{def}}{=} f(nx).f(x) = f(x)^n.f(x)$, (por ii) $= f(x)^{n+1}$, (produto de mesma base) ⇒ $f\big((n+1).x\big) = f(x)^{n+1}$.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então $f(n.x)$=$f(x)^n$, ∀ n ∈ ℕ.

3.1.7 Teoremas Binomiais

Definimos como números binomiais o número da forma $\boldsymbol{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$, onde n, p ∈ ℕ, com n ≥ p.

prove que:

a) Relação de Stifel

$\boldsymbol{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$**, ∀ $\boldsymbol{n, p}$ ∈ ℕ $\boldsymbol{e}$ n ≥ p.**

Faremos a prova tomando a definição de número binomial, ou seja, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, daí temos;

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!}$$
$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1).p!\,(n-p-1)!}$$
$$= \frac{n!.(p+1) + n!.(n-p)}{(p+1).p!\,(n-p)(n-p-1)!} = \frac{n!\,p + n! + n!.n - n!.p}{(p+1)!\,(n-p)!}$$
$$= \frac{n! + n!.n}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)n!}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,\big(n+1-(p+1)\big)!}$$
$$= \binom{n+1}{p+1}$$
$$\Rightarrow \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

b) Binômio de Newton

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^{p}, para\ n \geq 1\ e \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ .}$$

A prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1, temos, $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}.a^1.b^0 + \binom{1}{1}.a^0.b^1$, pois pela definição de números binomiais temos $\binom{1}{0} = 1$ e $\binom{1}{1} = 1$ e pelas definições de exponencial temos $a^1 = a\ e\ b^0 = b$, tornando verdadeiro o ponto i) para n = 1.

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^p$.

iii) tomemos agora um n + 1, daí,

$(a+b)^{n+1} = (a+b).(a+b)^n = (a+b)\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p, (por\ ii) = (a+b).\left[\binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + \cdots + \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p\right] =$

$= a.\left[\binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + \cdots + \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p\right] + b.\left[\binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + \cdots + \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p\right] =$

$= \left[\binom{n}{0}.a^{n+1}.b^0 + \binom{n}{1}.a^n.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-1}.b^2 + \cdots + \binom{n}{p}.a^{n+1-p}.b^p\right] + \left[\binom{n}{0}.a^n.b^1 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^2 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^3 + \cdots + \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^{p+1}\right] =$

$= \binom{n}{0}.a^{n+1}.b^0 + \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right].a^n.b^1 + \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right].a^{n-1}.b^2 + \ldots + \left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right].a^1.b^n + \binom{n}{n}.a^0.b^{n+1} = \binom{n}{0}.a^{n+1}.b^0 + \binom{n+1}{1}.a^n.b^1 + \binom{n+1}{2}.a^{n-1}.b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}.a^1.b^n + \binom{n}{n}.a^0.b^{k+1}, (por\ stifel) =$

$= \binom{n+1}{0}.a^{n+1}.b^0 + \binom{n+1}{1}.a^n.b^1 + \binom{n+1}{2}.a^{n-1}.b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}.a^1.b^n + \binom{n+1}{n+1}.a^0.b^{n+1}$

$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}.a^{n+1}.b^0 + \binom{n+1}{1}.a^n.b^1 + \binom{n+1}{2}.a^{n-1}.b^2 + \cdots \binom{n+1}{n}.a^1.b^n + \binom{n+1}{n+1}.a^0.b^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}.a^{n+1-p}.b^p$

$$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}.a^{n+1-p}.b^p$$

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então;

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p, para\ n \geq 1\ e \forall\ a,b \in \mathbb{R}$. Valendo também claramente no caso n = 0.

3.1.8 Soma Telescópica

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1.$$

A prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1, temos $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_2 - x_1$.

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$.

iii) tomemos agora um n + 1, daí,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) + x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_1 + x_{n+2} - x_{n+1}, (por\ ii)$$

$$= x_{n+2} - x_1 = x_{(n+1)+1} - x_1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(x_{k+1} - x_k) = x_{(n+1)+1} - x_1$$

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então

$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.9 Conjunto das Partes

Prove que se um conjunto A tem n elementos, seu conjunto das partes P(A) tem 2^n.

Primeiramente tomemos

n(A) : número de elementos do conjunto

P(A): conjunto das partes, onde P(A) = { X ; X ⊂ A}

n(P(A)) : número de elementos do conjunto das partes

A prova será feita por indução sobre n.

Fica claro que para n = 0 é válido, pois se temos que A= $\emptyset$, e P(A)={A}={$\emptyset$}, o conjunto das partes tem apenas um elemento, onde $2^n = 2^0 = 1$.

i) para n = 1 temos, n(A) = 1, e P(A)={A, $\emptyset$}, daí,

2^1 = 2, que torna válido a sentença para n = 1.

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja, o conjunto das partes P(A) tem no máximo 2^n elementos, sendo n o número de elementos do conjunto A.

iii) tomemos agora um n + 1, daí, tomemos sem perca de generalidade um elemento a_{n+1} tal que $A_{n+1} = A \cup \{a_{n+1}\}$, temos que provar que o conjunto das partes de A_{n+1} tem 2^{n+1}, ou seja, n(P(A_{n+1})) = 2^{n+1}.

Pela definição de $A_{n+1} = A \cup \{a_{n+1}\}$, temos que P($A_{n+1}$) é formado por todos os subconjuntos de A mais a reunião de cada um desses subconjuntos com elemento a_{n+1}, ou seja n(P(A_{n+1})) =2^n+ 2^n = 2. 2^n = 2^{n+1}.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então a afirmação é válida para qualquer valor natural n.

3.2 Demonstração de Desigualdades

3.2.1 Desigualdade de Bernoulli

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e ∀ x∈ ℝ, com $x \geq -1$, verifica-se a Desigualdade

$$\mathbf{(1 + x)^n \geq 1 + nx}$$

A prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1 temos,

$(1 + x)^1 \geq 1 + 1.x \Rightarrow 1 + x \geq 1 + x$, que torna a sentença válida.

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

iii) tomemos agora um n + 1, daí,

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n.(1 + x) \geq (1 + nx).(1 + x)$, *(por ii)(1+x ≥ 1-1=0)* $\Longrightarrow$ $(1 + nx).(1 + x)$= 1+ x + n.x + nx² ≥ 1+ x + n.x = 1 + (n + 1).x

$\Longrightarrow (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1).x$.

Como i) válido e ii) $\Rightarrow$ iii), então para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\forall$ x$\in \mathbb{R}$, com $x \geq -1$, verifica-se a Desigualdade

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3.2.2 Desigualdade Trigonométrica

Para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, verifica-se a seguinte desigualdade

$$|\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{nx})| \leq \boldsymbol{n}|\boldsymbol{senx}|$$

A prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1 temos,

$|sen(1.x)| \leq 1.senx \Longrightarrow |senx| \leq |senx|$, *é verdade*

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$|sen(nx)| \leq n|senx|$$

iii) tomemos agora um n + 1, daí,

$|sen((n+1)x)| = |sen(n.x+x)| = |sen(n.x).cosx + \cos(n.x).senx)| \leq |sen(n.x).cosx| + |\cos(n.x).senx)| \leq |sen(n.x)| + |senx| \leq n|senx| + |senx|$, (por ii) = (n + 1). $|senx|$.

$\Longrightarrow |sen((n+1)x)| \leq$ (n + 1). $|senx|$.

Como i) válido e ii) $\Rightarrow$ iii), então para $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, verifica-se a seguinte desigualdade:

$$|sen(nx)| \leq n|senx|$$

3.3 Demonstração de problemas de Divisibilidade

3.3.1 Teorema Fundamental da aritmética

Todo o número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

A prova será feita pelo segundo princípio da indução.

i) para n = 2, temos que é primo e nada mais o que fazer.

ii) suponhamos válido para todo número natural menor do que n.

iii) Resta provar que é válido para n. daí temos as seguintes possibilidades:

iii.1) se n é primo, nada temos a fazer.

iii.2) se n é composto, logo existe n_1 e n_2 tal que n = $n_1.n_2$, onde 1 < n_1 < n e 1 < n_2 < n. Ora, pela ponto ii)(Hipótese de indução) temos que existem primos p_1, p_2, p_3,..., p_r e q_1, q_2, q_3,..., q_s tais que n_1 = $p_1.p_2.p_3 ... p_r$ e n_2= $q_1.q_2.q_3 ... q_s$, daí n = $n_1.n_2$= $p_1.p_2.p_3 ... p_r.q_1.q_2.q_3 ... q_s \Longrightarrow$ n = $p_1.p_2.p_3 ... p_r.q_1.q_2.q_3 ... q_s$.

Mas, ainda nos resta provar a sua unicidade (a menos da ordem dos fatores). Vamos supor que n = $p_1.p_2.p_3 ... p_r$ = $q_1.q_2.q_3 ... q_s$, onde p_i e q_j são números primos.

Como p_1 divide $q_1. q_2. q_3 ... q_s$, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, e após um reordenamento adequado, podemos supor que seja q_1. Com isso temos,

$p_2. p_3 ... p_r = q_2. q_3 ... q_s$.

Pela hipótese de indução temos que r = s e os p_i e q_j são iguais, pois temos $p_2. p_3 ... p_r < n$.

3.3.2 Pequeno Teorema de Fermat

Dado um número primo p, tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

Antes de começarmos a demonstração do pequeno Teorema de Fermat, necessitaremos do lema a seguir:

Lema: *Seja p um número primo. Os números $\binom{p}{i}$, onde $0 < i < p$, são todos divisíveis por p.*

i) para i = 1 temos que o lema é válido, pois $\binom{p}{1} = p$, e é claro que p divide $\binom{p}{1}$.

ii) suponhamos então para $0 < i < p$, de onde i! |p.(p - 1)...(p - i -1), mas (i!,p) = 1, daí i! |(p - 1)...(p - i -1), de onde $\binom{p}{i}$=p$\frac{(p-1)\ldots(p-i-1),}{i!}$, portanto p| $\binom{p}{i}$.

Agora de posse do lema, vamos à demonstração do pequeno Teorema de Fermat.

A prova será feita por indução sobre a.

i) para a = 1 temos que,

$a^p - a = 1^p - 1 = 0$, e é claro que qualquer p primo é divisor de 0

ii) suponhamos válido para um número natural a, ou seja, para p um primo temos que p|$a^p - a$.

iii) agora iremos provar para um natural a + 1, pelo binômio de Newton temos que;

$(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + \binom{p}{1} a^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} a.$

Ora, temos por ii) que p|$a^p - a$ e pelo lema anterior que p| $\binom{p}{i}$, com isso p|[a^p - a + $\binom{p}{1} a^{p-1}$ + ... + $\binom{p}{p-1} a$] $\Rightarrow$ p|$[(a+1)^p - (a+1)]$.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então dado um número primo p, tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

3.3.3 Divisão Euclidiana

Sejam a e b dois números naturais com 0 < a < b. Existem dois únicos números naturais q e r tais que b = a.q + r, com r < a.

Temos as seguintes situações a analisar:

1°) se b < a, tomemos q = 0 e r = b, e há nada mais o que fazer.

2°) se b = a, tomemos q = 1 e r = 0, e há nada mais o que fazer.

3°) só nos restou o caso b > a.

Para esse última faremos por indução sobre b.

i) para b = 1 temos, 1 = b > a

ii) suponhamos agora o resultado válido para todo i, tal que $1 \leq i \leq a$.

iii) De b > a $\Longrightarrow$ 1 ≤ b + 1 - a ≤ b, por ii) temos que existem q' e r com r < a, daí b + 1 - a = $q'.a$ + r $\Longrightarrow$ b + 1 = $(q' + 1).a$ + r , sendo $(q' + 1)$ = q , temos que o resultado é válido.

Agora só nos resta provar a unicidade;

Temos as mesmas três situações anteriores a provar:

1°) se b < a , podemos escrever b de forma única;

b = a.0 + b , sendo q = 0, r = b e r = b < a.

2°) se b = a, podemos escrever b de forma única;

b = b.1 + 0, sendo q = 1, r = 0 e r =0 < a.

3°) No resta provar para b > a,

i) para b = 1 temos, que 1 = b ≤ a

ii) suponhamos válido para todos os números naturais menores ou iguais a b.

iii) supondo agora que exista,

b + 1 = q.a + r e

b + 1 = q'.a + r',

Pode - se admitir que b + 1 > a, já que o resultado está garantido para quando b + 1 ≤ a.

Subtraindo na igualdade acima a, obtém-se que:

b + 1 - a = (q - 1) . a+ r e

b + 1 - a = (q'-1).a + r',

de ii) temos que (q - 1) = (q'-1) e r = r', o que prova a unicidade para b + 1

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então segue a unicidade para a divisão euclidiana.

3.3.4 Principio de Dirichlet (ou principio das Gavetas)

Deseja-se guardar *m* objetos em *n* gavetas. Se *m* > *n*, então alguma gaveta deverá conter mais que um objeto.

A Prova será feita por indução sobre n, fixando m.

i) para n = 1 temos, que existem uma gaveta, como m > 1, fica claro que essa única gaveta ira conter mais de um objeto.

ii) suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja, com o intuito de se guardar m objetos em n gavetas, se m > n , então alguma das gavetas irá ter mais que um objeto.

iii) iremos agora provar para n + 1 gavetas. Temos inicialmente que m > n + 1 pela proposição, daí iremos distribuir os m objetos nas n + 1 gavetas e com isso teremos as seguintes situações:

1°) escolhendo uma dessas gavetas ao acaso e se nela estiver mais de um objeto, nada há o que fazer.

2°) escolhendo uma dessas gavetas ao acaso e se nela não estiver objeto, então nas n gavetas restantes temos acomodados m > n + 1 > n objetos, sendo m > n e tomando ii) está provado.

3°) e por fim, escolhendo uma dessas gavetas ao acaso e se nela estiver apenas um objeto, temos que nas n gavetas restantes temos acomodados m - 1 > n objetos, onde m > m - 1 > n , e por ii) temos que nas n gavetas, ao menos um possui mais de um objeto.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então fica provado o Princípio de Dirichlet.

3.4 Aplicações

3.4.1 A torre de Hanói e o fim do Mundo

Segundo uma antiga lenda, na origem dos tempos em um templo oriental (de Hanói), colocaram 64 discos perfurados de ouro puro e diâmetros distintos ao redor de uma das três colunas de diamantes. Onde um grupo de sacerdotes moviam os discos respeitando as seguintes regras:

a) eles começam empilhados em ordem crescente, segundo os seus tamanhos (o maior disco fica sempre embaixo do menor disco).

b) e a cada segundo os sacerdotes deslocavam um disco, sendo que cada disco desse poderia ser colocado em qualquer outra coluna, portanto que nenhum disco de maior diâmetro poderia ficar em um disco de menor diâmetro.

E por fim, quando os 64 discos fossem transportados para outra coluna o *MUNDO ACABARIA.*

Como isso quantos movimentos são necessários para mover n anéis de uma coluna para outra?

Para a resposta da pergunta acima, faremos indução sobre n discos.

i) para n = 1 e n = 2 , temos os seguintes argumentos:

i.1) para n = 1, é fácil ver que basta apenas um único movimento, ou seja, bastaria pegar esse único anel que inicialmente está em uma coluna e colocar ele em uma das outras duas colunas.

1.2) para n = 2, ou seja, temos 2 anéis, sem perca de generalidade, digamos que esses dois anéis estão na primeira coluna, daí faremos os seguintes movimentos: passamos o disco menor para a coluna do meio e em seguida o disco maior para a terceira coluna, e por fim o disco menor que estava na coluna do meio o passaremos para a terceira coluna, finalizando tudo com 3 movimentos.

Para calcular o caso geral, iremos nos apoiar no método recursivo, tomando a_k como a quantidade de movimentos de k anéis, o método recursivo está definiremos como sendo a forma de se expressar a_{k+1} movimentos gerados por k + 1 discos em função de a_k.

Ora, sabemos que para se movimentar k discos precisamos de a_k movimentos, agora vamos procurar saber relacionar a_k movimentos, com o movimento de k + 1 discos representado por a_{k+1}.

Sem perca de generalidade, seja k + 1 discos na primeira coluna, usando a_k movimentos, movemos k discos para a terceira coluna restando ainda o maior disco na primeira coluna, em seguida passamos o maior disco para a coluna central, e com mais a_k movimentos passamos os k discos da terceira coluna para a coluna central. Logo temos que usamos a_k+ 1 + a_k movimentos para mover k + 1 anéis, que é a mesma coisa de:

$$a_{k+1}= 2a_k+1$$

Por fim, vamos provar por indução que $a_k = 2^k - 1$.

i) para k = 1 ou k = 2, a afirmação é válida.

ii) suponhamos válido para n = k (Hipótese de indução), daí $a_k = 2^k - 1$.

iii) nos resta provar a validade para n = k + 1,

$$a_{k+1}= 2a_k+1 = 2.(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$$

Logo, pelo princípio da Indução $a_n = 2^n - 1$, para todo n.

3.4.2 O problema da Moeda Falsa

Tem - se 2^n moedas, onde dentre elas a uma moeda de peso menor (a falsa). Temos uma balança com dois pratos, mas sem nenhum peso. Mostre que é possível encontrar a moeda falsa com n pesagens.

A Prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1 temos que existem $2^1 = 2$ moedas, ora com uma balança com dois pratos é fácil ver qual é a moeda falsa.

ii) supomos a validade para um $n \in \mathbb{N}$.

iii) Agora nos resta provar a validade para n + 1. Temos 2^{n+1} moedas, vamos pegar e separaras em dois grupos com 2^n moedas cada. daí temos o seguinte processo.

1°) pegamos cada grupo de 2^n moedas e colocamos um em cada prato da balança, e consequentemente iremos verificar em qual grupo estará à moeda falsa, para isso usamos uma pesagem.

2°) pegamos o grupo de 2^n moedas que está à moeda e juntamente com ii), saberemos onde está à moeda falsa, para isso usaremos n pesagens.

Ora, concluímos então que com n + 1 pesagens identificaremos onde está a moeda falsa.

Pelo princípio da Indução o nosso problema é válido para qualquer que seja n nos naturais.

3.4.3 Os Coelhos de Fibonacci

Esse problema originalmente foi proposto e resolvido por Leonardo de Pisa em seu livro *Liber Abacci* de 1202: *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.*

Nosso problema será: Dado um casal de coelhos adultos, a cada mês produz outro casal e que esse novo casal começa a se procriar dois meses após o seu nascimento. Temos que após n meses o número f (n) de casais será dado por:

$$f(n) = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Começamos o problema com um casal de coelhos recém-nascidos!

A Prova será feita por indução sobre n.

i) para n = 1 e n = 2 temos,

i.1) n = 1

$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$,Verdade.

1.2) n = 2

$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}}$ = 1, Verdade, pois nos primeiros dois meses ainda só temos o casal inicial e somente após o segundo mês irá nascer o primeira prole.

ii) suponhamos por hipótese de indução a validade para n = 1, 2, ... , n, n + 1.

iii) basta provarmos agora a validade para n + 2.

observe que:

1°) os casais que geram casais de filhotes no mês n + 1, geram também um casal de filhotes no mês n + 2.

2°) os casais que nascem no mês n, vão gerar seus primeiros casais filhotes no mês n + 2.

E de 1°) e 2°) temos que no mês n + 2 teremos $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, onde

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$, (por ii) = $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$ - $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$ = $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right)$ - $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}\right)$ = $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ - $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ = $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)$ - $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$ = $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$ - $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$ - $\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$.

$$\Rightarrow F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} .- \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

Como i) válido e ii) ⇒ iii), então

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

3.5 Cuidados ao usar o Princípio da Indução

3.5.1 Todas as Flores da mesma cor (O erro indutivo)

A prova será feita por indução sobre n, sendo n o número de flores.

i) para n = 1 temos apenas uma flor, e é claro que ela tem a mesma cor.

ii) suponhamos válido para n flores, ou seja, em um conjunto com n flores todas vão ter a mesma cor.

iii) agora resta provar para n + 1 flores,

Seja F o conjunto das n + 1 flores, F = { f_1, f_2, f_3,..., f_n, f_{n+1}}, daí tomemos dois outros conjuntos, o F_1= { f_1, f_2, f_3,..., f_n} e F_2= { f_1, f_2, f_3,..., f_n}, por ii) temos que F_1 e F_2 são conjuntos que cada um possui todas as flores da mesma cor, mas como F_1 e F_2 tem interseção todas essas flores dos dois conjuntos tem a mesma cor, e com isso concluímos que F = { f_1, f_2, f_3,..., f_n, f_{n+1}} é um conjunto que possui todas as flores com mesma cor.

Como i) válido e ii) ⇒ iii), fica provado por indução que a proposição é válida.

Esse problema é uma variação do caso clássico do erro indutivo. Vemos que esse problema em momento algum se prova que ii) implica em iii), assim "quebrando" o procedimento por indução Matemática. E daí vemos como não se pode ser aplicada indução.

3.5.2 O enigma do Cavalo de Alexandre, O Grande.

Num mosaico romano, Bucéfalo, o cavalo de Alexandre, O Grande, é representado como um fogoso corcel cor de bronze. Vamos provar que isto é falácia.

Vamos provar inicialmente que todos os cavalos têm e mesma cor.

Provaremos pelo princípio da indução sobre n.

Tomemos uma propriedade p(n) : em um conjunto com n cavalos, todos têm a mesma cor.

i) para n = 1 temos claramente que p(1) é verdadeiro, pois em um conjunto de um cavalo, todos têm a mesma cor.

ii) suponhamos válido p(n), ou seja, em um conjunto de n cavalos todos têm a mesma cor, seja esse conjunto representando com sendo C_n = {C_1, C_2, C_3,..., C_n}.

iii) basta provarmos que para um conjunto com n + 1 cavalos, todos têm a mesma cor. Ora, seja esse conjunto o conjunto C_{n+1}= {C_1, C_2, C_3,..., C_n, C_{n+1} }. Podemos ter o conjunto $C_{n+1} = C' \cup C''$, no qual C'={C_1, C_2, C_3,..., C_n} e C''={C_2, C_3,..., C_n, C_{n+1}}.

De ii) temos que nos conjuntos C' e C'', cada um têm seus cavalos com a mesma cor, mas por outro lado, temos por exemplo que $C_2 \in C' \cap C''$, que fica claro que os cavalos de C' e C'' têm as mesmas cores, com isso temos que o conjunto C_{n+1}= {C_1, C_2, C_3,..., C_n, C_{n+1} } é um conjunto que têm todos os cavalos com a mesma cor.

Então, pelo princípio da Indução provamos que p(n) é válido para qualquer n nos naturais.

Agora, temos que Marengo, o famoso cavalo de Napoleão, era Branco. Logo, Bucéfalo deveria ser branco. Essa afirmação é verdadeira? Não, pelo mesmo motivo dado aos problema das flores.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho teve com objetivo aprofundar o estudo do princípio da indução matemática, mostrando primeiramente a construção dos números naturais feito de forma mais axiomática via axiomas de Pano e a partir daí estudando uma série de proposições indexadas aos números naturais.

Tomando posse dos fundamentos teóricos que fundamentam o princípio da indução matemática, partimos para uma série de diversos problemas que de uma forma ou outra, poderão está utilizando o princípio da indução para mostrar a sua validade.

E de posse de tais conhecimentos poderemos provar e demonstrar fatos ligados aos naturais que até então são claros e tomados como verdades absolutas em uma sala de aula de ensino básico, mas que não tem nenhum tipo de fundamentação além de uma intuição de que são certos para os primeiros números naturais, ou até mesmo alguns números naturais, mas sem provar a validade para qualquer número natural de forma a não restar dúvidas.

Com isso, nesse trabalho tentei ser o mais claro possível, porém ser perder o refinamento mínimo necessário para que possamos trabalhar no ambiente matemático de forma a não deixar os alicerces matemáticos se perder por apenas uma intuição.

Aqui também apresentei vários problemas, como poderei está destacando a soma dos n primeiros números naturais, onde de uma observação simples conseguimos de forma intuitiva chegar a uma possível fórmula que desse a soma dos n primeiros naturais de uma forma mais fácil, e através do princípio da indução conseguimos provar a sua validade para qualquer outro número natural. Como também apresentei vários outros problemas dos mais simples aos mais sofisticados em diversos contextos matemáticos, se dando destaque também aos últimos problemas, onde temos problemas *curiosos*, como a torre de Hanói e a moeda falsa, onde através do princípio da indução conseguimos os resolver.

Por fim, espero que esse trabalho possa servir para o aprofundamento do ensino da matemática na educação básica.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria elementar dos números**. 3 ed. São Paulo: Nobel, 1985.

COUTINHO, lázaro. **Matemática e mistério em Baker Street**. 1 ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna , 2003.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos Números.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010 (Textos Universitários).

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. 2 ed. Rio de janeiro: SBM, 2010. (Coleção textos Universitários).

______. Indução matemática. 1° ed. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. (Programa de Iniciação Científica).

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 12°ed. Rio de Janeiro: Associação IMPA, 2007 v.1 (Projeto Euclides).

LIMA, Elon Lages. **Artigo: Indução Matemática**. Revista Eureka.(http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/inducao.pdf) Acesso em 01/03/2015;

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções**. 2°ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção Olimpíadas de Matemática).