UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$ e o Teorema da Função Implícita com aplicações

Muhamad Subhi Mahmud Hasan Husein

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis/SC
2014

Muhamad Subhi Mahmud Hasan Husein

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$ e o Teorema da Função Implícita com aplicações

Dissertação de mestrado em Matemática apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, com área de concentração PROFMAT-UFSC associado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis/SC
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Husein, Muhamad Subhi Mahmud Hasan
Diferenciação em espaços de ordem n e o Teorema da Função Implícita com aplicações / Muhamad Subhi Mahmud Hasan Husein ; orientador, Ruy Coimbra Charão - Florianópolis, SC, 2014.
100 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Inclui referências

1. Matemática e Computação Científica. 2. Derivadas, suas propriedades e aplicações. 3. Diferenciação em espaços de ordem n. 4. Teorema da Função Implícita. 5. Teorema da Função Inversa. I. , Ruy Coimbra Charão. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica. III. Título.

Muhamad Subhi Mahmud Hasan Husein

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$ e o Teorema da Função Implícita com aplicações

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do título de "Mestre em Matemática com Área de concentração Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT" e aprovada em sua forma final no programa de Pós-graduação em Matemática e Computação Científica.

Florianópolis-SC, 15 de Julho de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)
Orientador

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz (UFSC)

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC)

Profa. Dra. Lindaura Maria Steffens (UDESC)

Agradecimentos

À Deus, o clemente e misericordioso.

Ao meu pai Subhi Mahmud Muhd Husein (*in memorian*), que dedicou sua vida aos seus filhos e esposa, e me tornou a pessoa que sou hoje. Que a paz, a benção e a misericórdia de Deus estejam com ele.

A minha amada esposa Vanessa, que me apoiou sempre nos momentos mais difíceis e me estimulou durante todo o curso.

Aos meus filhos Mansour, Yasmin e Marwan, que são minha razão de viver e que não pude dar a atenção que eles mereciam em prol dos meus estudos e da conclusão deste trabalho.

Ao meu grande amigo Lindomar Duarte de Souza, que me incentivou e foi meu companheiro de estudos.

Ao meu orientador, Ruy Coimbra Charão que sempre me respeitou, estimulou e teve muita paciência ao esclarecer minhas dúvidas e me orientar, sempre me surpreendendo com sua boa vontade e alegria de viver.

Resumo

Este trabalho contempla noções de diferenciabilidade de aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Definimos a derivada de funções em $\mathbb{R}$, desenvolvendo algumas das propriedades de diferenciação e aplicações das derivadas. Posteriormente, introduzimos diferenciabilidade no $\mathbb{R}^n$ como aplicação linear e não como valor numérico, assim como algumas propriedades de diferenciabilidade de funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$. Também demonstramos o Teorema da Função Implícita e o aplicamos para obter o Teorema da Função Inversa em $\mathbb{R}^n$, além de exemplos de aplicação na resolução de sistemas e inversão de funções. Concluímos fazendo uma introdução ao estudo do limite e da derivada no ensino médio, com aplicação nas funções polinomiais combinado com reta tangente.

Palavras-chave: Derivadas; Diferenciabilidade; Implícita; Inversa.

Abstract

This work focuses on the study of differentiability of vector functions defined in subset of $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^m$. First, we define the derivative of functions in $\mathbb{R}$, developing some proprieties of differentiation and applications. In the sequel, we introduce differentiability in $\mathbb{R}^n$ as a linear application instead of a numerical value, and we give some properties of the differentiability in $\mathbb{R}^n$. We prove the Theorem of Implicit Function and apply it to obtain the Theorem of Inverse Function in $\mathbb{R}^n$ and we use such theorems to obtain applications for the resolution of systems and inversion of functions. We conclude this work giving an introduction to the study of limits and the derivatives to the high school level in the Brazilian scholar system, combined with the study of tangent line to the polynomial functions.

Keywords: Derivate; Differentiability; Implicit; Inverse.

Sumário

Introdução

Este trabalho contempla o estudo de diferenciabilidade de funções definidas em um domínio de $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^m$.

No PROFMAT cursamos a disciplina de Introdução ao Cálculo, na qual foi estudado o conceito de derivada de uma função de uma variável. Assim, o objetivo deste trabalho foi o de estender o conceito de derivada a funções vetoriais de várias variáveis, suas consequências e propriedades, acompanhados dos conceitos sobre derivação em $\mathbb{R}^n$ com $n > 1$. É importante notar a diferença entre o conceito de derivada de uma função em um ponto (como um número) e o conceito e derivada de uma função vetorial de várias variáveis como uma transformação linear. Procuramos ir em direção aos objetivos do PROFMAT para que os professores “busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.”

Outro objetivo é a recomendação do PROFMAT de fazer uma conexão da dissertação com o Ensino Básico. Neste caso, preparar os alunos do 3º ano para a universidade para quando cursarem uma disciplina de introdução ao cálculo não terem mais o “choque” inicial que leva ao insucesso de muitos alunos.

No primeiro capítulo, levamos em conta o conhecimento prévio de limites e definimos a derivada de funções em $\mathbb{R}$, desenvolvendo algumas propriedades de diferenciabilidade, tais como a regra da cadeia, e resolvemos alguns exercícios de aplicação das derivadas. No segundo capítulo, introduzimos diferenciabilidade no $\mathbb{R}^n$ como aplicação linear e não como valor numérico, assim como algumas propriedades de diferenciabilidade em espaços de dimensão finita ($\mathbb{R}^n$). Também calculamos a matriz representação da derivada de uma função vetorial, chamada de matriz Jacobiana. Vimos que o Teorema do Valor Médio é estendido diretamente para funcionais reais (funções sobre um domínio de $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}$), porém para funções $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, somente é válido uma desigualdade, chamada de Desigualdade do Valor Médio, que é demonstrada neste trabalho. Definimos também o gradiente de uma função f em x_0, assim como a derivada direcional na direção de um versor h, e mostramos que ela existe para toda função diferenciável. Por fim, definimos derivadas parciais e vimos que para $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se as derivadas parciais de suas componentes existem em qualquer ponto do conjunto aberto A, e são continuas em A, então f é diferenciável em $A.$ No terceiro capítulo, demonstramos o Teorema de Função Implícita, utilizando a Desigualdade do Valor Médio e o Teorema do Ponto Fixo. Como aplicação, provamos o Teorema da Função Inversa e fazemos aplicação em sistemas envolvendo funções. Ao final do capítulo, trabalhamos com exemplos de aplicações do Teorema da Função Inversa. No Capítulo 4, apresentamos uma introdução ao Conceito de Limites e Derivadas no Ensino Médio como forma de apresentação inicial do cálculo nesse nível de ensino, com definições básicas intuitivas, algumas propriedades e fechando com exemplos e aplicações.

Capítulo 1

Derivada de uma função real

Neste capítulo tratamos do conceito de derivação de uma função real de variável real, suas propriedades e interpretações geométrica e física. A motivação vem do conceito de taxa de variação. Naturalmente, para não estender demais o trabalho, assumimos bem conhecido o conceito de limite de uma função e suas propriedades.

1.1 O conceito de derivada

Apesar de conhecido, faz-se necessário introduzir nesta seção uma breve lembrança do conceito de limite de uma função real de variável real, objetivando uma melhor compreensão do conceito de derivada. Para isso consideramos uma função

$$f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

com (a,b) um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, x_0 um ponto de (a,b) e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Diz-se que o limite de f, quando x tende a x_0, é um certo número L, se para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta \text{ com } x \in (a,b).$$

Quando isso ocorre se escreve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Agora, vamos considerar o conceito de taxa média de variação e o conceito da derivada de uma função num ponto.

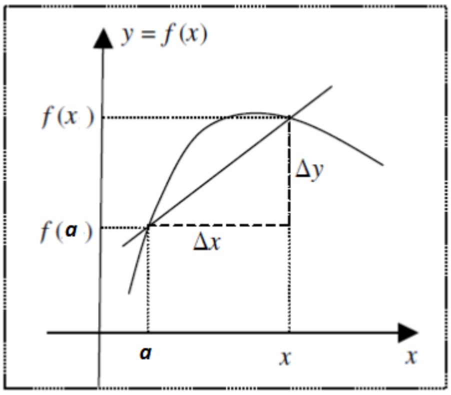
Definição 1. (Taxa Média de Variação)

Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função, A um intervalo real e $a \in A$. Quando a variável independente da função f passa do ponto $a \in A$ ao ponto $x \in A$, sofrendo um acréscimo (ou incremento) $\Delta x = x - a$ (que pode ser positivo ou negativo), os correspondentes valores dados pela função passam de $f(a)$ para $f(x) = f(a + \Delta x)$, sofrendo também um incremento $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$.

A *Taxa Média de Variação da função f, no intervalo* $[a, a + \Delta x]$, se $\Delta x > 0$ ou $[a + \Delta x, a]$, se $\Delta x < 0$, é o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

com $x = a + \Delta x$.



É muito importante conhecer a taxa de variação em intervalos muito pequenos, isto é, Δx bem próximo de zero. Na verdade, mais importante ainda é saber o que ocorre com a taxa de variação média quando o tamanho Δx do intervalo tende a zero. Isso leva ao conceito de taxa de variação instantânea.

Assim, o limite da taxa média de variação, quando $\Delta x \to 0$, é chamado de *Taxa de Variação Instantânea* de f em relação a x, em $x = a$. Ou seja, a taxa de variação instantânea de f em a, é dada por

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

A taxa de variação instantânea é simplesmente chamada de taxa de variação.

Definição 2. (Derivada de uma função)

Se f é uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0, então a ***derivada*** *de f em x_0 , denotada por $f'(x_0)$, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se esse limite existir.

Quando existe o limite acima, então existe $f'(x_0)$ e dizemos que f é derivável no ponto x_0.

Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto A quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in A$.

Comparando as definições anteriores, notamos que a Taxa de Variação Instantânea de f em x_0 é igual à derivada de *f* no ponto x_0.

A derivada de f em um ponto é um número, isto é, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Entretanto, se f é derivável em um subconjunto B de seu intervalo de definição A, pode-se considerar a função derivada de f representada por f' que é definida em cada ponto x de B por $f'(x)$.

Desse modo, sendo $f: A \to \mathbb{R}$, então:

$$f': B \to \mathbb{R}$$

com B algum subconjunto de A que pode, dependendo de f, ser igual a A.

Exemplos:

1) Seja $f(x) = x^2$ com domínio $A = \mathbb{R}$. Vamos calcular a derivada de f no ponto x_0. Temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{x_0}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - {x_0}^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, o limite acima existe, e, portanto temos que

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Então f' é a função dada por $f'(x) = 2x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Neste exemplo, $A = B$, isto é, para essa função a função derivada f' mantém o domínio de f.

2) Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $A = [0, +\infty)$.

Calculando sua derivada, temos para $x > 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} . \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x. \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\,\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x. \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\,\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\,)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Logo, $f'(x)$ existe para todo $x > 0$ e a derivada que é dada por $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, tem domínio $B = (0, +\infty)$. Observe que para essa função, o domínio de f não se manteve para a derivada, pois ao substituirmos x por 0, teremos a forma $\frac{1}{0}$ que não está definida nos reais.

Observação:

A derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada por diversas notações:

$f'(x_0)$ (de Lagrange),

$Df(x_0)$ (de Cauchy),

$\frac{df(x_0)}{dx}$ (de Leibnitz),

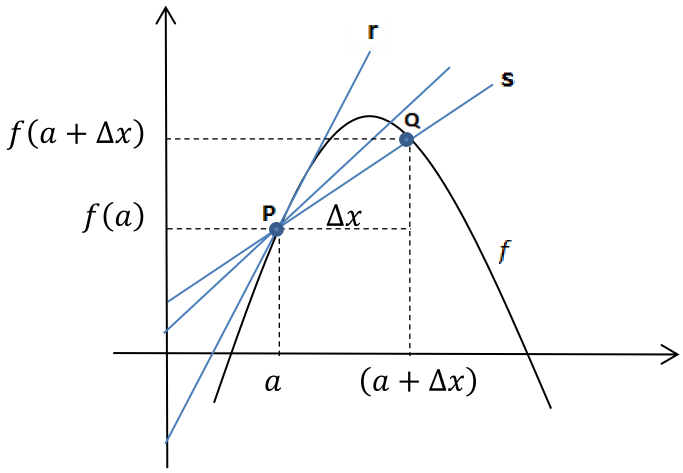
$\dot{f}(x_0)$ (de Newton).

Outras notações bastante utilizadas são y' e $\frac{dy}{dx}$.

1.2 Interpretação Geométrica da Derivada

Dada uma curva plana que represente o gráfico de uma função f, se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, dessa curva, então a equação da reta é dada por $y - f(a) = m.(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta dado pela taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação.

Consideremos outro ponto Q arbitrário sobre a curva, cujas coordenadas são $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.



Façamos variar o coeficiente angular da reta secante s, fazendo Q percorrer o gráfico de f na direção de P. Isso é feito tomando Δx cada vez menor. Note que quando Q está próximo de P, o coeficiente angular da reta secante m_s parece que se aproxima do coeficiente angular da reta tangente m_r, ou seja, parece que m_s tem como limite m_r (m_r existe, pois estamos supondo que existe a reta tangente) quando Q tende para P.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$, e sabendo-se que a abscissa de P é a, então, se $Q \rightarrow P$, temos que $\Delta x \rightarrow 0$, que é equivalente a $x \rightarrow a$.

Sabemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Assim:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é o coeficiente angular da **reta tangente $\boldsymbol{r}$**. Também sabemos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Portanto, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

Nota importante:

A interpretação geométrica da derivada nos fornece uma consequência imediata: uma função só é derivável (ou diferenciável) em um ponto de seu domínio, se existir uma reta tangente ao seu gráfico neste ponto. Para que fique mais explícito, podemos dizer que o gráfico da função neste ponto não terá comportamento pontiagudo. Com essa conclusão, podemos afirmar que o gráfico de uma função diferenciável é uma “curva suave”. E, caso a função tenha “ponta”, notamos que por este ponto passam infinitas retas, logo a função **não** é diferenciável neste ponto.

Exemplo:

Calcular a reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(4, 2)$. Sabemos do exemplo 2 que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Então

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a reta tangente dada por $y = mx + b$ tem m = ¼. E para calcular *b* substituímos o ponto (4, 2) na equação da reta:

$$2 = \frac{1}{4}.4 + b.$$

O que nos fornece *b* = *1*. Logo, a reta tangente é dada por $y = \frac{1}{4}x + 1$.

1.3 Continuidade e Derivabilidade

Proposição 1:

Se uma função é derivável em um ponto a, então ela é contínua em a.

Demonstração:

Para todo x que pertence ao domínio da função, e $x \neq a$, a seguinte identidade pode ser escrita:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.(x - a).$$

Fazendo o limite quando $x \to a$, e como a função f é, por hipótese, derivável em a, e como o $lim_{x \to a}\ (x - a) = 0$, teremos:

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a)\right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.\lim_{x \to a} (x - a) = f'(a).0 = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Portanto, f é contínua em a.

Nota importante: Podemos observar que a recíproca da *Proposição 1* não é verdadeira, pois uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável nesse ponto. Para ver isso, consideramos o exemplo da função $f(x) = |x|$, que é contínua no ponto $x = 0$, mas não é derivável nesse ponto. De fato, temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

Portanto, $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$.

1.4 Regras e Propriedades de Derivação

1. Derivada da função constante

Se f é a função constante definida por $f(x) = b$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Demonstração:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{b - b}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

isto é,

$$f'(a) = 0.$$

2. Derivada da potência

Se $f(x) = x^n$, onde *n* é inteiro positivo, então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}.x^{n-1}.\Delta x + \binom{n}{2}.x^{n-2}.\Delta x^2 + \cdots + \binom{n}{n}.\Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\binom{n}{1}.x^{n-1} + \binom{n}{2}.x^{n-2}.\Delta x + \cdots + \binom{n}{n}.\Delta x^{n-1}\right]$$

$$= \binom{n}{1}.x^{n-1}$$

ou seja,

$$f'(x) = n.x^{n-1}.$$

3. Se f é diferenciável em x e $g(x) = c.f(x)$, então $g'(x) = c.f'(x)$.

Demonstração:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c.f(x+\Delta x) - c.f(x)}{\Delta x} = c.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c.f'(x).$$

4. Derivada da soma

Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração:

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\} + \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

5. Derivada do Produto

Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

Demonstração:

$$\frac{(f.g)(x+\Delta x) - (f.g)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x).g(x) + f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x).[g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x).[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$= f(x+\Delta x).\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x).\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Tomando o limite com $\Delta x \to 0$ em ambos os lados, teremos:

$$(f.g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f.g)(x+\Delta x) - (f.g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x).\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x).\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= f(x).g'(x) + g(x).f'(x).$$

pois f e g são deriváveis por hipótese e f é contínua (Proposição 1).

Logo, o produto $f.g$ é diferenciável e

$$(f.g)' = f.g' + g.f'$$

6. Derivada do Quociente

Se f e g são diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração:

Primeiro notamos que:

$$\frac{\frac{1}{g}(x+\Delta x) - \frac{1}{g}(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x).g(x)}}{\Delta x}$$

$$= -\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.\frac{1}{g(x+\Delta x).g(x)}.$$

Como g é diferenciável, portanto contínua e $g(x) \neq 0$, resulta que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{g}(x+\Delta x) - \frac{1}{g}(x)}{\Delta x} = -g'(x).\frac{1}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Isso quer dizer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Agora, é suficiente aplicar a fórmula acima e a fórmula da derivada do produto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f.\frac{1}{g}\right)' = f'.\frac{1}{g} + f.\left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$= f'.\frac{1}{g} + f.\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{f'.g - f.g'}{g^2}.$$

7. Derivada da função composta (Regra da Cadeia)

Considere f e g funções diferenciáveis, onde $f = f(x)$ e $g = g(x)$, tal que a composição $f_o g$ esteja definida no domínio de g, onde $y = f(g(x))$.

Então,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x)$$

para x no domínio de g.

Demonstração:

Para $\Delta x \neq 0$ temos que

$$\frac{(f_o g)(x + \Delta x) - (f_o g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(f_o g)(x + \Delta x) - (f_o g)(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} . \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} . \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} .$$

Tomando $u = g(x)$ e $u + l = g(x + \Delta x)$, isto é, $l = g(x + \Delta x) - g(x)$, temos:

$$\frac{(f_o g)(x + \Delta x) - (f_o g)(x)}{\Delta x} = \frac{f(u + l) - f(u)}{l} . \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Note que $l \to 0$ se e somente se $\Delta x \to 0$ pois g é contínua já que, por hipótese, g é diferenciável. Passando o limite para $\Delta x \to 0$, da hipótese de que f e g são diferenciáveis, resulta que

$$(f_o g)'(x) = f'(u).g'(x)$$

ou seja,

$$(f_o g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x).$$

8. Derivada de função polinomial

Seja $f(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ ... \ + \ a_1.x + a_0$.

Usando as propriedades 2, 3 e 4 apresentadas anteriormente, temos que

$$f'(x) = n.a_n.x^{n-1} + \big(n-1\big).a_{n-1}.x^{n-2} + \ ... \ + \ a_1.$$

9. Derivada da função racional $\boldsymbol{\frac{1}{x^n}}$

Seja $f(x) = \frac{1}{x^n}$, onde n é inteiro e positivo.

Usando a propriedade 6 de derivação do quociente, temos que, para $x \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{0.x^n - 1.n.x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -\frac{n.x^{n-1}}{x^{2n}} = -n.x^{n-1-2n}$$

$$= -n.x^{-n-1}.$$

Assim, se $f(x) = x^{-n}, n \geq 1$ inteiro, então

$f'(x) = -n.x^{-n-1}$, para $x \neq 0$.

10. Derivadas das funções trigonométricas

São dadas por:

(i) $f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = \cos\ x$

(ii) $f(x) = \cos\ x \rightarrow f(x) = -sen\ x$

(iii) $f(x) = tg\ x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

(iv) $f(x) = cotg\ x \rightarrow f'(x) = -cosec^2 x$

(v) $f(x) = \sec\ x \rightarrow\ f'(x) = \sec x. tg\ x$

(vi) $f(x) = cosec\ x \rightarrow f'(x) = -cosec\ x. cotg\ x$.

Essas derivadas são fáceis de comprovar.

Temos

$$\frac{sen(x + \Delta x) - sen\ x}{\Delta x}$$

$$= \frac{sen\ x. \cos \Delta x + sen\ \Delta x. \cos x - sen\ x}{\Delta x}$$

$$= \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x}. \cos x + \frac{cos\ \Delta x - 1}{\Delta x}. sen\, x$$

Como temos os limites fundamentais

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ e } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\ \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$$

obtemos:

$$\frac{d}{dx}(sen\ x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x + \Delta x) - sen\ x}{\Delta x} = cos\, x$$

para todo x real.

Analogamente se mostra que

$$\frac{d}{dx}(cos\, x) = -sen\, x.$$

As outras derivadas trigonométricas são obtidas usando a regra 6 de derivação de quociente.

11. Derivada de função exponencial

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\, ln\, a, a > 0\ e\ a \neq 1$$

Em particular

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, x \in \mathbb{R}\,.$$

Demonstração:

Dado o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}\,.$$

Sabemos que do limite fundamental

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = ln\, a\ \text{, obtemos:}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.\, a^x = a^x.\, ln\, a$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\, ln\, a.$$

12. Derivada da função inversa

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ injetiva, sendo I intervalo aberto de $\mathbb{R}$, e diferenciável com $f'(x) \neq 0$ e $f'(x)$ contínua em I. Então sabemos que existe a função inversa

$f^{-1}: Im\, f \to I$, de modo que $(fof^{-1})(x) = x$ para $x \in Im\, f$ e $(f^{-1}of)(x) = x$, para $x \in I$. Além disso f^{-1} existe e é contínua.

Usando a regra da cadeia se tem que

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(f^{-1}of)(x) = (f^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x)$$

Logo,

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}$$

com $x \in I$. Ou, fazendo $y = f(x)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

com $x = (f^{-1})(y)$, $y \in Im\, f$.

Assim,

$$\frac{d}{dy}(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

com $y \in Im\, f = dom\, f^{-1}$.

13. Derivada da função logarítmica

Seja $f(x) = log_a\, x$, $a > 0, a \neq 1$ e $x > 0$. Vamos mostrar que

$$f'(x) = \frac{1}{x.\, ln\, a}, x > 0.$$

Sabemos que

$$log_a\, x : (0, \infty) \to (-\infty, +\infty)$$

é a inversa da função exponencial

$$a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty),$$

cuja derivada é $a^x.\, ln\, a$.

Logo, pela regra de derivação da função inversa, temos, para $y = a^x$ que:

$$\frac{d}{dy}(\log_a y) = \frac{1}{y. \ln a}\ , y > 0,$$

ou ainda

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x. \ln a}\ , x > 0.$$

Em particular

$$\frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{1}{x}$$

com e = 2,718... a base do logaritmo neperiano e $x > 0$.

A fórmula de derivação da função inversa pode ser usada para calcular as derivadas das funções trigonométricas inversas.

Por exemplo, é fácil perceber que:

$$\frac{d}{dx}(arctg\, x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ , } \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Sendo

$$arc\, tg: (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

a inversa da função

$$tg: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty) \text{ .}$$

14. Vale a propriedade

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(x^{\propto}) = \propto . x^{\propto - 1}} \text{ ,}$$

com $\propto \in \mathbb{R}$ fixado**.**

De fato, usando (11) e (7) temos, aplicando propriedades dos logaritmos, que:

$$\frac{d}{dx}(x^{\propto}) = \frac{d}{dx}\left(e^{ln\, x^{\propto}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\propto . ln\, x}\right) =$$

$$= e^{\propto . \ln x} . \frac{d}{dx}(\propto . \ln x) = e^{\propto . \ln x} . \frac{\propto}{x}$$

$$= e^{ln\, x^{\propto}} . \frac{\propto}{x} = \frac{\propto . x^{\propto}}{x}$$

$$= \propto . x^{\propto - 1} \text{ , } x \geq 0 \text{ .}$$

Exemplos

Vamos calcular algumas derivadas aplicando algumas fórmulas de derivação e propriedades apresentadas.

1) $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^3}$

$f'(x) = 4x^{4-1} - 3.2x^{3-1}$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2.$

2) $\boldsymbol{g(x) = (x^3 - 2)^6}$

$g'(x) = 6.(x^3 - 2)^{6-1}.(x^3 - 2)'$

$g'(x) = 6.(x^3 - 2)^5.(3x^{3-1})$ (usamos a regra da cadeia)

$g'(x) = 6.(x^3 - 2)^5.(3x^2)$

$g'(x) = 18x^2.(x^3 - 2)^5.$

3) $\boldsymbol{f(x) = x^3.(sen\ x + x^2)^4}$

$f'(x) = 3x^2.(sen\ x + x^2)^4 + x^3.4.(sen\ x + x^2)^3.(sen\ x + x^2)'$

onde usamos novamente a regra da cadeia.

Assim,

$$f'(x) = 3x^2(sen\ x + x^2)^4 + 4x^3(sen\ x + x^2)^3.(cos\ x + 2x)\ .$$

Exemplos elementares de aplicações das derivadas

1) A posição de um corpo no instante t é dada por: $\boldsymbol{S(t) = 3t^3 + 4t^2 - t + 3}$, onde t é dado em segundos e S em metros. Determinar a velocidade e a aceleração desse corpo no instante t = 1s. Sabe-se que a velocidade é a taxa de variação do espaço percorrido em função do tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade em função do tempo.

Solução:

Pela definição sabemos que a velocidade é a taxa e variação do espaço em função do tempo, ou seja, é a derivada de S(t). Logo,

$$v(t) = S'(t) = 3.3t^{3-1} + 2.4t^{2-1} - 1.t^{1-1} + 0$$

$$v(t) = 9t^2 + 8t - 1$$

$$v(1) = 9(1)^2 + 8(1) - 1$$

$$\boldsymbol{v(1) = 16\ m/s.}$$

Também sabemos que a aceleração é a taxa de variação da velocidade em função do tempo, ou seja, a derivada de v(t). Logo,

$$a(t) = v'(t) = 2.9t^{2-1} + 1.8t^{1-1} - 0$$

$$a(t) = 18t + 8$$

$$a(1) = 18.1 + 8$$

$$\boldsymbol{a(1) = 26\, m/s^2}.$$

2) Se $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $\boldsymbol{P(2,4)}$.

Solução: Sabemos que a inclinação da reta tangente é a derivada de f em $x = 2$. Assim:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 3.(2)^2 = \mathbf{12} = \boldsymbol{m}\ (coeficiente\ angular).$$

A equação da reta tangente é $y - y_0 = m.(x - x_0)$, ou seja,

$$y - 4 = 12.(x - 2)$$

$$y - 4 = 12x - 24$$

$$y = 12x + 4 - 24$$

$$\boldsymbol{y = 12x - 20}$$

3) Um projétil é lançado formando certo ângulo θ com a horizontal. Sabendo que

$$y = y_0 + (v_{0.}sen\ \theta).t + \frac{g.t^2}{2}$$

e

$$x = (v_{0.}cos\ \theta).t$$

Sendo y e x altura e distância, respectivamente, t o tempo, v_0 a velocidade inicial, y_0 a altura inicial e g a aceleração da gravidade, calcule qual o ângulo que tornará a altura máxima.

Solução:

Para encontrarmos o ângulo que tornará a altura máxima, apenas derivamos a função da altura $y = f(\theta) = y_0 + (v_{0.} sen\,\theta). t + \frac{g.t^2}{2}$, em relação à variável θ, ficando com $f'(\theta) = v_0 . t. cos\,\theta$ (consideramos v_0 e t como constantes).

Fazendo $f'(\theta) = v_0 . t. cos\,\theta = 0 \rightarrow cos\,\theta = 0$, onde concluímos que o único ângulo que torna o cosseno igual a zero é o de 90º, ou seja, o ângulo de lançamento, para que a altura seja máxima, deve ser de 90º.

Capítulo 2

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$

2.1 A Diferencial como Aplicação Linear

Definição 2.1 *Uma aplicação T:* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é linear se e somente se possui a seguinte propriedade:*

$$T(px + qy) = pT(x) + qT(y)$$

quaisquer que sejam p *e* $q \in \mathbb{R}$ *e* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

Definição 2.2 *Dizemos que uma aplicação* $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é diferenciável em* x_0 *pertencente ao interior de* A*, se existe uma aplicação linear* $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, denotada por* $Df(x_0)$*, e que será chamada a derivada ou diferencial de* f *em* x_0 *, tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0.$$

Note que $Df(x_0)(x - x_0)$ é o valor da aplicação linear $Df(x_0)$ aplicada no vetor $(x - x_0)$ pertencente a $\mathbb{R}^n$, e por consequência, concluímos que $Df(x_0)(x - x_0)$ pertence a $\mathbb{R}^m$. Escreve-se frequentemente $Df(x_0)h$ em vez de $Df(x_0)(h)$. Também podemos escrever $f'(x_0)$ ao invés de $Df(x_0)$. Resumindo, $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, onde

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m / \, T \text{ é } linear\} ,$$

isto é, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Definição 2.3 *Uma aplicação linear é dita ser* ***limitada*** *se existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\|Tx\|_{\mathbb{R}^m} \leq C.\|x\|_{\mathbb{R}^n} , \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $Tx = T(x)$.

Observação:

$\|x\|_{\mathbb{R}^n}$ = norma de $x \in \mathbb{R}^n$, dada por $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Lema 2.1 *Uma aplicação* $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear é limitada se e somente se é contínua.*

Demonstração:

Se T *é linear e limitada, então por definição, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq C\|x-y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

Isso diz que f *é Lipschitz e, portanto contínua.*

Esse lema diz que a aplicação ||.|| : $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to [0, \infty)$ dada por

$$\|T\| = \inf \{\, C \,/\, \|Tx\|_{\mathbb{R}^m} \leq C\|x\|_{\mathbb{R}^n} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \}$$

está bem definida.

Essa aplicação é uma norma sobre $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

A prova da recíproca é bem conhecida, não havendo necessidade de demonstração.

Observação:

Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A aberto, então a derivada de f em $x_0 \in A$, é a aplicação linear $T = f'(x_0) = Df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(h) = m(x_0).h$, para h pertencente a $\mathbb{R}$, onde

$$m(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \ .$$

Assim, a derivada do Cálculo 1 pode ser vista como Transformação Linear.

Exemplo:

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^3$.

Se x_0 pertence a (a, b) sabemos (do capítulo 1) que $m(x_0) = 3.{x_0}^2$. Então,

$$f'(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \to m(x_0)h$$

onde $m(x_0)h = 3.{x_0}^2.h$, é uma aplicação linear em h.

É fácil ver que $f'(x_0)$ é limitada e que

$$\|f'(x_0)\|_{L(\mathbb{R},\mathbb{R})} = |m(x_0)|.$$

Se $x_0 = \frac{1}{2}$, então

$$Df\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right): \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h \to m\left(\frac{1}{2}\right)h = \frac{3}{4}h.$$

Podemos verificar diretamente que a definição de derivada é satisfeita.

Verificação:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\left|x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\right|}{\left|x - \frac{1}{2}\right|}$$

$$= \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\left|x^3 - \frac{1}{8} - \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}\right|}{\left|x - \frac{1}{2}\right|} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\left|x^3 - \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}\right|}{\left|x - \frac{1}{2}\right|}$$

$$= \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\left|\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right|}{\left|x - \frac{1}{2}\right|} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\left|x - \frac{1}{2}\right|.\left|x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right|}{\left|x - \frac{1}{2}\right|}$$

$$= \lim_{x\to \frac{1}{2}} \left|x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| = 0.$$

Note que na definição nada foi dito sobre o conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, mas temos:

Teorema 2.1 *Se A é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x_0 \in A$, então $Df(x_0)$ está unicamente determinada.*

Demonstração:

Suponhamos que existam T_1 e $T_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e que satisfaçam a definição de derivada de f em x_0.

Seja x pertencente a $\mathbb{R}^n$ com $\|x\| = 1$ e $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Tem-se, da definição de derivada, que $(x_0 + tx) \in A$ para t pequeno pois A é aberto.

$$0 \leq \|T_1x - T_2x\| = \lim_{t\to 0} \|T_1x - T_2x\| = \lim_{t\to 0} \left\|\frac{t(T_1x - T_2x)}{t}\right\|$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\|\frac{tT_1x - tT_2x}{t}\right\| = \lim_{t\to 0} \left\|\frac{T_1(tx) - T_2(tx)}{t}\right\| = \lim_{t\to 0} \frac{\|T_1(tx) - T_2(tx)\|}{\|t\|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - T_2(tx) - [f(x_0 + tx) - f(x_0) - T_1(tx)]\|}{|t|}$$

$$\leq \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - T_2(tx)\|}{|t|} + \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - T_1(tx)\|}{|t|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - T_2(tx)\|}{\|tx\|} + \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - T_1(tx)\|}{\|tx\|} = 0$$

Assim, $\|T_1x - T_2x\| = 0$.

Portanto $T_1x = T_2x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| = 1$.

Agora, seja $z \in \mathbb{R}^n$, com $z \neq 0$. Então, como $x = \frac{z}{\|z\|}$ é tal que $\|x\| = 1$, resulta

$$T_1\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = T_2\left(\frac{z}{\|z\|}\right).$$

Como T_1 e T_2 são lineares,

$$T_1\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = T_2\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{\|z\|}T_1(z) = \frac{1}{\|z\|}T_2(z) \rightarrow$$

$$T_1(z) = T_2(z)$$

para todo z pertencente a $\mathbb{R}^n$, $z \neq 0$.

Se $z = 0$, pela linearidade

$$T_1(0) = 0 = T_2(0).$$

Logo

$$T_1 = T_2.$$

Assim, verificamos que, $Df(x_0)$ é unicamente determinada, se A for aberto.

Exemplos:

1) Seja $A = \{x_0\}$. Assim, A é constituído de um único ponto e, portanto não é aberto.

Vejamos que qualquer $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ satisfará a definição, pois dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta > 0$ qualquer, temos

$$\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\| = 0$$

para todo x que pertence a $B(x_0, \delta) \cap A$, onde $B(a, r)$ é a bola aberta de centro a e raio r, já que $B(x_0, \delta) \cap A = \{x_0\}$.

Portanto, qualquer T linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, atende a definição.

Isso contradiz o Teorema 2.1? A resposta é não, porque aqui *A* é um conjunto fechado.

2) Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$.

Sendo $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = 0$, para todo z pertencente a A, temos que

$$\begin{aligned} T_1: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ h &\to T_1 h = 0 \end{aligned}$$

e

$$T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$h \quad \to T_2 h = h_2\,, \qquad\qquad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

são aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e atendem a definição de diferenciação no ponto $(0,0) \in A$.

De fato, seja $(h_1, h_2) \in A$. Temos, usando as definições de f e T_1 que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left\|f\big((0,0)+h\big) - f(0,0) - T_1 h\right\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(h_1,h_2) - f(0,0) - T_1 h\|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|\, T_1 h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|0\|}{\|h\|} = 0.$$

Isso quer dizer que T_1 atende a definição de $Df(0,0)$.

Também para $h \in A$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left\|f\big((0,0)+h\big) - f(0,0) - T_2 h\right\|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|f(h_1,h_2) - f(0,0) - T_2 h\|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|\, T_2 h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|h_2\|}{\|h\|} = 0.$$

pois para $h \in A$ tem-se $h_2 = 0$.

Portanto, pela definição de derivada, T_1 e T_2 são derivadas de f no ponto $(0,0)$, com $T_1 \neq T_2$.

De novo, isso não contradiz o Teorema 2.1, pois aqui o domínio *A* de f não é aberto.

2.2 Matriz Representação

Em adição a definição de $Df(x_0)$, existe uma maneira simples de diferenciar uma função de várias variáveis $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Podemos escrever f em componentes, do seguinte modo:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big),$$

e calculamos as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$ onde a notação $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ representa a derivada comum de f_i em relação a sua respectiva variável x_j, sendo as outras variáveis restantes $x_{1,} x_2$, ..., $x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ consideradas como constantes.

A definição de derivada parcial é a seguinte:

Definição 2.4 (Derivada Parcial):

A derivada parcial de $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *em relação a* x_j, *que é* denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ para $x \in A$, *é dada pelo seguinte limite, quando esse limite existir:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f\big(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n\big) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \right).$$

Teorema 2.2 *Se* $B \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto aberto e* $f: B \to \mathbb{R}^m$ *é diferenciável em* B, *então as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad x \in B$$

existem, e a matriz da aplicação linear $Df(x)$ *nas respectivas bases canônicas do* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *é dada por:*

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Esta matriz é chamada *Matriz Jacobiana de* f, representada por $J\big(Df(x)\big)$ ou *de Matriz Representação de* $Df(x)$.

Demonstração:

Pela definição de matriz A de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, tem-se que um elemento genérico de A: (a_{ij}) é dado pelo produto interno

$$a_{ij} = \big(\bar{e}_i\,, L(e_j)\big),$$

onde,

$\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{m}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$,

$\{e_j\}_{j=1}^{n}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Justificativa: Seja $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.

Seja x pertencente a $\mathbb{R}^n$, assim, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, donde $L(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j)$, pois L é linear.

Como cada $L(e_j)$ pertencente a $\mathbb{R}^m$ resulta que

(*) $L\big(e_j\big) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{e}_i = \big(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\big)$.

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j L\big(e_j\big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\right) = (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j}\,, \dots, \sum_{j=1}^{n} x_j a_{mj})$$

Daí, se A é a matriz cuja j-ésima coluna é $L(e_j)$, isto é, *A* = $(L(e_1) \dots L(e_n))$, então

$$Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L(x).$$

Note então de (*) que $a_{ij} = \big(\bar{e}_i\,, L(e_j)\big)$.

Agora seja $y = x + he_j$, h pertencente a $\mathbb{R}$. Então

$$\frac{\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\|}{||y - x||}$$

$$= \frac{\|f(y) - f(x) - Df(x)(he_j)\|}{||he_j||}$$

$$= \frac{\|f(y) - f(x) - Df(x)(he_j)\|}{|h|}.$$

Observe que $Df(x)e_j$ é a j-ésima coluna da matriz representação da transformação linear $Df(x)$. Na verdade, as j-ésimas colunas são as componentes de $Df(x)$ na base canônica $(\bar{e}_i)$ de $\mathbb{R}^m$.

Note que se

$$y = (x + he_j) = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0)$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

então para $x \in A$ e $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$ ($\delta > 0$ tal que $x + he_j \in A$, A aberto), tem-se

$$\frac{\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\|}{||y - x||}$$

$$= \frac{\|f(x_1, \dots, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) - hDf(x)(e_j)\|}{|h|}.$$

Sendo f diferenciável, tem-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_1, \dots, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) - hDf(x)(e_j)\|}{|h|} = 0.$$

Daí segue que cada componente no limite acima também tende a zero, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f_i(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_n) - h\bar{e}_i . Df(x)(e_j)\|}{|h|} = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Logo, por definição, conclui-se que as derivadas parciais existem e

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \bar{e}_i . Df(x)(e_j) = a_{ij}.$$

Com isso concluímos a demonstração do teorema.

Quando $m = 1$, sendo f uma função real de n variáveis, então a derivada de f em $x \in A$ é representada pela matriz linha

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Isto é, para $m = 1$:

$$Df(x)a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)a_j\,, \quad \text{para } a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

Veja que $Df(x)$ é uma aplicação linear para cada x pertencente a A. Note também que a definição de $Df(x)$ independe da base usada. Se trocarmos as bases canônicas por outras bases, os elementos da matriz representação de $Df(x)$ também mudarão. Examinando a matriz da transformação linear, veremos que as colunas da matriz referente às novas bases serão dadas por $Df(x)$ aplicada na nova base do $\mathbb{R}^n$, com o vetor imagem sendo expressado na nova base do $\mathbb{R}^m$.

Exemplo:

Seja

$$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to \left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.

Na base canônica do $\mathbb{R}^2$ temos:

$$Df(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.h$$

$$= \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(yh_1 + xh_2, \frac{h_1}{y} - \frac{xh_2}{y^2}\right).$$

2.3 Continuidade de Aplicações Diferenciáveis

Proposição: Seja $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ onde A é um conjunto aberto. Se f é diferenciável em x_0 pertencente a A então f é contínua em x_0.

Demonstração:

Seja $x_0 \in A$, então como A é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $x_0 + h \in A$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $\|h\| < \delta$. Daí segue-se que:

$$\begin{aligned}\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| &= \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h + Df(x_0)h\| \\ &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| + \|Df(x_0)h\| \\ &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| + C\|h\|\end{aligned}$$

onde $C = \|Df(x_0)\|$.

Pela diferenciabilidade de f em x_0, dado $\varepsilon_0 > 0$, seja $\delta_0 > 0$ tal que $0 < \delta_0 < \delta$ e

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|}{\|h\|} \leq \varepsilon_0$$

se $\|h\| < \delta_0$.

Assim,

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| \leq \varepsilon_0\|h\|.$$

Somando $C\|h\|$ em ambos os lados da desigualdade temos

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| + C\|h\| \leq (\varepsilon_0 + C)\|h\|.$$

Mas sabemos que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| + C\|h\|.$$

Portanto existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq (\varepsilon_0 + C)\|h\|$$

para todo h, com $\|h\| < \delta_0$.

Logo, f é contínua em x_0.

Observação: Se $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear então L é diferenciável em qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $L'(x_0) = DL(x_0) = L$, isto é, $L'(x_0)$ é a mesma para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

De fato, veja que dado $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica

$$\|L(x) - L(x_0) - L(x - x_0)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|.$$

Podemos notar que

$$\begin{aligned} \|L(x) - L(x_0) - L(x - x_0)\| &= \|L(x) - L(x_0) - L(x) + L(x_0)\| \\ &= 0 \leq \varepsilon \|x - x_0\|, \end{aligned}$$

Para $\|x - x_0\| < \delta$ com $\delta > 0$ arbitrário. Assim $L'(x_0) = L$ satisfaz a definição de derivada da aplicação linear L.

Exemplo:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to ax.$$

f é uma aplicação linear, portanto sua derivada em x_0, $f'(x_0)$ é dada por

$$f'(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \to f'(x_0)h = ah.$$

Nota Importante:

Em dimensão finita, se f *é* linear então f *é* contínua. Por esse motivo, os livros sobre diferenciabilidade de uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ definem a diferencial $D(f(x))$ como sendo uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. De fato, a continuidade sai de graça. Quando se está em dimensão infinita isso não ocorre. Portanto, nesse caso, é necessário pedir na definição de diferencial a continuidade da aplicação $D(f(x))$.

2.4 Regras de Diferenciabilidade

a) Se $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aberto, são diferenciáveis em $x_0 \in A$ então $f + g$ é diferenciável e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Demonstração:

Como f e g são diferenciáveis em x_0, então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0) - [f'(x_0) + g'(x_0)](x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

$$\leq \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \lim_{x \to x_0} \frac{\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

$$= 0$$

Portanto $f + g$ é diferenciável em x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

b) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $x_0 \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αf é diferenciável em x_0 e $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

Demonstração:

Como f é diferenciável em x_0, então

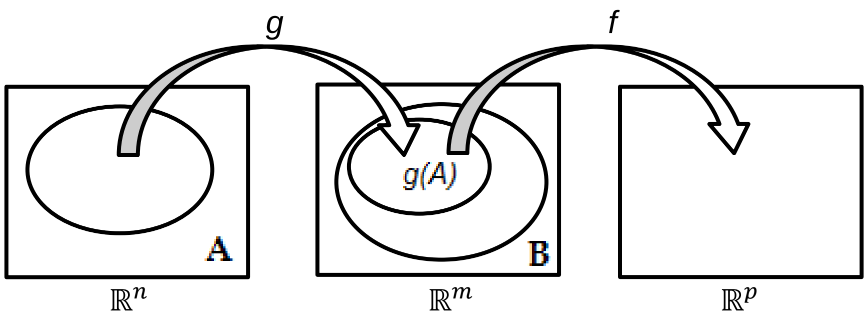
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\alpha f(x) - \alpha f(x_0) - \alpha f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\|\alpha(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|}$$

$$= |\alpha| \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Portanto αf é diferenciável em x_0 e $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

Teorema 2.3 *Sejam* $g: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciável em* $x_0 \in A$ e $f: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciável em $g(x_0) \in B$, *sendo A e B abertos e* $g(A) \subset B$.



*Então, a **função composta**:*

$$F = f_o\, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$x \to F(x) = f(g(x))$$

é diferenciável em x_0 *e*

$$F'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big).\, g'(x_0).$$

Observação:

Lembrar que

$$F'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$g'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f'(x_0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

são aplicações lineares.

Demonstração:

Sejam:

$$\gamma(h) = g(x_0 + h) - g(x_0) - g'(x_0)h$$

e

$$\varphi(h) = f(g(x_0) + h) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))h.$$

Como g e f são diferenciáveis em x_0 e g(x_0) respectivamente, temos que

$$\frac{\|\gamma(h)\|}{\|h\|} \to 0 \qquad quando\ h \to 0$$
$$\frac{\|\varphi(k)\|}{\|k\|} \to 0 \qquad quando\ k \to 0.$$

Calculando temos

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - f'(g(x_0)).\, g'(x_0)h$$

$$= f\big(g(x_0 + h)\big) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)).\, g'(x_0)h$$

$$= f[g(x_0) + h - \gamma(h) + \gamma(h)] - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)).\, g'(x_0)h$$

$$= f[g(x_0) + h) - g(x_0 + h) + \ g(x_0) + g'(x_0)h + \gamma(h)] - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)).\, g'(x_0)h$$

$$= f[g(x_0) + g'(x_0)h + \gamma(h)] - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)).\, g'(x_0)h$$

$$= f[g(x_0) + g'(x_0)h + \gamma(h)] - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)).\, [g'(x_0)h + \gamma(h) - \gamma(h)]$$

$$= f[g(x_0) + g'(x_0)h + \gamma(h)] - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)).\, [g'(x_0)h + \gamma(h)] + f'\big(g(x_0)\big)\gamma(h)$$

$$= \varphi\big(g'(x_0)h + \gamma(h)\big) + f'\big(g(x_0)\big)\gamma(h).$$

Daí, e como $f'(g(x_0))$ e $g'(x_0)$ são aplicações lineares e limitadas, temos:

$$\frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - f'(g(x_0)).\, g'(x_0)h\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\big\|\varphi\big(g'(x_0)h + \gamma(h)\big)\big\|}{\|h\|} + \frac{\big\|f'\big(g(x_0))\gamma(h)\big)\big\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\left\|\varphi\big(g'(x_0)h+\gamma(h)\big)\right\|}{\|h\|}+\frac{c\|\gamma(h)\|}{\|h\|}$$

$$=\frac{\left\|\varphi\big(g'(x_0)h+\gamma(h)\big)\right\|}{\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|}.\frac{\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|}{\|h\|}+\frac{c\|\gamma(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\left\|\varphi\big(g'(x_0)h+\gamma(h)\big)\right\|}{\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|}.\frac{\|g'(x_0)h\|+\|\gamma(h)\|}{\|h\|}+\frac{c\|\gamma(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\left\|\varphi\big(g'(x_0)h+\gamma(h)\big)\right\|}{\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|}.\frac{c_1\|h\|+\|\gamma(h)\|}{\|h\|}+\frac{c\|\gamma(h)\|}{\|h\|}.$$

Mas podemos perceber que a expressão

$$\frac{\left\|\varphi\big(g'(x_0)h+\gamma(h)\big)\right\|}{\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|}.\frac{c_1\|h\|+\|\gamma(h)\|}{\|h\|}+\frac{c\|\gamma(h)\|}{\|h\|}$$

tende a zero quando $h\to 0$, pois $g'(x_0)h+\gamma(h)\to 0$ quando $h\to 0$ e também porque $\frac{\varphi(k)}{k}\to 0$, com $k\to 0$.

Portanto F é diferenciável em x_0 e $F'(x_0)=f'(g(x_0)).g'(x_0)$.

O Teorema está provado.

2.5 Desigualdade do Valor Médio

Nesta seção, queremos introduzir e demonstrar a desigualdade do valor médio para funções com imagem em $\mathbb{R}^m$, $m\geq 2$. O Teorema do valor médio que mostraremos a seguir vale, em geral, somente para $m=1$.

Teorema 2.4 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f\colon C\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, diferenciável em cada ponto de um conjunto convexo C de $\mathbb{R}^n$. Então, dados x_1,x_2 pertencentes a C, existe $\bar{x}$ pertencente ao segmento $[x_1,x_2]$ tal que $f(x_1)-f(x_2)=f'(\bar{x})(x_1-x_2)$.*

Observação:

$[x_1,x_2]=\{x_1+t(x_2-x_1)\setminus t\in[0,1]\}$ *é o segmento de reta que liga* x_1 *e* x_2 .

Demonstração:

Sejam x_1*e* x_2 *pertencentes a* C.

Seja $g(t)= x_1 + t(x_2 - x_1), t\ em\ [0,1]$.

Então $g: [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $g'(t_0) = x_2 - x_1$, para todo $t_0 \in (0,1)$. Tem-se

$$g'(t_0):\ \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$y \to\ g'(t_0)y = (x_2 - x_1)y\ .$$

De fato $g'(t_0)y = (x_2 - x_1)y$, pois

$$\lim_{y\to 0} \frac{\|g(t_0 + y) - g(t_0) - Ty\|}{\|y\|}$$

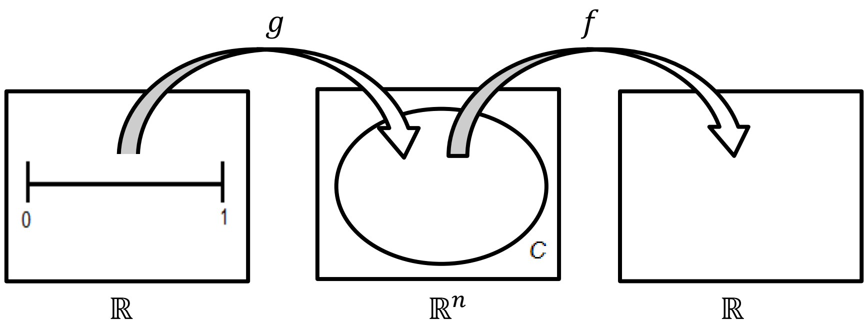
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\|(x_1 + (t_0 + y)(x_2 - x_1) - x_1 - t_0(x_2 - x_1) - y(x_2 - x_1)\|}{\|y\|}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\|(t_0 + y)(x_2 - x_1) - (t_0 + y)(x_2 - x_1)\|}{\|y\|}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\|0\|}{\|y\|} = 0.$$

Agora, consideremos a composição:

$$F(t):\quad [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \to F(t) = f(g(t))$$



Então pela regra da cadeia, F é diferenciável em t, pois f e g são diferenciáveis. Assim, pelo Teorema do Valor Médio para funções reais,

$$F(1) - F(0) = F'(\bar{t})(1 - 0)$$

com $\bar{t}$ pertencente a (0,1). Isto é:

$$f(x_2) - f(x_1) = F(1) - F(0) = F'(\bar{t})(1 - 0)$$
$$= f'\big(g(\bar{t})\big)g'(\bar{t}) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1)$$

com $\bar{x} = g(\bar{t})$ pertencente a $[x_{1,}x_2] \subset C$.

Isso provou o teorema.

Nota: Para funções $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, em geral, o teorema não é válido se dimensão $m > 1$.

De fato, considere o contra-exemplo:

$$f(t): \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to f(t) = (t^2, t^3)$$

Neste exemplo, a dimensão do contradomínio de f, isto é, $Y = \mathbb{R}^2$, é $m = 2$.

Para esta f temos

$$f'(t_0): \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$y \to f'(t_0)y = (2t_0 y, 3{t_0}^2 y).$$

Notamos que

$$f(1) - f(0) = (1,1) - (0,0) = (1,1),$$

e

$$f'(\bar{t})[1 - 0] = (2\bar{t}, 3\bar{t}^2)\,, \qquad \bar{t} \in (0,1).$$

Assim,

$$f(1) - f(0) \neq f'(\bar{t})[1 - 0]$$

para todo $\bar{t}$ pertencente aos reais. Portanto, não vale o teorema do valor médio para essa função f.

Para funções $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, o que é válido em geral é uma desigualdade, chamada de *Desigualdade do Valor Médio.*

Teorema 2.5 (Desigualdade do Valor Médio) *Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aberto. Se A é um conjunto convexo e f é diferenciável em A, então para x_1 e x_2 pertencentes a A, tem-se que*

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \sup_{\bar{x}\in[x_1,\, x_2]} \|f'(\bar{x})\| \|x_2 - x_1\|.$$

Demonstração:

Tomemos x_1 e x_2 pertencentes a A.

Consideramos $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, um funcional linear.

Seja $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = F\left(f\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big)\right)$.

Podemos notar que g é uma função bem definida. Além disso, g é diferenciável, pois f e F são diferenciáveis (a derivada de uma aplicação linear é ela mesma).

Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, obtemos:

$$g(1) - g(0) = g'(\bar{t})(1 - 0) = g'(\bar{t}), \quad (2)$$

com $\bar{t}$ pertencente a $(0, 1)$.

Observação: Podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para g, pois ela é a composta de três funções diferenciáveis.

Agora, notamos que:

$$g(1) = F\left(f\big(x_1 + 1(x_2 - x_1)\big)\right)$$

$$= F\big(f(x_1 + x_2 - x_1)\big) = F\big(f(x_2)\big),$$

e que

$$g(0) = F\left(f\big(x_1 + 0(x_2 - x_1)\big)\right) = F\big(f(x_1)\big).$$

Logo, pela linearidade de F e a expressão (2), resulta:

$$F\big(f(x_2) - f(x_1)\big) = F\big(f(x_2)\big) - F\big(f(x_1)\big) = g(1) - g(0)$$

e

$$g'(\bar{t}) = F'\left(f\big(x_1 + \bar{t}(x_2 - x_1)\big)\right) f'\big(x_1 + \bar{t}(x_2 - x_1)\big)[x_1 + t(x_2 - x_1)]'_{t=\bar{t}}$$

$$= F\left(f'\big(x_1 + \bar{t}(x_2 - x_1)\big)\right)(x_2 - x_1).$$

pois $F'(y_0) = F$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}^m$.

Portanto,

$$\left|F\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\right| = |F(f'(\bar{x})(x_2-x_1)|$$
$$\leq \|F\|\ \|f'(\bar{x})(x_2-x_1)\|$$

com $\bar{x} = x_1 + \bar{t}(x_2 - x_1), \bar{t}$ pertencente a (0,1). Isto é,

$$\left|F\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\right| \leq \|F\|\ \|f'(\bar{x})\|\ \|(x_2-x_1)\| \ . \qquad (3)$$

Seja M o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado por $f(x_2) - f(x_1)$, isto é,

$$M = \{\ \lambda\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $F_0 : M \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $F_0\left(\lambda\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\right) = \lambda$. Então F_0 é linear e, portanto contínua.

Note que $\|F_0\| = \left\|\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\right\|^{-1}$ se $f(x_2) \neq f(x_1)$.

De fato, para $f(x_2) \neq f(x_1)$, tem-se

$$\left|F_0\left(\lambda\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\right)\right| = |\lambda| = \frac{1}{\|f(x_2)-f(x_1)\|}.\left\|\lambda\big(f(x_2)-f(x_1)\big)\right\|.$$

Observação: Se $f(x_2) = f(x_1)$ então $\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \sup \|f'(\bar{x})\|\ \|x_2 - x_1\|$, isto é, a Desigualdade do Valor Médio é satisfeita trivialmente.

Mas,

$$F_0(m) = \frac{m}{f(x_2)-f(x_1)},$$

para todo m pertencente a M.

Logo,

$$\|F_0\| = \frac{1}{\|f(x_2)-f(x_1)\|}.$$

Seja F a extensão de F_0 a todo $\mathbb{R}$. Assim

$$F(m) = \frac{m}{f(x_2)-f(x_1)}\ ,\ \ m \in \mathbb{R}$$

e

$$\|F\| = \frac{1}{\|f(x_2)-f(x_1)\|}\ .$$

De (3), obtém-se para F, que

$$1 = \left|F\big(f(x_2) - f(x_1)\big)\right| \leq \|F\| \, \|f'(\bar{x})\| \, \|(x_2 - x_1)\|$$
$$= \frac{1}{\|f(x_2) - f(x_1)\|} \|f'(\bar{x})\| \, \|(x_2 - x_1)\|$$

Disso, resulta que

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|f'(\bar{x})\| \, \|(x_2 - x_1)\|$$

com $\bar{x}$ pertencente ao segmento $[x_1, x_2]$.

Portanto,

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \sup_{\bar{x} \in [x_1,\, x_2]} \|f'(\bar{x})\| \|x_2 - x_1\|$$

e a Desigualdade do Valor Médio está provada.

2.6 Gradiente e Derivada Direcional

Gradiente

Para funções $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a derivada $f'(x_0)$ tem uma forma simples. Essa fórmula é dada em termos o vetor gradiente de f.

Definição 2.5 *Seja $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in A$. Então o vetor*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$$

é chamado Gradiente de f em x_0.

Lema: Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in A$, então

$$f'(x_0)h = \big(h, \nabla f(x_0)\big) = h \cdot \nabla f(x_0)$$

para todo h pertencente a $\mathbb{R}^n$.

Demonstração:

Da fórmula (1) da seção (2.2) da página 39, temos que

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i\ , \qquad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}.$$

Da definição de produto interno em $\mathbb{R}^n$ segue que

$$Df(x)h = \big(h, \nabla f(x_0)\big)\ , \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Esse lema fornece uma relação entre $Df(x_0)$ e $\nabla f(x_0)$.

Exemplo:

Seja $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em x_0. Assim, $f'(x_0)x = \big(x,\ \nabla f(x_0)\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right).$$

Isto é,

$$f'(x_0)x = \big(x, \nabla f(x_0)\big) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}x_2 + \ \dots\ + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}x_n\right)$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Derivada Direcional

Definição 2.7 *Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com A aberto. Para todo $x_0 \in A$ e $h \in \mathbb{R}^m$ com $h \neq 0$ e $\|h\| = 1$, se o limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

existir, ele é chamado de Derivada Direcional de f em x_0 na direção de h e é representado por

$$df(x_0, h)\ .$$

Proposição: Suponhamos $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in A$. Então existe $df(x_0, h)$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $\|h\| = 1$.

Demonstração:

Sabemos que existe $f'(x_0)$, logo se

$$r(x_0, l) = f(x_0 + l) - f(x_0) - f'(x_0)l$$

Então

$$\frac{\|r(x_0, l)\|}{\|l\|} \to 0$$

quando $l \to 0$, pela definição de f ser diferenciável em x_0.

Seja $h \in \mathbb{R}^n$ com $\|h\| = 1$. Então

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - f'(x_0)th + f'(x_0)th}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{r(x_0 + th) + f'(x_0)th}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{r(x_0 + th)}{\|th\|} + \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0)th}{t}$$

$$= 0 + \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0)th}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tf'(x_0)h}{t}$$

$$= f'(x_0)h = \big(h, \nabla f(x_0)\big).$$

Logo existe $df(x_0, h)$ e $df(x_0, h) = \big(h, \nabla f(x_0)\big)$.

Conclusão: Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0 então

$$f'(x_0)h = df(x_0, h) = \big(h, \nabla f(x_0)\big),$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $\|h\| = 1$.

Nota importante: A derivada direcional $df(x_0, h)$ é a taxa de variação de f em x_0, na direção de h. Note que sendo $h = e_j$ vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, então

$$df\left(x_0, e_j\right) = \left(e_j, \nabla f(x_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\,.$$

Isto é, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ é a derivada direcional de f, em x_0, na direção do vetor e_j.

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ é a taxa de variação de f, em x_0, na direção e_j.

Observação: Note que, para $n = 2$ ou $n = 3$

$$df(x_0, h) = \left(h, \nabla f(x_0)\right) = \|h\|\ \|\nabla f(x_0)\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre os vetores h e $\nabla f(x_0)$.

Então a menor variação de f em x_0 é quando $\cos\theta = 1,$ isto é, quando

$$h = -\nabla f(x_0) \ \text{ ou } \ h = \nabla f(x_0).$$

Portanto, a derivada direcional é a direção de menor variação de f em x_0.

De fato,

$$df(x_0, h) = \left(h, \nabla f(x_0)\right) \leq -\|h\|.\|\nabla f(x_0)\|.$$

Tomando $h = -\nabla f(x_0),$ então

$$df(x_0, h) = df\left(x_0, -\nabla f(x_0)\right) = \left(-\nabla f(x_0), \nabla f(x_0)\right) = -\|\nabla f(x_0)\|^2.$$

Portanto, se $h = -\nabla f(x_0)$ então atingimos a igualdade na desigualdade

$$df(x_0, h) \leq -\|h\|.\|\nabla f(x_0)\|$$

Nota: O fato acima é usado para minimizar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$ ou para resolver equações do tipo $f(x) = 0$.

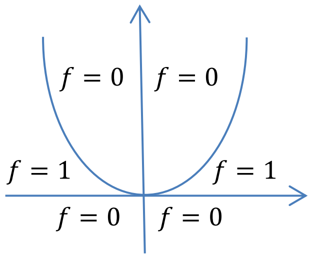
Observe que a existência de todas as derivadas direcionais de f não implica que f é diferenciável.

Exemplo 1:

Seja a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 < y < x^2 \\ 0 & se \quad y \geq x^2 \ \ ou \ \ y \leq 0 \end{cases}$$

Notamos que f tem a seguinte representação geométrica:



Em particular observamos que $f = 0$ sobre os eixos.

Agora tomemos uma reta r passando por (0,0) que não coincida com um dos eixos. Sobre essa reta r existe uma vizinhança de (0,0) tal que $f = 0$ nessa vizinhança.

Seja h pertencente a reta r, $\|h\| = 1$. Daí

$$df\big((0,0),h\big) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+th\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

É óbvio que $df\big((0,0),e_i\big) = 0$ (e_i sendo a direção dos eixos), pois $f = 0$ sobre os eixos.

Portanto, existem todas as derivadas direcionais de f. Entretanto f não é contínua em (0, 0), pois dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \in (-\delta,\delta)$ para todo $\delta > 0$, tal que

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = 1 > \varepsilon.$$

Logo, f não pode ser diferenciável em (0,0).

Conclusão: Existem as derivadas direcionais de f em (0,0) em qualquer direção mas f não é diferenciável em (0,0) pois ela é descontínua nesse ponto.

Exemplo 2:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & se \ x^2 \neq -y \\ 0 & se \ x^2 = -y \end{cases}$

Existe $df\big((0,0),h\big)$ para todo h com $\|h\| = 1$.

De fato, seja $h = (h_1, h_2)$. Suponhamos $h_2 \neq 0,$ assim

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+th\big)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, th_2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{th_1 . th_2}{t^2h_1^2 + th_2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2h_1h_2}{t(t^2h_1^2 + th_2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2h_1h_2}{t^2(th_1^2 + h_2)} = \lim_{t\to 0} \frac{h_1h_2}{th_1^2 + h_2}$$

$$= \frac{h_1h_2}{h_2} = h_1 .$$

Portanto, existe $df\big((0,0),h\big)$ para $h = (h_1, h_2), h_2 \neq 0$.

Suponhamos agora $h_2 = 0$, assim $h = (h_1, 0)$ e

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+th\big)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Com isso, existe $df\big((0,0),h\big)$ para $h = (h_1, h_2), h_2 = 0$.

Logo, existe $df\big((0,0),h\big)$ para todo $h = (h_1, h_2)$. Mas dado $\varepsilon = 1$, seja (x, y) pertencente a $B\big((0,0),\delta\big)$ tal que $x^2 = -\left(1 + \frac{1}{n}\right)y$ com n suficientemente grande, $n > n_0 > 1$ e $y \neq 0$.

Então

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = \left|\frac{xy}{x^2 + y}\right| =$$

$$= \left|\frac{xy}{-\left(1+\frac{1}{n}\right)y + y}\right| = \frac{|xy|}{\left|\frac{y}{n}\right|} = \frac{n|x||y|}{|y|} = n|x|.$$

Tomando $n_0 \geq \frac{1}{|x|}$ temos $n|x| > \frac{1}{|x|}.|x| = 1 = \varepsilon$.

Logo, f é descontínua na origem e, portanto, não é diferenciável em (0,0).

Conclusão: A existência das derivadas direcionais de f em todas as direções não implica a diferenciabilidade de f.

2.7 Derivadas Parciais Generalizadas e Diferenciabilidade

Nesta seção queremos estudar o conceito de derivada parcial em duas ou mais componentes de $x \in \mathbb{R}^n$.

De fato, se f está definida em $A \subset \mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^m$ então queremos definir

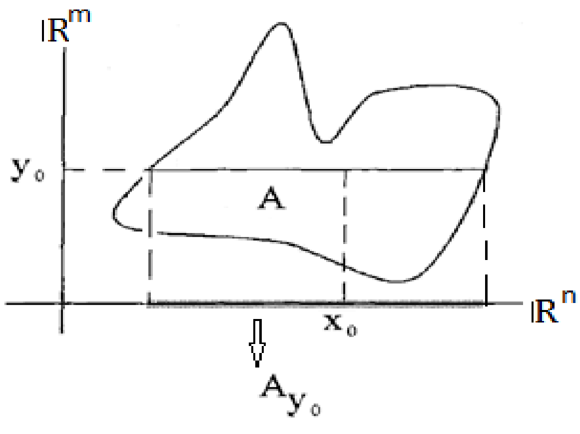
$$\frac{\partial f}{\partial x}, x \in \mathbb{R}^n$$

Seja então

$$\begin{aligned} f:\ \ A \subset \mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\rightarrow f(x,y) \end{aligned}$$

com A um conjunto aberto.

Seja (x_0, y_0) pertencente a A e $A_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ (x, y_0) \in A\}$.



Como A é aberto de $\mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^m$, então A_{y_0} é aberto (em $\mathbb{R}^n$).

Seja

$$\begin{aligned} F:\ \ A_{y_0} \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \ \ \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \ \ F(x) = f(x, y_0) \end{aligned}$$

Se F é diferenciável em x_0 então $F'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear e contínua, que é chamada derivada parcial de f em (x_0, y_0) em relação a variável x.

Notação: $f_1'(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Analogamente se define a derivada parcial de f em (x_0, y_0) em relação a variável y, e a denotamos por $f_2'(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Observação: Se $f: A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $f_1'(x_0, y_0)$ é a derivada parcial em x no sentido dado nos cálculos, isto é,

$$f_1'(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad (x_0, y_0) \in A.$$

Um resultado importante que fornece uma **condição suficiente** para uma função ser diferenciável é o seguinte:

Teorema 2.6 Diferenciabilidade

Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aberto. Se as derivadas parciais de f existem em qualquer ponto de A e são contínuas em A, então f é diferenciável em A.

Observação: Com esse teorema fica mais fácil identificar uma função diferenciável.

Demonstração:

Se f for diferenciável em x pertencente a A então a matriz de $Df(x)$ tem componentes dadas pelas derivadas parciais das componentes de f em x.

Dado $\varepsilon > 0$, vamos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(y) - f(x) - A(x)(y - x)\| < \varepsilon\|y - x\| \quad , \ x \in A,$$

para todo y pertencente a $B(x, \delta)$, onde $A(x)$ é a matriz Jacobiana de f (que existe pela hipótese de f ter derivadas parciais) no ponto x. Dessa desigualdade, segue que f é diferenciável em A.

Para mostrar que $\|f(y) - f(x) - A(x)(y - x)\| < \varepsilon\|y - x\|$, é suficiente mostrar para cada componente.

Note que a componente j de $f(y) - f(x) - A(x)(y - x)$ é

$$f_j(y) - f_j(x) - \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)\right].(y - x).$$

Assim, sem perda de generalidade, vamos supor $m = 1$. Então vamos supor que $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ existindo e sendo contínuas em A.

Seja $x \in A$, fixado arbitrariamente, e $y \in A$. Temos

$$A(x)(y - x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(y_n - x_n).$$

Agora podemos observar que

$$f(y) - f(x) = f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$+ f(x_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$+ f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, x_3, y_4, \dots, y_n) + \cdots +$$

$$+ f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, y_n) - f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Pelo Teorema do Valor Médio para uma função $g: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que:

1) Existe u_1 entre y_1 e x_1, tal que

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, \dots, y_n)(y_1 - x_1).$$

2) Existe u_2 entre y_2 e x_2, tal que

$$f(x_1, y_2, y_3, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, u_2, y_3, \dots, y_n)(y_2 - x_2).$$

$\vdots$

n) Existe u_n entre y_n e x_n, tal que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u_n)(y_n - x_n).$$

Logo,

$$f(y) - f(x) - A(x)(y - x) =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] (y_1 - x_1)$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, u_2, y_3, y_4, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] (y_2 - x_2) + \cdots +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] (y_n - x_n).$$

Resulta então que

$$\|f(y) - f(x) - A(x)(y - x)\|$$

$$\leq \left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| + \cdots +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right|\right\} \|y - x\|$$

com u_i entre y_i e x_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Agora, como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua em x, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

se z (suficientemente pequeno) pertence a $B(x, \delta) \cap A$, para $i = 1, \dots, n$.

Então para $y \in B(x, \delta) \cap A$ temos que:

$$\|f(y) - f(x) - A(x)(y - x)\| \leq$$

$$\leq \left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, y_3, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right| +\right.$$

$$+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,u_2,y_3,y_4,\dots,y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right|+\cdots+$$

$$+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},u_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right|\Bigg\}\ \|y-x\|\ .$$

Como $y \in B(x,\delta) \cap A$ então

$$(u_1,y_2,y_3,\dots,y_n),(x_1,u_2,y_3,y_4,\dots,y_n),\dots,(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},u_n)$$

pertencem a $B(x,\delta) \cap A$ pois u_i está entre y_i e x_i. Usando

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

com $z=(u_1,y_2,\dots,y_n),\dots,(x_1,\dots,x_{n-1},u_n) \in B(x,\delta)\cap A$, resulta que:

$$\|f(y)-f(x)-A(x)(y-x)\| \leq \varepsilon\|y-x\|.$$

Isso vale para $y \in B(x,\delta) \cap A$.

Logo, f é diferenciável em $x \in A$.

Exemplo:

Seja

$$f(x,y)=(y\frac{sen\ x}{x},x^2\cos xy)$$

Assim, $A = dom\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Como as derivadas parciais de f existem em A e são contínuas, então f é diferenciável em A (pelo Teorema 2.6).

Capítulo 3

Teorema da Função Implícita

Neste capítulo, estudaremos o Teorema da Função Implícita e como aplicação, usaremos o Teorema da Função Inversa na resolução de sistemas envolvendo funções.

Para um melhor esclarecimento, introduziremos aqui o Teorema do Ponto Fixo, pois ele é essencial para provarmos o Teorema da Função Implícita.

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo) Seja $B \subset \mathbb{R}^m$, um conjunto fechado e f uma contração de B em B. Então existe um único ponto fixo y de f em B. Além do mais, se $y_m = f(y_{m-1})$, isto é, y_m é a órbita de y_0, com $y_0 \in B$, então y_m converge para y e

$$d(y_m, y) \leq \frac{L^m}{1-L} . d(y_0, y_1)$$

onde $d(x, y)$ é a distância de x a y e $0 \leq L < 1$ é a constante contrativa.

Demonstração:

Usamos aqui a notação $|x|$ para a norma de um vetor x de $\mathbb{R}^m$, de modo que $d(x, y) = |x - y|$.

Da hipótese que f é contração, temos

De $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ segue-se que $|y_{m+1} - y_m| \leq L^m|y_1 - y_0|$.

Portanto

$$|y_{m+p} - y_m| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |y_{m+i+1} - y_{m+i}| \leq \left[\sum_{i=0}^{p-1} L^{m+i}\right] |y_1 - y_0| \leq$$

$$\leq \frac{L^m}{1-L} . d(y_0, y_1) .$$

Como $0 \leq L < 1$, temos que y_m é uma sequência de Cauchy em B que é fechado. Logo y_m converge para algum elemento y de B.

Agora, passando o limite na estimativa acima, obtemos

$$|y - y_m| \leq \frac{L^m}{1-L} . d(y_0, y_1),$$

o que prova a desigualdade do teorema.

Como f é contínua

$$f(y) = f(\lim_{m\to\infty} y_m) = \lim_{m\to\infty} f(y_m) = \lim_{m\to\infty} y_{m+1} = y$$

Logo, $\boldsymbol{y}$ **é ponto fixo de** $\boldsymbol{f}$ (existência).

Se tivermos ainda $f(b) = b$, com $b \in B$ então $|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq L|b - a|$, donde $(1 - L)|b - a| \leq 0$. Como $1 - L > 0$, isto dá $b = a$.

Portanto, **o ponto fixo de** $\boldsymbol{f}$ **é único** (unicidade).

Teorema 3.2 *Seja* $f: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, *com* A *aberto, tal que* $f(x_0, y_0) = 0$ *para algum* $(x_0, y_0) \in A$.

Supor que:

$i)$ f *é contínua;*

$ii)$ f_2' (x_0, y_0) *existe numa vizinhança de* (x_0, y_0) *e é contínua em* (x_0, y_0)*;*

$iii)$ *Existe* $[f_2'(x_0, y_0)]^{-1}$ *e é uma transformação de* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *linear.*

Então existe $y = y(x): V_{x_0} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *contínua tal que* $f\big(x, y(x)\big) = 0$ *para todo* x *pertencente a* V_{x_0}*e* $y(x_0) = y_0$, *onde* V_{x_0} *é uma vizinhança de* x_0.

Observação: *A função* $y = y(x)$ *é chamada de* ***Função Implícita***.

Demonstração:

Sem perda de generalidade podemos supor $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pertencente a A, que está contido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Chamaremos $T = [f_2'(0,0)]^{-1}$.

Sabemos que $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é aberto, então $A_x = \{y \in \mathbb{R}^m / (x,y) \in A\}$ é aberto e não vazio, para x suficientemente pequeno, isto é $\|x\| \leq M$, para algum $M > 0$.

Definimos $h(x,.) = h_x: A_x \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, dada por

$$h(x,y) = h_x(y) = y - Tf(x,y)$$

para x tal que $\|x\| \leq M$.

Queremos mostrar que para cada x numa vizinhança $V_0 \in B(0,M)$ a aplicação h tem um ponto fixo $y = y(x) \in A_x$.

Observação: sabemos que A_x é aberto, e a origem de $\mathbb{R}^m$ pertence a A_x. Portanto $B(0,\varepsilon) = B_y(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ desde que ε seja pequeno.

Para demonstrar o Teorema 3.2 temos que verificar que:

$i)$ h_x é contração de $B_y(0,\varepsilon_2)$ nela mesma, para $\|x\| < \varepsilon$, com $\varepsilon \leq M$ e para um certo $\varepsilon_2 > 0$, sendo $B_y(0,\varepsilon_2) \subset \mathbb{R}^m$.

$ii)$ os pontos fixos $y = y(x)$ de h_x atenderão ao teorema.

Agora, podemos notar que:

$$\begin{aligned}
h_2'(x,y)u &= \left[u - T'\big(f(x,y)\big).f_2'(x,y)u\right] \\
&= u - Tf_2'(x,y)u = Id(u) - Tf_2'(x,y)u \\
&= TT^{-1}u - Tf_2'(x,y)u = T[T^{-1}u - f_2'(x,y)u] \\
&= T[f_2'(0,0) - f_2'(x,y)]u
\end{aligned}$$

para todo u pertencente a $\mathbb{R}^m$.

Observação: $T \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ implica que $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$, com

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Disso concluímos que

$$\|h_2'(x,y)\| = \|T[f_2'(0,0) - f_2'(x,y)]\| \leq \|T\|\,\|f_2'(0,0) - f_2'(x,y)\|\,.$$

Seja L tal que $0 < L < 1$ (L fixado).

Sabemos da hipótese que $f_2'(0,0)$ é operador linear contínuo em $(0,0)$, e existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, com $\varepsilon_1 \leq M$ tal que:

$$\|f_2'(0{,}0) - f_2'(x,y)\| \leq \varepsilon^* = \frac{L}{\|T\|}$$

se $\|x\| \leq \varepsilon_1$ e $\|y\| \leq \varepsilon_2$.

Portanto,

$$\|h_2'(x,y)\| \leq L$$

se

$$\|x\| \leq \varepsilon_1 \text{ e } \|y\| \leq \varepsilon_2.$$

Agora notamos que:

$$\|h(x,0)\| = \|0 - Tf(x,0)\| = \|Tf(x,0)\|$$
$$\leq \|T\| \, \|f(x,0)\| = \|T\| \, \|f(x,0) - f(0,0)\|$$
$$\leq \varepsilon_2(1-L)$$

desde que $\|x\| \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq M$, para algum $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f. Isto é,

$$\|h(x,0)\| \leq \varepsilon_2(1-L)$$

se $\|x\| \leq \varepsilon$.

Afirmação 1: $h(x, \,.) = h_x : B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon_2) \to B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon_2)$, isto é, h_x *"manda"* $B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon_2)$ nela mesmo.

Observação: $\varepsilon_2 > 0$ deve ser pequeno para que $h_x(y)$ pertença a $B(0,\varepsilon_2)$ contida em A_x com $\|x\| \leq \varepsilon$.

Prova da **Afirmação 1:**

Seja $y \in B(0,\varepsilon_2)$, isto é, $y \in \mathbb{R}^m$ com $\|y\| \leq \varepsilon_2$.

Daí segue-se que

$$\|h_x(y)\| = \|h_x(x,y)\| = \|h_x(x,y) - h(x,0) + h(x,0)\|$$
$$\leq \|h_x(x,y) - h(x,0)\| + \|h(x,0)\| \,.$$

Usando a Desigualdade do Valor Médio, na variável y, obtemos:

$$\|h_x(x,y) - h(x,0)\| + \|h(x,0)\| \leq \sup_{\bar{y}\in[0,y]} \|h_2'(\bar{y})\| \; \|y-0\| + \|h(x,0)\|$$

$$\leq \sup_{\|\bar{y}\|\leq \varepsilon_2} \|h_2'(\bar{y})\| \ \|y\| + \|h(x,0)\| \,.$$

Como

$$\sup_{\|\bar{y}\|\leq \varepsilon_2} \|\mathrm{h}_2'(\bar{\mathrm{y}})\| \leq \mathrm{L}$$

se

$$\|x\| \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1,\ \|y\| \leq \varepsilon_2 \quad \text{e} \quad \|h(x,0)\| \leq \varepsilon_2(1-L),$$

então,

$$\sup_{\|\bar{y}\|\leq \varepsilon_2} \|h_2'(\bar{y})\| \ \|y\| + \|h(x,0)\| \leq L.\varepsilon_2 + \varepsilon_2.(1-L) = \varepsilon_2\,.$$

Logo

$$\|h_x(y)\| \leq \varepsilon_2$$

isto é,

$$h_x(y) \in B(0,\varepsilon_2), \text{ se } \|x\| \leq \varepsilon.$$

Afirmação 2: $h_x : B(0,\varepsilon_2) \to B(0,\varepsilon_2)$ é contração se $\|x\| \leq \varepsilon$.

Prova da **Afirmação 2:**

Sejam y_1 e y_2 pertencentes a $B(0,\varepsilon_2)$.

Pelo Teorema da Desigualdade do Valor Médio, temos

$$\|h_x(y_2) - h_x(y_1)\| = \|h(x,y_2) - h(x,y_1)\|$$

$$\leq \sup_{\bar{y}\in[0,y]} \|h_2'(x,\bar{y})\| \ \|y_2 - y_1\|$$

$$\leq \sup_{\|\bar{y}\|\leq \varepsilon_2} \|h_2'(x,\bar{y})\| \ \|y_2 - y_1\|$$

$$\leq L\|y_2 - y_1\|$$

desde que $\|x\| \leq \varepsilon$.

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| \leq \varepsilon$, existe um único $y = y(x) \in B(0,\varepsilon_2)$ tal que $h\big(x,y(x)\big) = y(x)$. Isto é, para cada x com $\|x\| \leq \varepsilon$,

$$y(x) = h\big(x,y(x)\big) = y(x) - Tf\big(x,y(x)\big).$$

Subtraindo $y(x)$, temos

$$y(x) - y(x) = y(x) - Tf\big(x, y(x)\big) - y(x),$$

ou seja,

$$0 = Tf\big(x, y(x)\big), \text{ para } \|x\| \leq \varepsilon.$$

Como existe $T^{-1}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ então $f\big(x, y(x)\big) = 0$ para todo $x \in B(0, \varepsilon)$.

Note que

$$\begin{aligned} y:\ & B(0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m \\ & x \quad \to \ y = y(x) \end{aligned}$$

é uma função bem definida chamada de *Função Implícita.*

Portanto, essa função satisfaz

$$f\big(x, y(x)\big) = 0 \text{ para todo } x \in V_0 = B(0, \varepsilon).$$

Observação: Pela unicidade do ponto fixo é fácil ver que $y(0) = 0$. De fato $x = 0$ pertencer a $B(0, \varepsilon)$ implica que existe $y = y(0)$ ponto fixo de $h(0,.)$ e

$$h(0, y = 0) = 0 - Tf(0,0) = 0 - T0 = 0 = y$$

pois (0,0). Logo, pela unicidade do ponto fixo, $y(0) = 0$.

A seguir mostraremos que $y = y(x): V_0 \to U_0 = y(V_0) \subset \mathbb{R}^m$ é contínua.

Sejam $x_1, x_2 \in V_0$. Queremos mostrar que $y(x_1)$ fica próximo de $y(x_2)$ quando x_1 e x_2 estão suficientemente próximos. Lembremos que $y(x_1)$ é ponto fixo de $h(x_1,.)$, isto é, $h(x_1, y(x_1)) = y(x_1)$ e que $h(x_2, y(x_2)) = y(x_2)$. Aplicando o Teorema do Ponto Fixo para a contração h_{x_1}, com $y_0 = y(x_2)$, resulta (lembrando que $y(x_1)$ é o ponto fixo de h_{x_1}) para $m = 0$ que:

$$\|y_0 - y(x_1)\| \leq \frac{L^0}{1 - L} \left\|y_0 - h_{x_1}(y_0)\right\|.$$

Como $h_{x_1}(y_0) = h_{x_1}$ e $y(x_2) = h\big(x_1, y(x_2)\big)$, obtemos:

$$\|y(x_2) - y(x_1)\| \leq \frac{1}{1-L} \left\|y(x_2) - h\big(x_1, y(x_2)\big)\right\|$$

$$= \frac{1}{1 - L} \left\|h\big(x_2, y(x_2)\big) - h\big(x_1, y(x_2)\big)\right\|$$

$$= \frac{1}{1-L}\left\|y(x_2) - Tf\big(x_2, y(x_2)\big) - y(x_2) + Tf\big(x_1, y(x_2)\big)\right\|$$

$$= \frac{1}{1-L}\left\|T\big[f\big(x_2, y(x_2)\big) - f\big(x_1, y(x_2)\big)\big]\right\|$$

$$\leq \frac{1}{1-L}\ \|T\|\ \left\|f\big(x_2, y(x_2)\big) - f\big(x_1, y(x_2)\big)\right\|$$

pois $y(x_2)$ é o ponto fixo de $h(x_2,\ .)$.

Como f é contínua em C que contém $V_0 \times U_0$, então resulta que se x_1 está suficientemente próximo de x_2, então $y(x_1)$ fica próximo de $y(x_2)$. Isto é, $y = y(x)$ é contínua em V_0.

Observação 1: A função implícita é única, pois se existir outra função implícita $y_1(x)$ com $x \in V$ (onde $V = V(x = 0)$ é uma vizinhança de $x = 0$), então $f(x, y_1(x)) = 0$ para todo $x \in V$.

Assim, $Tf(x, y_1(x)) = 0$ para todo $x \in V$.

Portanto $y_1(x) = y_1(x) - Tf\big(x, y_1(x)\big)$ para todo $x \in V$. Isto é, $h_x\big(y_1(x)\big) = y_1(x)$ para todo $x \in V$, ou seja, $y_1(x)$ é ponto fixo de h. Como $y(x)$ também é ponto fixo de h, temos, pela unicidade do ponto fixo, que $y_1(x) = y(x)$ para todo $x \in V_0 \cap V$.

Observação 2: O Teorema da Função Implícita também pode ser escrito na seguinte versão:

Seja $F: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, *com* A *aberto.*

Supor que:

$i)$ F *é contínua;*

$ii)$ $F\,(x_0, y_0) = 0$ *para algum* $(x_0, y_0) \in A$*;*

$iii)$ $\frac{\partial F}{\partial x}$ *existe numa vizinhança de* (x_0, y_0) *e é contínua em* (x_0, y_0)*;*

$iv)$ $\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^{-1} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Então existe U, numa vizinhança de y_0 e uma única função

$$x = x(y): U \to V = x(U)$$

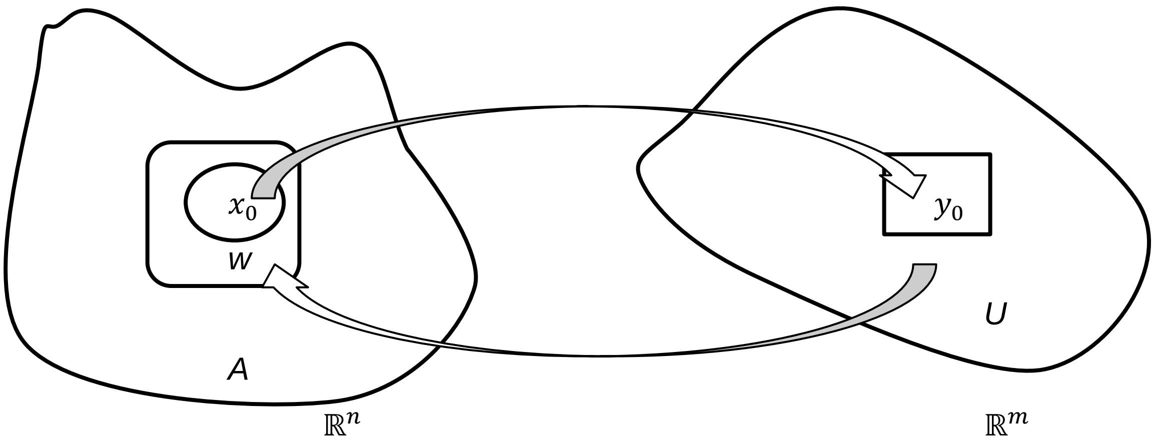
contínua tal que $F(x(y), y)) = 0$ para todo $y \in U$, com $x(y_0) = x_0$.

Essa versão é útil no caso em que por exemplo $\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1}$ não existe e portanto, não se pode afirmar a existência da função implícita $y = y(x)$.

Claro que nesse caso, prevê que $\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^{-1}$exista e as condições $(i), (ii), (iii)$ são satisfeitas.

3.1 Aplicações do Teorema da Função Implícita: (Teorema da Função Inversa)

Teorema 3.3 *Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com A aberto. Suponhamos que f é de classe C^1 e que o determinante da Matriz Jacobiana de f em x_0 é diferente de zero ($Jf(x_0 \neq 0)$ para algum $x_0 \in A$. Então existe uma vizinhança W de x_0, que está contida em A, e existe uma vizinhança U de y_0, $y_0 = f(x_0)$ tal que $f(W) = U$ e a restrição $f: W \to U$ tem uma inversa $f^{-1}: U \to W$ também de classe C^1. Além disso, para $y \in U, D(f^{-1})(y) = [Df(x)]^{-1}$, onde $x = f^{-1}(y)$.*



Existe $F\big(f(x)\big) \neq 0$, logo existe $D\big(f^{-1}(x)\big)$.

Utilizaremos o Teorema da Função Implícita para demonstrarmos o Teorema da Função Inversa.

Demonstração:

Iremos provar que existe a Função Inversa e sua continuidade.

Considere

$$F: A \text{ x } \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definida por

$$F(x,y) = y - f(x)\,.$$

Podemos notar que F é bem definida e é contínua.

Agora podemos verificar que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -Df(x) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

existe para (x,y) pertencente ao domínio de F. Como f é de classe C^1 então F também é de classe C^1.

Também existe

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = -Df(x_0)$$

com $y_0 = f(x_0)$.

Como $Jf(x_0)$ é diferente de zero ($Jf(x_0) \neq 0$), então

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^{-1}$$

existe e pertence ao conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Sendo f de classe C^1 em A, então $Df(x)$ é contínua em $x \in A$. Em particular, Df existe em uma vizinhança de x_0 e é contínua em x_0 e, sendo assim, $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe numa vizinhança de (x_0,y_0) e é contínua em (x_0,y_0).

Observação: Na verdade $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe e é contínua em todo o domínio de F.

Podemos perceber que

$$F(x_0,y_0) = y_0 - f(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

pois $y_0 = f(x_0)$.

Assim, ficam válidas as hipóteses do teorema da Função Implícita para F. Portanto, existe uma vizinhança de y_0 dada pela bola $B_{\mathbb{R}^n}(y_0, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$, e uma vizinhança V de x_0 dada pela bola $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon_1)$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ e também uma única função $x = x(y): U \to V$ contínua, tal que $F(x(y), y) = 0$ para todo $y \in U$, com $x(y_0) = x_0$. Isto é, $F(x(y), y) = y - f\big(x(y)\big) = 0$ o que implica que $y = f\big(x(y)\big)$ para todo $y \in U, x(y_0) = x_0$.

Seja $W = x(U)$. Assim, $x = x(y): U \to W \subset V$ é uma função sobrejetora e $y = f\big(x(y)\big)$ para todo $y \in U$.

Isso quer dizer que $f: W \to U$ é inversível e

$$f^{-1}(y) = x(y).$$

Conclusão: f é localmente inversível e sua inversa é contínua.

Agora queremos calcular Df^{-1}. Temos:

$$\begin{aligned} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &= \{\text{aplicações lineares de } \mathbb{R}^n \text{ em } \mathbb{R}^n\} \\ GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &= \{\text{aplicações lineares de } \mathbb{R}^n \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ inversíveis}\} \\ &= \{\text{matrizes } A_{n \times n} \ / \det A \neq 0\}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) / \det A \neq 0\},$$

onde estamos identificando a matriz A com a aplicação linear associada a ela.

Lema 3.1 $GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *é aberto em* $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

Podemos notar que

$$det: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

pode ser visto como uma aplicação

$$det: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}\ .$$

Mas $det(x_1, \dots, x_{n^2})$ é um polinômio de n^2 variáveis e grau n.

Assim, $det: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente derivável, em particular é contínua.

Então $det^{-1}(0) = det^{-1}(\{0\})$ é um conjunto fechado em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, pois como sabemos, a imagem inversa de um fechado, é fechada se e somente se f é contínua, e temos f contínua e o conjunto unitário $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$. Portanto $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ / $det^{-1}(\{0\})$ é aberto em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Mas $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \backslash det^{-1}(\{0\}) = \{\text{matrizes } n \text{ x } n \text{ com } det \neq 0\} = GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Isso diz que $GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é aberto. Como, por hipótese $Jf(x_0) = detDf(x_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança de $Df(x_0)$ tal que toda matriz nessa vizinhança é inversível (tem $det \neq 0$). Também por hipótese temos que f é de classe C^1 em A. Em particular é de classe C^1em uma vizinhança de x_0 em A. Quer dizer $Df(x)$ está numa vizinhança de $Df(x_0)$ se x estiver em uma vizinhança adequada de x_0.

Podemos então concluir que existe $\varepsilon' > 0$ tal que $Df(x)$ é inversível para todo $x \in B(x_0, \varepsilon')$. Mas como vimos, f é inversível se for restrita a

$$W = x(U) \subset V = B(x_0, \varepsilon_2), \text{com } U = B(y_0, \varepsilon).$$

Seja $W' = W \cap B(x_0, \varepsilon')$. Então $f: W' \to U' = f(W')$. Então essa restrição de f ainda é inversível com sua inversa contínua. É importante notar que agora $Df(x)$ é inversível para $x \in W'$.

Então calculamos para y_1 e y_2 pertencentes a U', com $y_1 \neq y_2$:

$$I(y_1) = \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - [Df(x_2)]^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|}$$

onde $x_2 = f^{-1}(y_2) \in W'$.

Seja $x_1 = f^{-1}(y_1) \in W'$.

Então, temos que

$$I(y_1) = \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - [Df(x_2)]^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|}$$

$$= \frac{\left\|x_1 - x_2 - [Df(x_2)]^{-1}\big(f(x_1) - f(x_2)\big)\right\|}{\|f(x_2) - f(x_2)\|}$$

$$= \frac{\left\|[Df(x_2)]^{-1}Df(x_2)(x_1 - x_2) - [Df(x_2)]^{-1}\big(f(x_1) - f(x_2)\big)\right\|}{\|f(x_2) - f(x_1)\|}$$

$$\leq \frac{\|[Df(x_2)]^{-1}\| \left\|Df(x_2)(x_1 - x_2) - \big(f(x_1) - f(x_2)\big)\right\|}{\|f(x_2) - f(x_1)\|}.$$

Como $[Df(x_2)]^{-1} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ então existe uma constante $M = M_{x_2}$ tal que

$$\|[Df(x_2)]^{-1}h\| \leq M_{x_2}\|h\|.$$

ou seja,

$$\|[Df(x_2)]^{-1}\| \leq M_{x_2}.$$

Daí, temos que

$$I(y_1) \leq \frac{\|[Df(x_2)]^{-1}\| \left\|Df(x_2)(x_1 - x_2) - \big(f(x_1) - f(x_2)\big)\right\|}{\|f(x_2) - f(x_1)\|}$$

$$\leq \frac{M_{x_2}\left\|Df(x_2)(x_1 - x_2) - \big(f(x_1) - f(x_2)\big)\right\|}{\|f(x_2) - f(x_1)\|}$$

$$= \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|f(x_2) - f(x_1)\|} M_{x_2} \frac{\|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_2)(x_2 - x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|}.$$

Afirmação:

$$\frac{\|x_1 - x_2\|}{\|f(x_2) - f(x_1)\|}$$

é limitada por uma constante $C > 0$, independente de x_1 e x_2.

De fato, temos $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Tanto x_1 quanto x_2 são pontos fixos de

$$h_y(x) = x = TF(x, y) = x - T[y - f(x)]$$

com

$$T = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^{-1}.$$

Daí, para $y \in U'$, tem-se:

$$hy(x_1) = x_1 - T[y - f(x_1)]$$
$$hy(x_2) = x_2 - T[y - f(x_2)]\,.$$

Também

$$\|x_1 - x_2\| = \|hy(x_2) + T[y - f(x_2)] - hy(x_1) - T[y - f(x_1)]\|$$

$$\leq \|hy(x_2) - hy(x_1)\| + \|T[f(x_1) - f(x_2)]\|$$

$$\leq L\|x_2 - x_1\| + \|T\| \, \|[f(x_1) - f(x_2)]\| \, .$$

Assim, obtemos que

$$\|x_1 - x_2\| \leq L\|x_2 - x_1\| + \|T\| \, \|[f(x_1) - f(x_2)]\| \, ,$$

que resulta

$$(1 - L)\|x_2 - x_1\| \leq \|T\| \, \|[f(x_1) - f(x_2)]\| \, .$$

Ou seja,

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{\|T\|}{1 - L} = C \, .$$

Portanto

$$0 \leq I(y_1) \leq \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - [Df(x_2)]^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|}$$

$$\leq \frac{\|T\|}{(1 - L)} M_{x_2} \frac{\|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_2)(x_2 - x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \, .$$

Essa desigualdade implica que

$$0 \leq \lim_{y_1 \to y_2} \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - [Df(x_2)]^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_2 - y_1\|}$$

$$\leq \frac{\|T\|}{(1 - L)} M_{x_2} \lim_{x_1 \to x_2} \frac{\|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_2)(x_2 - x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} = 0$$

pois quando y_1 tende para y_2 então x_1 tende para x_2, porque $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$ e f^{-1} é contínua e também porque f é diferenciável em x_2.

Portanto,

$$\lim_{y_1 \to y_2} \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - [Df(x_2)]^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_2 - y_1\|} = 0 \, .$$

Isto é, f^{-1} é diferenciável em y_2. Além disso, $D[f^{-1}](y_2) = [Df(x_2)]^{-1}$.

Sendo $x_2 = f^{-1}(y_2)$, como $y_2 \in U'$ foi tomado arbitrariamente, resulta que $f^{-1}: U' \to W'$ é diferenciável em U' e

$$D[f^{-1}](y) = [Df(x)]^{-1}$$

com $x = f^{-1}(y)$ e $y \in U'$.

Agora vamos provar que $D[f^{-1}](y)$ é contínua em $y \in U'$.

Para isso, usaremos o seguinte lema:

Lema 3.2 *A aplicação*

$$GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$
$$T \to T^{-1}$$

é contínua.

O esquema para provar a última parte do teorema é o seguinte:

Vimos que a aplicação

$$W' \to GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$
$$x \to Df(x)$$

é contínua.

Também a aplicação

$$GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$
$$Df(x) \to [Df(x)]^{-1}$$

é contínua (pelo lema 3.2) para $x \in W'$.

Isso implica que a composição

$$W' \to GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$
$$x \to [Df(x)]^{-1}$$

é contínua.

Portanto $D(f^{-1})(y) = [Df(x)]^{-1} = \left[Df\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$ é contínua em $y \in U'$.

Logo, a aplicação

$$U' \to GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$
$$y \to D(f^{-1})(y)$$

é contínua.

Portanto, f^{-1} é de classe C^1 em U'.

A demonstração do Teorema da Função Inversa está completa.

3.2 Aplicações em Problemas

Exercício 1:

Uma transformação pode ser localmente inversível perto de cada ponto, mas não ser globalmente inversível.

Seja $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x sen\, y$.

Para a função $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, temos:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x sen\, y \\ e^x sen\, y & e^x \cos y \end{vmatrix}$$

$$= e^{2x}(\cos^2 y + sen^2\, y) = e^{2x} \neq 0 \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Então, pelo Teorema da Função Inversa esta aplicação é localmente inversível, porém não é globalmente 1-1, já que não é globalmente injetiva, pois

$$u(x, y + 2\pi) = u(x,y),$$
$$v(x, y + 2\pi) = v(x,y).$$

Notamos que para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se f' é contínua e $f'(x) \neq 0$ para todo x, então f' é maior que zero ou menor que zero. Neste caso, f deve ser (globalmente) 1-1, e f é sempre crescente ou decrescente.

Esse exercício mostra que o fato da derivada de uma função ser contínua e não anular, não implica que ela é globalmente 1-1 em $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

Exercício 2:

Considere o seguinte sistema de equações:

$$xu + yv^2 = 0$$
$$xv^3 + y^2u^6 = 0.$$

Será que elas possuem uma única solução para u, v em termos de x e y próximo de $x = 1, y = -1, u = 1, v = -1$? E para $x = 0, y = 1, u = 0, v = 0$? Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$ para $x = 1, y = -1,\ u = 1, v = -1,$ se existir.

Escrevemos as equações como $F(x, y, u, v) = (0, 0)$, onde F representa o lado das equações dadas.

Assim,

$$F(x, y, u, v) = (xu + yv^2, xv^3 + y^2u^6) = \big(F_1(x, y, u, v), F_2(x, y, u, v)\big).$$

Queremos ver se existe solução para $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. Para isso calcularemos o Jacobiano

$$det = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}.$$

Em $x = 1, y = -1, u = 1, v = -1,$ obtemos

$$det = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

e portanto, existe uma única solução para $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ próximo deste ponto. Diferenciando as equações dadas em x resulta no par das equações

$$u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

e

$$v^3 + 3xv^2\frac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$$

Avaliando no ponto selecionado $(1, -1, 1, -1)$ resulta

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

e

$$-1 + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,.$$

Eliminando $\frac{\partial v}{\partial x}$ e resolvendo para $\frac{\partial u}{\partial x}$ resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5}{9}\,.$$

Em $x = 0, y = 1, u = 0, v = 0,$ temos que o Jacobiano $J(F) = 0$. Assim, para este caso, o Teorema da Função Implícita estabelece que não podemos esperar unicidade de solução de u e v em termos de x e y.

Para realmente determinar-se a solubilidade requerer-se-ia uma análise direta não provida pelo Teorema da Função Implícita.

Exercício 3:

Seja

$$f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = tg\ x.$$

Sabemos que f é de classe

$$C^1\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ e } f'(x) = \sec^2 x \neq 0 \text{ em } \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Também $f(x)$ é crescente, logo, existe f^{-1} que é chamada de $\boldsymbol{arc\,tg}$ e $f^{-1}(y) = arc\ tg\ (y)$ é tal que

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \text{ com } y = tg\ x.$$

Mas $f'(x) = sec^2\,x$. Assim,

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, x} = \frac{1}{1+y^2}\ ,\forall y \in Dom\ f^{-1}.$$

Como

$$f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty,+\infty)$$

é injetiva e sobrejetiva, segue que $Dom\ f^{-1}(y) = (-\infty,+\infty)$.

Portanto,

$$\left(arc\ tg(y)\right)' = \frac{1}{1+y^2}\,,\forall y \in \mathbb{R}$$

ou

$$\left(arc\ tg(y)\right)' = \frac{1}{1+x^2}\,,\forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Capítulo 4

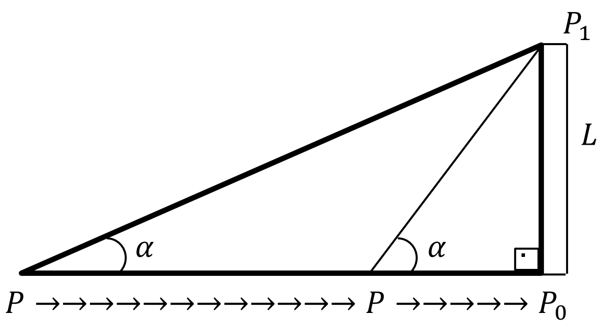
Uma Introdução ao Conceito de Limite e Derivada no Ensino Médio

4.1 Noção Intuitiva de Limite

Tomemos a seguinte situação:

Considere um observador colocado em um ponto P de uma reta horizontal, um poste vertical de altura L localizado em outro ponto P_o da reta.

Seja P_1 a extremidade superior do poste. Os segmentos PP_1 e PP_0 formam um ângulo α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Notemos que quando P se aproxima de P_0 o ângulo α aumenta. Para P próximo de P_0 o ângulo α fica próximo de $\frac{\pi}{2}$.

Quanto mais próximo P ficar de P_0, mais próximo α fica de $\frac{\pi}{2}$. Nesse caso, dizemos que o limite de α quando P tende a (se aproxima de) P_0 é $\frac{\pi}{2}$ e escrevemos:

$$\lim_{P \to P_0} \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Leia-se: "O limite de α quando P tende a P_0 é $\frac{\pi}{2}$ ". Mas note que α nunca será $\frac{\pi}{2}$, pois o observador no ponto P nunca poderá tomar exatamente o lugar do poste. Assim, o conceito de limite não se interessa pelo valor de α quando $P = P_0$ e sim, pelos valores de α para P bem próximos de P_0 .

Agora, vamos à definição de limite:

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto, possivelmente em x_0.

Suponhamos que $f(x)$ fica arbitrariamente próxima de um valor L para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0. Então dizemos que a função $f(x)$ tem limite L quando x tende para x_0, e escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

A representação "$x \to x_0$" significa que x tende a x_0, isto para significar que x se aproxima de x_0.

Exemplo 1:

Dada a função $y = f(x) = 2x + 1$, podemos observar na tabela abaixo que, ao substituirmos valores cada vez mais próximos de 1 em x, y se aproxima cada vez mais de 3.

Aproximação pela esquerda

x	$y = 2x + 1$
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98

Aproximação pela direita

x	$y = 2x + 1$
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

Logo,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

Outra notação utilizada é $f(x) \to 3$ quando $x \to 1$.

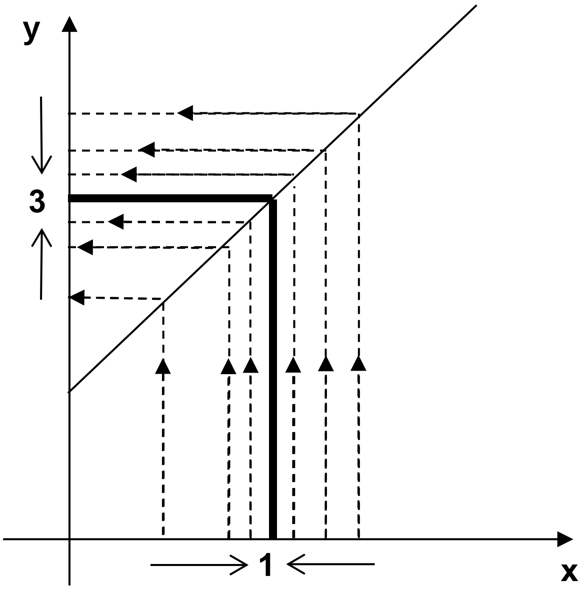
Limites Laterais

Quando fazemos x tender para x_0, com valores menores que x_0, estamos calculando o limite lateral esquerdo $(x \to {x_0}^-)$ e quando fazemos x tender para x_0, com valores maiores que x_0, estamos calculando o limite lateral direito $(x \to {x_0}^+)$.

A condição para que o limite $lim_{x \to x_0} f(x)$ exista, é que os limites laterais devem ser iguais, ou seja:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Construindo o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$, obtemos:



podemos constatar que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \,.$$

Logo, o limite existe e vale

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3 \,.$$

Agora, vamos calcular o valor da função em $x = 1$:

$$f(1) = 2.1 + 1 = 3 \,.$$

Podemos notar que, neste caso, o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é o valor da função no ponto $x = 1$. Ou seja,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3 \,.$$

Indeterminações: Há casos em que, por aplicação direta dos limites, chegamos aos resultados $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, que chamamos de **indeterminações**. Ao se deparar com esta situação temos de seguir outro caminho para calcular, caso exista, o limite e assim, "eliminar" a indeterminação.

Exemplo 2. Observando a função

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

podemos perceber que ela não é definida para $x = 1$, pois

$$g(1) = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

é uma indeterminação, mas o limite existe e é igual 3.

Vamos resolver o problema da indeterminação:

Podemos fatorar um trinômio da forma $ax^2 + bx + c$ calculando suas raízes, e reescrevendo como $a.(x - x').(x - x'')$.

Calculando as raízes de $(x^2 + x - 2)$, obtemos $x' = -2 \ e \ x'' = 1$. Logo, a forma fatorada é $(x + 2).(x - 1)$.

Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 2).(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 3$$

Observação:

Por que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) \ ?$$

Isto é, por que podemos simplificar $(x - 1)$?

A resposta é porque x está se aproximando de 1, mas x não é 1, isto é, $x - 1 \neq 0$. Logo, podemos simplificar.

Na verdade, a ideia de limite é que se deseja saber como se comporta $f(x)$ para x próximo de x_0, e não em $x = x_0$, isto é, o conceito de limite não se interessa pelo valor de $f(x)$ em $x = x_0$. Devemos ter isso sempre em mente ao calcular um limite.

Conclusão: Se o limite da função $f(x)$ quando x tende a x_0 têm valor igual ao valor da função em x_0, as funções são chamadas **contínuas** em x_0, e em caso contrário, **descontínuas**.

Nos exemplos dados, a função $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $x = 1$ e a função $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$ é descontínua em $x = 1$. Entretanto, a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$$

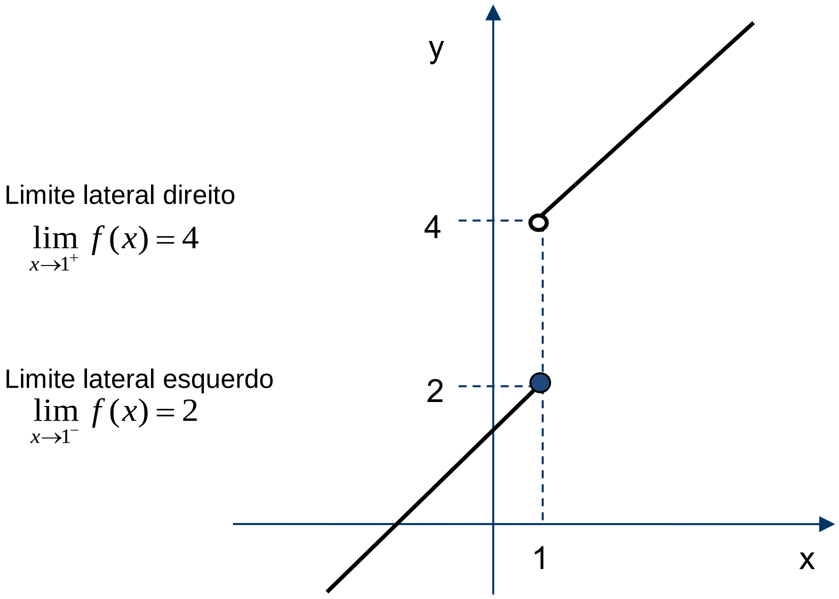
é contínua, pois

$$\lim_{x \to 1} h(x) = 3 = h(1)$$

Exemplo 3. Agora, considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & para\ x \leq 1 \\ x+3, & para\ x > 1 \end{cases}$$

Construindo o gráfico, obtemos:



Note que não existe limite de $f(x)$ quando x tende a 1, pois os limites laterais são diferentes, embora $f(1) = 2$.

4.2 Propriedades dos limites

Dadas as funções f e g, então:

$$a)\ \lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$b)\ \lim_{x \to x_0} [kf(x)] = k. \lim_{x \to x_0} f(x) \quad se\ \ k = constante$$

$$c)\ \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \ \ desde\ que\ \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

$$d)\ \lim_{x \to x_0} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$e)\ \lim_{x \to x_0} [k] = k\ , \qquad k = constante$$

isto é, o limite de uma função constante é a própria constante.

4.3 Derivadas

Seja f uma função definida em um intervalo aberto *I* e x_0 um elemento de *I*. Chama-se **derivada de f no ponto x_0** o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se esse limite existir.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad Df(x_0)$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada de **acréscimo ou incremento da variável x** relativamente ao ponto x_0 e a diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada **acréscimo ou incremento da função $\boldsymbol{f}$** relativamente ao ponto x_0.

O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

recebe o nome de **razão incremental de $\boldsymbol{f}$** relativamente ao ponto x_0.

A derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou ainda

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f é derivável no ponto x_0. Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto (a, b) quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in (a, b)$.

Exemplos:

1) Vamos calcular a derivada de $\boldsymbol{f(x) = 2x}$ no ponto $\boldsymbol{x_0 = 3}$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 2.3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x - 3}\ .$$

Fatorando o numerador obtemos:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} 2 = 2\,.$$

2) Calculemos a derivada de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$ em $\boldsymbol{x_0 = 0}$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}\ .$$

Racionalizando, obtemos:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ .$$

Esse limite tende a infinito, pois quando $x \to 0$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ cresce indefinidamente. Neste caso dizemos que

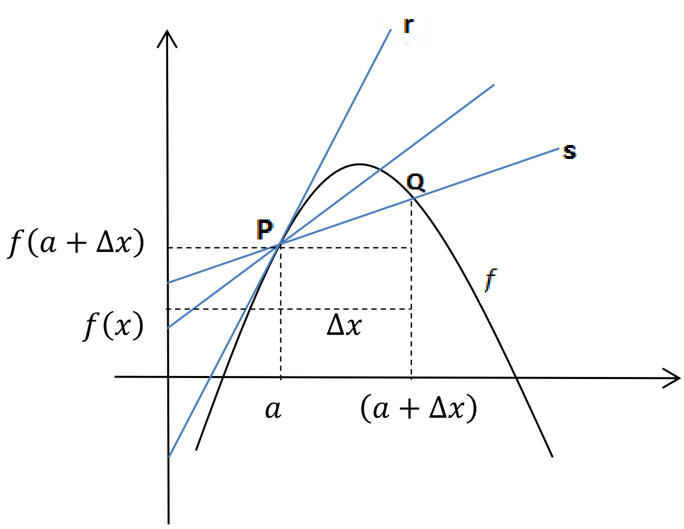
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\,.$$

Logo, não existe $f'(0)$, pois f' não está definida neste ponto (não pertence ao domínio).

4.4 Interpretação Geométrica da Derivada

Dada uma curva plana que represente o gráfico de uma função f, se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, dessa curva, então a equação da reta é dada por $y - f(a) = m.(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta dado pela taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação.

Consideremos outro ponto Q arbitrário sobre a curva, cujas coordenadas são $\big(a + \Delta x, f(a + \Delta x)\big)$. A reta que passa por $P\ e\ Q$ é chamada reta secante à curva.



Note no desenho que $L = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Façamos variar o coeficiente angular da reta secante s, fazendo Q percorrer o gráfico de f na direção de P. Isso é feito tomando Δx cada vez menor. Note que quando Q está próximo de P, a reta $\boldsymbol{s}$ está próxima de coincidir com a reta $\boldsymbol{r}$**,** ou seja, $\boldsymbol{m_s}$ tem como limite $\boldsymbol{m_r}$ *(*m_r existe, pois estamos supondo que existe a reta tangente) quando Q tende para P.

Logo, pelo desenho acima que:

$$m_s = \frac{L}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Assim:

$$m = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é o coeficiente angular (inclinação) da reta $\boldsymbol{r}$.

Portanto, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em a fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

Para determinarmos a derivada podemos utilizar algumas propriedades que facilitam os cálculos de forma mais objetiva.

4.5 Regras e Propriedades de Derivação

1. Derivada de uma Função Constante

Seja $f(x) = a$, então $f'(x) = 0$.

2. Derivada da Potência

Seja $f(x) = x^n$, onde *n* é inteiro positivo, então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

3. Derivada da Soma

Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

4. Derivada do Produto

Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$.

5. Derivada do Quociente

Se f e g são diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

4.6 Exemplos de aplicação das derivadas

1) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x}$, determine a equação da reta $\boldsymbol{r}$ tangente ao gráfico de f, no ponto $\boldsymbol{P(1,3)}$, e a represente graficamente.

Solução:

Sabemos que a inclinação da reta tangente é a derivada de f em $x = 1$.

Assim, sendo $f(x) = x^2 + 2x$, então:

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(1) = 2.1 + 2 = 2 + 2 = \mathbf{4} = \boldsymbol{m}\ (coeficiente\ angular)$.

A equação da reta tangente $\boldsymbol{r}$ é $y - y_0 = m.(x - x_0)$, ou seja,

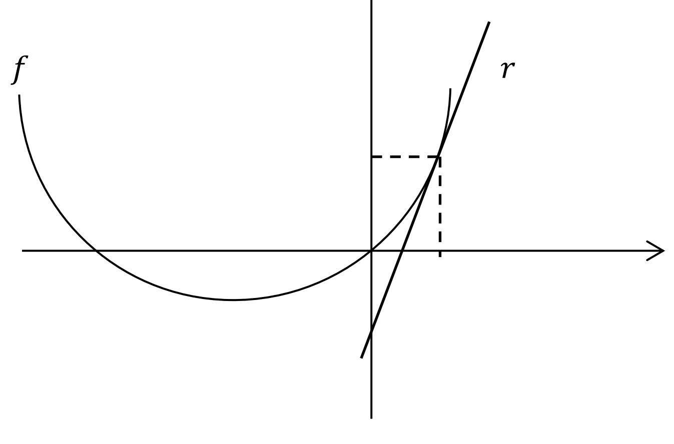
$y - 3 = 4.(x - 1)$

$y - 3 = 4x - 4$

$y = 4x + 3 - 4$

$\boldsymbol{y = 4x - 1}$.

Abaixo está a representação gráfica desta situação:



2) Um fabricante de relógios pode produzir determinado tipo de relógio a um custo de $\mathbf{R\$\ 15,00}$ por peça. Estima-se que se o preço de venda do relógio for $\boldsymbol{x}$ reais, então o número de relógios vendidos por semana será $(\mathbf{125}-\boldsymbol{x})$. Se $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ for o lucro semanal do fabricante, então determine o preço de venda do relógio para que o lucro seja máximo. Também determine o lucro máximo, representando graficamente a situação apresentada.

Solução:

Sendo o lucro dado pelo preço de venda menos o custo, então o lucro de cada relógio é dado por $(\boldsymbol{x}-\mathbf{15})$.

Como $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ é o lucro semanal do fabricante, e são vendidos $(\mathbf{125}-\boldsymbol{x})$ por semana, então:

$$P(x)=(125-x).(x-15)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{140}\boldsymbol{x}-\mathbf{1875}\ .$$

Queremos encontrar o ponto onde $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ tem um valor máximo. Este máximo ocorre no vértice da parábola que representa a função $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, isto é, ocorre no ponto do gráfico de $\boldsymbol{P}$ onde a **reta tangente é horizontal**. Em outras palavras, é onde a inclinação da reta tangente é igual a zero.

Temos que achar a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente. Para isso, calculamos a primeira derivada de $P(x)$

$$P(x)=-x^2+140x-1875$$

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{x})=-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{140}=\boldsymbol{m}\ (coeficiente\ angular)\ .$$

Então, para determinarmos o valor de $\boldsymbol{x}$ onde $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ é máximo, igualamos o coeficiente angular a zero $(m=0)$:

$$m=P'(x)=-2x+140=0$$

$$-2x+140=0$$

$$-2x=-140$$

$$\boldsymbol{x}=\mathbf{70,00}\ .$$

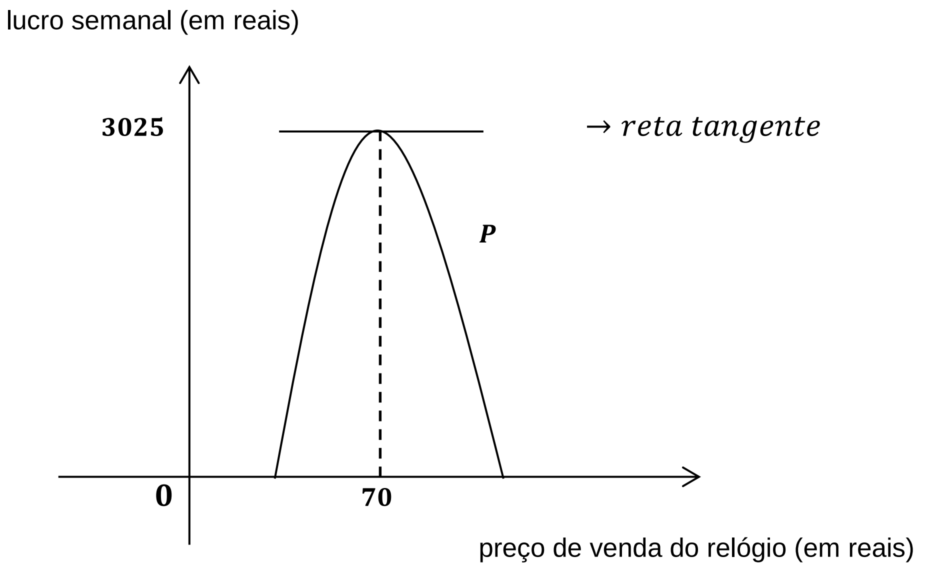
Para calcularmos o **lucro semanal máximo**, basta substituir $x = 70$ em $P(x)$:

$$P(x) = -x^2 + 140x - 1875$$

$$P(70) = -70^2 + 140.70 - 1875 = -4900 + 9800 - 1875$$

$$\boldsymbol{P(70) = 3025,00}\,.$$

Representação gráfica:



Considerações finais

Este trabalho estende os conhecimentos adquiridos no PROFMAT objetivando maior domínio dos conteúdos estudados. O caminho que tomamos para chegar ao tema principal contribui para que os leitores tenham outra alternativa para entender Diferenciação em $\mathbb{R}^n$, o Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa. As observações e notas importantes esclarecem com mais detalhes pontos muito relevantes nos conteúdos estudados. O roteiro tem início com Derivada em $\mathbb{R}$, suas propriedades e aplicações, e culmina com o Teorema da Função Inversa com aplicações na resolução de sistemas de funções no $\mathbb{R}^n$. Com isso, buscamos atingir um dos objetivos do curso, que é o de buscar o aprimoramento em nossa formação, aprofundando o domínio dos conteúdos matemáticos relevantes para nossa atuação docente. A introdução ao Cálculo n a 3ª série do Ensino Médio que sugerimos no capítulo final deste trabalho vai de encontro com a orientação do PROFMAT, que é o de aplicarmos os conhecimentos adquiridos no curso na Educação Básica.

Referências Bibliográficas

STEWART, J. **Cálculo - Vol. 1**, 6ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2009.

LIMA, E. L. **Curso de Análise, Vol. 2**. IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. Editora Harbra, São Paulo, 1987.

MARSDEN, J. H. **Elementary Classical Analysis**. Second Edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1993.

RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. SEDEGRA, Rio de Janeiro, 1971.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1**, 3ª edição. São Paulo, Harbra,1994.

IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 8,** 7ª edição. São Paulo, Atual, 2013.