Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem utilizando esportes

Leandro Silva Teixeira

Salvador - Bahia
Junho de 2014

Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem utilizando esportes

Leandro Silva Teixeira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Salvador-Bahia
Junho de 2014

Teixeira, Leandro Silva.
Análise Combinatória no Ensino Médio: Uma Abordagem Utilizando Esportes/ Leandro Silva Teixeira. 2014.
45 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1. Análise Combinatória. 2. Matemática - Estudo e Ensino. 3. Esportes . I. Yartey, Joseph Nee Anyah. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 511.6
CDU - 519.1

Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem utilizando esportes

Leandro Silva Teixeira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 06 de Junho de 2014

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. José Nélson Bastos Barbosa
UFBA

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataide do Nascimento
UNEB

A todos os meus amigos, professores, alunos e ex-alunos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia e do Colégio Estadual Vale dos Lagos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e ao Senhor Jesus pela vida e por todas as bênçãos.

Agradeço a minha mãe Angelica Sueli Silva Teixeira que sempre esteve ao meu lado, mesmo quando esteve distante. Agradeço a meu pai Jefferson de Oliveira Teixeira que soube orientar-me. Por causa dele eu fiz o Exame de Seleção do CEFET-BA, atual IFBA, onde cursei o Ensino Médio e cresci de modo que não seria possível em qualquer outra instituição de ensino.

A minhas avós Nice e Deusdedith, a minhas tias Ana Gracia, Eurídice, a toda a minha família.

A Pablo Rodrigo Rocha Melo, Ailton José de Oliveira Santos Junior e Roulien Roland Martins Ribeiro meus ex-alunos e grandes amigos que colaboraram diretamente na aprendizagem dos meus alunos do Colégio Estadual Vale dos Lagos durante o curso pré-IFBA e fizeram a diferença na vida deles. A Ravid Almeida, Anie Caroline Melo, Leonardo Alves, Victor Aruga e Queice Jones.

A Fellipe Antônio, Acélio Rodrigues, Nelson de Almeida Filho, Cleide Peixoto, Ives Lima, Lurimar e Sebastião Ribeiro Filho que são exemplos a serem seguidos.

A Bruno Blumetti, Emanuelle Maia, Bruno Tasca e Átila Passos de Menezes que fazem parte da minha vida.

A meus afilhados Erick da Costa Aguiar França e Carlos Eduardo da Costa Aguiar que são motivos de orgulho.

A todos os meus amigos.

Agradeço ao ilustre Prof. Dr. Joseph pela gentileza, disponibilidade e competência ao nortear os rumos da execução deste trabalho.

A todos queridos professores, funcionários e alunos do IFBA/*Campus* Salvador e do Colégio Estadual Vale dos Lagos. Aos colegas e professores do PROFMAT.

Por fim, quero agradecer à CAPES pelo incentivo e apoio financeiro durante este curso de Mestrado.

"O Futuro é uma palavra incerta
Pode sentar e esperar para ver
O Futuro, para quem não se entrega
Pode chorar ou se arrepender
O Futuro pode ser a arma certa
Para quem quer vencer
E o Futuro tem portas abertas
Vai lá "que é você"
Vai sem medo!
Tenha Fé!
Que sua hora vai chegar...
De brilhar!
Vai sem medo!
Tenha Fé!
Que sua hora de brilhar...
Vai chegar!
Pode ser incrível
Pode crer
Mas não pense que será fácil
De chegar!
Pode ser difícil
Sem saber
Não vai adiantar
Se não tentar!
O céu e o impossível
Podem ser
A perspectiva
A alcançar!
O mundo,
O Futuro
E tudo o que almejar
O mundo,
O Futuro
E tudo o que almejar
Vai sem medo!
Tenha Fé!
Que sua hora vai chegar...
De brilhar!
Vai sem medo!
Tenha Fé!
Que sua hora de brilhar...
Vai chegar!".

Pablo Rodrigo Rocha Melo

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia de ensino da Análise Combinatória no nível médio utilizando a aplicação dos conteúdos abordados nos esportes. Nessa sugestão metodológica, o professor parte de problemas motivadores relativos às diversas modalidades esportivas praticadas pelos estudantes para que, partindo da situação concreta, os discentes possam construir o conhecimento no que se refere ao assunto em questão.

A Análise Combinatória possui muitas aplicações na área esportiva (assim como em diversas outras áreas). Desse modo, o autor sugere que o esporte seja utilizado como ponto de partida para a compreensão das aplicações das ferramentas combinatórias. Desse modo, ao mesmo tempo que estudam um conteúdo abstrato, os alunos podem conhecer sua aplicação concreta. Afinal, os conhecimentos da Matemática resolvem problemas reais.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Ensino da Matemática; Esportes; Ferramentas Combinatórias.

Abstract

This paper aims to present a methodology for teaching at the secondary level Combinatorial Analysis using the application of content covered in sports. In this methodological suggestion, Professor begins with motivating problems relating to various sports practiced by the students so that, starting from the concrete situation, learners can construct knowledge with regard to the subject matter.

Combinatorial Analysis has many applications in sports (as well as several other areas). Thus, the author suggests that the sport is used as a starting point for understanding the applications of combinatorial tools. Thus, while studying an abstract content, students can meet their specific application. After all, knowledge of mathematics solve real problems.

Keywords: Combinatorial Analysis, Mathematics Teaching, Sports; Combinatorial Tools.

Índice

Introdução **1**

1 O Ensino da Matemática **4**

2 Uma Metodologia para o Ensino da Análise Combinatória **7**

2.1 Princípio Fundamental da Contagem (parte A) 11
2.2 Princípio Fundamental da Contagem (parte B) 12
2.3 Fatorial 15
2.4 Arranjo Simples 17
2.5 Arranjo com Repetição 18
2.6 Permutação 20
2.7 Combinação Simples 21
2.8 Permutação com Elementos Repetidos 25
2.9 Partições Ordenadas 30
2.10 Partições não Ordenadas 31
2.11 Soluções Inteiras Não Negativas de uma Equação Linear 32
2.12 Outras Ferramentas Combinatórias 34
2.12.1 Inclusão-Exclusão 34
2.12.2 Princípio da Casa-de-Pombos 35

3 Aplicações da Análise Combinatória no Esporte **37**

3.1 Número de Jogos do Campeonato Baiano de Futebol 37
3.2 Número de Jogos da Copa do Nordeste 38
3.3 Número de Modos de Escalar um Time de Basquete 39
3.4 Número de Jogos do Campeonato Brasileiro - Série A 40
3.5 Número de Jogos de um Torneio Esportivo Qualquer 41
3.5.1 Pontos Corridos em Jogos de Ida 41
3.5.2 Pontos Corridos em Jogos de Ida e Volta 42
3.5.3 Mata-Mata 42
3.5.4 Outras Formas de Disputa 43

Introdução

A Análise Combinatória consiste num desafio para professores e alunos no Ensino Médio. Os discentes por vezes encontram dificuldades na interpretação das situações propostas. A distinção entre arranjo e combinação em exemplos práticos nem sempre ocorre de forma simples e clara para os estudantes. Por outro lado, os docentes precisam auxiliá-los na compreensão dos conteúdos ao mesmo tempo que devem mostrar que o importante passa longe de decorar fórmulas, mas sim, aprender a interpretar e desenvolver um raciocínio de modo lógico em meio a uma dada situação.

A utilização de exemplos práticos e próximos da realidade dos estudantes auxilia na clara e simples compreensão dos conteúdos da Análise Combinatória no Ensino Médio. A partir de uma situação concreta e específica, o professor pode iniciar um bom entendimento por parte do estudante para a construção do conhecimento de forma geral e abstrata. No campo esportivo, pode-se encontrar diversas contextualizações para a introdução dos conteúdos necessários ao aluno do Ensino Médio.

Com o Brasil como país sede de uma Copa do Mundo de futebol, o citado esporte, cada vez mais, passa a fazer parte do cotidiano dos estudantes (assim como da população brasileira em geral). Desse modo, surge mais uma importante ferramenta ao ensino da Matemática, neste caso, mais especificamente, da Análise Combinatória. A oportunidade de saber de quantas formas diferentes o sorteio dos grupos de uma Copa do Mundo pode acabar ou de quantas maneiras distintas a Seleção Brasileira pode ser escalada deve despertar o interesse do estudante pelo estudo dos conteúdos que servem de base para solucionar tais questionamentos.

Nesse sentido, a Matemática deve mostrar-se presente como uma ciência com conteúdos abstratos que surge para resolver problemas concretos. O esporte se faz presente na vida dos brasileiros. Por que não usá-lo como incentivo ao aprendizado da Matemática? Por que não aproveitar situações do cotidiano dos alunos para aproximar teoria e prática e alavancar o aproveitamento deles?

Por outro lado, quando comparado a outros segmentos da Matemática, existem poucos livros de Análise Combinatória no Estado da Bahia. A maior parte das referências bibliográficas desse ramo se encontra em livros didáticos de Ensino Médio. Recentemente, durante a Bienal do Livro na Bahia, o presente pesquisador buscou obras que versassem sobre a Análise Combinatória. Mesmo em stands de Universidades, não havia livro algum cujo conteúdo principal fosse o citado.

Não há dúvida de que a carência de obras que versem especificamente sobre Análise Combinatória pode prejudicar o aproveitamento dos estudantes. A busca por diferentes fontes faz parte do processo de aprendizagem e proporciona ao discente amadurecimento cognitivo. Além disso, com diversas opções, o aluno poderia escolher a que melhor satisfaz suas necessidades de aprendizagem.

O objetivo principal dessa dissertação consiste numa proposta de metodologia de ensino da Análise Combinatória de forma que se use os eventos esportivos que ocorrem em nosso país como ferramenta de aprendizagem. Seja numa Copa do Mundo de Futebol ou nos Jogos Olímpicos, a Matemática marca presença no esporte e, principalmente, nas vidas da população.

O esporte desperta o interesse dos estudantes. Se o professor aproveitar tal interesse, pode quebrar muitas barreiras que afastam o aluno da Matemática e aproximá-lo dessa linda ciência através da experiência e do cotidiano do próprio discente. Quais dos meninos e meninas que gostam de esportes coletivos não prestaria mais atenção se o conteúdo ensinado pudesse ajudá-los a melhorar o desempenho de suas equipes? Quantos deles não se interessariam em saber de quantas formas podem organizar o time em quadra no campeonato de futsal do colégio? Não achariam atraente uma ciência que eles poderiam aplicar ou ao menos perceber em seu cotidiano?

A metodologia aqui proposta leva em conta a realidade do aluno, mais especificamente, sua relação com o esporte. Os conhecimentos adquiridos no cotidiano do estudante torna-se imprescindível como ponto de partida para a apresentação dos conceitos formais e dos teoremas matemáticos em questão. Segundo Huete e Bravo (2006)

> o processo de ensino e aprendizagem da matemática inicia a partir da intuição e progressivamente aproxima-se da educação. Essa forma de construir o conhecimento matemático relega, em parte, qualquer tentativa de se apropriar de modo mecânico de procedimentos e algoritmos para a resolução de problemas reais. Por outro lado, vincula tal procedimento a um planejamento de seu ensino e aprendizagem fundamentados no nível de cognição dos alunos.

Dessa forma, traz-se uma proposta de ensino específica da Análise Combinatória na qual se utiliza o esporte, paixão de muitos, como meio para o aprendizado das técnicas de contagem no Ensino Médio. Essa metodologia deve aproximar o aluno aos conteúdos abordados em sala e tornar as aulas mais agradáveis, elevando o desempenho dos discentes.

Este trabalho se divide em três capítulos. O primeiro capítulo, *"O Ensino da Matemática"*, versa de modo geral sobre como deve ocorrer o ensino da citada ciência, aproximando os conteúdos abordados à realidade do aluno e levando em consideração as experiências dos estudantes. No segundo capítulo, *"Uma Metodologia para o Ensino da Análise Combinatória"*, o autor sugere uma metodologia para o ensino da Análise Combinatória partindo de situações problemas relacionadas ao esporte. Por fim, no terceiro capítulo, *"Aplicações da Análise Combinatória no Esporte"*, o pesquisador cita algumas situações reais nas quais os conhecimentos anteriormente citados encontram aplicação.

Capítulo 1

O Ensino da Matemática

A Matemática se diferencia por seu aspecto formal e abstrato e por possuir natureza dedutiva. Entretanto, sua construção se associa a uma atividade concreta sobre a qual o estudante necessita de intuição. Nesse sentido, torna-se uma ciência mais construtiva que dedutiva, com caráter de representação, explicação e previsão da realidade.

O pensamento matemático aumenta o entendimento daquilo que nos rodeia. De acordo com Sánchez Huete e Bravo (2006),

> Esta é a proposição do seu objetivo, o qual justificaria nossa presença como docentes caso conseguíssemos garantir nos alunos sua própria capacidade de pensar, de realizar perguntas com fundamento, de não se bloquear com certas conjecturas das quais é difícil esquivar-se, mas não impossível. (Sánchez Huete e Bravo, 2006, p. 15)

Desta concepção para o entendimento da Matemática surgem os Princípios da Matemática Realista que contribuem para a bagagem cultural das pessoas, tentam salvar o dualismo saber-e-utilizar Matemática e não devem ser separados das demais ciências.

As ciências do pensamento e do raciocínio lógico possuem utilidade prática. Essa utlidade pode ser constatada pela aplicabilidade em outras disciplinas ou pelo desenvolvimento de habilidades básicas, resultando na resolução de problemas.

Com isso, surgem dois fatores imprescindíveis para o processo de instrução da Matemática: o uso e incentivo de procedimentos intuitivos para construir formalmente o conhecimento matemático e a análise dos alunos em relação aos conhecimentos prévios que possuem e o grau de dificuldade que poderiam manifestar pelo desenvolvimento intelectual alcançado.

O ensino da Matemática, se baseado como imitação de modelos, corre o risco de ter sua utilidade limitada, mostrando-se eficaz apenas em situações semelhantes àquelas às de sua apreensão.

Toda disciplina curricular que possui caráter de cientificidade encontra-se hierarquizada em seu conteúdo. Uma das dificuldades do processo de ensino da Matemática consiste em sua natureza hierarquizada, bem como no problema de definir precisamente hierarquias para todos os conteúdos ensinados.

A aprendizagem matemática aponta uma sequência temporal específica, na qual alguns conceitos encontram-se articulados sobre o conhecimento prévio de outros. Por exemplo, os números e as unidades de medidas devem ser ensinados antes de geometria plana, que, por sua vez, deve preceder a geometria espacial.

Desse modo, a instrução da Matemática se condiciona por sua estrutura interna. A construção de novos conhecimentos obriga a voltar periodicamente a conteúdos anteriores com níveis de complexidade, abstração e formalização maiores. De modo mais operacional, deve-se designar o objetivo a alcançar. Após essa etapa, analisa-se a tarefa requerida para se definir quais capacidades prévias se fazem necessárias para a consecução do objetivo final.

A via metodológica necessária para a esta construção se constitui em outra característica do processo de ensino da Matemática. Entretanto, não podemos nos referir a uma via específica como sendo a melhor (tampouco única). Apenas a aproximação pode adequar-se mais à proposta e dependerá do modelo cognitivo da cada aluno. Sánchez Huete e Bravo (2006) afirmam que:

> A concepção construtivista do processo de ensino/aprendizagem afirma que é o aluno quem constroi suas próprias aprendizagens, sem esquecer-se de ajudas mediadoras de outros fatores intervenientes: professor, materiais curriculares... Tal processo não é uma oferta de conteúdos que qualquer aluno, em qualquer circunstância, deva integrar a sua bagagem acadêmica; necessitam-se, antes, estratégias adequadas para satisfazer a necessidade de aprendizagem de cada aluno. (Sánchez Huete e Bravo, 2006, p. 17)

Quando o estudante inicia a construção de conceitos matemáticos, o faz tornando-os coesos com a situação concreta na qual se apresentam. Isto subsidia a apresentação formal a partir do próprio ambiente e possibilita a argumentação sobre situações abstratas com o devido critério.

A diversidade dos alunos aos quais os conhecimentos são dirigidos oferece diferenças nas capacidades e nas motivações para aprender. Por isso, faz-se necessária uma adaptação individualizada de objetivos, conteúdos e métodos de ensino para que se facilite o ajuste dos mesmos às necessidades de aprendizagem de cada um. A imposição de um método de ensino para todos inviabilizaria a absorção dos conteúdos ensinados. Cada um possui seu estilo de aprendizagem e cada conteúdo, sua particular forma de ensino.

Deve-se enfrentar as dificuldades visando reduzi-las o máximo o possível, buscando características da metodologia que possibilitem a adequação entre os princípios da aprendizagem e o estilo de cada aluno. Essas características podem ser enumeradas, de acordo com Huete e Bravo (2006), da seguinte forma:

- a globalização (facilita a relação entre os conteúdos);
- a participação ativa;
- a motivação;
- a ausência de metodologias unidirecionais.

Esse entendimento supõe uma capacidade específica de reconhecer e usar um conceito matemático em diferentes situações. Primeiramente, a aprendizagem da Matemática tem como finalidade facilitar os meios para raciocinar e pensar melhor. Na prática, a organização curricular busca referência no valor social, o qual serve para o enfrentamento das necessidades da vida.

A aplicação da Matemática possui um extenso campo de atuação, como, por exemplo, na agricultura, biologia, física, engenharia, medicina, política, atividades tecnológicas, química, esportes (que daremos ênfase nos próximos capítulos), e em vários outros campos do conhecimento. Não se pode negar que os conhecimentos matemáticos são utilizados a todo instante. Também não há dúvida de que a Matemática encontra-se impregnada nas situações práticas. Ademais, uma formação matemática acostuma os alunos a analisarem fatos concretos para traduzi-los para uma linguagem mais abstrata, que favorece uma capacidade de raciocínio forte (Mialaret, 1977, p. 13).

Muitos profissionais da educação matemática enxergam no ensino do cálculo o meio de proporcionar ao estudante habilidades que auxiliem na resolução de problemas práticos. Os propósitos devem ir além e insistir na formação intelectual que propicia um bom ensino da Matemática, que visa elaborar técnicas para resolução de problemas práticos em geral e desenvolver estratégias lógicas que permitam aos alunos aproximarem-se de campos amplos do pensamento e da vida (Aizpun, 1983a, p. 910).

Apesar de poder ser transferida para outros campos do conhecimento, a lógica matemática não necessariamente consistirá na mesma que a de qualquer outra atividade mental. Todas as disciplinas curriculares têm sua importância, contudo uma formação matemática proporciona ao indivíduo um enriquecimento conceitual difícil de ser oferecido por outra disciplina (Sánchez Huete e Bravo, 2006, p. 18 e 19).

No ensino da Matemática, a contextualização dos conteúdos a serem abordados constitui ferramenta de fundamental importância para o seu melhor entendimento por parte dos alunos. Primeiramente, faz-se necessário conhecer a realidade da turma com a qual se trabalha. A contextualização deve aplicar-se à realidade dos discentes, caso contrário, ela se torna sem significado para eles. Além disso, o que se propõe nos exemplos dados deve estar claro e ter aplicação objetiva na resolução das atividades propostas.

Capítulo 2

Uma Metodologia para o Ensino da Análise Combinatória

Começando pela definição de Análise Combinatória e partindo para o Princípio Fundamental da Contagem, o ensino deste citado ramo da Matemática deve ocorrer de forma contextualizada. Os problemas que envolvem contagem têm cunho prático, o que facilita que se parta de casos concretos para que se chegue à abstração.

De acordo com Hazzan (2004):

> "A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições. (Hazzan, 2004, pg 1)

Em alguns casos, esses métodos parecem desnecessários. Contudo, quando o número de elementos em questão cresce bastante, tais técnicas facilitam muito o processo de contagem.

O estudo do Princípio Fundamental da Contagem deve ser introduzido com um problema prático. Preferencialmente, essa contextualização precisa aplicar-se à realidade dos estudantes. De quantas formas diferentes eles podem se vestir para sair sexta à noite? De quantas formas eles podem escalar o time de futsal deles nas partidas do campeonato escolar?

Com isso, além de conseguir a atenção deles, uma vez que a contextualização ocorre com fatos que se aproximam da realidade deles, os alunos percebem uma aplicação prática do conteúdo estudado. A partir daí, podemos apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo) como uma ferramenta para solucionar problemas dessa natureza.

Como a abordagem esportiva se destaca atualmente em nosso país devido à Copa do Mundo da FIFA 2014 e aos Jogos Olímpicos 2016, pode-se começar pelo exemplo relacionado ao time de futsal (mesmo este não consistindo em esporte olímpico atualmente). Inicialmente, faz-se importante explicar conceitos básicos da problemática. No caso do futsal, fale-se das posições, já que escalaremos o time.

O time de futsal titular é formado por um goleiro, um fixo, um ala direito, um ala esquerdo e um pivô. O time da presente turma do terceiro ano do Ensino Médio dispõe de três goleiros, dois fixos, dois alas direitos, três alas esquerdos e quatro pivôs. De quantas formas pode-se escalar o time titular para o jogo de estreia do campeonato escolar?

A partir desse momento, os estudantes dispõem de um problema prático, aplicável à sua realidade e que pode ser resolvido com as ferramentas da Análise Combinatória. Usando o Princípio Fundamental da Contagem, tem-se uma solução simples. Provavelmente, alguns deles responderão corretamente à pergunta antes de saber que o cálculo mental realizado se trata do conteúdo a ser apresentado. Então, a partir da contextualização, o professor deve iniciar a abstração.

Lema 2.0.1. *Consideremos os conjuntos* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. *Podemos formar* $m \cdot n$ *pares ordenados* (a_i, b_j) *em que* $a_i \in A$ *e* $b_j \in B$.

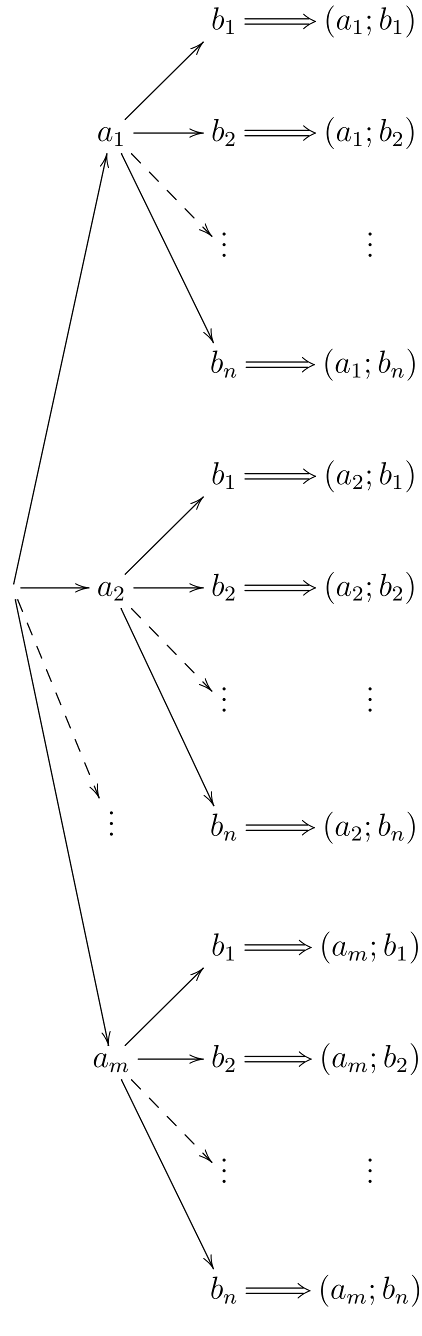
Demonstração: Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Teremos:

$$\begin{array}{c} m \\ \text{linhas} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccc} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \ldots, & (a_1, b_n) & \rightarrow & n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \ldots, & (a_2, b_n) & \rightarrow & n \text{ pares} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (a_m, b_1), & (a_m, b_2), & \ldots, & (a_m, b_n) & \rightarrow & n \text{ pares} \end{array} \right.$$

O número de pares ordenados será:

$$\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$$

O diagrama de sequência (ou diagrama de árvore) constitui outra forma de visualização dos pares ordenados:



$\square$

Como exemplo, pode-se considerar apenas duas posições a se definir na escalação do time titular de futsal para o jogo de estreia. Caso estivessem definidos o goleiro e os

alas direito e esquerdo, de quantas formas poder-se-ia escalar o time, sabendo que há dois fixos e quatro pivôs?

Temos dois conjuntos: o de fixos, com dois elementos, e o de pivôs, com quatro elementos. Pelo Lema 2.0.1, o número de pares ordenados formados com um elemento do conjunto de fixos e um do conjunto de pivôs será $2 \cdot 4 = 8$.

Portanto, nessas condições, haveria 8 formas de escalar o time titular para o jogo de estreia.

Lema 2.0.2. *O número de pares ordenados* (a_i, a_j) *tais que* $a_i \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, a_j \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *(para* $i \neq j$*) é* $m \cdot (m-1)$.

Demonstração: Fixemos o primeiro elemento do par e variemos o segundo:

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{ccccccc} (a_1, a_2), & (a_1, a_3), & \ldots, & (a_1, a_m) & \rightarrow & (m-1) \text{ pares} \\ (a_2, a_1), & (a_2, a_3), & \ldots, & (a_2, a_m) & \rightarrow & (m-1) \text{ pares} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (a_m, a_1), & (a_m, a_2), & \ldots, & (a_m, a_{m-1}) & \rightarrow & (m-1) \text{ pares} \end{array} \right.$$

Teremos o seguinte número de pares ordenados:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m \text{ vezes}} = m \cdot (m-1)$$

□

Para exemplificar o presente Lema, sem fugir do caso inicial tomado como motivador, suponhamos que o treinador escalou o time e agora distribuirá os uniformes. O goleiro titular usará a número 1, o ala direito, a número 2 e o ala esquerdo, a 3. Os demais titulares poderão escolher camisas com os números de 4 a 11. De quantas formas, pode-se distribuir as camisas para o fixo e para o pivô titulares?

Primeiro, observe que a camisa de número escolhida pelo fixo não poderá ser escolhida pelo pivô. Há 8 camisas numeradas. Desse modo, pelo Lema 2.0.2, o número de pares ordenados que representa o total de modos que o fixo e o pivô titulares podem escolher suas camisas numeradas é $8 \cdot 7 = 56$.

Logo, pode-se distribuir as camisas de 56 maneiras diferentes para o fixo e para o pivô que começarão no time titular.

A partir de agora, dado um conjunto A, o número de elementos de A será denotado por $\#A$.

2.1 Princípio Fundamental da Contagem (parte A)

Teorema 2.1.1. *Consideremos r conjuntos*

$$\begin{array}{ll} A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} & \#A = n_1 \\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} & \#B = n_2 \\ & \vdots \\ R = \{r_1, r_2, \ldots, r_{n_r}\} & \#R = n_r \end{array}$$

então, a quantidade de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) da forma $(a_i, b_j, \ldots, r_k)$, nas quais

$$a_i \in A, b_j \in B, \ldots, r_k \in R,$$

dá-se por:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r.$$

Demonstração: (Princípio da Indução Finita)

Quando $r = 2$, cairemos no Lema 1.

Vamos supor que o princípio seja válido para o inteiro $(r-1)$ e provemos que ele também vale para o inteiro r.

Para $(r-1)$, consideremos as sequências de $(r-1)$ elementos $(a_i, b_j, \ldots, q_l)$.

Por hipótese de indução, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}$ sequências e n_r elementos que pertencem ao conjunto R. Cada uma das sequências $(a_i, b_j, \ldots, q_l, r_k)$ consiste de uma sequência $(a_i, b_j, \ldots, q_l)$ e um elemento $r_k \in R$. Logo, pelo Lema 2.0.1, a quantidade de sequências do tipo $(a_i, b_j, \ldots, q_l, r_k)$ se dá por:

$$(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}) \cdot n_k = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \cdot n_k$$

Conclui-se que o teorema vale para todo r natural, $r \geq 2$. $\square$

Agora que o professor apresentou formalmente as ferramentas para responder ao questionamento levantado a respeito do número de formas que se pode escalar o time titular para a estreia do campeonato escolar, deve-se voltar à pergunta.

O time de futsal titular é formado por um goleiro, um fixo, um ala direito, um ala esquerdo e um pivô. O time da presente turma do terceiro ano do Ensino Médio dispõe de três goleiros, dois fixos, dois alas direitos, três alas esquerdos e quatro pivôs. De quantas formas pode-se escalar o time titular para o jogo de estreia do campeonato escolar?

Trata-se de um exemplo do princípio fundamental da contagem. De acordo com o Teorema 2.1.1, o resultado procurado é:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 144.$$

Logo, o time da turma do terceiro ano do Ensino Médio dispõe de 144 forma de escalar o time titular para a estreia do campeonato escolar.

2.2 Princípio Fundamental da Contagem (parte B)

Escalado o time, o treinador poderia distribuir as camisas, com os respectivos números de cada jogador. Considerando o time titular definido, que o goleiro vestirá a número 1 e que os demais titulares usarão camisas com numeração de 2 a 11, de quantas formas as camisas pode-se distribuir as camisas?

Com mais esse exemplo, consequência do anterior, o professor pode apresentar mais uma ferramenta da Análise Combinatória que ajudará a resolver a situação-problema, a parte B do Princípio Fundamental da Contagem.

Teorema 2.2.1. *Consideremos um conjunto A com $m (m \geq 2)$ elementos. Então o números de r-uplas ordenadas formadas com elementos distintos dois a dois de A é:*

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \ fatores}$$

Isto é, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, o número de sequências da forma $(a_j, a_l, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$, com *(i)* $a_i \in A$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

(ii) $a_i \neq a_p$, *para* $i \neq p$

é

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r\ fatores}$$

Demonstração: A demonstração se dará pelo princípio da indução finita, a exemplo da parte A.

Se $r = 2$, pelo Lema 2.0.2, o teorema vale.

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro $(r-1)$, vamos mostrar que ela também o é para o inteiro r.

Para $(r-1)$, tomemos as sequências de $(r-1)$ elementos $(a_i, a_j, \ldots, a_l)$ pertencentes a A todos distintos dois a dois. Por hipótese de indução, existem $m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1-1)]$ sequências e $[m-(r-1)]$ elementos em A distintos dos elementos que formam a sequência anterior.

Cada sequência $(a_i, a_j, \ldots, a_l, a_k)$ consiste de uma sequência $(a_i, a_j, \ldots, a_l)$ e de um elemento $a_k \in A$ e distinto dos elementos da sequência anterior. pelo Lema 2.0.2, conclui-se que o número de sequências do tipo $(a_i, a_j, \ldots, a_l, a_k)$ formadas com r elementos de A distintos dois a dois se dá por:

$$(m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1-1)]) \cdot [m-(r-1)] = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-2)] \cdot [m-(r-1)]$$

Decorre que o teorema é válido para todo natural $r \geq 2$. □

Assim, pode-se responder à pergunta anterior.

Escalado o time, o treinador poderia distribuir as camisas, com os respectivos números de cada jogador. Considerando o time titular definido, que o goleiro vestirá a número 1 e que os demais titulares usarão camisas com numeração de 2 a 11, de quantas formas as camisas pode-se distribuir as camisas?

Distribuir-se-á camisas para quatro jogadores. Há camisas numeradas de 2 a 11, ou seja, 10 camisas. Tem-se $m = 10$ e $r = 4$. Nesse caso, o número de formas que se pode distribuir as camisas é

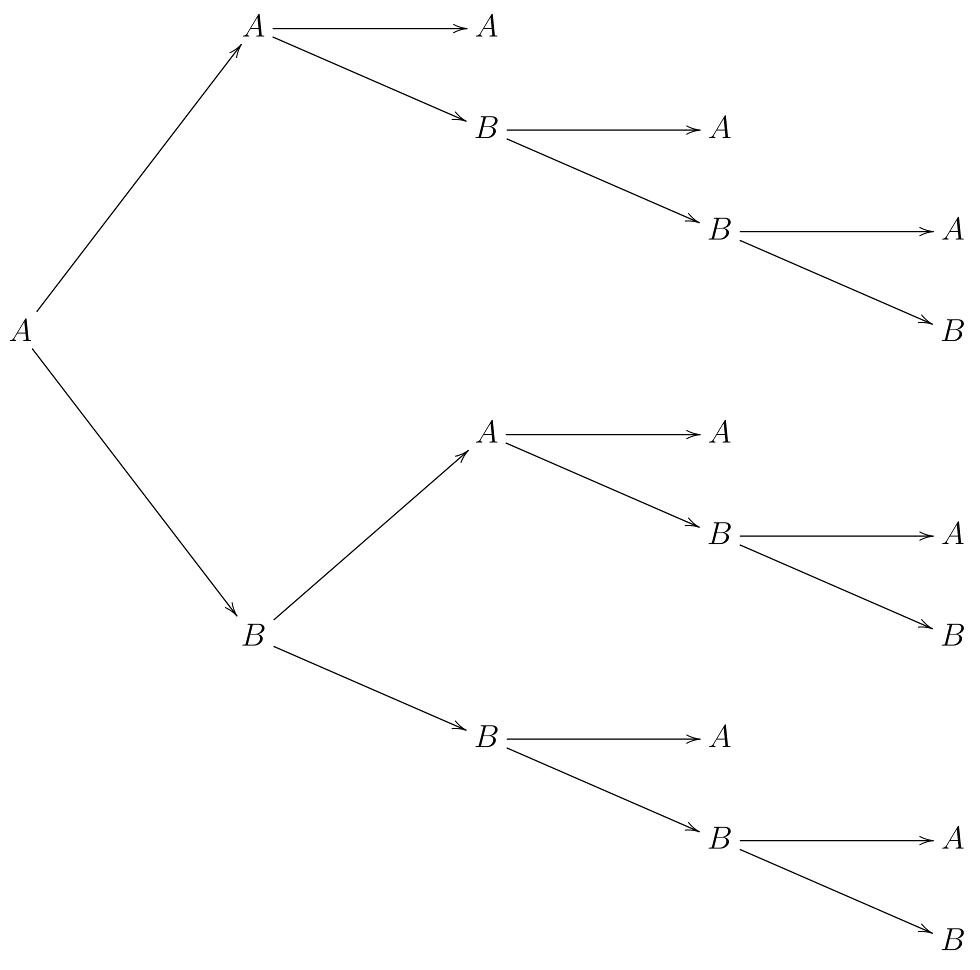
$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

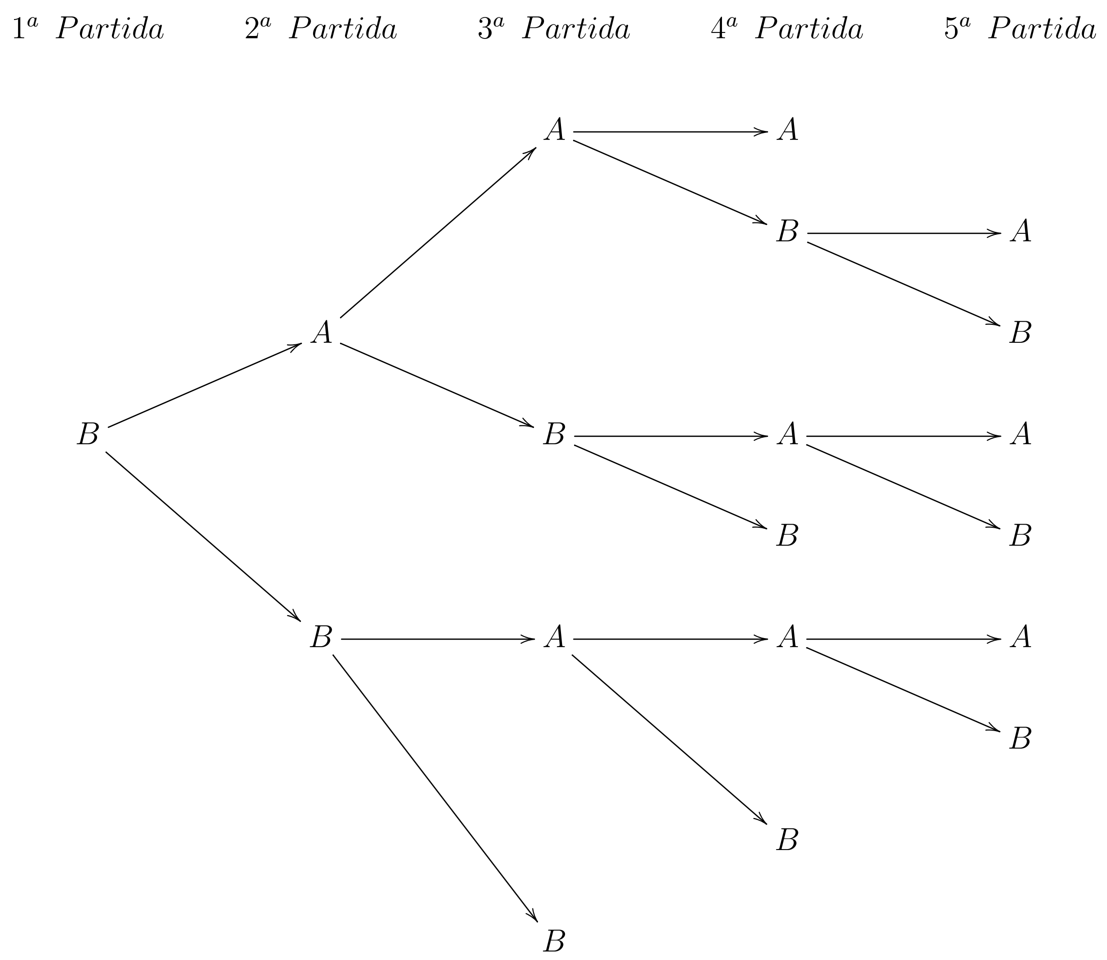
Feita a apresentação formal dos conteúdos referentes ao Princípio Fundamental da Contagem, o professor deve utilizar mais exemplos práticos, preferencialmente, próximos da realidade dos alunos (sejam exemplos relacionados ao esporte ou não). Faz-se importante despertar no estudante a percepção de que os assuntos estudados em sala de aula durante as aulas de Análise Combinatória se mostram presentes no cotidiano de cada um deles.

Deve-se, também, fazer a observação de que nem sempre os conjuntos cujos elementos queremos contar podem ser calculados através do Princípio Fundamental da Contagem. Isso ocorre porque, em alguns casos, tais conjuntos podem ter números diferentes de elementos. Em tais situações, o uso do diagrama de árvore pode proporcionar uma contagem exata.

Os times A e B se enfrentam na final do Campeonato Municipal Escolar de Vôlei de Salvador. O campeão sairá da disputa melhor de cinco. Isso significa que o time precisa vencer três partidas para sagrar-se campeão e, caso aconteça a terceira vitória do mesmo time, não ocorre mais partidas. Por exemplo, se o time A vencesse as três primeiras, não haveria nem a quarta, nem a quinta partida. Nessas condições, de quantas formas o time A pode sagrar-se campeão municipal entre as escolas de Salvador?

1^a *Partida* 2^a *Partida* 3^a *Partida* 4^a *Partida* 5^a *Partida*





Com base no diagrama de árvore, conclui-se que há 10 formas do time A sagrar-se campeão municipal entre as escolas de Salvador.

O princípio fundamental da contagem fornece a ferramenta básica para o estudo da Análise Combinatória. Através dele, pode-se definir outros modos de formar agrupamentos e deduzir fórmulas que facilitem a contagem deles.

2.3 Fatorial

Antes de continuar a apresentar as ferramentas da Análise Combinatória, o professor deve introduzir a noção de fatorial. Primeiramente, o docente deve explicar a finalidade dessa definição. Algumas fórmulas ganham notação mais simples quando usado o símbolo fatorial, inclusive as que constituem objetos de estudo deste ramo da Matemática.

Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos fatorial de m (e indicamos por $m!$) por meio da relação:

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } m \geq 2$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1.$$

Esse conceito, inicialmente, pode confundir alguns alunos. Por isso, exemplos numéricos se tornam imprescindíveis. Além disso, as definições de 1! e 0! devem ser justificadas.

Indica-se que o professor comece com exemplos simples, como $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Provavelmente, com três ou quatro exemplos, a turma sentirá mais segurança para prosseguir o conteúdo.

O próximo passo consiste em apresentar a seguinte propriedade:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

E justificá-lo:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1}_{n!} = (n+1)n!$$

Com isso, pode-se justificar as as definições de 1! e 0!.

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$2! = 2 \cdot 1!$$

Logo, $2 \cdot 1! = 2. \therefore 1! = 1$. E $1! = 1$ $1! = 1 \cdot 0!$

Logo,

$$1 \cdot 0! = 1 \therefore 0! = 1.$$

Além disso, o docente deve mostrar situações nas quais a propriedade apresentada simplifica os cálculos a realizar-se.

$$\frac{15!}{14!} = \frac{15 \cdot 14!}{14!} = 15$$

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Dito isso, indica-se que o professor prossiga o assunto com arranjo simples.

2.4 Arranjo Simples

Antes de apresentar uma definição formal de arranjo simples, faz-se interessante que o professor introduza o conteúdo através de uma situação problema. Mais uma vez, o esporte consiste numa interessante ferramenta.

Dez atletas disputam uma Maratona. Os cinco primeiros terão suas colocações registradas. Quantos resultados diferentes tem essa Maratona?

Para resolver problemas como esse, faz-se necessário recorrer à Análise Combinatória. No caso particular citado, tem-se um exemplo de arranjo simples. Nesse momento, o docente deve definir formalmente o conteúdo.

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r $(1 \leq r \leq m)$ a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, todos distintos.

O docente precisa destacar que no caso do arranjo, a ordem dos elementos possui importância. Além disso, o simples significa sem repetição.

Teorema 2.4.1. *O número de subconjuntos ordenados com k elementos de um conjunto com m elementos é $m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$.*

Pode-se mostrar o teorema já com a noção de arranjo simples (uma vez que este se encontra bem definido). Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $A_{m,k}$ o número de arranjos de m elementos tomados k a k.

Cada sequência de k elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos, constitui um arranjo.

Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de arranjos $A_{m,k}$ pode calcular-se da seguinte forma:

$$A_{m,k} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(k-1)]}_{k \text{ fatores}}$$

Utilizando a notação do fatorial, tem-se:

$$A_{m,k} = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Particularmente, quando $k = 1$, tem-se $A_{m,1} = m$. O professor deve destacar que, necessariamente, $1 \leq k \leq m$.

Agora, o docente deve voltar à situação problema e aplicar o conteúdo ensinado.

Dez atletas disputam uma Maratona. Os cinco primeiros terão suas colocações registradas. Quantos resultados diferentes tem essa Maratona?

Os estudantes devem perceber que o conjunto em questão consiste nos dez atletas. Os subconjuntos se formarão com os cinco primeiros que terminarem a Maratona. Os elementos do subconjunto não podem repetir-se, uma vez que o atleta que chegar em primeiro não terá outra colocação. Por fim, a ordem na qual os atletas terminam a Maratona altera o resultado final da competição.

Assim, o contexto consiste em exemplo de arranjo simples. O número de resultados diferentes será:

$$A_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

O exemplo inicial deve constituir base para a introdução do conteúdo. Após a apresentação formal da noção de arranjo simples, torna-se interessante a resolução de diversas questões relacionadas. O professor deve solicitar que os próprios estudantes pensem em situações nas quais o presente assunto seja aplicado, preferencialmente, situações que façam parte do cotidiano deles.

2.5 Arranjo com Repetição

Jornalistas de cinco países distintos, Brasil, Espanha, Argentina, Itália e Inglaterra, responderão a uma pesquisa opinando em relação ao título da Copa do Mundo 2014, sediada no Brasil. Formar-se-á um quadro no qual cada um deles apontará a seleção considerada por si favorita. Cada jornalista registrará no quadro sua resposta, no espaço reservado para a sua nacionalidade. Sabendo que 32 seleções disputam a Copa do Mundo e que eles podem escolher qualquer uma delas como favorita, quantos são os resultados possíveis dessa pesquisa?

A situação acima constitui um exemplo (dentre vários) de como chamar a atenção dos estudantes para o assunto abordado. Num país como o Brasil, onde boa parte da população gosta de futebol, os educadores podem aproveitar essa paixão para tornar o estudo mais atrativo e, com isso, melhorar o desempenho dos estudantes. Apesar de nem todos numa sala de aula heterogênea compartilharem dos mesmos gostos, o assunto Copa do Mundo diz respeito também àqueles que não gostam de futebol, uma vez que, com a Copa a realizar-se em nosso país, esse esporte faz-se cada vez mais presente no cotidiano dos brasileiros.

Uma vez lançado o exemplo inicial, o professor deve começar a apresentar o conteúdo relacionado com a situação. O caso acima se trata de um arranjo com repetição.

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chama-se arranjo com repetição dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de r elementos) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

Uma vez definido arranjo com repetição, o docente deve mostrar aos estudantes como calcular o número de sequências desse tipo.

Teorema 2.5.1. *O número de subconjuntos ordenados de com k elementos não necessariamente distintos formados com elementos de um conjunto com m elementos é* $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^r$.

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $AR_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r. Cada arranjo consiste numa sequência formadas por r elementos na qual cada elemento pertence a M.

Pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de arranjos com repetição se calcula da seguinte forma:

$$AR_{m,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{r \text{ fatores}} = m^r$$

Vale observar que, nesse caso, a fórmula vale para todo r natural, $r \geq 1$.

Visto isso, o professor precisa solucionar o problema inicial juntamente com os alunos.

Jornalistas de cinco países distintos, Brasil, Espanha, Argentina, Itália e Inglaterra, responderão a uma pesquisa opinando em relação ao título da Copa do Mundo 2014, sediada no Brasil. Formar-se-á um quadro no qual cada um deles apontará a seleção considerada por si favorita. Cada jornalista registrará no quadro sua resposta, no espaço reservado para a sua nacionalidade. Sabendo que 32 seleções disputam a Copa do Mundo e que eles podem escolher qualquer uma delas como favorita, quantos são os resultados possíveis dessa pesquisa?

Inicialmente, deve-se analisar se a situação consiste em arranjo. Com efeito, cada jornalista deve responder à pesquisa. As ordens das resposta alteram o resultado da pesquisa. No quadro, a resposta do brasileiro fica no espaço dedicado ao brasileiro. O mesmo vale para os demais. Além disso, trata-se de arranjo com repetição, já que mais de um jornalista pode escolher a mesma seleção como favorita.

Há 32 seleções (conjunto M) e cinco jornalistas para escolhê-las. Desse modo, o número de resultados possíveis para a pesquisa é:

$$AR_{32,5} = 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 32^5.$$

A análise da situação passo a passo se faz imprescindível. A maior dificuldade dos estudantes em Análise combinatória se encontra na interpretação do problema. Para superar tal obstáculo, precisa-se resolver uma variedade de questões até que o discente se familiarize com tais situações.

2.6 Permutação

Roulien, Ailton, Pablo, Ravid e Erick formarão o time titular de futsal para um amistoso. Eles devem ocupar as posições de goleiro, fixo, ala direito, ala esquerdo e pivô. Admitindo que qualquer um deles possa atuar em qualquer uma das posições, de quantas formas eles podem definir suas posições?

Para resolver essa situação, o professor deve iniciar com a definição de permutação.

Se dispomos uma lista de n objetos (um conjunto ordenado onde se especifica qual o primeiro elemento, o segundo etc.), e rearranjamo-los de modo que eles estejam numa outra ordem, isso é chamado de permutá-los; a nova ordem é também chamada de uma permutação dos objetos. Também chamamos a rearrumação que não muda nada, uma permutação.

Após definir formalmente permutação, o docente pode (e deve) explicar a definição com palavras mais acessíveis aos alunos. Escolher uma fileira e mudar a posição dos alunos constitui um exercício interessante para o entendimento da definição.

Mas, como calcular o número de permutações de um conjunto?

Teorema 2.6.1. *: O número de permutações de n objetos é $n!$.*

Tomemos os objetos como elementos de um conjunto.

Seja A o conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e indiquemos por P_n o número de permutações dos n elementos de A. Temos:

$$P_n = A_{n,n}$$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1)$$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

$$P_n = n!$$

Com as ferramentas necessárias, pode-se, agora, solucionar a questão.

Roulien, Ailton, Pablo, Ravid e Erick formarão o time titular de futsal para um amistoso. Eles devem ocupar as posições de goleiro, fixo, ala direito, ala esquerdo e pivô. Admitindo que qualquer um deles possa atuar em qualquer uma das posições, de quantas formas eles podem definir suas posições?

Veja que Roulien, Ailton, Pablo, Ravid e Erick podem atuar em qualquer posição. Assim, a situação se trata de uma permutação (podemos permutá-los nas posições indicadas). Como há cinco posições a preencher-se por eles, temos que o número de formas que eles podem definir suas posições é:

$$P_5 = 5! = 120.$$

A escalação pode ocorrer de 120 maneiras diferentes considerando a permutação nas posições.

2.7 Combinação Simples

Numa aula de Educação Física, os alunos do terceiro ano do Ensino Médio praticarão voleibol. Doze alunos serão divididos em duas equipes, Azul e Amarela, assim definidas pela cor do colete que os componentes do time vestirão. De quantos modos os doze alunos podem ser divididos nessas duas equipes?

O professor deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que, nesse momento, não importa a ordem em que os participantes da equipe forem escolhidos. Isso não altera o resultado. Portanto, não se trata de arranjo. A partir daí, ele deve apresentar a definição de Combinação Simples.

Seja M um conjunto com m elementos, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chama-se de combinação dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M formados por r elementos. Além disso, o simples significa que não há repetição de elementos.

Para exemplificar, o professor pode utilizar exemplos mais simples. Na própria sala de aula, ele pode escolher um grupo com sete estudantes, para representar o conjunto M. Então, pedir para que se forme um subconjunto com três deles. De quantas formas eles poderiam formar esses subconjuntos?

Inicialmente, esse exercício tem como objetivo mostrar aos discentes que o subconjunto formado pelos três alunos escolhidos independe da ordem com a qual eles foram escolhidos, ou seja, a combinação simples não depende da ordem dos elementos.

Daí, o docente pode diferenciar combinação de arranjo (o que frequentemente confunde os discentes). Numa combinação, não importa a ordem dos elementos, trata-se de um conjunto. Já no arranjo, que se trata de uma sequência, deve-se considerar a ordem dos elementos.

Dito isso, o professor deve mostrar como calcular o número de combinações simples.

Teorema 2.7.1. *: Se M é um conjunto finito com m elementos e $0 \leq r \leq m$, então M possui exatamente $\dfrac{m!}{r!(m-r)!}$ subconjuntos de r elementos.*

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos m elementos tomados r a r.

Consideremos uma combinação, por exemplo, $A_1 = a_1, a_2, \ldots, a_r$. Permutando os elementos de A_1, temos $r!$ arranjos.

Considerando outra combinação, $A_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_{r+1}\}$, e permutando seus elementos, mais uma vez obteremos $r!$ arranjos.

Chamemos de k o número total de combinações, $k = C_{m,r}$, e suponhamos que todas as combinações dos m elementos tomados r a r sejam:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k.$$

Cada combinação A_i origina $r!$ arranjos. $SejaF_i$ o conjunto de arranjos gerados pelos elementos de A_i. Logo, temos:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \rightarrow & F_1 \\ A_2 & \rightarrow & F_2 \\ & \vdots & \\ A_k & \rightarrow & F_k \end{array}$$

Desse modo, temos que $F_i \cap F_j = \varnothing$, para $i \neq j$.

Com efeito, se $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ para $i \neq j$, existiria um arranjo que pertencesse a F_i e a F_j simultaneamente. Considerando os elementos desse arranjo concluiríamos que eles coincidiriam com os elementos de A_i e A_j. Desse modo, $A_i = A_j$. Isto é absurdo, pois quando as combinações foram construídas, $A_i \neq A_j$, para $i \neq j$.

Portanto, $F_i \cap F_j = \varnothing$, para $i \neq j$.

Além disso, $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k = F$, em que F consiste no número de arranjos dos m elementos do conjunto M tomados r a r.

Para mostrar essa igualdade, mostremos que

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k \subset FeF \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k.$$

Seja a um arranjo tal que $a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$, então $a \in F_i$, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Logo, $a \in F$. Então, $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k \subset F$.

Por outro lado, seja a um arranjo tal que $a \in F$. Considerando os elementos desse arranjo a, obtemos uma das combinações. Seja A_i essa combinação.Como A_i gera o conjunto de arranjos F_i, temos que $a \in F_i$ e:

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k.$$

Logo, $F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$.

Daí, conclui-se que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k = F$.

Se os k conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles consiste na soma do número de elementos de cada um deles.

$$\#(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k) = \#F$$

$$\#F_1 + \#F_2 + \ldots + \#F_k = \#F$$
$$r! + r! + \ldots + r! = \frac{m!}{(m-r)!}$$
$$k \cdot r! = \frac{m!}{(m-r)!}$$
$$k = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Como $k = C_{m,r}$, temos:

$$C_{m,r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}, \colon \quad \text{para todo} \;\; m, r \in \mathbb{N}^*, r < m.$$

Vejamos, agora, se a fórmula vale para $r = m$; $m \neq 0$ e $r = 0$; e $m = 0$ e $r = 0$.

Se $r = m$, temos:

$$C_{m,m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = 1.$$

Se $m \neq 0$ e $r = 0$, temos:

$$C_{m,0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = 1.$$

Isso significa que há um único subconjunto com 0 elemento. Ele é o conjunto vazio.

Se $m = 0$ e $r = 0$, temos:

$$C_{0,0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1.$$

Daí, podemos afirmar que o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio conjunto vazio.

Analisando essas situações, conclui-se que:

$$C_{m,r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}, \text{ para todo } m, r \in \mathbb{N}, r \leq m.$$

Tendo apresentado o modo de calcular as combinações simples, o professor pode voltar aos exemplos para resolvê-los. Nesse caso, havia dois exemplos, ele deve solucionar o mais imediato.

Num grupo de sete estudantes, de quantas formas pode-se escolher três deles?

Como não importa a ordem com a qual a escolha ocorra, tem-se um caso de combinação simples, já que cada estudante é distinto dos demais e pode ser escolhido só uma vez.

A resolução se dá diretamente pela aplicação da fórmula demonstrada.

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35.$$

Portanto, num grupo de 7 alunos, pode-se escolher 3 deles de 35 maneiras diferentes.

Voltando, agora, ao problema que motivou a introdução do conteúdo, o docente deve estimular que os estudantes cheguem ao resultado. Dado o tempo necessário a eles, o professor pode solucionar a questão juntamente com eles.

Numa aula de Educação Física, os alunos do terceiro ano do Ensino Médio praticarão voleibol. Doze alunos serão divididos em duas equipes, Azul e Amarela, assim definidas pela cor do colete que os componentes do time vestirão. De quantos modos os doze alunos podem ser divididos nessas duas equipes?

Observe que, uma vez escolhidos os alunos de uma equipe, o restante ficará automaticamente na outra equipe. A ordem de escolha dos alunos para cada equipe não afeta o resultado. Logo, estamos diante de uma combinação. Como as equipes estão nomeadas, se todos os componentes da equipe Azul fossem trocados com os da Amarela, o resultado alteraria. Portanto, não será preciso dividir pela permutação do número de equipes.

Encaixando os alunos em uma equipe, por exemplo, a Azul, temos que pode-se fazê-lo de $C_{12,6}$ maneiras diferentes. Restando 6 alunos para as 6 vagas da outra equipe, tem-se $C_{6,6} = 1$ maneira de encaixá-los.

Portanto, o número de modos que pode-se dividir os dois alunos nas equipes Azul e Amarela é:

$$C_{12,6} \cdot C_{6,6} = \frac{12!}{6!(12-6)!} \cdot 1 = \frac{12!}{6!6!}$$

A apresentação de outros exemplos e a resolução de diversas questões possuem alta relevância nesse contexto. O estudante precisa praticar a interpretação das situações. Por vezes, a diferenciação entre um arranjo e uma combinação pode tornar-se complicado para eles. Isso reafirma a importância da prática do conteúdo através de exercícios contextualizados conforme a realidade dos discentes.

Agora, o docente deve mostrar as principais propriedades de combinações simples.

Dados $n, p \in \mathbb{N},\ n \geq p$, vale:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

Com efeito, $C_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = C_{n,n-p}$. Pois $n-(n-p) = p$.

$$C_{n-1,p-1} + C_{n-1,p} = Cn,p$$

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Dividindo ambos os lados por $(n-1)!$ e multiplicando por $(p-1)!(n-p-1)!$, tem-se:

$$\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} = \frac{n}{p(n-p)}$$

Portanto, vale a igualdade.

Mais uma vez, o professor deve buscar exemplos numéricos.

Ele pode facilmente mostrar que $C_{7,3} = C_{7,4}$.

$$C_{7,3} = \frac{7!}{4!3!} = C_{7,4} = 35$$

Além disso, $C_{7,3} + C_{7,4} = 35 + 35 = 70.EC_{8,4} = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$.

O professor pode e deve apresentar vários outros exemplos numéricos.

2.8 Permutação com Elementos Repetidos

Para introduzir o conteúdo de permutação com elementos repetidos, geralmente, o professor utiliza a ideia de anagrama. Definir e utilizar os anagramas possui considerável relevância nesse momento. Contudo, continuando a ideia de utilizar o esporte no Ensino da Análise Combinatória, pode-se aproveitar a contextualização utilizada no conteúdo anterior (combinação simples) adaptando-a ao conteúdo que se pretende abordar.

Na aula de Educação Física, após dividir as equipes para o jogo de voleibol, os alunos resolveram tirar uma foto após vestirem os coletes. A ideia era que, na foto, todos estivessem perfilados, em qualquer ordem (não necessariamente cada time de um lado). Eles resolveram tirar algumas fotos, mudando apenas a ordem dos jogadores. Considerando que os coletes não são numerados e que os alunos consideraram que a ordem só seria diferente se a posição que os jogadores se permutassem ocorresse com pessoas vestidas com coletes de cores diferentes, de quantos modos distintos eles poderiam se organizar para tirar essa foto? (Lembrando que 12 alunos foram divididos em duas equipes, Azul e Amarela, com 6 jogadores cada.)

A contextualização apresentada condiz com a realidade dos alunos do Ensino Médio regular, dado que eles possuem a disciplina de Educação Física, utiliza o esporte e ainda consiste em interdisciplinaridade. Com ela, o discente percebe a aplicação do que se aprende em sala de aula. Agora, o professor deve apresentar as ferramentas matemáticas para a resolução da situação, começando pela definição de permutação com elementos repetidos.

Dados naturais n e k e objetos $a_1, \ldots, a_k$, gostaríamos agora de contar quantas são as sequencias de n com n_1 termos iguais a a_1, n_2 termos iguais a $a_2, \ldots, n_k$ termos iguais a a_k; aqui, $n_1, \ldots, n_k$ são inteiros não negativos também dados, tais que $n = n_1 + \ldots + n_k$. De outro modo, dizemos que tal sequência é uma permutação com elementos repetidos de n objetos de um dos tipos $a_1, \ldots, a_k$, sendo n_1 termos iguais a $a_1, \ldots, n_k$.

Após definir formalmente permutação com elementos repetidos, faz-se importante que o professor dê algum exemplo, inicialmente, simples para auxiliar na compreensão dos alunos. Nesse momento, utilizar anagramas pode ajudar bastante.

Um anagrama consiste num conjunto ordenado, ou sequência, de letras, não necessariamente com um significado.

Considere a palavra ALA, uma das posições de futsal e de futebol de campo (lateral ofensivo). Quantos anagramas diferentes ela possui?

Perceba que temos duas letras iguais. Indiquemos o segundo A de A' apenas para perceber suas posições. Temos os anagramas:

$$ALA';\ A'LA;\ AA'L;\ A'AL;\ LA'A;\ LAA'.$$

Veja que das 6 formas apresentadas, apenas 3 são distintas. Toda vez que permutamos apenas as duas letras A, temos o mesmo anagrama. Nesse caso, não temos 3! = 6 permutações distintas. Temos apenas 3. Essa diminuição ocorre devido à repetição da letra no anagrama.

Mas como calcular o número de permutações quando houver elementos repetidos?

Para o professor facilitar a compreensão por parte dos alunos, ele pode partir de casos particulares para chegar no caso geral.

1º caso: Dos n elementos, n_1 são iguais a a_1 e os demais são todos distintos entre e distintos de a_1.

Seja $P_n^{n_1}$ o número de permutações que satisfaçam as condições dadas. Cada permutação dos n elementos consiste numa sequência ordenada dos n elementos dos quais, n_1 são iguais a a_1 e os demais, $(n - n_1)$ são distintos. Escolha-se $n - n_1$ posições das n posições para colocar os elementos todos distintos de a_1. Há $C_{n,(n-n_1)}$ formas de escolhê-las.

Para cada escolha dessas posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados. Então, existem ao todo

$$C_{n,(n-n_1)} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{(n - n_1)![n - (n - n_1)]!} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$$

modos de encaixar os elementos distintos de a_1 na permutação.

Escolhidas as posições desses elementos, os lugares dos n_1 elementos iguais a a_1 ficam determinados de forma única pelas posições não preenchidas.

Portanto, há $\frac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1.

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}$$

No exemplo dos anagramas da palavra ALA, percebe-se que duas letras se repetem num total de três letras. Portanto, tem-se $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ anagrams distintos.

O docente deve utilizar outros exemplos com anagramas, nesse momento, preferencialmente aqueles que satisfaçam o presente caso. Após isso, ele deve prosseguir para o próximo caso particular.

2º caso: Dos n elementos, n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2 e os demais são todos distintos entre si e distintos de a_1 e a_2.

Seja $P_n^{n_1,n_2}$ o número de permutações que satisfaçam as condições dadas. Cada permutação dos n elementos consiste numa sequência ordenada dos n elementos dos quais, n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2 e os demais, $(n - n_1 - n_2)$ são distintos.

Das n posições disponíveis, escolha-se $(n-n_2)$ para encaixar os elementos distintos de a_2. Há $C_{n,n-n_2}$ formas de escolher essas posições. Para cada escolha, pelo 1º caso, tem-se $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $(n-n_2)$ elementos podem ser permutados, já que há n_1 elementos iguais a a_1. Logo, o número total de permutações dos elementos, exceto os que são iguais a a_2, será:

$$C_{n,n-n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n - n_2)!n_2!} \cdot \frac{(n - n_2)!}{n_1!} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$

Após encaixar esses elementos, as posições dos n_2 elementos iguais a a_2 ficam determinados de forma única pelas posições não preenchidas. Com isso, o número total de permutações com n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e e os demais todos distintos entre si e distintos de $a_1 e a_2$ é:

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$

Como exemplo, calculemos os anagramas da palavra ATACANTE.

A palavra possui 8 letras. 3 delas são A e outras duas são T. As demais são todas distintas entre si e distintas de A e de T. Com isso, temos

$$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2!3!} = 3360$$

anagramas distintos da palavra ATACANTE.

Antes de resolver o problema motivador, o professor deve apresentar o caso geral.

Teorema 7: Sejam n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a $a_2, \ldots, n_r$ são iguais a a_r. O número de permutações $P_n^{n_1 n_2 \ldots n_r}$ que podem ser calculadas nessas condições é:

$$P_n^{n_1 n_2 \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

Façamos a demonstração por indução.

Para $r = 1$, a fórmula vale, pois trata-se do 1º caso particular.

Supondo válido para $r = k-1$, ou seja, se dos $n - n_k$ elementos, n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a $a_2, \ldots, n_{k-1}$ são iguais a a_{k-1}, o número de permutações que podem ser calculadas nessas condições é, por hipótese de indução:

$$P_{n-nk}^{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} = \frac{(n-n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_{k-1}!}$$

Queremos mostrar que a relação vale para $r = k$.

Temos $n - n_k$ elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a $a_2, \ldots, n_{k-1}$ são iguais a a_{k-1}. Incluamos, agora, n_k elementos iguais a a_k. Temos agora n elementos.

Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_k$ lugares para encaixar todos os elementos, exceto os que são iguais a a_k. Existem $C_{n,n-n_k}$ formas de escolher esses lugares. Pela hipótese de indução, para cada uma dessas escolhas teremos $P_{n-n_k}^{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$ modos em que os $n - n_k$ elementos podem ser permutados. Ao todos, temos

$$C_{n,n-n_k} \cdot P_{n-n_k}^{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} = \frac{n!}{(n-n_k)![n-(n-n_k)]!} \cdot \frac{(n-n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_{k-1}!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

modos de arranjar na permutação todos os elementos, exceto aqueles iguais a a_k.

Uma vez encaixados esses elementos na permutação, as posições dos n_k elementos iguais a a_k ficam determinados de modo único pelos lugares restantes.

Logo, existirão $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ permutações dos n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a $a_2, \ldots, n_k$ são iguais a a_k.

$\therefore$ O número de permutações $P_n^{n_1 n_2 \ldots n_r}$ é:

$$P_n^{n_1 n_2 \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

Para auxiliar os estudantes na compreensão, o professor deve usar um exemplo de aplicação fórmula mostrada.

Carlos quer organizar em seus cabides suas camisas de seleções. Ele possui 3 camisas do Brasil, 2 da Espanha e 2 da Colômbia. De quantas formas distintas ele pode organizá-las em seu guarda-roupas?

Observe que há 7 elementos, dos quais há repetição em 3 deles (camisas do Brasil), 2 deles (camisas da Espanha) e outros 2 deles (camisas da Colômbia). Trata-se de uma permutação com elementos repetidos.

Pelo caso geral, existem $P_7^{3,2,2}$ formas de Carlos organizar suas camisas.

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Ou seja, há 210 modos distintos de Carlos organizar suas camisas.

Agora, o docente deve resolver com os alunos o problema motivador.

Na aula de Educação Física, após dividir as equipes para o jogo de voleibol, os alunos resolveram tirar uma foto após vestirem os coletes. A ideia era que, na foto, todos estivessem perfilados, em qualquer ordem (não necessariamente cada time de um lado). Eles resolveram tirar algumas fotos, mudando apenas a ordem dos jogadores. Considerando que os coletes não são numerados e que os alunos consideraram que a ordem só seria diferente se a posição que os jogadores se permutassem ocorresse com pessoas vestidas com coletes de cores diferentes, de quantos modos distintos eles poderiam se organizar para tirar essa foto? (Lembrando que 12 alunos foram divididos em duas equipes, Azul e Amarela, com 6 jogadores cada.)

Há 12 elementos no conjunto (12 alunos), 6 de colete azul, 6 de colete amarelo. Logo, estamos diante de um caso de permutação com elementos repetidos. Desse modo, o número de formas de tirar essa foto é:

$$P_{12}^{6,6} = \frac{12!}{6!6!}$$

As ferramentas combinatórias aqui apresentadas servem de instrumento para o cálculo do número de possibilidades em diversas situações. A interpretação do caso em estudo definirá qual delas utilizar. Daí vem a importância da resolução de diversos problemas envolvendo cada uma ou mais de uma delas. A contextualização dos problemas conforme a realidade dos estudantes ganha importância no processo de aprendizagem. O estudante deve enxergar um objetivo naquilo que se estuda.

2.9 Partições Ordenadas

Quinze alunos jogarão um torneio de basquete. O professor deve dividi-los em três equipes, nomeadas Elite, Fúria e Shekinah. De quantas formas os estudantes podem formar as equipes para o torneio?

Veja que do conjunto de 15 alunos, três equipes se formarão. As equipes possuem nomes pré-defindos. Logo, jogar na equipe Elite torna-se diferente de jogar na equipe Shekinah. Ou seja, a ordem que os estudantes forem escolhidos, muda o resultado da divisão de equipes. Trata-se de uma partição ordenada do conjunto de estudantes.

Nesse momento, o professor deve definir formalmente partições ordenadas.

Consideremos um conjunto A e k subconjuntos não vazios da A $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, de modo que:

(a) $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \text{para} \quad i \neq j;$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A.$

Chamaremos de partição ordenada do conjunto à sequência de conjuntos $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Por exemplo, seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Temos que $(\{1,\ 2\}; \{3,\ 4,\ 5\})$ é uma partição ordenada. Porém, $(\varnothing; \{1,\ 2\}; \{3,\ 4,\ 5\})$ não é uma partição ordenada, pois o conjunto vazio faz parte da sequência; $(\{1,\ 2,\ 3\}; \{3,\ 4,\ 5\})$ também não é partição ordenada pois sua interseção é diferente do vazio; e $(\{1,\ 2\}; \{3,\ 4\})$ também não é, visto que a união de seus elementos não resulta no conjunto A.

Observe ainda que $(\{1,\ 2\}; \{3,\ 4,\ 5\})$ é diferente da partição ordenada $(\{3,\ 4,\ 5\}; \{1,\ 2\})$, porque, como uma sequência, cada partição ordenada depende da ordem dos conjuntos.

Agora, o docente deve voltar ao problema e resolvê-lo com seus estudantes.

Quinze alunos jogarão um torneio de basquete. O professor deve dividi-los em três equipes, nomeadas Elite, Fúria e Shekinah. De quantas formas os estudantes podem formar as equipes para o torneio?

Para calcular o número possível de partições ordenadas na situação dada, podemos encaixar os alunos em cada equipe. A primeira, pode ser a equipe Elite. Dos 15 alunos, 5 devem fazer parte dela. Temos $C_{15,5}$ maneiras distintas de escolhê-los.

Depois, vamos preencher outra equipe, a Fúria. Dos 10 alunos restantes, cinco farão parte dela. Temos $C_{10,5}$ formas distintas de fazê-lo.

Por fim, os cinco alunos restantes farão parte da equipe Shekinah. Só existe $C_{5,5} = 1$ maneira de escolhê-los.

Desse modo, o número total de partições ordenadas do conjunto dos alunos é:

$$C_{15,5} \cdot C_{10,5} \cdot C_{5,5} = \frac{15!}{10!5!} \cdot \frac{10!}{5!5!} \cot 1$$

2.10 Partições não Ordenadas

Oito estudantes da turma do terceiro ano A se dividirão em duplas para disputar um torneio de tênis. De quantas formas eles podem formar essas duplas?

Apesar do problema motivador parecer bastante com o anterior (de partições ordenadas), existe uma diferença importante. Neste caso, a ordem das duplas escolhidas não altera o resultado. Trata-se de uma partição não ordenada. Após apresentar a situação e deixar claro para os alunos a diferença entre os problemas, o professor deve apresentar a definição de partições não ordenadas.

Considere um conjunto A e K subconjuntos não vazios de A $(A_1, \ldots, A_k)$, tais que:

(a) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$;

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$.

Chama-se partição não ordenada de A à família $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

Após a definição, importa que o docente dê exemplos aos estudantes, inicialmente com um conjunto simples.

Seja o conjunto $V = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$. As famílias $\{\{a,\ e\}; \{i,\ o,\ u\}\}$ e $\{\{a\};\ \{e,\ i\};\ \{o,\ u\}\}$ constituem partições. Já $\{\{a,\ e\};\ \{o,\ u\}\}$ não é exemplo de partição do conjunto V, pois a união de seus conjuntos não resulta no conjunto V. A família $\{\{a,\ e,\ i,\ o\};\ \{o,\ u\}\}$ não é partição, pois $\{a,\ e,\ i,\ o\} \cap \{o,\ u\} \neq \varnothing$.

E a família $\{\varnothing;\ \{a,\ e\};\ \{i,\ o,\ u\}\}$ pode ser exemplo de partição de algum conjunto?

Não. Veja que os subconjuntos que formam a partição devem ser não vazios. Como o conjunto vazio faz parte da família citada, ela não pode ser partição.

O conceito de partições não ordenadas auxilia na resolução de alguns problemas de Análise Combinatória. O problema motivador é um deles.

Oito estudantes da turma do terceiro ano A se dividirão em duplas para disputar um torneio de tênis. De quantas formas eles podem formar essas duplas?

Veja que a formação das duplas independe da ordem com a qual elas se constituem. Trata-se de um caso de partição não ordenada.

Para calcular o número de partições não ordenadas, deve-se, inicialmente, calcular o número de partições ordenadas.

Como tem-se oito alunos para dividi-los em quatro duplas, o número de partições ordenadas será:

$$C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{0!2!} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520$$

Observe que cada grupo de $4! = 24$ partições ordenadas origina a mesma família de partições não ordenadas. Pode-se concluir, então, que o número de partições não ordenadas desses oito alunos divididos em quatro duplas será:

$$\frac{2520}{24} = 105$$

Portanto, há 105 formas de formar duplas com os oito alunos.

2.11 Soluções Inteiras Não Negativas de uma Equação Linear

Alguns alunos de uma turma de terceiro ano do Ensino Médio participam de equipes esportivas do colégio. Entre eles há atletas do time de futsal e voleibol. De quantas formas podem ser escolhidos 5 atletas entre eles, supondo que, em cada modalidade, há mais que cinco alunos daquela turma?

Chame de f a quantidade de atletas do time de futsal a serem escolhidos e de v aos de voleibol. Desse modo, tem-se a equação linear $f + v = 5$.

Por se tratar de um número pequeno, pode-se elencar as soluções possíveis.

$$(0, 5); (1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1); (5, 0).$$

Existem 6 soluções possíveis.

Contudo, em alguns casos, pode-se ter mais que duas variáveis na equação linear. Nesse caso, a resolução por tentativas seria trabalhosa e algumas soluções poderiam não ser contabilizadas.

Imagine que no exemplo dado haja jogadores de basquete naquela turma. Pode-se reformular o problema do seguinte modo:

Alguns alunos de uma turma de terceiro ano do Ensino Médio participam de equipes esportivas do colégio. Entre eles há atletas do time de futsal, voleibol e basquete. De quantas formas podem ser escolhidos 5 atletas entre eles, supondo que, em cada modalidade, há mais que cinco alunos daquela turma?

Agora, chamando de f, v e b a quantidade a escolher-se de jogadores de futsal, voleibol e basquete, respectivamente, tem-se a equação linear $f + v + b = 5$.

Buscando uma forma de resolver essa equação linear, pode-se tentar dividir 5 unidades em 3 partes ordenadas. Cada parte terá uma solução inteira e não negativa.

Pode-se indicar cada unidade por um ponto e usar duas barras para fazer a separação das três partes. A disposição das barras e dos pontos indicará as diferentes soluções da equação linear.

$$|| \bullet \bullet | \bullet \bullet | \bullet || \text{ que representa a solução } (2,2,1)$$

$$|| \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet || \text{ que representa a solução } (1,3,1)$$

$$|| \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet ||| \text{ que representa a solução } (2,3,0)$$

Como tem-se 7 símbolos, dos quais 5 são $\bullet$ e 2 são $|$, o número de soluções pode ser encontrado através das permutações desses símbolos. O número de permutações com elementos repetidos na situação será:

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

Portanto, existem 21 soluções inteiras não negativas para a equação linear $f + v + b = 5$.

Uma vez resolvido o problema motivador, o professor deve generalizar o raciocínio desenvolvido.

Teorema 2.11.1. *O número de soluções inteiras não negativas da equação linear* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ *é* $\dfrac{(n+r-1)}{r!(n-1)!}$.

Demonstração: De fato, usando r símbolos $\bullet$ e $(n-1)$ símbolos — para dividi-los em r partes, cada solução é uma permutação desses símbolos.

$$|| \bullet \bullet | \ldots | \bullet \bullet | \ldots | \bullet \ldots | \ldots ||$$

Como há $(n+r-1)$ símbolos, dos quais r são $\bullet$ e $(r-1)$ são $','$ tem-se uma permutação com elementos repetidos. Desse modo, o número de soluções da equação linear $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ será:

$$P_{n+r-1}^{(n-1),r} = \frac{(n+r-1)}{r!(n-1)!}$$

$\square$

Após apresentar o caso geral, o professor deve mostrar mais algumas aplicações práticas do conteúdo.

Numa loja de esportes há bolas de futsal, voleibol, basquete e handebol. De quantas formas pode-se comprar 8 bolas nessa loja?

Chamando de f a quantidade de bolas de futsal a comprar-se, de v as de voleibol, de b as de basquete e de h as de handebol, tem-se a equação linear $f + v + b + h = 8$.

Trata-se de calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação linear dada. Logo, tem-se:

$$P_{11}^{8,3} = \frac{11!}{8!3!} = 165$$

Portanto, pode-se comprar 8 bolas de futsal, voleibol, basquete e handebol de 165 formas distintas naquela loja.

2.12 Outras Ferramentas Combinatórias

Além dos conteúdos já expostos, existem algumas ferramentas combinatórias úteis. Nem todas fazem parte do que se ensina no nível médio. Contudo, a aplicação de algumas delas pode ser compreendida pelos estudantes desse nível de ensino.

O Princípio da Inclusão-Exclusão se faz presente em algumas situações estudadas no Ensino Médio. Já o Princípio da Casa-de-Pombos, não. Apesar da existência de diversos exemplos que utilizam este princípio, os quais os estudantes do nível médio podem compreender.

2.12.1 Inclusão-Exclusão

Numa turma do terceiro ano do Ensino Médio há 30 estudantes. Muitos deles praticam esportes. O professor de Matemática resolveu fazer uma pesquisa sobre qual ou quais esportes cada um deles praticava regularmente. No resultado da pesquisa, constatou-se que 20 deles praticavam futebol, 15 praticavam voleibol e 5 jogavam basquete. Além disso, ele percebeu que 8 deles jogavam futebol e voleibol, 3 praticavam futebol e basquete, e 2 voleibol e basquete. Apenas um praticava os três esportes. Há algum estudante nesta turma que não pratica nenhum dos três esportes?

Iniciando a contagem, pode-se perceber que 20 praticam futebol, 15 voleibol e 5 basquete. Já há 40 alunos, dez a mais que os 30 estudantes daquela turma. O que aconteceu?

Alguns alunos foram contados mais de uma vez. Observe que há alunos que praticam mais de um esporte. Deve-se excluí-los da contagem para evitar erros. Desse modo, dos 40 contados, deve-se excluir os 8 que jogam futebol e voleibol, os 3 que praticam futebol e basquete, e os 2 que participam do voleibol e do basquete. Ou seja, deve-se excluir 13 alunos dos 40 contados. Resultando 27 alunos. Mas e os que praticam os três esportes?

Esses foram excluídos mais de uma vez. Deve-se incluí-los. No presente exemplo, incluí-lo (apenas um pratica os três esportes). Daí, tem-se que 27 + 1 = 28 estudantes dessa turma praticam algum dos três esportes pesquisados. Logo, há 2 alunos nessa turma que não pratica nenhum dos três esportes.

No Ensino Médio, o Princípio da Inclusão-Exclusão deve ser apresentado para resolver problemas concretos. Nesse nível de ensino, não se faz interessante enunciar um teorema geral, que seria demorado e, para muitos dos estudantes, complicado. Ao invés disso, o professor precisa dar um número de exercícios que exemplos que utilize três, quatro ou mais esportes (ou qualquer que seja o objeto da questão) para auxiliar a compreensão por parte do estudante. Nesse momento, o essencial consiste no discente entender e aprender como desenvolver o raciocínio necessário para a resolução do problema.

2.12.2 Princípio da Casa-de-Pombos

O professor de uma turma de terceiro ano do ensino médio com 30 alunos resolveu fazer uma pesquisa com seus estudantes. Na pesquisa, cada estudante deveria responder a um questionário cujas opções eram apenas SIM ou NÃO. No questionário, quatro esportes foram citados, futebol, voleibol, basquete e handebol, e os estudantes deveriam marcar SIM caso gostassem do esporte e NÃO, caso não gostassem. Para cada esporte eles dariam uma das duas respostas.

Esporte	SIM	NÃO
Futebol		
Voleibol		
Basquete		
Handebol		

Ao final da pesquisa, antes de ler as respostas, o professor afirmou aos seus alunos que, com certeza, pelo menos dois deles haviam respondido à pesquisa de modo totalmente igual, isto é, todas as respostas seriam as mesmas.

O professor estava correto. Mesmo sem olhar as respostas e antes de saber quais alunos responderam da mesma forma, pode-se afirmar que existem questionários respondidos igualmente. Cada um dos quatro quesitos admite duas respostas (SIM ou NÃO). Desse modo, pelo princípio fundamental da contagem (parte A), há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ formas de responder ao questionário. Contudo, existem 30 alunos na sala. Encarando o número de respostas como casas, temos que cada um dos 30 alunos se encaixarão em uma das casas. Como só há 16 casas, haverá alguma casa com mais de um aluno, ou seja, haverá mais de uma pesquisa respondida da mesma forma.

O Princípio da Casa-de-Pombos pode ser enunciado da seguinte forma:

"Se temos n caixas e nelas colocamos n mais que n objetos, então haverá pelo menos uma caixa que contém mais que um objeto."

Com muita frequência, o princípio acima é enunciado com pombos e casas, sendo referenciado como Princípio da Casa-de-Pombos. Por ser simples, ele é entendido imediatamente e pode ser enunciado no Ensino Médio, ao menos para a resolução de problemas mais imediatos, como o problema motivador em questão.

Capítulo 3

Aplicações da Análise Combinatória no Esporte

A Análise Combinatória possui diversas aplicações, inclusive nos esportes. Esse ramo da Matemática se encontra presente no cotidiano de todas as pessoas. Seja no cálculo do número de jogos ou do número de possibilidades dos sorteios das competições mais importantes, as ferramentas combinatórias se fazem necessárias e indispensáveis.

Os casos mais próximos da nossa realidade servirão de exemplos aqui.

3.1 Número de Jogos do Campeonato Baiano de Futebol

Doze times disputam o Campeonato Baiano de Futebol. Nove deles participam da primeira fase, da qual cinco se classificam para a fase seguinte. Na segunda fase, os três times que não disputaram a fase anterior juntam-se aos classificados, totalizando oito equipes, divididas em dois grupos com quatro agremiações. Os dois primeiros de cada grupo passam para a fase semifinal. Os vencedores se enfrentam na final e os perdedores, na disputa pelo terceiro lugar.

Na primeira fase, os nove times jogam entre si uma única vez. Os cinco primeiros se classificam e os dois últimos descem de divisão (rebaixamento). Para calcular o número de jogos da primeira fase, deve-se considerar que os times se enfrentam uma única vez. Portanto, a ordem dos times escolhidos para o jogo não afeta a contagem (pode até fazer diferença no que se refere a futebol, mas não à contagem do número de jogos). Desse modo, trata-se de um exemplo de combinação simples dos nove times tomados dois a dois (simples pois uma equipe não pode enfrentar ela mesma).

Logo, o número de jogos da primeira fase do Campeonato Baiano de Futebol é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{7!2!} = 36$$

Uma vez calculado o número de jogos da primeira fase, deve-se analisar a fase seguinte. Na segunda fase, os três times se juntam aos cinco classificados. As oito equipes se dividem em dois grupos com quatro times. A forma de disputa se dá com os times de um grupo enfrentando os times do outro grupo em jogos de ida e volta. Nesse momento, a ordem dos times escolhidos para o jogo afeta a contagem.

Pode-se contar o número de jogos de outras formas. Cada uma das 8 equipes fará 4 jogos como mandante. Ou pode-se contar o número de jogos por rodada. Tem-se 4 jogos em cada uma das 8 rodadas. De qualquer forma, o total de jogos resulta de uma multiplicação $8 \cdot 4 = 32$.

Os dois primeiros colocados de cada grupo se classificam para a semifinal, disputada em ida e volta. Cada uma das 2 semifinais se disputa em dois jogos, resultando 4 jogos nessa fase.

Os perdedores disputam o terceiro lugar em ida e volta, ou seja, 2 jogos.

Os vencedores jogam a final em ida e volta, 2 jogos também.

Para se obter o número total de jogos do Campeonato Baiano de Futebol, basta somar o número de jogos de cada fase:

$$36 + 32 + 4 + 2 + 2 = 76 \text{ jogos.}$$

Portanto, a disputa do Campeonato Baiano de Futebol ocorre em 76 jogos.

3.2 Número de Jogos da Copa do Nordeste

A Copa do Nordeste reúne 16 times de 7 estados da região Nordeste do Brasil. O estado da Bahia e o estado de Pernambuco possuem 3 representantes cada. Os estados de Sergipe, Alagoas, Paraíba, Ceará e Rio Grande do Norte possuem 2 representantes cada. Os estados do Maranhão e do Piauí devem ter representantes a partir de 2015. A seleção de cada equipe por estado ocorre conforme o Campeonato estadual do ano anterior.

Essa competição se divide em fase de grupos, quartas de finais, semifinais e final.

Na fase de grupos, os 16 times se dividem em 4 grupos com 4 equipes. Todos jogam internamente em seus grupos em ida e volta. Desse modo, a ordem da escolha das equipes para formar os jogos altera a contagem. Trata-se de uma arranjo simples. Assim, o número de jogos de cada grupos será:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Como há 4 grupos nessa fase, o número total de jogos é $12 \cdot 4 = 48$ jogos.

Os dois primeiros de cada grupo se classificam para as quartas de finais.

A disputa das quartas de finais ocorre em ida e volta. Em cada um dos quatro confrontos, realizam-se dois jogos, totalizando $4 \cdot 2 = 8$ jogos. Os vencedores se enfrentam nas semifinais.

Mais uma vez, nas semifinais, os times jogam em ida e volta. Os dois confrontos ocorrem em dois jogos. Assim, tem-se $2 \cdot 2 = 4$ jogos nessa fase.

Os finalistas, vencedores da fase anterior, disputam o título em dois jogos (ida e volta). Desse modo, ocorrem 2 jogos nessa fase.

No total, ocorrem 48 jogos na fase de grupos, 8 jogos nas quartas de finais, 4 jogos nas semifinais e 2 jogos nas finais, totalizando 62 jogos.

3.3 Número de Modos de Escalar um Time de Basquete

Para calcular o número de modos de escalar um time de basquete, faz-se necessário a compreensão das posições que envolvem o referido esporte.

De acordo com o Celtics Brasil, as cinco posições se dividem em:

- Armador Principal (Point Guard/PG);
- Escolta/ Ala Armador/ Lançador (Safety/ Shooting Guard/SG);
- Lateral/ Ala (Small Forward/SF);
- Líbero/ Ala Pivô (Power Forward/PF);
- Pivô (Center/C).

Segundo o Celtics Brasil, o armador principal consiste no organizador da equipe. Ele leva a bola da defesa para o ataque, observa o tipo de defesa do adversário e decide pela jogada a superá-la, através de códigos pré-estabelecidos pelo técnico. O escolta (ou ala armador ou lançador)funciona como "ajudante"do armador. Normalmente, o escolta executa as infiltrações, usando a velocidade para penetrar na defesa adversária. O lateral (ou ala) assume a responsabilidade pela ”leitura do jogo”. Ele tem a função de infiltrar no garrafão, além de fechar o contra-ataque juntamente com o escolta. O potencial de arremesso, a força física e o domínio dos fundamentos do líbero (ou ala pivô) determinarão a ofensividade do time. Por fim, o pivô consiste no jogador que atua mais próximo à cesta, tanto na defesa quanto no ataque.

O número de modos que o treinador de uma equipe de basquete pode escalar a equipe que estará em quadra dependerá do número de atletas disponíveis por posição. Seja n_1 o número de armadores principais da equipe, n_2 o número de escoltas, n_3 o número de opções para a posição de lateral, n_4 o número de jogadores que atuam como líbero e n_5 a quantidade de pivôs. Admitindo que nenhum jogador atue em mais de uma opção, o número de possibilidades (N) que o técnico pode escalar o time que estará em quadra pode ser calculado através do princípio fundamental da contagem.

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5$$

Supondo, por exemplo, que uma equipe de basquete dispusesse de 3 armadores principais, 2 escoltas, 3 laterais, 2 líberos e 2 pivôs, o treinador poderia escolher a equipe que estaria em quadra de $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ maneiras diferentes.

3.4 Número de Jogos do Campeonato Brasileiro - Série A

O Campeonato Brasileiro (Série A) é disputado anualmente por vinte equipes, no sistema de pontos corridos, em ida e volta. Isso significa que jogam ”todos contra todos”duas vezes e o primeiro colocado se sagra campeão. Essa é a competição mais importante a nível nacional. Através dela, define-se a maior parte dos times classificados para as competições internacionais do ano seguinte.

No momento da construção da tabela de jogos, define-se o mandante de cada partida. Cada time enfrenta o outro em seu mando de campo e no mando do adversário. Assim, jogos entre as mesmas equipes se diferenciam a depender da ordem de seus nomes na tabela. Por exemplo, os jogo Vitória x Bahia e Bahia x Vitória são distintos.

Desse modo, no momento de construção da tabela de jogos, cada jogo consiste numa sequência com dois elementos distintos escolhidos dentre os vinte elementos do conjunto de times participantes do certame. Temos, então, um exemplo prático de arranjo simples.

Como 20 times participam do torneio, o número de jogos da Série A do Campeonato Brasileiro pode ser calculado como $A_{20,2}$. Portanto, o número total de jogos é:

$$A_{20,2} = \frac{20!}{18!} = 380$$

Outro modo de calcular seria através da análise do número de jogos por rodada e do número de rodadas. Como 20 times disputam a competição, cada rodada tem 10 jogos. Além disso, são 19 rodadas de ida e 19 rodadas de volta, totalizando 38 rodadas. Com isso, o número total de jogos pode ser obtido pelo produto dessas variáveis.

$$10 \cdot 38 = 380$$

3.5 Número de Jogos de um Torneio Esportivo Qualquer

O cálculo do número de jogos de uma competição é imprescindível para a organização de todo e qualquer torneio. Através da definição do número de partidas, os organizadores podem definir o orçamento do certame. Nenhum campeonato teria continuidade sem o devido planejamento. A previsão dos gastos com o número de partidas e as receitas esperadas com elas consistem em aspectos vitais para o sucesso dos torneios.

A Análise Combinatória fornece ferramentas para calcular o número de jogos de qualquer torneio esportivo. A técnica utilizada dependerá da forma de disputa da competição analisada. Como em qualquer situação, a análise e a interpretação do problema definirão a forma adequada para que se proceda com o cálculo do número de partidas a serem disputadas.

O número de ferramentas a se utilizar dependerá do regulamento da competição. Torneios com fases distintas podem necessitar de diferentes ferramentas combinatórias no momento do cálculo do número de jogos. Por isso, faremos a análise por fase, sabendo que o número total se obteria após a soma do número de partidas de cada fase do campeonato analisado.

3.5.1 Pontos Corridos em Jogos de Ida

Seja uma fase de um torneio com n times disputada em pontos corridos que tenha apenas jogos de ida. Sabemos que cada jogo é disputado por 2 times distintos. Como os jogos são apenas de ida, a mudança do time mandante não altera o jogo para fins de construção da tabela. Por exemplo, se tivéssemos o jogo Time A x Time B ou o jogo Time B x Time A, na construção da tabela de jogos, estaríamos diante da mesma partida (claro que apenas uma dessas opções seria utilizada).

Portanto, uma fase desse tipo se trata de exemplo de combinação simples e o número de jogos dela pode ser calculado da seguinte forma:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!2!}$$

Esse cálculo independe do fato de n ser par ou ímpar, uma vez que este último fato alteraria apenas o número de rodadas da fase.

Um exemplo desse tipo de fase era o Campeonato Brasileiro quando havia a fase de "mata-mata". Outros exemplos são a primeira fase do Campeonato Baiano e a primeira fase da Copa do Mundo de Futebol, analisando cada grupo separadamente.

3.5.2 Pontos Corridos em Jogos de Ida e Volta

Seja uma fase de um torneio com n times disputada em pontos corridos que tenha jogos de ida e volta. A disputa de cada jogo se dá por 2 times distintos. Como os jogos são de ida e volta, a mudança do time mandante altera o jogo para fins de construção da tabela. Por exemplo, se tivéssemos o jogo Time A x Time B ou o jogo Time B x Time A, na construção da tabela de jogos, estaríamos diante de partidas distintas.

Assim, uma fase desse tipo consiste em exemplo de arranjo simples e o seu número de jogos pode ser calculado da seguinte forma:

$$A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

Mais uma vez, o cálculo acima não depende de n ser par ou ímpar.

A atual forma de disputa dos principais campeonatos nacionais (incluindo o Campeonato Brasileiro) constitui exemplo desse tipo de fase.

3.5.3 Mata-Mata

Para calcular o número de jogos de uma fase em mata-mata, devemos analisar o regulamento da competição. Essa fase se dará em jogos de ida apenas? Será ida e volta? Há possibilidade de dispensa do jogo de volta? Há possibilidade de terceiro jogo?

No caso de mata-mata apenas em jogos de ida, o número de jogos será igual ao número de confrontos previstos. Isso ocorre, por exemplo, nos torneios de tênis. Caso, necessariamente, a fase exija jogos de ida e volta no mata-mata, temos que o número de jogos é o dobro dos confrontos previstos. Já nas possibilidades de dispensa do segundo jogo ou de existência de uma terceira partida, calcularemos número mínimo e máximo de jogos possíveis.

Uma competição como a Copa do Brasil, admite a dispensa do jogo da volta nas duas primeiras fases quando o visitante vence o primeiro jogo por dois ou mais gols de diferença. Nesse caso, cada confronto admite mínimo de um e máximo de dois jogos. Assim, cada fase tem, no mínimo, o mesmo número de jogos que o número de confrontos e, no máximo, o número de jogos será igual ao dobro do número de confrontos.

Contudo, algumas competições, como o Campeonato Brasileiro de 1999, admitem (ou no caso do exemplo, admitiam) terceiro jogo na fase de mata-mata caso um dos times não vencesse as duas primeiras partidas. Nessa situação, o menor número possível de jogos seria igual ao dobro do número de confrontos e o maior número possível de jogos seria igual ao triplo do número de partidas.

3.5.4 Outras Formas de Disputa

Além das formas de disputa já citadas, existem outras como o caso da segunda fase do Campeonato Baiano, onde times de um grupo enfrentam os times do outro grupo em ida e volta. Nos casos que se distinguem dos principais, a melhor forma de cálculo se dá através da análise do número de rodadas e do número de jogos por rodada.

De modo geral, seja uma fase de um torneio com r_1 rodadas com j_1 jogos, r_2 rodadas com j_2 jogos, $\ldots, r_n$ rodadas com j_n jogos. O número total N de jogos dessa fase pode ser calculado da seguinte forma:

$$N = r_1 \cdot j_1 + r_2 \cdot j_2 + \ldots + r_n \cdot j_n$$

Com efeito, se dispomos de r_i rodadas cada uma com j_i jogos, o número de jogos dessas rodadas pode ser calculado através do produto $r_i \cdot j_i$.

Fica evidenciado o quanto a Análise Combinatória está presente nos esportes. Suas ferramentas auxiliam desde o planejamento da competição até a forma que cada time pode iniciar e até prosseguir na disputa de cada partida. Cada conteúdo da Análise Combinatória estudado no Ensino Médio pode ser aplicado em diversas situações cotidianas, muitas delas próximas dos estudantes. O esporte consiste em apenas uma das áreas de aplicação desses conteúdos.

Referências

[1] AIZPUN LÓPEZ, A. **Matemática. Diccionario de Cienfias de la Educación.** Madrid: Santillana, 1983a.

[2] BICUDO, M.A.V.; GARNICA, A.V.M. **Filosofia da Educação Matemática.** Coleção Tendências em Educação Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, 2008.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília: MEC / SEF, 1998.

[5] CARVALHO, P. C. P; MORGADO, A. C. O.; PITOMBEIRA, J. B.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[6] FIDALGO, Fernando; Oliveira, Maria Auxiliadora Monteiro; FIDALGO, Nara Luciene Rocha. **Educação Profissional e a Lógica das Competências.** Petrópolis: Vozes, 2007.

[7] FLETCHER, T.J. **Ensino Moderno da Matemática.** Tradução de Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: 1972.

[8] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 5: Combinatória e Probabilidade.** São Paulo: Atual Editora, 2004.

[9] http://celticsbrasil.com.br/entenda-as-posicoes-do-basquete/

[10] LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K.. **Matemática Discreta.** Tradução de Ruy J. G. B. de Queiroz. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[11] LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: E.P.U., 1986. (Temas Básicos de Educação e Ensino).

[12] MOYSÉS, L. **Aplicações de Vigotsky à Educação Matemática.** 9.ed. Campinas: Papirus, 2006.

[13] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória.** 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[14] SÁNCHEZ HUETE, J. C. **Análisis de los libros de texto de Matemáticas del Ciclo Medio de la Educación General Básica.** Tesis doctoral. Universidad Complutense, Facultad de Educación, Departamentos de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Madrid, 1998.

[15] SÁNCHEZ HUETE, J. C.; FERNÁNDEZ BRAVO, J. A.. **O Ensino da Matemática. Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.** Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170-110
<http://www.pgmat.ufba.br>