Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

THIAGO BARCELOS CASTILHOS

POSSIBILDADES PEDAGÓGICAS PARA INTRODUÇÃO DE GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO BÁSICO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Orientadora: Dirce Uesu Pesco

NITERÓI
SETEMBRO/2014

THIAGO BARCELOS CASTILHOS

POSSIBILIDADES PEDAGÓGICAS PARA INTRODUÇÃO DE GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO BÁSICO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada por Thiago Barcelos Castilhos ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Dirce Uesu Pesco

Niterói
2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

C352 Castilhos, Thiago Barcelos
Possibilidades pedagógicas para a introdução de geometria fractal no ensino básico e na formação de professores de matemática /Thiago Barcelos Castilhos. – Niterói, RJ : [s.n.], 2014.
56f.

Orientador: Profª.Drª.Dirce Uesu Pesco
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2014.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria. 3.Fractal. I.Título.

CDD 510.7

THIAGO BARCELOS CASTILHOS

POSSIBILIDADES PEDAGÓGICAS PARA INTRODUÇÃO DE GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO BÁSICO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada por Thiago Barcelos Castilhos ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 16/09/2014

Banca Examinadora

____

Profª. Dirce Uesu Pesco - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

____

Prof. Sinésio Pesco - Membro

Doutor – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

____

Profª. Miriam Del Milagro Abdón - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Conjunto de Cantor em 3 iterações 13

Figura 2.2: Curva de Peano com 1 iteração 14

Figura 2.3: Construção da Curva de Peano com 3 iterações 14

Figura 2.4: Construção da Curva de Hilbert com 3 iterações 15

Figura 2.5: Construção da Curva de Koch com 3 iterações 15

Figura 2.6: Construção da Ilha de Koch com 3 iterações 16

Figura 2.7: Curva de Sierpinski co 1 iteração 16

Figura 2.8: Curva de Sierpinski com 2, 3, 4, 5 iterações 16

Figura 2.9: Triângulo de Sierpinski com 5 iterações 17

Figura 2.10: Carpete de Sierpinski com 5 iterações 17

Figura 2.11: Cubo de Sierpinski com 3 iterações 18

Figura 2.12: Pirâmide de Sierpinski 18

Figura 2.13: Curva sobreposta por segmentos 22

Figura 3.1.1: Construção inicial de um triângulo equilátero 24

Figura 3.1.2: Construindo o Triângulo de Sierpinski 24

Figura 3.1.3: Triângulo de Sierpinski estágio 2 25

Figura 3.1.4: Triângulo de Sierpinski estágio 3 25

Figura 3.1.5: Construindo um triângulo equilátero 30

Figura 3.2.1: Tetracírculo 33

Figura 3.2.2: Início da Construção do tetra círculo 34

Figura 3.2.3: Tetracírculo estágio 1 35

Figura 3.2.4: Tetracírculo estágio 2 35

Figura 3.2.5: Mapa da cidade de Armação dos Búzios 39

Figura 3.3.1: Triângulo de Sierpinski apresentado no questionário 41

Figura 3.3.2: Tetra círculo apresentado no questionário 42

Figura 3.3.3: Ilha de Koch apresentado no questionário 43

RESUMO

Este trabalho consiste em apresentar atividades pedagógicas para o ensino básico e para a formação continuada de professores com o auxílio da geometria fractal. As atividades aplicadas no ensino fundamental consistem em utilizar o *Triângulo de Sierpinski* para a aprendizagem dos conceitos de fração, contagem, potenciação e semelhança entre figuras. No ensino médio, introduzimos inicialmente o conceito de fractal acompanhado de sua parte histórica bem como atividades relacionadas com dimensão fractal para aplicações em logaritmo. Com ajuda do software Geogebra foram realizadas atividades com progressões geométricas usando o fractal T*etracirculo*. Para os estudantes de Licenciatura em Matemática foram propostas duas atividades: como utilizar fractal no ensino fundamental e médio, e como apresentar o conceito de limite através do fractal *Ilha de Koch*.

ABSTRACT

This work presents educational activities for basic education and continuing education of teachers with the assistance of fractal geometry. The activities implemented in elementary schools consist of using the Sierpinski triangle for teaching the concepts of fraction, counting, and enhancement similarity between figures. In high school, originally introduced the concept of fractal accompanied by his historical part as well as activities related to fractal dimension for applications in logarithm. With the help of software Geogebra activities with geometric progressions were performed using fractal Tetra-circle. For students in Mathematics two activities were proposed: using fractal in elementary and secondary education, and how to present the concept of limit through the fractal Koch Island.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO 9

2 - GEOMETRIA FRACTAL 13

2.1 Uma Breve História 13

2.2 Definição de Fractal 19

2.3 Dimensão Fractal e Comprimento de uma Curva 20

3 - ATIVIDADES APLICADAS 23

3.1 Atividades Aplicadas no Ensino Fundamental 23

3.1.1 Atividade Aplicada ao 7º ano do Ensino Fundamental 23

3.1.2 Atividade Aplicada ao 8º ano do Ensino Fundamental 29

3.2 Atividades Aplicadas no Ensino Médio 33

3.2.1 Atividade Aplicada ao 1º ano do Ensino Médio 33

3.2.2 Atividade Aplicada ao 2º ano do Ensino Médio 38

3.3 Atividade Aplicada a Estudantes de Licenciatura em Matemática 40

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 45

ANEXOS: RESPOSTAS DOS QUESTIONÁRIOS 47

Anexo 1: Respostas do questionário aplicado ao 7º ano do Ensino Fundamental 47

Anexo 2: Respostas do questionário aplicado ao 8º ano do Ensino Fundamental 50

Anexo 3: Respostas do questionário aplicado ao 1º ano do Ensino Médio 52

Anexo 4: Respostas do questionário aplicado aos estudantes de licenciatura 53

REFERÊNCIAS 55

1 – Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [3] e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [4], são instrumentos utilizados pelo Ministério de Educação para nortear os professores de Ensino Básico do país. Eles estabelecem habilidades e competências que o aluno deve adquirir no Ensino Fundamental e Médio e também os conteúdos que eles devem aprender durante esse período em todas as disciplinas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs, explicitam que a matemática tem como papel estimular a investigação, o raciocínio e servir de ferramenta para o entendimento do mundo à sua volta. Através da matemática o aluno deve desenvolver a capacidade para resoluções de problemas, o aluno deve associar a matemática a outras áreas, desenvolver o pensamento indutivo e dedutivo, observar regularidades e saber estabelecer parâmetro para tais regularidades. O professor tem o papel de mediar e direcionar esses conhecimentos e por isso tem que saber aplicar a matemática, ter pleno conhecimento de sua disciplina e como realizar essas tarefas. Baseado nisso iremos apresentar possibilidades pedagógicas do uso do conceito de fractal através de suas características para a realização desta tarefa, no Ensino Básico tanto no âmbito de aluno quanto no do professor.

Outro ponto importante abordado no PCN é a utilização de tecnologia e materiais alternativos (ou conteúdos) como jogos matemáticos e a introdução de história matemática ao introduzir os conteúdos, no caso da matemática.

O fractal nos possibilita trabalhar contagem, frações, área, perímetro, razão, proporcionalidade, conteúdos aplicados no Ensino Fundamental, de uma forma diferente. Como vimos no capítulo anterior, a construção desses objetos feita manualmente não nos proporciona total exatidão do objeto, ou melhor, só conseguimos fazer certo número de iteração, assim é dada uma grande oportunidade para a utilização, com os alunos, de algum *software* de geometria dinâmica.

Ao introduzir a história matemática em sala de aula para os alunos, é possível transmitir ideias e conceitos que aconteceram há muitos anos, geralmente no período compreendido entre a Antiga Grécia e o século XIX. Ao introduzir a história do fractal temos a oportunidade de apresentar conceitos que foram evoluindo até sua formalização por Benoit Mandelbrot há pouco mais de 30 anos, com isso mostrando aos alunos que a matemática assim como qualquer ciência está eternamente em construção que não é uma área estática.

No Ensino Médio, com a introdução de objetos fractais, mais uma vez pode-se mostrar a limitação humana e, com o auxílio da tecnologia, construir a ideia de infinito, um conceito de difícil entendimento. Outro ponto importante é um exemplo de aplicação em logaritmo na determinação da dimensão fractal.

Pode-se trabalhar o conceito de recursividade, pensamento indutivo, progressão geométrica e composições de função através de iterações nos objetos fractais, utilizando-se de uma construção geométrica para introdução desses conceitos, o que para o aluno é mais palpável, ou seja, trabalha-se conceitos abstratos em materiais concretos. Desta forma cumpre-se a competência exigida pelo PCN, que consiste em o aluno perceber padrões e saber formulá-lo matematicamente.

O mais importante da introdução de fractais no ensino da matemática é a possibilidade de interdisciplinaridade e contextualização, pois é um conceito que possui aplicação em várias áreas e contém objetos que estão muito próximos da natureza como: floco de neve, relâmpago, montanha, árvores e outros.

> "(...) No ponto de vista escolar, a interdisciplinaridade pode ser tomada numa concepção bem ampla, entendida como qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas com vista á compreensão de um objeto a partir da confluência de pontos de vista diferentes e tendo como objetivo final a elaboração de uma síntese relativamente ao objeto comum (Pombo, 1994, p.13).(...)"
>
> (Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula, 2012, p.17)

Os PCNs propõem interações entre a matemática com ela mesma, com outras disciplinas e com os temas transversais, tentando promover uma educação sem o caráter segmentado. Com isso também orienta na contextualização do assunto.

Outro ponto importante é elaborar atividade de caráter investigativo, fazer com que o aluno investigue, conjecture e chegue as suas próprias conclusões.

> "(...) As atividades de investigação matemática podem fazer com que as interações ocorram naturalmente, em sala de aula e, reciprocamente, as interações em sala de aula podem favorecer o desenvolvimento dessas atividades, proporcionando ricas oportunidades de aprendizagem para o aluno. (...)"
>
> (Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula, 2012, p.21 e 22)

Também tem grande importância a preparação dos professores para a sala de aula. Com isso podemos introduzir fractal para a formação de professores ou/e a formação continuada dos professores. Esses têm que ser preparados para a interdisciplinaridade e saber fazer conexões da ciência que leciona, assim como têm que ter as mesmas habilidades e competências quais os alunos têm que adquirirem durante o ensino básico.

> "A formação dos professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula,..."
>
> (Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental – Matemática, 1998, p.21 e 22)

Observa-se que nos PCNs têm-se a preocupação sobre a formação dos professores para a realização de suas atividades em sala de aula, como podemos ver abaixo:

> "Numa reflexão sobre o ensino de Matemática é de fundamental importância o Professor: identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;..."
>
> (Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental – Matemática, 1998, p.35 e 36)

Como já foi dito a geometria fractal é uma ramificação da matemática com bastante aplicabilidade, com isso é importante que o professor tenha o conhecimento básico desta área para sua utilização em sala de aula.

O trabalho consiste em apresentar propostas de atividades usando fractais, para serem usadas em sala de aula no Ensino Básico (Fundamental e Médio) e também na formação de professores, podendo ser na graduação ou em formação continuada. Algumas dessas propostas foram realizadas em sala de aula e avaliaremos o resultado das aplicações.

No capítulo 2 é feito um pequeno passeio histórico sobre a geometria fractal e seu iniciador, Benoit Mandelbrot [14]. Também é realizada neste capítulo uma breve revisão teórica, definindo fractal, fractal estatístico, dimensão e comprimento fractal. Essa parte teórica não será aprofundada, pois queremos introduzir o conceito no Ensino Básico, logo a revisão de conteúdo é sobre aquilo que acreditamos que um aluno do Ensino Básico precisa saber e consegue compreender.

As atividades realizadas em sala de aula são apresentadas no capítulo 3, bem como sua forma de execução, as justificativas e objetivos para a realização das mesmas. Foram aplicadas duas atividades no Ensino Fundamental, duas atividades no Ensino Médio e uma atividade na formação de professores.

No capítulo 4 segue a conclusão dos resultados das atividades aplicadas procurando sempre apresentar os pontos positivos e os pontos negativos observados nas aplicações.

Por fim estão nos anexos as respostas das atividades.

2- Geometria Fractal

2.1 – Uma breve história

O conceito fractal foi intuído já na Antiga Grécia nos primeiros anos do século V a.C. pelo grego Anaxárogas:

> *"(...) O filósofo, em sua perquirição cosmogônica, à caça do elemento essencial da vida afirmava ser a prima-substância infinita tanto em número quanto em qualidade; e chamou-as de homeomeria, (...) Logo, as homeomerias expressam-se por partes simples que, semelhantes,entre si, conservam as propriedades do todo.(...)"*
>
> *(Fractais da História; A humanidade no Caleidoscópio 2003, p.18).*

Segundo Janos em 2008 [13], talvez o primeiro objeto reconhecido hoje como fractal foi o Conjunto de Cantor, que foi publicado pelo matemático Georg Cantor em 1883, sua construção consiste em:

1. Considerar um segmento de reta
2. Dividir este segmento de reta em três partes iguais e eliminar a parte central.
3. Em cada segmento restante repetir a construção em 2.
4. Repetir infinitamente a construção em 3

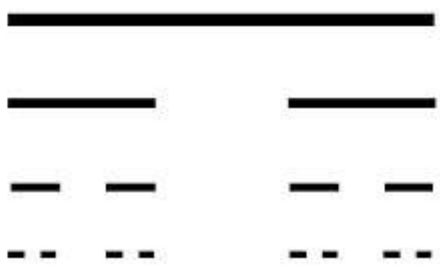


Figura 2.1: Conjunto de Cantor em 3 iterações.

Fonte:< http://www.mat.uc.pt>

Esse conjunto também ficou conhecido como Poeira de Cantor.

Objetos como este ficaram conhecidos como "monstros matemáticos" e, por falta de computadores na época, quase não existiam representações gráficas destes objetos e suas construções necessitavam de cálculos tediosos, sem contar suas propriedades “estranhas”, curvas não diferenciáveis em nenhum ponto, autossimilaridade e outras propriedades que não se adequavam a topologia da época.

Em 1890 Giusepe Peano publicou outro “monstro” matemático que foi chamado de Curva de Peano. Sua construção consiste em

1. Considerar um segmento de reta.
2. Dividir o segmento em três partes iguais e com a parte central faça um quadrado em cima e outro em baixo do segmento, como mostra a figura 2.2.

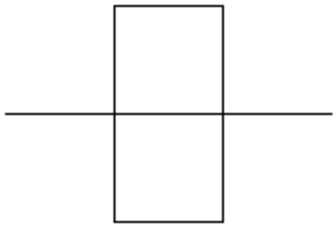


Figura 2.2: Curva de Peano com 1 iteração.

Fonte: <www.educ.fc.ul.pt>

3. Com cada segmento repita a construção 2 e assim sucessivamente, como mostra a figura 2.3.

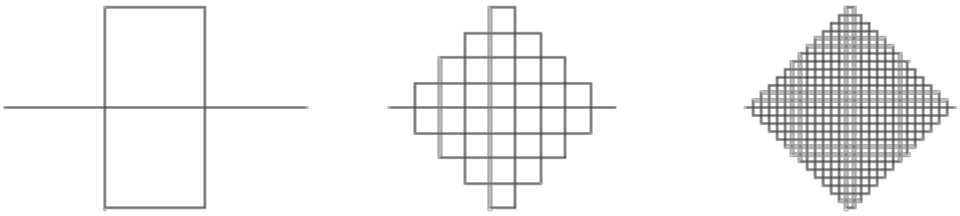


Figura 2.3: Construção da Curva de Peano com 3 iterações.

Fonte: <www.educ.fc.ul.pt>

Esse objeto foi proposto como uma curva que cobre totalmente uma superfície plana quadrangular.

Em 1981 foi a vez de David Hilbert apresentar mais um “monstro matemático”, uma curva que também leva o seu nome. Sua construção consiste em:

1. Considerar um quadrado dividido em quatro quadrados, dando início à curva com 3 segmentos consecutivos com extremos nos seus pontos centrais.
2. Substituir cada quadrado por outros quatro com a mesma construção anterior sucessivamente. Veja a figura 2.4.

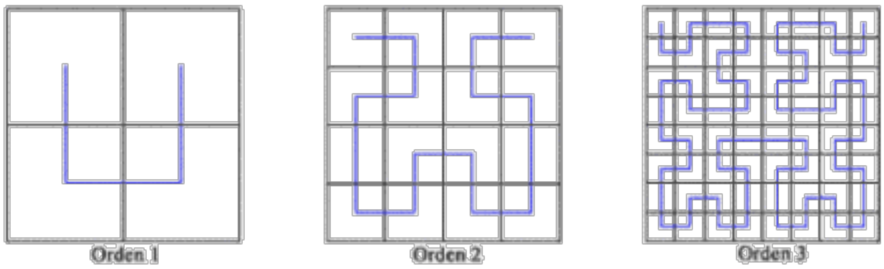


Figura 2.4: Construção da Curva de Hilbert com 3 iterações.

Fonte: <www.dmae.upm.es>

Em 1904 Helge Von Koch publicou sua curva (Curva de Koch). Sua construção consiste em:

1. Considerar um segmento de reta.
2. Dividir este segmento em três partes iguais, construindo na parte central um triângulo equilátero eliminando a sua base.
3. repita sucessivamente a construção 2 em cada segmento restante.

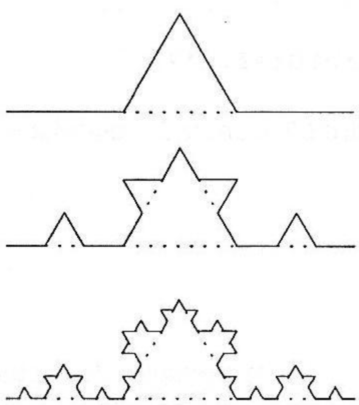


Figura 2.5: Construção da Curva de Koch com 3 iterações.

Fonte:<www.dmae.upm.es>

É importante observar uma variação desta curva, a chamada Ilha de Koch, que consiste em considerar inicialmente um triângulo equilátero e realizar a mesma construção anterior em cada um de seus lados. Por ser semelhante a formação cristalina de um floco de neve também é conhecido como Floco de Neve.

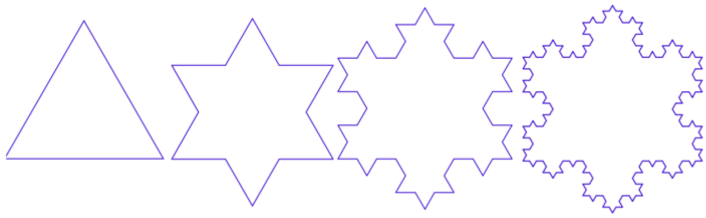


Figura 2.6: Construção da Ilha de Koch com 3 iterações.

Fonte: <www.ceticismoaberto.com>

Em 1916 outro “monstro” matemático foi apresentado por Waclaw Sierpinski. A construção de sua curva consiste em:

1. Considerar um segmento de reta que seja um lado de um triângulo equilátero.
2. Substituir o segmento por uma poligonal com 3 segmentos formando 3 lados de um trapézio isósceles como vértices nas extremidades do segmento e nos pontos médios dos outros dois lados do triângulo. Observe a figura 2.7:

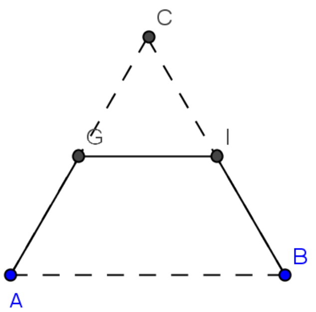


Figura 2.7: Curva de Sierpinski com 1 iteração.

3. A cada segmento repita o processo de construção 2 sucessivamente.

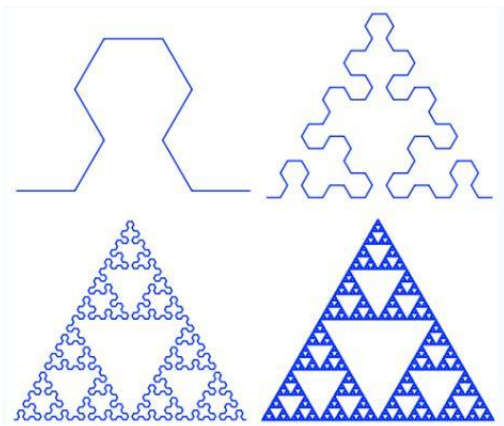


Figura 2.8:Curva de Sierpinki com 2, 3, 4 e 5 iterações.

Fonte: <www.dma.fi.upm.es>

Observa-se que a Curva de Sierpinski tende a cobrir os triângulos equiláteros dos três cantos excetuando os centrais obtidos a cada interação realizada. Com isso podemos também construir o chamado Triângulo de Sierpinski, realizado da seguinte maneira:

1. Considere um triângulo equilátero.
2. Constrói-se segmentos de reta com extremidades em cada ponto médio dos lados do triângulo. Obtendo então quatro triângulos.
3. Remova o triângulo central.
4. Com cada triângulo restante realize a ação 3.

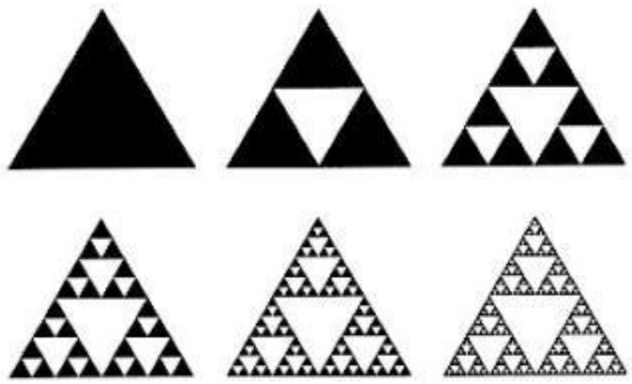


Figura 2.9: Triângulo de Sierpinski com 5 iterações.

Fonte: <www.educ.fc.ul.pt>

Existem outros objetos com o mesmo conceito de construção, são eles: Carpete de Sierpinski (inicialmente divida um quadrado em nove quadrados e remova o quadrado central), veja figura 2.10, Cubo de Sierpinski (também conhecido com Esponja de Menger), na figura 2.11, e pirâmide de Sierpinski, figura 2.12.

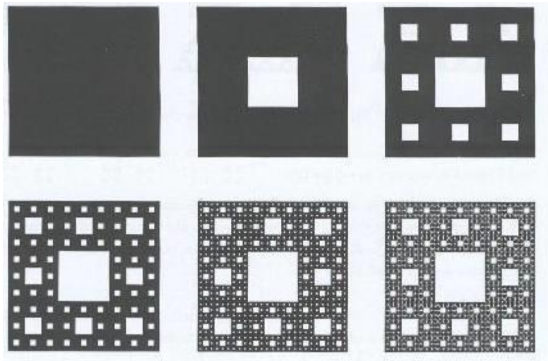


Figura 2.10: Carpete de Sierpinski com 5 iterações.

Fonte: <www.dma.fi.upm.es>

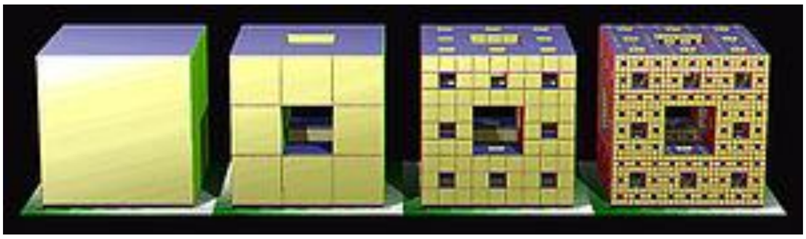


Figura 2.11: Cubo de Sierpinski com 3 iterações.

Fonte: <www.pt.wikipedi.org>

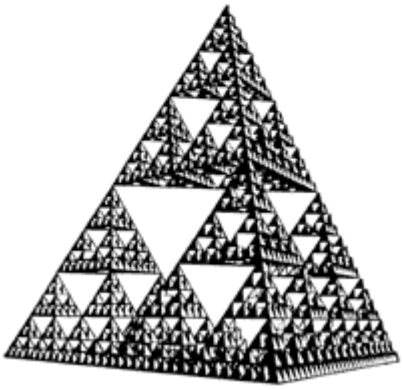


Figura 2.12: Pirâmide de Sierpinski.

Fonte: <www.pt.wikipedia.org>

Em 1918, em plena guerra mundial, Pierre Fatou e Gaston Julia publicaram um trabalho que contribuiu muito para sistemas dinâmicos complexos com iteração de função. O trabalho consistia em estudar o que acontece com a imagem no plano complexo quando se aplica infinitas iterações da função $f(z) = z^2 + c$, onde c é um complexo constante e z um complexo inicial que sofrerá a iteração, podendo assim obter $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$.

É preciso esclarecer o que é função iterativa. Em [13] encontra- se a seguinte definição: Seja $f : X \to X$ uma transformação num espaço métrico. As iteradas sucessivas de f são transformações $f^n : X \to X$ definidas por:

$$f^0(x) = x$$
$$f^1(x) = f(x)$$
$$f^{(n+1)}(x) = (f \circ f^n)(x) = f(f^n(x)), n = 1,2,3,...$$

Funções iteradas são sucessivas composições de funções.

Mais tarde um matemático francês chamado Benoit Mandelbrot se interessou pelo trabalho de Fatou e Julia. Com o auxílio do avanço tecnológico e dos recursos que tinha a seu dispor na IBM, onde trabalhava, começou uma investigação dos conceitos aplicando em séries temporais relacionadas com preço. Resolveu um problema relacionado a ruídos de linha telefônica aplicando a ideia do Conjunto de Cantor e em 1975 publicou o primeiro ensaio intitulado *Les objectes fractales: forme, hasard et dimension.*

Neste trabalho foi introduzido pela primeira vez o termo *fractal*, originado do latim *fractus, frangere* que significa quebrado, fragmentado, fragmentar. A partir de então foi possível representar tais objetos com o auxílio dos recursos tecnológicos, e assim em 1980 Mandelbrot apresenta o primeiro traçado gráfico no plano complexo da função iterativa apresentada no trabalho de Fatou e Julia, hoje conhecido como Conjunto de Mandelbrot, talvez o fractal mais popularmente conhecido.

Por esses trabalhos que Mandelbrot é conhecido como o pai da Geometria Fractal e foi através dele que a comunidade científica tomou interesse sobre o assunto, com certa resistência no início. Os conceitos de Fractais começaram a serem aplicados em várias áreas, ampliando, por exemplo, as técnicas de criação de imagens no computador até mesmo sendo utilizada na criação de paisagens e galáxias na série *Star Trek.*

Hoje duas áreas que tem bastante interesse no estudo da Geometria Fractal são: Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos. Mas fractal pode ser aplicado em outras áreas como: Biologia, Geografia, Cartografia, Artes entre outras.

2.2 – Definição de Fractal

Existem algumas maneiras diferentes de definir fractal. Neste trabalho iremos considerar uma das definições citadas em Barbosa 2002:

“Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- ✓ F possui alguma forma de autossimilaridade ainda que aproximada ou estatística;
- ✓ A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a dimensão topológica;
- ✓ O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.”

Essa definição foi a escolhida por ter uma linguagem mais acessível ao aluno de ensino básico e por nela conter expressamente conteúdos que podem ser trabalhados com eles, como por exemplo, o processo recursivo.

Para isso podemos intuir autossimilaridade. Assim dizemos que um objeto possui autossimilaridade quando suas partes se assemelham com o todo, ou seja, se aplicar mos um "zoom" em uma determinada parte do objeto obtemos uma forma semelhante a do próprio objeto como todo. Essa autossimilaridade pode ser exata ou estatística.

A autossimilaridade exata é encontrada nas figuras matemáticas como o Conjunto de Cantor, Ilha de Koch, etc., é chamada assim, pois as cópias reduzidas são exatamente iguais ao objeto inteiro.

A autossimilaridade estatística é quando as cópias reduzidas possuem uma distorção do objeto inteiro, assim são autoafins, mas que na média possuem um caráter autossemelhante, esta é encontrada em fractais da natureza como fronteiras, nuvens, relâmpagos e outros.

2.3 – Dimensão Fractal e Comprimento de Uma Curva

Em uma estrutura autossemelhante existe um fator de redução e quantidade de objetos idênticos obtidos. Tomaremos como exemplo o Conjunto de Cantor: a cada estágio a figura é reduzida a uma escala de $\frac{1}{3}$ e obtém 2 figuras idênticas a figura do estágio anterior.

A fórmula $D = \dfrac{\log(N)}{\log\left(\dfrac{1}{s}\right)}$ define a dimensão D de um fractal, onde s é a escala de redução e N é a quantidade de objetos idênticos. Voltando ao exemplo do Conjunto de Cantor temos:

$$D = \frac{\log 2}{\log\left(\dfrac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0{,}6309$$

Uma característica interessante do fractal é a sua dimensão ser sempre um número fracionário.

Janos em 2008 [13] apresenta uma maneira interessante de calcular uma dimensão fractal aproximada de um objeto natural, no livro é usada a extensão do Rio Amazonas retirado de um mapa e dividido em dois trechos.

Coloca-se a figura em um papel quadriculado com quadrado de lado 1 unidade de comprimento e conta-se a quantidade de quadrados que a figura ocupa. É conveniente para efeitos de conta sempre considerarmos 1 unidade, depois reduz o tamanho dos quadrados com os lados sendo reduzidos ao meio e conta novamente.

Suponhamos que certa linha obteve os seguintes resultados:

- Com o quadrado de lado unitário ($s_1 = 1$) a figura ocupou 30 quadrados ($N_1 = 30$)
- Com o quadrado de lado meio $\left(s_2 = \frac{1}{2} \right)$ a figura ocupou 55 quadrados ($N_2 = 65$)

Se for traçado o gráfico $\log(N) \times \log\left(\frac{1}{s}\right)$ e assim traçando uma reta no trecho entre os pontos obtidos, a mesma terá uma inclinação de $\dfrac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)}$, que por definição é a dimensão do fractal. Para obter então a dimensão *d* do fractal com os dados coletados acima basta usar a seguinte fórmula: $d = \dfrac{\log(N_2) - \log(N_1)}{\log\left(\frac{1}{s_2}\right) - \log\left(\frac{1}{s_1}\right)}$, no suposto exemplo temos

$$d = \frac{\log 65 - \log 30}{\log 2 - \log 1} \cong \frac{1{,}813 - 1{,}477}{0{,}301 - 0} \cong 1{,}116.$$

O comprimento de uma curva é definido em [7] como $L(m) = m \cdot N(m)$, onde $N(m)$ é a quantidade de segmentos de tamanho m que sobrepõe a curva, com isso podemos concluir que o comprimento total é dado por $\lim_{m \to 0} L(m)$. Abaixo temos uma figura para uma visualização sobre o sobreposição de segmentos de tamanhos diferentes em uma curva.

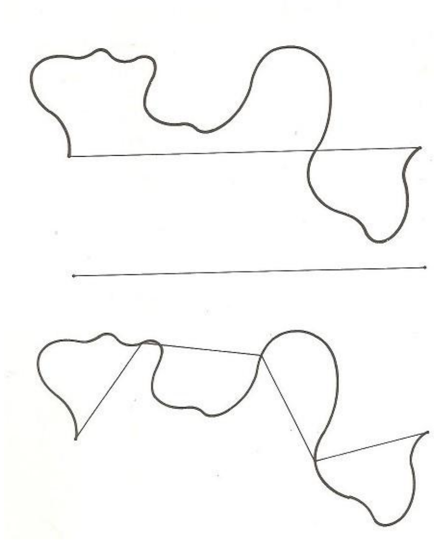


Figura 2.13: Curva sobreposta por segmentos

Fonte: Referência [7].

3 – Atividades Aplicadas

3.1 – Atividades Aplicadas no Ensino Fundamental

3.1.1 – Atividade Aplicada no 7º ano do Ensino Fundamental

A atividade consiste em construir um Triângulo de Sierpinski em cartolina e na resolução de um questionário baseado em observações feitas durante a construção e no objeto final. Foi realizado num período de 8 tempos de 50 minutos de aula, sendo 4 de matemática e 4 de artes, em uma turma da Escola Municipal Evaldo Sales em Cabo Frio – RJ.

Objetivos Gerais

A atividade tem como objetivo estabelecer uma interdisciplinaridade com a disciplina de artes e trabalhar conceitos de geometria e fração.

Objetivos Específicos

Estabelecer uma conexão entre matemática e artes; demonstrar uma maneira de construção de triângulo equilátero com transferidor; reconhecer propriedades do triângulo equilátero; intuir um significado para frações e suas operações (simplificação, adição, subtração, multiplicação e divisão); apresentar justificativas das resoluções apresentadas, manusear régua e transferidor; perceber padrões.

Justificativa

A atividade foi desenvolvida para poder atingir os objetivos de uma forma mais concreta e com uma maior participação dos alunos de uma maneira construtiva.

Material Usado

Uma cartolina branca, uma cartolina de cor (preta, azul, etc.), tesoura, régua, lápis, transferidor e cola.

Construção

Desenhe um triângulo equilátero com o lado medindo 48 cm em cada cartolina. O método usado para tal construção foi o seguinte:

- Desenhe na cartolina uma linha de 48 cm, em suas extremidades desenhe uma semirreta com um ângulo de 60º (usando o transferidor) com essa linha, o ponto de encontro entre essas semirretas é o terceiro vértice do triângulo, como mostra a figura:

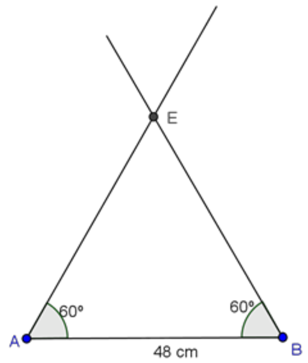


Figura 3.1.1: Construção inicial de um triângulo equilátero.

Obtendo assim o estágio 0 do Triângulo de Sierpinski.

- Marque um ponto na metade dos lados, obtendo assim o ponto médio dos lados, e ligasse esses pontos e recortasse o branco e colasse um branco apenas na parte central no triângulo colorido (estágio 1).

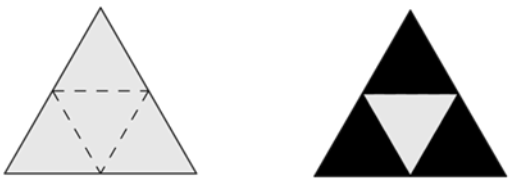


Figura 3.1.2: Construindo o Triângulo de Sierpinski.

- Com os 3 triângulos brancos iguais que sobraram, em cada um deles repete o processo (como mostra a figura 3.3, estágio 2) por mais duas vezes. Obtendo o resultado mostrado na figura 3.4 (estágio 3).

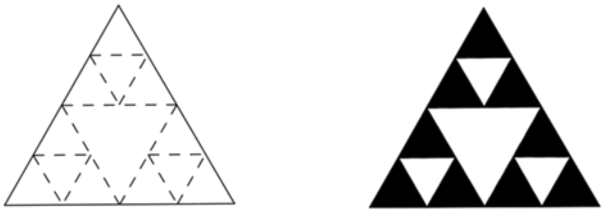


Figura 3.1.3: Triângulo de Sierpinski estágio 2.

Figura 3.1.4: Triângulo de Sierpinski estágio 3.

Aplicação da Atividade

A turma foi preparada com uma semana de aula, o que corresponde a 7 tempos de 50 minutos, com uma revisão do conteúdo de frações. Posteriormente, foi dado o início da atividade com a apresentação da definição de triângulo equilátero e apresentação de duas propriedades:

I. Os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais.
II. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º.

A segunda propriedade foi mostrada através de dobradura como é apresentada em [18].

Na sequência foi iniciada a construção da atividade, solicitando que construíssem os triângulos equiláteros sem apresentar nenhum método. A turma foi dividida em grupos com 5 alunos. Após várias tentativas frustradas foi apresentado o método de construção citado acima. Depois foi dado início da construção do Triângulo de Sierpinski. Para essas construções foram usados 4 tempos de aula.

Para aplicação do questionário foram utilizados dois tempos de aula. Os alunos tiveram 50 minutos para responder o questionário e os 50 minutos restantes foram reservados para discussão das respostas dadas e apresentação das respostas corretas.

Também foram utilizados 2 tempos de aula para uma apresentação da geometria fractal, e da relação da arte com matemática em PowerPoint. A apresentação consistia em explicar o que é fractal, como foi criado, introduzindo assim história da matemática, exemplificar com figuras geométricas que são fractais relacionando assim com o Triângulo de Sierpinski , mostrar a relação de objetos na natureza com fractais.

Em relação a aula de Artes foi apresentado figuras em perspectiva relacionando com as obras de Escher [9] e mostrou gravuras retiradas da revista Super Interessante das pinturas fractais de Pollock [21], com auxílio da referência [17], fazendo assim uma relação de matemática com arte.

Questionário aplicado

1. Qual é a medida do lado dos triângulos pretos nos estágios:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
2. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 1 com o lado do triângulo preto do estágio 0?
3. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo preto do estágio 1?
4. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 3 com o lado do triângulo preto do estágio 2?
5. As respostas dos itens 2, 3 e 4 são iguais. Justifique.
6. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo preto do estágio 0?
7. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 3 com o lado do triângulo preto do estágio 0?
8. Qual a fração que representa o triângulo preto do estágio 1 com do triângulo preto do estágio 0?

9. Qual a fração que representa o triângulo preto do estágio 2 com do triângulo preto do estágio 1?
10. Qual a fração que representa o triângulo preto do estágio 2 com do triângulo preto do estágio 0?
11. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 1 com do estágio 0?
12. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com do estágio 1?
13. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com do estágio 0?
14. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 3 com do estágio 0?
15. Quanto falta na figura do estágio 3 para termos a figura do estágio 0?
16. Quanto falta na figura do estágio 3 para termos a figura no estágio 2?

Resultados Esperados

- ✓ - A percepção de como as propriedades matemáticas podem nos ajudar nas construções de figuras, já que sem a sua utilização houve tentativas fracassadas ou no mínimo trabalhosas, na construção de um triângulo equilátero.

- ✓ Justificar a construção do triângulo equilátero com régua e transferidor através das propriedades.

- ✓ Nas questões 2, 3 e 4, saber representar fração com as medidas obtidas na questão 1.

- ✓ Na questão 5, perceber através da construção que as respostas das questões 2, 3 e 4 são frações equivalentes.

- ✓ Nas questões 6 e 7, perceber que as frações originais estão sendo divididas por 2 assim trabalhando divisão com frações.

- ✓ Nas questões 8 e 9, perceber a representação de frações das áreas dos triângulos, sendo o conceito de área ainda intuitivo (quantos triângulos pretos do estágio 1 cabem no triângulo preto do estágio 0).

- ✓ Na questão 10, perceber que as frações estão sendo divididas por 4 e novamente trabalhar divisão de frações.

- ✓ Nas questões 11 e 12, perceber que a resposta é o triplo das repostas obtidas nas questões 8 e 9, assim trabalhando a multiplicação de frações.

- ✓ Nas questões 13 e 14, perceber que a cada estágio a área do Triângulo de Sierspinski está sendo multiplicada por $\frac{3}{4}$, continuando com multiplicação de frações.
- ✓ Nas questões 15 e 16, reconhecer o significado de retirar como subtrair, assim trabalhando soma e subtração de frações.

- ✓ Na apresentação feita esperava-se a percepção de que as disciplinas não são isoladas, e a matemática está em constante mudança.

Resultados obtidos e Dificuldades Encontradas

Os alunos conseguiram compreender bem as propriedades da fração e suas operações. Um aluno durante a atividade perguntou:

> " Ah, professor é por isso que tiramos mmc para somar fração, temos que ter triângulos de mesmo tamanho, não é?"

Com essa pergunta feita pelo aluno percebe-se que com a atividade, somar e subtrair frações com denominadores diferentes utilizando de frações equivalentes com mesmo denominador, faz mais sentido para o aluno. A maioria deles comentou que agora vai lembrar da atividade para realizar operações com frações e que não imaginava que existem pessoas querendo descobrir "coisas" na matemática até hoje. Para os alunos a matemática era uma ciência fechada descoberta ou inventada por um indivíduo algum tempo atrás.

A grande dificuldade encontrada foi a utilização da régua, ninguém sabia usá-la, a maioria começava a medir a partir da marca indicada pelo número 1 e uma pequena parte começava a medir no começo da régua ignorando por completo a diferença entre o começo da régua e o número 0.

Outra dificuldade foi ao responder o questionário, pois não entendiam o conceito de fração estar relacionada com dois objetos, ou seja, não sabiam responder qual é a fração de um *objeto A* em relação ao *objeto B*, pois alegavam que antes só eram apresentados ao conteúdo com desenho de pedaços pintados e a pergunta que fração representa a figura.

Foi observado também que por falta de atividades investigativas eles tinham a tendência de desistir por não ter a resposta diretamente, obtendo assim dificuldades em observar padrões.

3.1.2 – Atividade aplicada no 8º ano do Ensino Fundamental

A atividade consiste em construir um Triângulo de Sierpinski em cartolina e na resolução de um questionário baseado em observações feitas durante a construção e no objeto final. Foi realizado num período de 8 tempos de 50 minutos de aula, sendo 4 de matemática e 4 de artes, em uma turma da Escola Municipal Evaldo Sales em Cabo Frio – RJ.

Objetivos Gerais

A atividade tem como objetivo estabelecer uma interdisciplinaridade com a disciplina de artes e trabalhar conceitos de geometria, razão e potência.

Objetivos Específicos

Estabelecer uma conexão entre matemática e artes; demonstrar uma maneira de construção de triângulo equilátero com transferidor; reconhecer propriedades do triângulo equilátero; perceber que razão é uma fração; estabelecer uma relação entre razão entre os lados de duas figuras e a razão de suas áreas; apresentar justificativas das resoluções apresentadas, manusear régua e transferidor; intuir o significado de potência; perceber de padrões; perceber congruência de triângulo; observar escala; constatar semelhança de triângulos.

Justificativa

A atividade foi desenvolvida para poder atingir os objetivos de uma forma mais concreta e com uma maior participação dos alunos de uma maneira construtiva.

Material Usado

Uma cartolina branca, uma cartolina de cor (preta, azul, etc.), tesoura, régua, lápis, transferidor e cola.

Construção

Desenhe um triângulo equilátero com o lado medindo 48 cm em cada cartolina. O método usado para tal construção foi o seguinte:

- Desenhe um segmento medindo 48cm, com o transferidor construa um ângulo de 60º em uma de suas extremidades e faça um outro segmento com 48cm, como mostra a figura:

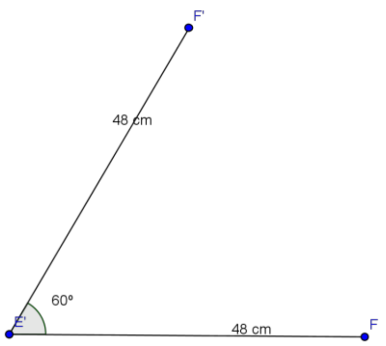


Figura 3.1.5: Construindo um triângulo equilátero.

- Ligando os pontos F e F' temos um triângulo equilátero com lado de 48 cm.
- A partir daí a construção é semelhante a atividade apresentada anteriormente aplicada ao 7º ano.

Aplicação da Atividade

A turma foi dividida em grupos com 5 alunos cada. Os alunos tinham estudado congruência e semelhança de triângulos. Em algumas escolas essa atividade pode ser aplicada no 9º ano, já que tais conteúdos são iniciados nesta série. Como era o primeiro contato de fractais com a turma a aplicação da atividade foi realizada de forma análoga a atividade anterior.

Questionário aplicado

1. Qual é a medida do lado dos triângulos pretos nos estágios:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
2. Qual a razão entre o lado de um triângulo preto do estágio 1 com o lado do triângulo do estágio 0?
3. Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo preto do estágio 1?
4. Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo do estágio 0?
5. Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 3 com o lado do triângulo do estágio 0?
6. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 1 com a área do triângulo do estágio 0?
7. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 2 com a área do triângulo preto do estágio 1?
8. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 2 com a área do triângulo do estágio 0?
9. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 3 com a área do triângulo preto do estágio 2?
10. Se tomarmos um triângulo preto do estágio 1 com o triângulo do estágio 0, a razão entre seus lados é igual a razão entre suas áreas? Que relação pode fazer entre essas razões?
11. Qual a razão entre a área do Triângulo de Sierpinski do estágio 1 com o do estágio 0?
12. Qual a razão entre a área do Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com o do estágio 1?
13. Qual a razão entre a área do Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com o do estágio 0?
14. Os triângulos pretos do estágio 1 e do estágio 2 são congruentes? Justifique.
15. Os triângulos pretos dos estágios 0, 1, 2, 3, 4 são semelhantes? Justifique.
16. Os Triângulos de Sierpinski nos estágios 0,1, 2, 3, 4 são semelhantes? Justifique.

17. Quantos triângulos pretos existem nos estágios 0,1, 2, 3, 4, 5, 10, n?

Resultados esperados

- ✓ Nas questões 2, 3, 4 e 5 espera-se que o aluno consiga responder utilizando a resposta da questão 1 e relacione-as com a construção feita por ele, assim percebendo um padrão nestas razões.

- ✓ Nas questões 6 a 9 espera-se que o aluno resolva utilizando-se da construção, através da quantidade de triângulos obtidos em cada estágio consiga saber a razão entre as áreas dos triângulos.

- ✓ Na questão 10 o aluno perceba uma relação entre a razão dos lados com a razão das áreas, ou seja, que a razão das áreas é o quadrado da razão entre os lados.

- ✓ Nas questões de 11 a 13 espera-se que da mesma forma do que nas questões de 6 a 9 o aluno consiga saber a razão entre as áreas dos Triângulo de Sierpinski.

- ✓ Nas questões 14 a 16 espera-se que o aluno consiga identificar congruência e semelhança de figuras.

- ✓ Na questão 17 espera-se que o aluno perceba um padrão de contagem e consiga formular a quantidade de triângulos pretos para um n-ésimo estágio.

- ✓ Na apresentação feita esperava-se a percepção de que as disciplinas não são isoladas, e a matemática está em constante mudança.

Resultados Obtidos e Dificuldades Encontradas

Assim como na atividade anterior os alunos apresentaram dificuldades na utilização da régua, mas nesta turma houve uma quantidade maior de alunos que a utilizaram de forma correta.

A grande dificuldade foi em perceber um padrão na construção da figura e assim responder corretamente a questão 17, apenas dois alunos perceberam o padrão, mas não conseguiram exibir uma fórmula para o estágio n e como a construção foi até o estágio 4, também não conseguiram responder quantos triângulos pretos haveria no estágio 10 a resposta de ambos foi 30 pois fizeram o produto entre 3 e 10.

Todos conseguiram alcançar satisfatoriamente o objetivo de compreender e identificar semelhança e congruência de triângulos. Também ficaram surpresos de atualmente ainda estar desenvolvendo a matemática. Pode perceber que os alunos não estão acostumados a este tipo de atividade em sala de aula de matemática.

3.2 – Atividades Aplicadas no Ensino Médio

3.2.1 – Atividade Aplicada no 1° ano do Ensino Médio

A atividade consiste em construir o fractal da figura abaixo com o auxílio do *software GeoGebra* [12] e na aplicação de um questionário. Foi preciso 6 tempos de 50 minutos da aula de matemática para aplicação dos quais 4 tempos foram na sala de informática. Sua realização foi em uma turma de 1º ano noturno do Colégio Municipal Paulo Freire no município de Armação dos Búzios.

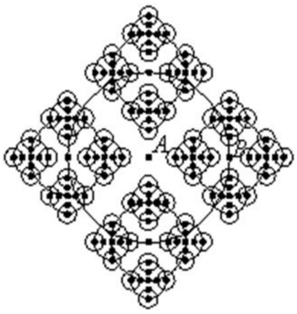


Figura 3.2.1 : Tetracírculo.

Fonte: Referência [2]

Objetivos Gerais

A atividade tem como objetivo trabalhar com conceitos de geometria, introduzir tecnologia no ensino da matemática através de software de geometria dinâmica, apresentar uma aplicação geométrica de progressão geométrica e sedimentar o conceito de infinito e limitado.

Objetivos Específicos

Apresentar a definição de circunferências e seus elementos como diâmetro, raio e corda. Construir uma circunferência com um raio dado através do uso do *software Geogebra*, identificar uma progressão geométrica e sua razão (assim percebendo padrões), perceber que em infinitas iterações temos infinitas circunferências limitadas por um quadrado, aplicar a soma dos infinitos termos de um progressão geométrica convergente, conjecturar através da figura o conceito de limite e tentar provar usando a definição.

Justificativa

A atividade foi desenvolvida para uma maior participação dos alunos através da tecnologia em alcançar os objetivos apresentados acima.

Construção da atividade

Passo 1:

Construir um segmento AB e com centro em A e raio AB construíssem uma circunferência.

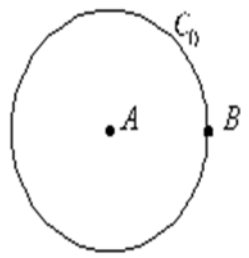


Figura 3.2.2: Início da Construção do Tetracírculo.

Passo 2:

Passar uma reta por AB e uma perpendicular a mesma passando por A. Construir os pontos D, E, F de interseção destas retas com a circunferência, observa-se que o quarto ponto é o B que já está na figura. Ocultar as retas. Construir os pontos M_1, M_2, M_3, M_4, os pontos médios entre A e B, entre A e F, entre A e D e entre A e E. E por fim construir quatro circunferências como mostra a figura abaixo.

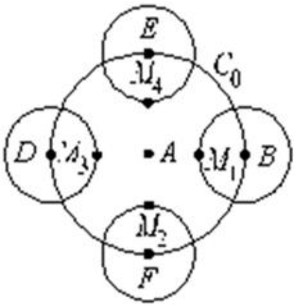


Figura 3.2.3 : Tetracírculo estágio 1.

Fonte: Referência [2]

Passo 3:

Repetir sucessivamente o passo 2 com cada uma das circunferências obtidas.

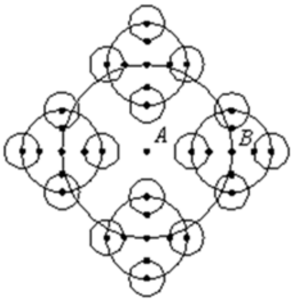


Figura 3.2.4 : Tetracírculo estágio 2.

Fonte: Referência [2]

Aplicação da Atividade

Para aplicação da atividade a turma foi levada para a sala de informática e separada em duplas e trias, motivadas pela quantidade de computadores funcionando na sala. Já tinha sido apresentado aos alunos o conceito de progressão geométrica e soma dos termos de uma progressão geométrica.

Como nenhum aluno conhecia o programa Geogebra, foi necessário que no primeiro dia fosse apresentado o programa e seus comandos básicos, construindo algumas figuras simples como retas paralelas, retas perpendiculares, segmentos de retas, pontos em interseções, ângulos e circunferências e aplicando comandos como esconder figuras.

No segundo dia os alunos foram levados novamente para a sala de informática e foi pedido que construíssem o fractal de acordo com os passos citados acima na construção da figura. Depois foi apresentada aos alunos a figura 3.2.1, que seria obtida se eles fizessem novamente o passo 2 com cada circunferência obtida na figura 3.2.4.

No terceiro e último dia foi-lhes dado e discutido o seguinte questionário:

1. Complete a tabela com a quantidade de circunferências obtidas em cada estágio.

Estágio 0	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio n

2. Complete a tabela com o tamanho do raio das circunferências obtidas em cada estágio, dado que o raio da circunferência no estágio 0 é r.

Estágio 0	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio n

3. Complete a tabela com a quantidade total de centros de circunferência em cada estágio.

Estágio 0	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio n

4. O fractal é limitado para um número infinito de iterações? Se for, para qual figura o limita?
5. Tente justificar a resposta dada no item anterior.

Resultados Esperados

- ✓ Esperava-se que o aluno ao responder a primeira pergunta do questionário percebesse um padrão em relação a quantidade de circunferências obtidas em cada estágio, e que esse padrão é uma progressão geométrica assim podendo obter uma fórmula geral para a quantidade de circunferência para o n-ésimo estágio.

- ✓ Ao responder a segunda questão esperava-se que o aluno percebesse o mesmo padrão diferenciando apenas a razão, pois como a razão agora é positiva menor do que 1, o raio diminuía se aproximando de zero, mas nunca seria zero.

- ✓ Na terceira questão temos uma soma dos termos de uma progressão geométrica, pois como os centros das circunferências em cada estágio não é eliminado então somamos as circunferências obtidas que estão em uma progressão geométrica.

- ✓ Na quarta questão esperava-se que o aluno percebesse que apesar da figura ter infinitas iterações a mesma estava limitada por um quadrado, o que ele devia provar na justificativa respondendo a quinta questão. Assim ele deveria entender a diferença de infinito e ilimitado e entendesse que na matemática em algumas ocasiões é preciso uma observação para realizar uma conjectura, porém para valida-lá é preciso justificar com raciocínios lógicos e usando afirmações já provadas na matemática, o que consiste nas demonstrações.

Resultados Obtidos e Dificuldades Encontradas

Houve uma grande aceitação dos alunos na realização da atividade, que mostraram euforia e agrado em realizar uma atividade diferente em matemática. Eles também gostaram muito do contato com o *software Geogebra* e da maneira que a geometria pode ser trabalhada.

Em relação a questão 1 do questionário os alunos conseguiam responder até o estágio 3 mas não conseguiam escrever uma fórmula para o estágio n pois não perceberam que se tratava de uma progressão geométrica, dificuldade encontrada também nas demais questões.

Na segunda questão foi detectada outra dificuldade, a generalização do tamanho do raio. Só conseguiram desenvolver depois que foi trocado o tamanho do raio no estágio 0, o raio deixou de medir r e passou a medir 1.

A questão 3 só responderam contando os centros presentes na figura. Os alunos que responderam a questão quatro disseram que a figura estava limitada a um losango, mas nenhum conseguiu justificar. Houve o questionamento:

‘Como uma figura pode ter infinitas iterações se ela não cresce sua área?”

Uma pergunta interessante, pois houve aluno que respondeu o seguinte: “A figura ela aumenta por dentro então a sua área não passa de um determinado espaço”. Após deixar os alunos discutirem o assunto foi esclarecido a eles a questão do infinito e ilimitado.

3.2.2 – Atividade Aplicada no 2º ano do Ensino Médio

Esta atividade consiste em apresentar a geometria fractal, calcular a dimensão de um objeto fractal natural e seu comprimento, no caso o litoral da cidade de Armação dos Búzios e fazer uso da interdisciplinaridade com Geografia e Biologia. Foi realizado em uma turma de 2º ano do Ensino Médio Regular Noturno do Colégio Municipal Paulo Freire do município de Armação dos Búzios.

Objetivos Gerais

A atividade tem como objetivo apresentar o conceito de geometria fractal, trabalhar uma aplicação de logaritmo, explora a interdisciplinaridade com geometria e biologia, discutir a importância de se calcular a dimensão de uma fronteira ou de um rio, mostrar que no corpo humano também há fractais.

Objetivos Específicos

Utilizar-se de aplicações de matemática em outras áreas, trabalhar operações de logaritmo, mostrar que com o passar do tempo a dimensão de um rio muda e isso é importante para estudar sua evolução, mostrar que os alvéolos, por possuir uma estrutura fractal com uma grande área de superfície por volume, permitem uma absorção mais eficiente do oxigênio, discutir o motivo político de a fronteira entre a Espanha e Portugal apresentar tamanhos diferentes em suas cartografias e explicar a possibilidade deste acontecimento.

Justificativa

Um momento oportuno para utilizar-se da interdisciplinaridade.

Material Usado

Papel quadriculado, lápis, borracha, calculadora científica, compasso.

Construção

Foi preciso para a realização da atividade quatro tempos (de aula) de matemática e dois tempos (de aula) de geografia. Nos dois primeiros tempos de matemática foi apresentado aos alunos, através de projeção em sala de aula, a história e o conceito de fractal, dimensão fractal, objetos fractais matemáticos e naturais. Nas duas aulas seguintes foi pedido que os alunos calculassem a dimensão fractal e o comprimento do litoral da cidade de Armação dos Búzios, seguindo o método apresentado por Janos, em 2008 e já citado neste trabalho em 1.3. Foi utilizada a seguinte figura retirada do mapa do Google:

Figura 3.2.5 : Mapa da Cidade de Armação de Búzios

Fonte:<www.google.com.br/maps>

Nas duas aulas de geografia o professor discutiu a importância do estudo da evolução de componentes geológicos como rio, cordilheiras e a importância política das dimensões de uma fronteira.

Resultados Esperados

A compreensão que as disciplinas estão interligadas, compreender que logaritmo não é uma matéria isolada, possui aplicações e aprender as operações com logaritmo.

Resultados Obtidos e Dificuldades Encontradas

Os alunos receberam bem a atividade e depois de concluída comentaram que gostaram muito e puderam perceber como a matemática está interligada no cotidiano. A grande dificuldade foi a incompatibilidade de horário entre os professores para poderem trabalhar juntos e por isso o professor de geografia discutiu o assunto no horário destacado da atividade, após a construção da dimensão e tamanho do litoral da cidade já ter encerrado. O professor de Biologia não se mostrou interessado em participar, assim com essas dificuldades a interdisciplinaridade ficou prejudicada.

3.3 – Atividade Aplicada a Estudantes de Licenciatura de Matemática

Esta atividade foi aplicada a alunos do último ano de licenciatura de matemática da Ferlagos (Fundação de Ensino da Região dos Lagos) e do Consórcio CEDERJ pólo São Pedro d'Aldeia. A mesma consiste em duas etapas: Apresentação através de projeção e aplicação de uma atividade escrita.

Objetivos

Mostrar uma maneira de ensinar potência, razão, progressão geométrica, resolver problemas que envolvem infinito e limite, generalizar situações através de fórmulas matemática, apresentar o conceito de geometria fractal e recolher opiniões sobre a introdução de fractais no ensino básico.

Justificativa

Mostrar a futuros professores de matemática uma introdução de uma área da matemática não muito conhecida pelos mesmos e uma maneira de fazer interdisciplinaridade e aplicar conteúdos de matemáticas ao seu aluno, podendo assim desenvolver uma curiosidade para os mesmos pesquisarem ou desenvolverem novas ideias.

A Aplicação da atividade consistiu em dois momentos: uma apresentação da geometria fractal e de suas possíveis aplicações no ensino básico, assim também definindo uma curva fractal e sua dimensão e comprimento. Foi também apresentado um breve histórico para uma introdução a esse trecho da história da matemática e mostrando figuras fractais tanto naturais quanto as essencialmente matemáticas.

Após a apresentação foi dado um questionário com esboços de atividades para o ensino fundamental e médio para os alunos fazerem e uma pequena atividade voltada para o ensino superior com perguntas de opinião sobre o assunto. Abaixo temos o questionário aplicado:

Atividade Para o Ensino Fundamental

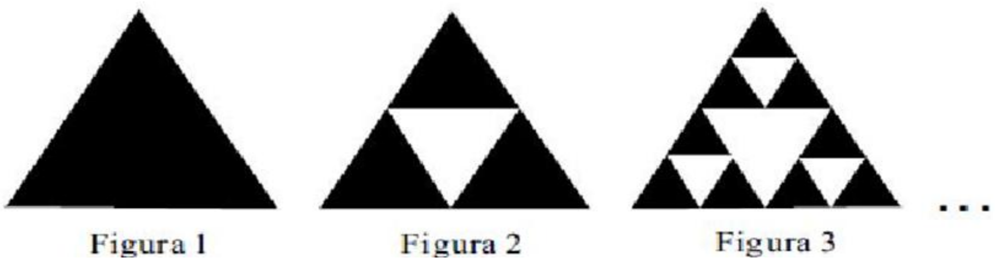


Figura 3.3.1: Triângulo de Sierpinski apresentado no questionário

Fonte: < www.vestiprovas.com.br>

Complete a tabela:

- Quantos triângulos há no estágio...?

ESTÁGIO 0	ESTÁGIO 1	ESTÁGIO 2	ESTÁGIO 3	ESTÁGIO N

- Qual a razão entre os triângulos pretos do estágio 1, com o triângulo preto do estágio 0?

- Qual a razão entre a área do triângulo de Sierpinski no estágio 1 com o do estágio 2?

- Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 1 com o lado do triângulo preto do estágio 0?

- A razão entre os lados do triângulo preto com os lados do triângulo preto do estágio anterior é igual a razão entre suas áreas? Se não for qual a relação que podemos fazer com essas razões?

Atividade Para o Ensino Médio

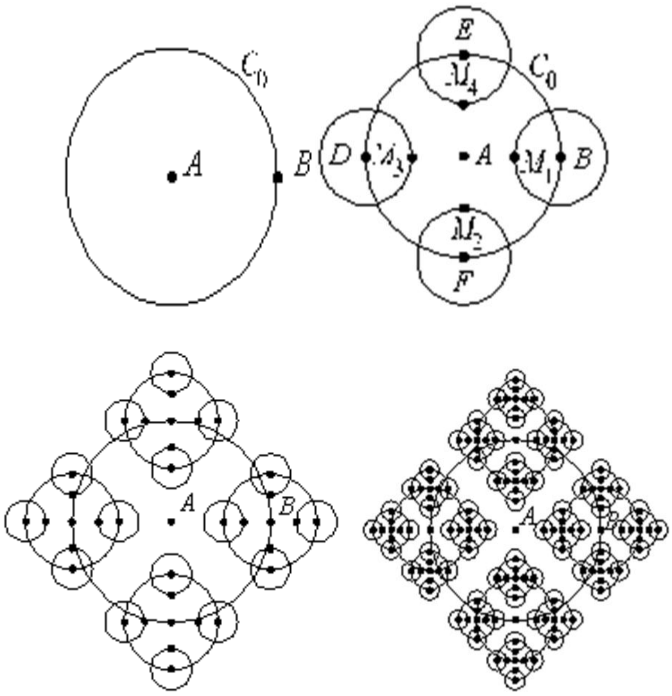


Figura 3.3.2: Tetra círculo apresentado no questionário

Fonte: Referência [2]

- Complete a tabela com a quantidade de centros de circunferências no estágio ...

ESTÁGIO 0	ESTÁGIO 1	ESTÁGIO 2	ESTÁGIO 3	ESTÁGIO N

- Complete a tabela com o tamanho do raio no estágio ...

ESTÁGIO 0	ESTÁGIO 1	ESTÁGIO 2	ESTÁGIO 3	ESTÁGIO N
R				

- O fractal é limitado para um número infinito de interações? Se for, para qual figura ele tende? Justifique.

Perguntas Direcionadas Apenas a Professores ou Alunos de Licenciatura em Matemática

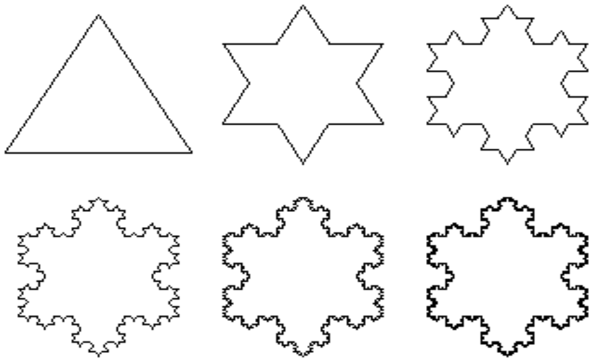


Figura 3.3.3: ilha de Koch apresentado no questionário

Fonte: Referência [16]

- Qual o valor do perímetro no estágio n? E qual o limite deste perímetro quando n tende a infinito?
- Qual a área no estágio n? E qual o limite da área quando n tente a infinito?
- Você estudou limite através de sequências ou somente com funções?
- Já fez a disciplina de análise matemática?
- Já tinha visto um exemplo geométrico de limite de uma sequência?
- O que você achou da ideia de introduzir fractal no ensino básico?
- Já ouviu falar em fractal antes?
- Faria uma atividade desse tipo com seus alunos?

Resultados Esperados

Na parte voltada para o ensino fundamental era esperado que os alunos conseguissem trabalhar com razões das figuras e a relação entre as razões da área e do lado das figuras e conseguissem generalizar a quantidade de triângulos para um estágio n tendo em mente a sua construção.

Na parte voltada para o ensino médio esperava-se que o aluno conseguissem uma generalização da quantidade de centros e do tamanho do raio das circunferências percebendo assim que se trata de uma progressão geométrica, e que conseguissem justificar que a figura tendia a um quadrado.

Na parte voltada essencialmente para o aluno de licenciatura, a figura e as perguntas foram retiradas da referência [16], esperava-se que o aluno conseguissem trabalhar com limite de sequência e compreender que o limite surge naturalmente das sequências e assim o conceito pode ser "adaptado" para funções.

Resultados Obtidos

Os alunos não tiveram dificuldades na atividade voltada para o ensino fundamental. Na atividade voltada para o ensino médio nenhum aluno conseguiu provar que a figura tende a um quadrado mas a grande maioria afirmou que tendia a um quadrado, para deduzir a fórmula do comprimento do raio somente um aluno respondeu com o tamanho inicial sendo R, os demais substituíram o R por 1 e assim responderam os demais.

Em relação a atividade voltada para o ensino superior nenhum aluno conseguiu formular a área no n-ésimo estágio e nem o limite, alguns responderam que a área tende ao infinito e outros responderam que tende a uma circunferência, mas sem justificativa. Todos os alunos acharam interessante a ideia, alguns pediram referência. Apenas dois alunos disseram que já ouviram falar, mas não sabiam o que era fractal e os demais nunca ouviram falar. Aproximadamente a metade dos alunos que já tinha cursado a disciplina de Análise Real disse que viu o conceito de limite através de sequência e depois foi para função, todos que ainda não tinham cursado Análise Real disseram que só viram limite através de função e ninguém tinha visto um exemplo geométrico de limite de sequência e todos acharam muito interessante entender como uma figura se comporta quando é limitada ou ilimitada. Todos disseram que fariam atividades deste tipo com seus alunos.

4 – Considerações Finais

Esta pesquisa revelou que os alunos se interessam mais por matemática quando a mesma é apresentada com uma atividade dinâmica ou quando apresenta uma aplicação, uma forma interdisciplinar de apresentar os conteúdos.

Em relação aos alunos do Ensino Fundamental é importante observar a dificuldade do uso da régua, um objeto tão comum no uso escolar. A interdisciplinaridade com artes foi muito proveitosa, pois os alunos comentaram posteriormente sobre a matemática na arte. Compreenderam os conceitos de razão e fração com a atividade fazendo analogia com ouros exemplos ou quando resolvem problema com esses assuntos.

Em relação aos alunos do Ensino Médio as atividades surtiram efeito também. Os alunos do 1º ano compreenderam de fato o que é uma progressão geométrica, assim tendo mais facilidade em resolução de problemas aplicados, como em juros compostos e em problemas de proliferação de bactérias. Gostaram muito de fazer uma atividade na sala de informática e disseram que não imaginavam que matemática poderia ser estudada desta forma. Os alunos do 2º ano gostaram muito de fazer uma atividade de matemática que utilizassem informações de suas cidades. No caso do mapa, eles não imaginavam que a matemática tinha relação com outras disciplinas.

Os alunos de licenciatura acharam o tema muito interessante para aplicar em sala de aula e avaliaram bem as atividades. Muitos perguntaram como poderiam saber mais sobre Fractais e suas aplicações. Disseram que é importante ter na graduação disciplinas que mostram maneiras diferentes de aplicar os conteúdos em sala ou que desenvolva nos alunos o hábito da pesquisa por aplicações e novas abordagens em sala de aula depois de formados.

Alguns pontos negativos observados com a pesquisa é que apesar dos alunos terem gostado das atividades interligadas pela interdisciplinaridade, quando houve, e de o PCN incentivar esta prática, há muitas dificuldades de se implementar a ideia do uso de Fractal, pois os professores em sua maioria não estão preparados (daí a importância de, na sua graduação, ter disciplinas que mostrem maneiras de se fazer isso na prática). Além disso, há a incompatibilidade para o trabalho em conjunto dos professores na preparação de material sobre o mesmo, cada um em sua respectiva sala de aula, de tal maneira que o planejamento fica prejudicado e até mesmo na aplicação ou na apresentação das atividades. Outro ponto é a dificuldade do aluno em transformar o padrão observado em linguagem matemática, isso em qualquer grau de escolaridade: ensinos Fundamental, Médio e Superior. Isso ocorre por falta de elaboração e aplicação de atividades propostas nesse sentido.

Anexos: Respostas dos Questionários

Anexo 1 – Questionário do 7º ano do Ensino Fundamental.

1. Qual é a medida do lado dos triângulos pretos nos estágios:

   a) 0 R: 48 cm b) 1 R: 24 cm c) 2 R: 12 cm d) 3 R: 6 cm

2. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 1 com o lado do triângulo preto do estágio 0?

   Resp: $\frac{24}{48}$

3. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo preto do estágio 1?

   Resp: $\frac{12}{24}$

4. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 3 com o lado do triângulo preto do estágio 2?

   Resp: $\frac{6}{12}$

5. As respostas dos itens 2, 3 e 4 são iguais. Justifique.

   Resp: Sim são frações equivalentes.

6. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo preto do estágio 0?

   Resp: $\frac{12}{48}$

7. Qual a fração que representa o lado do triângulo preto do estágio 3 com o lado do triângulo preto do estágio 0?

   Resp: $\frac{6}{48}$

8. Qual a fração que representa o triângulo preto do estágio 1 com do triângulo preto do estágio 0?

   Resp: $\frac{1}{4}$

9. Qual a fração que representa o triângulo preto do estágio 2 com do triângulo preto do estágio 1?

   Resp: $\frac{1}{4}$

10. Qual a fração que representa o triângulo preto do estágio 2 com do triângulo preto do estágio 0?

    Resp: $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{16}$

11. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 1 com do estágio 0?

    Resp: $\frac{3}{4}$

12. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com do estágio 1?

    Resp: $\frac{3}{4}$

13. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com do estágio 0?

    Resp: $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{9}{16}$, a resposta pode ser dada fazendo todos os triângulos ficarem do tamanho do menor e conta-los.

14. Qual a fração que representa o Triângulo de Sierpinski do estágio 3 com do estágio 0?

    Resp: $\frac{27}{64}$, a resposta pode ser dada fazendo os triângulos ficarem todos do tamanho do menor e conta-los.

15. Quanto falta na figura do estágio 3 para termos a figura do estágio 0?

    Resp: $1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$, a resposta pode ser dada dividindo a figura do estágio 0 em triângulos de mesmo tamanho do menor do estágio 3 e contar quantos faltam.

16. Quanto falta na figura do estágio 3 para termos a figura no estágio 2?

    Resp: $\frac{9}{16}-\frac{27}{64}=\frac{9}{64}$, a resposta pode ser dada dividindo a figura do estágio 2 em triângulos de mesmo tamanho do menor do estágio 3 e contar quantos faltam.

Anexo 2 – Questionário do 8º ano do Ensino Fundamental

1. Qual é a medida do lado dos triângulos pretos nos estágios:

   a) 0 R: 48 cm b) 1 R: 24 cm c) 2 R: 12 cm d) 3 R: 6 cm

2. Qual a razão entre o lado de um triângulo preto do estágio 1 com o lado do triângulo do estágio 0?

   Resp: $\frac{24}{48}$

3. Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo preto do estágio 1?

   Resp: $\frac{12}{24}$

4. Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 2 com o lado do triângulo do estágio 0?

   Resp: $\frac{12}{48}$

5. Qual a razão entre o lado do triângulo preto do estágio 3 com o lado do triângulo do estágio 0?

   Resp: $\frac{6}{48}$

6. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 1 com a área do triângulo do estágio 0?

   Resp: $\frac{1}{4}$

7. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 2 com a área do triângulo preto do estágio 1?

   Resp: $\frac{1}{4}$

8. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 2 com a área do triângulo do estágio 0?

Resp: $\frac{1}{16}$

9. Qual a razão entre a área de um triângulo preto do estágio 3 com a área do triângulo preto do estágio 2?

Resp: $\frac{1}{4}$

10. Se tomarmos um triângulo preto do estágio 1 com o triângulo do estágio 0, a razão entre seus lados é igual a razão entre suas áreas? Que relação pode fazer entre essas razões?

Resp: Não. A razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os lados.

11. Qual a razão entre a área do Triângulo de Sierpinski do estágio 1 com o do estágio 0?

Resp: $\frac{3}{4}$

12. Qual a razão entre a área do Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com o do estágio 1?

Resp: $\frac{3}{4}$

13. Qual a razão entre a área do Triângulo de Sierpinski do estágio 2 com o do estágio 0?

Resp: $\frac{9}{16}$

14. Os triângulos pretos do estágio 1 e do estágio 2 são congruentes? Justifique.

Resp: Não, porque os lados correspondentes não possuem a mesma medida.

15. Os triângulos pretos dos estágios 0, 1, 2, 3, 4 são semelhantes? Justifique.

Resp: Sim, como são triângulos equiláteros eles possuem todos os ângulos correspondentes iguais e os lados correspondentes proporcionais.

16. Os Triângulos de Sierpinski nos estágios 0,1, 2, 3, 4 são semelhantes? Justifique.

Resp: Não. A cada estágio existe mais “buracos” no Triângulo de Sierpinski.

17. Quantos triângulos pretos existem nos estágios 0,1, 2, 3, 4, 5, 10, n?

Resp: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 3^{10}, 3^{n}.

Anexo 3 – Questionário do 1° ano do Ensino Médio

1. Complete a tabela com a quantidade de circunferências obtidas em cada estágio..

Estágio 0	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio n
1	4	16	64	4^n

Obs: É uma P.G de razão 4.

2. Complete a tabela com o tamanho do raio das circunferências obtidas em cada estágio, dado que o raio da circunferência no estágio 0 é denotada por R.

Estágio 0	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio n
R	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{4}$	$\frac{R}{8}$	$\frac{R}{2^n}$

Obs: É uma P.G de razão $\frac{1}{2}$.

3. Complete a tabela com a quantidade total de centros de circunferência em cada estágio.

Estágio 0	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio n
1	5	21	85	$\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$

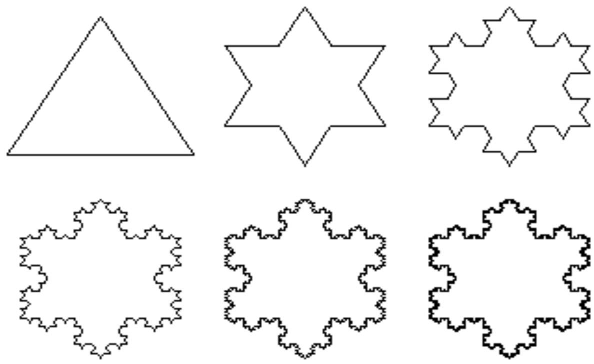
Obs: É a soma de termos de uma P.G de razão 4.

4. O fractal é limitado para um número infinito de iterações? Se for, para qual figura o limita?
Resp: Sim. É limitado por um quadrado.
5. Tente justificar a resposta dada no item anterior.
Resp: Traçando os diâmetros na circunferência inicial, que por construção são perpendiculares, fazendo a iteração aumenta-se o tamanho do diâmetro da circunferência construída. Assim com infinitas iterações esse s segmentos terá o tamanho de $2r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}...\right)=4r$, pois como a razão do raio é $\frac{1}{2}$, por construção trata-se de uma série geométrica convergente. Percebe-se que esses diâmetros são as diagonais de um quadrilátero, como possuem medidas iguais e são perpendiculares trata-se de um quadrado.

Anexo 4 - Questionário para os Estudantes de Licenciatura

Como esse questionário foi uma mescla dos questionários anteriores com o adicional de ter perguntas direcionadas ao estudante da graduação, só terá as respostas aqui desta parte, pois as outras já foram respondidas anteriormente.

Perguntas direcionadas apenas a professores ou alunos de licenciatura em matemática.



1. Qual o valor do perímetro no estágio n? E qual o limite deste perímetro quando n tende a infinito?

   Resp: Se trata de uma P.G de razão $\frac{4}{3}$, pois a cada estágio é obtém um lado com comprimento $\frac{4}{3}$ do anterior com isso $P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3l$, onde P_n é o perímetro no estágio n e l é a medida do lado do triângulo inicial. Daí conclui-se também que $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$.

2. Qual a área no estágio n? E qual o limite da área quando n tente a infinito?

   Resp: Trata-se agora de uma série geométrica de razão $\frac{4}{9}$, portanto convergente. A área do triângulo inicial é de $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ u.a. Observa-se que no próximo estágio acrescenta-se 3 triângulos de área $\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$, obtendo assim $A_1 = l^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ a partir deste estágio observa-se que sempre soma uma área de $\frac{4}{9}$ da somada anteriormente. Então:

$$A_n = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{3}{9} + \frac{12}{81} + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{3}{9}\right)\right] = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{9}\left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}}\right)\right]$$ usando a

fórmula da soma de uma P.G . Daí conclui-se que é convergente pois a razão é menor do que 1,

logo $\lim_{n\to\infty} A_n = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{9}\left(\frac{1}{\frac{5}{9}}\right)\right] = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = l^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{5} u.a.$

As demais perguntas foram de cunho pessoal.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, R.M. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.* 3ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005. 160p. (Tendência em Educação Matemática,6)

[2] BRANDÃO, L. O. *Algoritmos e fractais com programas de GD.* **RPM**. Rio de Janeiro: v.49.

[3] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: Secretaria de Educação Fundamental: MEC/SEF, 1997. 126p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> . Acessado em: 17 de maio de 2013.

[4] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica: MEC/SEF, 1997. 144p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf > Acessado em 17 de maio de 2013.

[5] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica: MEC/SEF, 1997. 58p. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acessado em 17 de maio de 2013.

[6] CARVALHO, H. C. DE. *Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino da matemática.* Dissertação de Mestrado, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, UFPA, 2005. Disponível em <http://www.repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao_GeometriaFractalPerpectivas.pdf>. Acessado em: 03 de maio de 2013.

[7] CARVALHO, M.C.C.S; SLIVA, A.A. DA; BOCCIA, D.C.M. DA S.; RIBEIRO, J.F.P.; BOGGIO, S.A. *Fractais: Uma breve introdução,* Editora Edição Própria, 1986.

[8] CRATO, N. *A Matemática das Coisas: Do Papel A4 aos Cordões de Sapatos, do GPS às Rodas Dentadas.*São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 196p.

[9] ERNST, B. *O espelho mágico de Escher.* Editora Taschen do Brasil. 2012.

[10] FERNANDES, J. A. *Fractais: Uma nova visão da matemática.* Monografia de graduação: Centro Universitário de Lavras, UNILAVRAS, 2007. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/MonografiaFractais.pdf> Acessado em 15 de junho de 2013.

[11] FERRARA, N. F.; PRADO, C.P.C. *Caos: Uma Introdução.* São Paulo: Editora Edgard Blücher,1994. 402p.

[12] GEOGEBRA. Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. Disponivel em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em: 10 de Maio de 2013

[13] JANOS, M. *Geometria Fractal.*Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008. 100p.

[14] MANDELBROT, B.P. *The Fractal Geometry of Nature.* N.Y. Freeman, 1977.

[15] MENDES, I.A. *Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem.* 2ª Ed. Revisada e ampliada. São Paulo; Editora Livraria da Física, 2009. 214p. (Coleção Contexto da Ciência).

[16] MORGADO, A.C.O.; WAGNER, E.;ZANI, S. *Progressão e Matemática Financeira. 4ª* Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001. 121p. (Coleção do Professor de Matemática)

[17] NAIFEH, S.; SMITH, G. H. *Jackson Pollock: an American saga.* Clarksson N. Dotter, 1989.

[18] NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. *Argumentação e provas no ensino de matemática.* 2ªEd. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003. 109p.

[19] NUNES, R. S. R. *Geometria Fractal e aplicações.* Tese de mestrado: Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: < http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> Acessado em 15 de junho de 2013.

[20] PIMENTEL, H.; URBAN, P. *Fractais da História: A humanidade no caleidoscópio.* São Paulo: Madras Editora, 2003.247p.

[21] REVISTA SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. *Fractais: Uma Jornada Pela Dimensão Oculta.* Edição Temática. Edição 1. 2002. 15p+ DVD.

[22] TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula.* 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. 141p. (Tendência em Educação Matemática).

[23] VALIM, J. C. M.; COLUCCI,V. *Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio.* XXII Semana Acadêmica da Matemática. Disponível em: < http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf> Acessado em: 14 de junho de 2013.