Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Matemática Divertida e Curiosa

Jônatas Daniel dos Santos

Salvador - Bahia
Janeiro de 2015

Matemática Divertida e Curiosa

Jônatas Daniel dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Júnior.

Salvador - Bahia
Janeiro de 2015

Matemática Divertida e Curiosa

Jônatas Daniel dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 6 de janeiro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Júnior (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello
UFBA

Prof. Dr. Antonio Teófilo Ataíde do Nascimento
UNEB

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a Deus por seu infinito amor, misericórdia, bondade e cuidado, pois tudo que sou e tudo que tenho me é dado por sua infinita graça e misericórdia.

A Deus por ter me presenteado com pais, Marlene e Jonas, tão amáveis, cuidadosos e super preocupados. Apesar de não terem por muitas vezes condição, fizeram o possível e o impossível para me dar sempre o melhor. A vocês o meu eterno amor e agradecimento, pois tenho plena certeza que sem a orientação de vocês eu não chegaria tão longe. Aos meus irmãos, Reginaldo e Ricardo, muito obrigado por tudo e até mesmo pelas críticas que tenho plena certeza que todas elas eram para me fazer melhor.

A Deus, por me conceder amigos como: Adriana, Bruno, Daniela, Eduardo, Josiane, Leandro, Moises, Patrícia, Ronald e William que se fazem presentes nos momentos felizes e tristes, por muitas vezes me fazendo esquecer as labutas do dia com resenhas a base de muita comida. Também não poderia esquecer dos grandes amigos que tive imensa oportunidade de conhecer e que muito contribuíram no meu crescimento. A vocês: Mário Almeida, Verena Pacheco, Israel Wolfovitch (em memória), Ualace Melo, Luiz Sérgio Maltez e a todos amigos da turma PROFMAT 2012 o meu forte abraço.

A Deus, por me fazer conhecer Miriam Felício, uma pessoa especial que tem se mostrado companheira de todas horas e ajudadora nos momentos que mais preciso. Muito obrigado por todo carinho e motivação dedicados a mim.

A Deus, por meu orientador Dr. Perfilino Júnior, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções, incentivo e paciência.

A Deus, por me dar a oportunidade de estudar nesta Universidade e conhecer todo esse corpo docente, direção e administração que me fizeram um profissional mais capacitado e competente. Em especial o meu muito obrigado aos professores: Drª Ana Lúcia, Dr. Evandro Santos, Dr. José Nelson, Dr. Joseph Nee, Dr. Vinicius Mello e Drª Rita de Cássia.

A Deus, por Luciana e Manuela que me deram todo apoio, incentivo e idéias para esse trabalho.

Enfim, agradeço a todos que participaram direta ou indiretamente em mais uma das minhas conquistas.

*"As coisas que o olho não viu, e o
ouvido não ouviu, e não subiram ao
coração do homem, são as que Deus
preparou para os que o amam."*
I Coríntios 2:9

Resumo

Este trabalho trata, de uma forma geral, das dificuldades que os alunos vêm enfrentando em relação à aprendizagem da matemática, por ser vista por muitos como a matéria mais difícil do currículo escolar, uma vez que se faz necessário decorar os símbolos e as regras que devem ser usadas que são apresentadas através de aulas tradicionais, pouco dinâmicas, desinteressantes e cansativas. Diante deste cenário, é importante que haja uma iniciativa de mudança no ensino e vemos nos jogos uma possível solução para tal problema, sugerindo estratégias como o uso dos jogos e ludicidade em geral para chamar a atenção dos alunos para que consigam entender o que está sendo ensinado, causando interesse e motivação, fazendo a aprendizagem tornar-se prazerosa. As habilidades a serem desenvolvidas nas aulas de Matemática através do uso de jogos irão ajudar os alunos na concentração, estruturação do raciocinio lógico, criar estratégias de resolução de problemas e tomadas de decisões, trabalho em equipe e no relacionamento com o próximo. Essas habilidades servirão não somente para as aulas de matemática, mas em outras disciplinas escolares e em sua vida em sociedade.

Palavras-Chave: matemática, aprendizagem, ensino, mudança, jogos, motivação, estratégias, raciocínio.

Abstract

This work discusses, in general, difficulties students face about mathematics learning. Mathematics is considered one of the most difficult curriculum matters, since its symbols and rules are being presented to the students in a out of date way. They have been taught in not dynamic, uninteresting and tiresome lessons. In order to change – positively – such scenario, it is important to have a change on its teaching way. And in the games we see a possible solution to this problem. Games suggest strategies for its use and playfulness in general to draw students attention, consequently students can understand what is being taught, causing interest and motivation, making the learning process more enjoyable. The abilities to be developed in mathematics classrooms through the use of games will also help students on their concentration, structuring their logical reasoning, creating strategies for problem solving, decision making, teamwork and relationships with others. Such skills will not – only – contribute for math classes, but in other school subjects and in their social life.

Key words: learning, teaching, change, games, motivation, strategies, reasoning.

Sumário

Introdução

Há muitos anos, a educação tradicional tem sido aquela educação rigorosa que exclui o aluno de toda dinâmica e deixa o professor como a única e principal figura ativa no processo de aprendizagem.

Essa educação cria barreiras que dificultam o entendimento no aluno, principalmente na Matemática, que, há muito tempo, é vista como uma matéria impossível de ser compreendida pela maioria dos alunos.

Visando a um melhor modo de ensinar, este trabalho propõe uma mudança das aulas tradicionais e fatigantes das salas de aula para o uso dos jogos em sala de aula, que, por sua vez, fará com que os educandos sejam atraídos a participar das aulas, despertando neles o interesse e a motivação, muito importantes no processo de ensino-aprendizagem.

No primeiro capítulo, serão apresentadas as dificuldades que os alunos encontram em aprender os conteúdos matemáticos quando são colocados como figuras submissas apenas e obrigados a somente decorar regras e símbolos matemáticos. Será apresentado como o lúdico pode ser usado em sala de aula, bem como as mudanças que toda a turma deverá enfrentar para que haja um ensino mais eficaz, além de refletir sobre o uso de jogos em sala de aula como um dos métodos de ensino possíveis. Abordaremos a necessidade que se tem que o aluno tenha um aprendizado duradouro e interdisciplinar.

No segundo capítulo, falaremos de jogos que estão presentes na vida dos educandos desde bem pequenos, e esses jogos variam de acordo com o tempo e a cultura de cada região. Trataremos, neste capítulo, como esses jogos podem ajudar os alunos a desenvolver habilidades que os ajudarão no bom entendimento dos conteúdos matemáticos.

Já o terceiro capítulo abordará dicas de como e quais jogos podem ser aplicados em sala para o aperfeiçoamento do raciocínio lógico. Tal habilidade é de extrema importância não só para a Matemática mas para as outra disciplinas em geral, pois é através do raciocínio lógico que o indivíduo conseguirá formular hipóteses e elaborar estratégias para a tomada de decisões que o ajudarão a resolver problemas tanto em sala de aula, quanto na sua vida prática fora da escola.

O quarto capítulo apresentará exemplos de como os jogos podem ajudar o professor a introduzir ou complementar o conhecimento necessário para determinados assuntos matemáticos. O objetivo é desenvolver um processo de ensino-aprendizagem no qual o aluno possa reduzir o "espanto"e a rejeição de certos temas abordados em sala de aula.

Os jogos, como parte do processo de ensino-aprendizagem ajudará o aluno a desenvolver o raciocínio lógico, além de enriquecer seus conhecimentos e habilidades que poderão ser usadas também fora da sala de aula, ajudando-o, assim, a crescer como pessoa. Além do mais, também poderá ajudar o professor, que irá enriquecer as suas experiências em sala, podendo, desta maneira, aprimorar cada vez mais os seus conhecimentos para que haja sempre um melhor rendimento de seus alunos.

Capítulo 1

Ensino e Aprendizagem da Matemática, na perspectiva da Ludicidade

1.1 Ludicidade como facilitadora da aprendizagem

A Matemática é uma disciplina importante nos currículos escolares, pois, através dela, pode ser desenvolvido o raciocínio lógico fundamental para a continuidade dos estudos e que é requisitado nas mais diversas situações do cotidiano. Por outro lado, os estudantes, por diversas gerações, têm encontrado dificuldade de compreensão e falta de interesse na matéria devido à sua forma abstrata e o afastamento da vida real, ocasionando, assim, a dificuldade de compreensão - um problema que pode ser encontrado em escolas de todos os níveis.

A maneira formal com que os professores passam o conteúdo da matéria quase sempre cria um bloqueio na compreensão do aluno, principalmente no ensino da Matemática, que é a matéria mais temida de muitos alunos, e que apresenta menor rendimento nas escolas. Freire (1991) afirma:

> *"Crianças são para ser educadas e não adestradas... de nada vale saber fazer sem compreender. Na verdade, o que a escola deve buscar não é que a criança aprenda esta ou aquela habilidade para saltar ou para (aprender) escrever, mas que através dela possa se desenvolver permanentemente."*

O importante não é que o indivíduo seja levado a apenas decorar regras e fórmulas, pois dessa forma o aluno adquire uma visão bastante limitada sobre os problemas matemáticos, e, quando lhe são apresentados problemas com mais dificuldades, ele não será capaz de solucionar, pois está limitado apenas àquele sistema que lhe foi passado, uma vez que este mesmo indivíduo poderia ser estimulado a usar a criatividade e o raciocínio lógico, que o ajudariam na resolução do mesmo.

É importante que o aluno perceba que o conteúdo que o professor está apresentando pode ser usado e é importante para o seu cotidiano, pois, quando a Matemática é vista apenas como regras e símbolos numéricos, gera nele a falta de interesse em compreender a matéria. É responsabilidade do educador causar o interesse no aluno, de forma que este seja levado a refletir e a desenvolver as habilidades mentais necessárias para a aprendizagem autêntica, que não é esquecida, uma vez que o aluno carrega e usa na sua vida em sociedade.

O professor, diante de tais problemas, deve tomar consciência de como agir em sala de forma que proporcione ao aluno a oportunidade de pensar e agir, não fugindo dos seus valores morais, éticos e culturais.

Para que haja aprendizado, o educador deve conseguir manter a atenção do aluno e fazer com que ele fique mais motivado e envolvido com o conteúdo apresentado. Portanto, o uso da ludicidade no ensino é importante para que o educador consiga derrubar as barreiras que dificultam o aprendizado de uma forma mais natural, dinâmica e divertida.

Um aspecto relevante no uso dos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (PCNs, 2000, p. 49).

De acordo com os PCNs, os jogos coletivos também apresentam um importante papel no ensino da matemática, pois os jogos individuais ou em grupo são prazerosos e significativos, de forma que representam uma conquista cognitiva, social, moral e emocional, quando bem direcionados. Quando não, são apenas jogos sem caráter pedagógico.

O uso da ludicidade deverá fazer com que o aluno seja levado a pensar, de forma que a dinâmica apresentada não deverá causar ao aluno uma sensação de apenas submissão às regras, mas que ele seja levado a usar a sua criatividade nas atividades propostas pelo educador, e se sinta responsável por conseguir resolver problemas de uma forma prazerosa, e divertida. Cabe ao educador ligar o conteúdo que ele quer apresentar com a atividade lúdica que irá conduzir o educando ao aprendizado.

Para Aguiar (2004): "o termo atividade recreativa corresponde a toda ação, motora ou não que cause prazer, espontaneidade a ludicidade em quem a pratica".

Segundo Leif (1978), jogar educa, assim como viver educa:

A situação de jogo mobiliza os esquemas mentais, integrando as várias dimensões da personalidade afetiva, motora e cognitiva. O jogo se assemelha à atividade artística como um elemento integrador dos vários aspectos da personalidade. O ser que brinca e joga é, também, o ser que age, sente, pensa, aprende e se desenvolve.

É fácil perceber que quando o aluno participa de uma aula de Matemática em que o professor usa atividades lúdicas, o aluno tem o interesse aguçado, fazendo com que ele tenha prazer em pensar e vencer os jogos e dinâmicas - o que ajuda a desenvolver o seu raciocínio lógico, possibilitando um melhor desempenho nos conteúdos matemáticos, ou pedagógicos em geral.

Estudos mostram que, quando bem planejados, os jogos são uma forte ferramenta para que os educadores consigam desenvolver habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização.

Também é importante que o educador misture a realidade do aluno ao assunto ministrado, pois, quando a realidade é afastada, o aluno enfrenta certa dificuldade de se sentir interessado pela matéria - o que torna o aprendizado ainda mais difícil, sendo, ainda, muitas vezes, esquecido. Quando a realidade está presente, é mais fácil o próprio aluno conseguir pensar e aprender de forma autêntica, utilizando o conhecimento durante toda a sua vida acadêmica e na sociedade em que está inserido.

Através do brincar e do jogar, as crianças desenvolvem a linguagem, o pensamento, a socialização, a iniciativa e a autoestima, preparando-se como futuros cidadãos capazes de enfrentar desafios. O jogo, em suas formas diversas, auxilia no processo ensino-aprendizagem e no desenvolvimento psicomotor. O brincar e o jogar são atos indispensáveis à saúde física, emocional e intelectual e sempre estiveram presentes em qualquer povo desde os tempos mais remotos. Segundo Piaget (1967,p.25) , "o jogo não pode ser visto apenas como divertimento ou brincadeira para desgastar energia, pois ele favorece o desenvolvimento físico, cognitivo, afetivo e moral".

A brincadeira pode ser transmitida à criança através de seus familiares, ou pode ser aprendida pela criança de forma espontânea. Faz-se necessário diferenciar brinquedo, brincadeira e jogo. Para a criança, a brincadeira gira em torno da espontaneidade e da imaginação. Não depende de regras, de formas rigidamente estruturadas. É a ação que a criança desempenha ao concretizar as regras de jogo, ao mergulhar na ação lúdica. Pode-se dizer que é o lúdico em ação. Dessa forma, brinquedo e brincadeira relacionam-se diretamente com a criança e não se confundem com o jogo (KISHMOTO, 1994). (VELASCO, 1996).

1.2 Como utilizar jogos, curiosidades, enigmas, desafios e passatempos em sala de aula

.

> *"Notamos que, para ensino de Matemática, que se apresenta como uma das áreas mais caóticas em termo da compreensão dos conceitos nela envolvidos, pelos alunos, o elemento jogo se apresenta com formas específicas e características próprias, propícias a dar compreensão para muitas das estruturas matemáticas existentes e de difícil assimilação"* (GRANDO, 1995)

A partir do momento em que o professor encontra na ludicidade um meio de fazer o aluno se interessar pela aula, ele favorece a possibilidade de diminuição nos altos índices de fracasso escolar e evasão que são constatados nas escolas, pois, quando o aluno se interessa e se envolve com o aprendizado, ele se sente motivado a continuar na escola.

Os jogos aplicados em sala de aula não podem ser oferecidos aos alunos para que eles joguem por jogar, é necessário que o professor conheça as atividades lúdicas que serão apresentadas para que venham a ser aplicadas com um determinado fim pedagógico. A realização dessas atividades em sala requer interesse do professor, bem como disponibilidade de tempo tanto para pesquisar sobre a atividade proposta e quanto para compreender o grupo de alunos com que ele estará trabalhando. Isto com vistas à realização de uma atividade eficaz, atendendo a dificuldade particular de cada um, procurando sempre atendê-las, e sem ferir os valores éticos e culturais de cada aluno. É necessário que o professor esteja seguro e acredite no jogo que está sendo aplicado, pois, quando o aluno sente segurança em seu professor, ele se sente seguro também.

Conforme dito anteriormente, os jogos que serão aplicados não deverão ter como fim uma recreação apenas. Esses jogos devem ser bem escolhidos e testados pelos professores para que haja um bom aproveitamento da atividade como instrumento do aprendizado. Na Matemática, os jogos deverão, principalmente, ajudar os alunos a resolver problemas, pois a resolução de problemas estará presente durante toda a vida do aluno, e em todas as áreas.

Eles não podem ser obrigados a jogar, pois, assim, será uma atividade desinteressante e o professor não conseguirá o resultado almejado. Também, não deverá ser um jogo cheio de regras inflexíveis. A partir do momento em que o aluno passa a ser obrigado a participar de uma atividade lúdica, essa deixa de ser uma atividade interessante para ser apenas um atividade fatigante comum na maioria das salas de aula.

Tais atividades não precisam ser difíceis, mas devem ser elaboradas com regras que possibilitem ao aluno a facilidade em aprender o que está sendo ensinado, e o professor consiga respeitar as dificuldades e necessidades de cada um. Essas regras são importantes para que alunos e professores entendam como um determinado jogo pode interferir positivamente no aprendizado. As regras dos jogos provocam no aluno a necessidade de pensar e de se desenvolver, com vistas a chegar ao final do jogo com sucesso.

Volpato (2002) diz que o jogo precisa ser visto como uma "possibilidade de ser mediador de aprendizagens e propulsor de desenvolvimento no ensino formal"(p. 87), porém, apenas quando "[...] a atividade se torna utilitária e se subordina como meio a um fim, perde o atrativo e o caráter de jogo"(p. 87).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais visam à integração do aluno como agente fundamental no processo de aprendizagem, de modo que ele participe de forma prática do que está sendo ministrado, e isso o ajude na sua inserção na sociedade. Essa visão se torna real com a ajuda dos jogos a partir do momento em que se trabalha a interdisciplinaridade e a melhor aceitação dos conteúdos específicos de cada matéria.

É importante que fiquem livres para brincar, mas sendo sempre direcionados pelo professor para que haja um real aprendizado pedagógico.

Um fator importante para a realização dessas atividades lúdicas é a união dos educadores para a formação de uma educação interdisciplinar através dos jogos desenvolvidos. Os jogos aplicados às aulas de Matemática poderão ajudar os alunos no aprendizado de outras matérias. É importante que, ao aplicar certa atividade lúdica que envolve resolução de problemas, o professor desafie os alunos, crie problemas para que eles se sintam desafiados a resolver, pois, assim, eles estarão sendo estimulados a pensar e a participar da atividade.

O uso da ludicidade na sala de aula deve ter como objetivo principal proporcionar ao educando a oportunidade de comparar, excluir, ordenar, categorizar, reformular, comprovar, formular hipóteses, e reorganizar. Para isso, o professor deve conhecer bem a atividade e conseguir passar o conteúdo que quer apresentar, fazendo com que o aluno aprenda até mesmo de forma subliminar.

O professor poderá também discutir com os alunos o motivo do jogo que está sendo aplicado, analisando os efeitos da atividade e a reação que os participantes têm. Trabalhar com eles sempre lhes passando segurança para que eles também se sintam seguros ao desenvolver tal atividade. Poderá também deixar que o aluno se sinta livre para conduzir o jogo, criando neles um espírito de liderança, mas estar atento para, se necessário, intervir.

> *"[...] em uma sala de aula ludicamente inspirada, convive-se com a aleatoriedade, com o imponderável; o professor renuncia à centralização, à onisciência e ao controle onipotente e reconhece a importância de que o aluno tenha uma postura ativa nas situações de ensino, sendo sujeito de sua aprendizagem; a espontaneidade e a criatividade são constantemente*

> *estimuladas. Podemos observar que essas atitudes, de um modo geral, não são, de fato, estimuladas na escola."(ALMEIDA, s/d)*

Para que essas atividades sejam desempenhadas, faz-se necessário a compreensão do educador quanto às mudanças que deverão ser feitas na rotina da sala de aula. O professor deverá desfazer certos costumes que já foram impostos por vários anos nas salas de aula e renunciar a crença de que o professor é a figura central e o aluno, apenas um ouvinte. Essa mudança pode ser um pouco difícil, mas é importante que o professor deixe essa postura já incorporada, e faça com que o aluno se sinta parte do processo de aprendizagem.

> *"Para pensar numa mudança é preciso antes de tudo ter coragem, é preciso ousar, criar e experimentar; é preciso buscar uma mudança de paradigmas para testar e avaliar o potencial de nossos alunos e vê-los sob uma perspectiva de competência, mas isso significa antes de tudo um teste e a avaliação de nós mesmos enquanto profissionais."(Rabelo e Lonrenzato. 1994)*

Vale lembrar que o uso da ludicidade será bom não apenas para o aluno, mas será também para o professor, que poderá enriquecer suas experiências em sala. Nesta perspectiva, o professor irá compreender melhor a importância do uso da ludicidade como instrumento de ensino, a forma de usá-los corretamente, as dificuldades e as necessidades dos seus alunos, identificar qual a melhor forma de aplicar a atividade no grupo com que está trabalhando, bem como as transformações que podem ser percebidas ao longo do trabalho, e a eficácia do uso correto do método. O professor também poderá ficar mais flexível às mudanças que deverão acontecer na sala e adquirirá uma melhor visão da ludicidade como importante ferramenta no ensino.

A mudança pode ser difícil também para o aluno, que, por estar habituado ao tradicional, não sabe lidar com o novo. Por não saber lidar com a situação, os alunos podem não demonstrar interesse pela atividade, causando, assim, uma frustração ao professor que se empenhou em escolher, organizar, estudar e pesquisar sobre a atividade proposta. Cabe ao educador a persistência na atividade até que os alunos consigam interagir e demonstrar interesse na atividade.

O professor deve estar atento ao tipo de jogo que irá aplicar, para que haja melhor aproveitamento do conteúdo que está ensinando. Os jogos são classificados em quatro grupos, segundo Brenelli (1996):

- Jogos estratégicos: são os jogos que os alunos precisam ler e entender as regras da atividade apresentada, e formular uma estratégia para conseguir resolver. Para isso, faz-se necessário o uso do raciocínio lógico. Nesse tipo de jogo, vence quem tem a melhor estratégia, e o fator sorte em nada influencia. Alguns desses jogos podem ser jogados até mesmo individualmente, fazendo com que o aluno, sozinho, busque estratégias para conseguir soluções pra realizar a atividade, não utilizando o uso da sorte. Esses jogos, quando trabalhados em grupo, fazem com que os alunos aprendam a conviver com diferentes opiniões e críticas, ensinando-os, assim, a viver em sociedade democrática.

- Jogos de treinamento: são aqueles que ajudam os alunos a treinar o conteúdo que está sendo desenvolvido em sala. Esses jogos vão substituir as listas de exercícios, sendo usados para melhor fixação do conteúdo que foi ministrado na sala. Esses jogos vão estimular nos alunos o uso do raciocínio lógico, e, através dele também, o professor poderá perceber se o conteúdo ensinado foi realmente absorvido, e qual a dificuldade do aluno que está participando dessa atividade.

- Jogos geométricos: são os que o professor consegue trabalhar com os alunos as diferentes figuras geométricas. Pode-se também, através dos jogos geométricos, desenvolver a habilidade de observação e o raciocínio lógico. Esses jogos de construção possibilitarão ao aluno descobrir algo novo que ainda não tinha sido percebido quando determinado assunto lhe foi apresentado.

- Jogos quebra-cabeças: que são, na maioria das vezes, jogados individualmente, e de soluções que, a princípio, são desconhecidas, mas que o aluno vai descobrindo no decorrer do jogo.

Uma boa ideia para a aplicação dessas atividades lúdicas em sala, é promovendo uma forma de competição entre os alunos, pois assim, eles se sentirão desafiados a aperfeiçoar o seu aprendizado, para que possam vencer.

O uso das atividades lúdicas em sala de aula faz com que os alunos se expressem com mais facilidade, expondo as suas opiniões e dúvidas, criando, até mesmo, conclusões sem precisar da intervenção do professor. Com isso, o professor pode perceber quais são as necessidade e dificuldades de cada aluno, e, assim, descobrir a maneira mais fácil de atender e ajudar os seus alunos.

Outra estratégia que pode ser usada com a ludicidade é deixar que o aluno utilize a sua criatividade. Isto é, permitir que o aluno crie o seu próprio jogo. Os jogos industrializados são bastante eficazes, mas, permitir que o aluno crie o seu próprio jogo, propicia a ele a oportunidade de inventar. De usar, e exercitar a sua mente. Criando o seu próprio jogo, o aluno sente-se estimulado a pesquisar e a buscar conhecimento, para a construção de um jogo que cause satisfação nele e em seus colegas. Nos jogos criados pelos próprios alunos, estes últimos são encorajados a propor problemas e a achar soluções para suas criações. Não somente isso, mas também eles precisam justificar seu raciocínio. Com isso, seu interesse em resolver problemas relacionados ao cotidiano aumenta. O professor deverá ter conhecimentos básicos sobre tipos de grupos, crenças, personalidades, possíveis conflitos, bem como valores e regras de cada grupo. Se um aluno, mesmo fazendo parte das atividades lúdicas, sentir-se isolado dos colegas na sala de aula, sem conseguir criar uma relação de amizade e afinidade, ele desenvolverá uma personalidade solitária e egoísta e não irá descobrir a importância de conviver com os outros.

As atividades em grupo serão importantes para que o aluno sinta que é necessária a convivência com os outros. O aluno descobrirá a diferença do Outro a partir de variados valores, costumes e personalidades, e poderá, assim, desenvolver uma compreensão de companheirismo e a importância de trabalhar em grupo. Desta forma, se desenvolverá a habilidade de observar a si e aos demais, pois ele precisará ser inserido corretamente no lugar em que ele vive, e essa relação com o outro é importante em toda a trajetória da vida escolar e na sociedade como um todo.

Uma vez que o aluno sente-se capaz de construir um jogo, é estimulada nele a autonomia moral e intelectual, e a autoestima dele é elevada. O construir em grupo possibilita ao aluno o desenvolvimento das habilidades sociais, fazendo-o capaz de se relacionar com seus colegas. Ele se torna capaz de refletir sobre a atividade que está realizando, consegue pensar e se autoavaliar, observar os outros, bem como as estratégias que ele usou, percebendo, também, os erros e acertos para estar se aprimorando. O aluno torna-se capaz de tomar as suas próprias decisões, não sendo mais dependente do outro para isso. O uso da criatividade provoca no aluno a curiosidade de resolver os problemas reais utilizando-se seus conhecimentos matemáticos.

> *"A educação matemática permite a compreensão do que se faz ao educar, das propostas pedagógicas, do sentido que fazem as teorias que estudam assuntos da educação. E, preponderadamente, um fazer mediativo que leva ao autoconhecimento, à autocrítica e, portanto, ao conhecimento e crítica do mundo."(BICUDO ,1999,p.25)*

Quando a criatividade do aluno é bloqueada, ele se torna incapaz de conseguir produzir algo por si próprio. Vai ser sempre dependente do outro para lhe dar opiniões e ideias, e isso irá lhe prejudicar no momento que ele precisar ser auto dependente, pois, na sociedade em que vivemos, exige-se cada vez mais do ser humano o uso da criatividade. Uma vez que o aluno consiga refletir e tomar as suas próprias decisões, o ensino da Matemática rompe as barreiras da sala de aula, e ajuda a formar pessoas que precisam estar preparadas para serem inseridas na sociedade do mundo atual.

O professor também deverá usar a sua criatividade em aula, pois existem apenas ideias básicas de como aplicar a ludicidade em sala de aula. Mas, pela diversidade de personalidades, tipos de grupos, situações e realidades diferentes, o professor deverá estar atento para as adequações que deverão ser feitas em sala de aula. É importante também que o professor esteja atento ao lado positivo e negativo de cada atividade para que, assim, ele possa usar a sua criatividade para desenvolver uma atividade que se encaixe no perfil do grupo com o qual está trabalhando. O professor deverá, também, ser flexível aos problemas que irá propor, para que haja uma estimulação aos alunos para solucioná-los, e, desta forma, consiga provocar o resultado almejado - o qual só é alcançado através do uso da criatividade exercitada em sala de aula.

Apesar de sua importância, os jogos não podem ser usados como único método de ensino. Os assuntos devem ser ministrados, e os jogos usados para uma melhor adaptação do aluno com o assunto e como usar em sua vida real. Esses jogos serão como estímulos de aprendizado do que está sendo ensinado, e é através deles, também, que os alunos irão aprender.

O educador deve ter cuidado de como são colocados os jogos em seus fins pedagógicos, para que não se transformem em atividade dirigida e manipuladora. Se isso ocorrer, o jogo deixará de ser jogo, pois não será caracterizado com liberdade e espontaneidade. Volpato (2002) coloca que o jogo deve ser visto como "possibilidade de ser mediador de aprendizagens e propulsor de desenvolvimento no ensino formal"(p. 87), mas quando "[...] a atividade se torna utilitária e se subordina como meio a um fim, perde o atrativo e o caráter de jogo"(p. 87). A partir do momento que a criança é obrigada a realizar um jogo, sem nenhum interesse ou motivação, o jogo perde toda a sua característica e acaba tornando-se mais uma atividade "séria"de sala de aula.

Capítulo 2

Jogos da Matemática Popular

Os exemplos que serão aqui citados têm a característica de jogos como os de "adivinhação", "o que é o que é" e enigmas. A depender do folclore de cada região são apresentadas as brincadeiras às crianças, as quais vão aprendendo valores culturais e de cidadania, estimulando a criatividade e civilidade de cada uma delas. Uma vez sendo introduzidas também essas brincadeiras nas aulas de Matemática, elas podem se sentir estimuladas a tentar advinhar a resposta através do método de tentativa e erro.

Com essa iniciativa de abordar algum conteúdo com esses tipos de brincadeiras, o aluno começa a quebrar o preconceito com a matéria, mudando, assim, o conceito de que a Matemática é composta apenas de regras, números e cálculos complicados, desinteressantes e não aplicáveis à sua vida. Desta forma, através dos jogos, o aprendizado poderá se tornar mais dinâmico, prazeroso e eficaz.

2.1 Adivinhação

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de "adivinhações", utilizando os conhecimentos matemáticos. O professor poderá aplicar com a sua turma, fazendo a mesma interagir com a brincadeira e, por fim, explorar a matemática que está por trás de cada uma dessas adivinhações.

2.1.1 Adivinhando o resultado de uma expressão numérica

Siga os passos abaixo:

1º Pense em um número;

2º Multiplique-o por 2;

3º Some o resultado com 50;

4º Divida o resultado por 2;

5º Subtraia pelo número que você pensou;

6º O resultado é 25.

Observação: Neste jogo de adivinhação, o professor pode ir mudando o número a ser adicionado(no exemplo foi citado some 50); à medida que for alterando este número a ser adicionado, o resultado final também será alterado para a metade do número que foi adicionado. O professor como mediador, deve ir pontuando essas observações no quadro e induzir a turma a tomar essa conclusão.

Após a turma ter identificado como "adivinha o resultado", o professor pode propor uma atividade para que eles produzam outros exemplos, alterando apenas o passo 3.

Logo após, oriente-os a experimentar a alterar os passos 2 e 4, multiplicando e dividindo por 3 e alterar também o passo 3, somando um número múltiplo de 3 e observar o resultado. Dê outro exemplo, pedindo o auxílio da turma para a confecção do mesmo e analise o resultado. Depois, conclua que se trocarmos os passos 2 e 4, para multiplicar e dividir por 3, o resultado será a terça parte do passo 3. Sugira uma atividade que eles produzam outros exemplos alterando as multiplicações e divisões por 4, 5, 6, 7, 8, e 10, fazendo-os desenvolver os conhecimentos de múltiplos e divisores.

Poderíamos, também, trabalhar com este jogo explorando o conhecimento de equação do primeiro grau.

Suponha que o número pensado seja x.

Logo, multiplicando-o por 2 teremos: $2x$

Ao somar 50 ao resultado, temos: $2x + 50$

Dividindo o resultado por 2, encontraremos: $\frac{2x+50}{2} = x + 25$

Por fim, ao subtrairmos o número que pensamos, obtemos: $(x + 25)$ - $x = 25$

2.1.2 Adivinhando a idade e o número que você pensou

Solicitamos a pessoa que efetue os seguintes cálculos:

1º Pense num número de 1 até 10;

2º Multiplique-o por 2;

3º Pegue o resultado e some 5;

4º Multiplique essa soma por 50;

5º Se já fez aniversário em 2014, some 1764. Se ainda não fez, some 1763;

6º Subtraia o resultado pelo ano do seu nascimento (4 dígitos).

O resultado é um número de três algarismos, em que os dois últimos algarismos, que correspondem à dezena e à unidade, é a sua idade; e o primeiro, que corresponde à unidade de centena, é o número que você pensou.

Nessa brincadeira, o professor pode ir pontuando no quadro o passo a passo com a turma e, após isso, levar os alunos a desvendar a "adivinhação"com a utilização dos conhecimentos adquiridos do assunto decomposição de um número na base 10. Depois com a sua ajuda, solicite aos alunos que criem outro jogo, agora podendo pensar em um número de dois algarismos.

A demonstração dos conhecimentos matemáticos utilizados no truque é a seguinte:

Demonstração: Suponha que o número pensado seja x, e Y o ano de seu nascimento.

Logo, o produto do primeiro número por dois é: $2x$.

Assim, adicionando 5 unidades ao resultado anterior, temos: $2x+5$.

Multiplicando a soma por 50, encontraremos: $(2x+5)50=100x+250$

Somando 1764 ao resultado anterior, temos: $(100x+250)+1764 = 100x+2014$

Subtraindo o resultado anterior pelo ano de nascimento, temos: $100x$+2014-Y. Note que 2014-Y é a sua idade e a representaremos por 2014-Y=ab=$10a+b$. Logo, podemos reescrever a expressão como: $100x+ab=100x+10a+b$.

Então, o resultado final é um número de três dígitos: $100x+10a+b=xab$. Em que, o primeiro dígito é o número pensado e os dois últimos, a idade da pessoa que participa do jogo.

2.2 Curiosidades

2.2.1 O número mágico 1089

O número 1089 é considerado mágico devido a uma incrível propriedade.

Acompanhe os passos:

- Escreva um número com 3 algarismos distintos, por exemplo, 843.

- Agora escreva este número ao contrário, e em seguida subtraia o menor do maior:

$$843 - 348 = 495$$

- Agora some este número com ele mesmo só que com os algarismos ao contrário:

$$495 + 594 = 1089$$

Assim não importando qual número escolhido sempre resulta em 1089. Agora veja porque sempre ocorre este resultado.

Sejam A,B,C os algarismos distintos do número escolhido. Pelo nosso sistema de numeração decimal escrevemos os números como uma soma de parcelas de grandezas de 10^a potência, ou seja, o número 37.291 pode ser descrito como 3x10.000+7x1.000+2x100+ +9x10+1x1, portanto cada algarismo de 37.291 representa um número diferente de acordo com a posição que ocupa.

Ao fazer a subtração ABC - CBA estamos fazendo a seguinte operação: 100A + 10B + C - (100C + 10B + A)

Por termos C < A, pelas regras de subtração necessita-se de um "empréstimo" da dezena 10B para a unidade C, onde tem-se:

100A + 10(B - 1) + (C + 10) - (100C + 10B + A)

Novamente devemos tomar "emprestado" de 100A, por 10(B -1) ser menor que 10B. Assim, 100A valerá 100(A - 1) e 10(B - 1) terá o valor 10(B - 1) + 100.

$100(A-1)+(10(B-1)+100)+(C+10)-(100C+10B+A)=$

$100(A-C-1)+90+(C-A+10)$

Agora o próximo passo, pega-se o resultado da subtração e o mesmo resultado com seus algarismos invertidos e soma-os.

Deste modo, teremos que a centena (A-C-1) será substituída pela unidade (C - A + 10) e vice-versa:

$$\begin{array}{c} 100(\text{A - C - 1}) + 90 + (\text{C - A} + 10) \\ + \\ \underline{100(\text{C - A} + 10) + 90 + (\text{A - C - 1})} \\ 100(\text{A - A + C - C} + 9) + 180 + (\text{A - A + C - C} + 9) \end{array}$$

Deste resultado 100(A - A + C - C + 9) + 180 + (A - A + C - C + 9) temos:

$$900+180+9=$$
$$1089$$

2.2.2 Produtos curiosos

Alguns números, resultantes da multiplicação de fatores inteiros, apresentam seus algarismos dispostos de um modo singular. Esses números, que aparecem nos chamados produtos curiosos, têm sido objeto da atenção dos matemáticos.

Citemos alguns exemplos.

Tomemos o número 12345679 no qual figuram, na ordem crescente de seus valores, todos os algarismos significativos à exceção do 8. Multipliquemos esse número pelos múltiplos de 9, a saber: 9, 18, 27, 36 etc, e obtemos:

12345679 x 9 = 111111111

12345679 x 18 = 222222222

12345679 x 27 = 333333333

12345679 x 36 = 444444444

Vemos que o produto é dado por um número de 9 algarismos iguais.

Demonstração: Vamos demonstrar a primeira linha da curiosidade e para as demais linhas basta perceber que 18=9x2, 27=9x3 e assim por diante. Para isso utilizaremos o conhecimento sobre fatoração. Observe que podemos escrever o número 111111111 da

seguinte forma:
111111111 = 100.000.000+10.000.000+1.000.000+100.000+10.000+1.000+100+10+1
111111111 = (99.999.999+1)+(9.999.999+1)+(999.999+1)+(99.999+1)+(9.999+1)+
+(999+1)++(99+1)+(9+1)+1
111111111 = (9x11.111.111+1)+(9x1.111.111+1)+(9x111.111+1)+(9x11.111+1)+
+(9x1.111+1)+(9x111+1)+(9x11+1)+(9x1+1)+1
111111111 = 9 x (11.111.111+1.111.111+111.111+11.111+1.111+111+11+1)+9
111111111 = 9 x 12345678 + 9
111111111 = 9 x (12345678+1)
111111111 = 9 x 12345679

2.3 Enigmas

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de enigmas, nos quais os alunos, no primeiro momento, irão tentar resolvê-los pelo método de tentativa e erro. Após um tempo de tentativas, o professor deve mediar indicando um determinado assunto como ferramenta para resolução de cada um dos enigmas. Transcrevendo o problema para a linguagem matemática, eles terão melhor visualização e poderão resolvê-los com mais clareza e eficácia. Os assuntos abordados nesses enigmas são: equação do primeiro grau, sistemas de equações do primeiro grau e divisibilidade.

2.3.1 Cadê o real?

Três amigos foram jantar em um restaurante e pediram uma pizza de R$22,00 mais três refrigerantes de R$1,00 cada. Na hora de pagar, cada um entregou para o garçom 10 reais para pagar a conta de R$25,00. O garçom devolveu 5 reais de troco em notas de R$1,00.

Ao pegar o troco do garçom, os amigos decidiram dar R$2,00 de gorjeta para a divisão entre eles ficar inteira de 1 real para cada.

Se cada um deu R$10,00 (R$30,00 ao total), recebeu troco de R$1,00, significa que pagaram juntos R$27,00 mais os R$2,00 da gorjeta, resultando R$29,00. Onde está esse 1 real que falta?

Uma possível solução: Não falta nenhum real! Os R$22,00 da pizza com R$3,00 dos refrigerantes e R$2,00 da gorjeta formam R$27,00 de conta a ser paga. Como cada um dos três amigos receberam R$1,00 de troco, significa que temos um total de R$3,00 de troco, fechando assim a conta: R$27,00 + R$3,00 = R$30,00.

Esta pergunta já nos induz a um erro, que está expresso quando relata que pagaram juntos R$27,00(no qual já inclui a gorjeta R$25,00 + R$2,00) e depois coloca a gorjeta novamente dizendo que resulta em R$29,00. Percebe-se assim que a gorjeta foi incluída duas vezes na pergunta o que nos induz a pensar que falta R$1,00.

Neste problema podemos reforçar o assunto das operações de soma e subtração e ressaltar a importância da interpretação da questão mesmo sendo induzidos a um erro. Este é um problema de cálculo de receita.

2.3.2 Problema dos Camelos

As frações têm servido de inspiração para muitos problemas que são verdadeiros quebra-cabeças para os alunos e, às vezes, para os professores também. A maioria desses problemas apenas prejudica o aprendizado das crianças, causando confusão e frustração. No entanto, há também problemas criados com tanta engenhosidade que se tornam encantadores e surpreendentes. Esses podem ser apreciados por alunos mais velhos, provavelmente após a 6a. série.

Vamos apresentar um desses problemas. Ele tem uma história e esta tem um herói: um fictício matemático árabe chamado Beremiz Samir. Tudo se passa na época em que os matemáticos árabes eram os melhores do mundo, por volta do século X.

Nosso herói Beremiz viajava com um amigo pelo deserto, ambos montados em um único camelo, quando encontram três homens discutindo acaloradamente.

Eram três irmãos. Haviam recebido uma herança de 35 camelos do pai, sendo a metade para o mais velho, a terça parte para o irmão do meio e a nona parte para o irmão mais moço. O motivo da discussão era a dificuldade em dividir a herança:

O mais velho receberia a metade.

Acontece que a metade de 35 camelos corresponde a 17 camelos inteiros mais meio camelo!

O irmão do meio receberia a terça parte, ou seja, 35 dividido por 3, o que resulta em 11 camelos inteiros mais $\frac{2}{3}$ de camelo!

O caçula receberia a nona parte de 35 camelos, ou seja, 3 camelos inteiros e mais $\frac{8}{9}$ de camelo!

Naturalmente, cortar camelos em partes para repartir a herança seria destruí-la. Ao mesmo tempo, nenhum irmão queria ceder a fração de camelos ao outro. Mas o sábio Beremiz resolveu o problema. Vejamos o que ele propôs:

- Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui vos trouxe.

Os camelos agora são 36 e a divisão é fácil:

“ O mais velho recebe: a metade de 36 que é igual a 18

“ O irmão do meio recebe: a terça parte de 36 que é igual a 12

“O caçula recebe: a nona parte de 36 que é igual a 4

Os irmãos nada têm a reclamar. Cada um deles ganha mais do que receberia antes. Todos saem lucrando.

Todos lucraram? E nosso herói Beremiz que perdeu um camelo?

Ouçamos de novo nosso matemático:

- O primeiro dos irmãos recebeu 18, o segundo, 12 e o terceiro, 4. O total é 18 + 12 + 4 = 34 camelos. Sobram, 2 camelos. Um deles pertence a meu amigo. Foi emprestado a vocês para permitir a partilha da herança, mas agora pode ser devolvido. O outro camelo que sobra, fica para mim, por ter resolvido a contento de todos este complicado problema de herança.

Veja, colega, que intrigante mistério! Os três irmãos lucraram e Beremiz também! Como isso é possível? De onde surgiu o camelo "a mais"?

Antes de prosseguir a leitura, pense um pouco, releia a história, tente decifrar o mistério.

Agora, vamos à explicação. Ela é mais simples do que parece. Basta examinar a situação sob outro ponto de vista.

Consideremos como unidade (ou total) o conjunto dos camelos que seriam divididos e vejamos se a soma das frações determinadas pelo pai equivale a 1:

Conclusão: a herança estava mal dividida. Vejamos quantos camelos estavam incluídos na partilha inicial.

Chegamos à conclusão de que, na partilha inicial estavam incluídos somente 33 camelos e mais $\frac{1}{18}$ de camelo. Chegamos a essa conclusão ao somarmos a metade de 35, com a terça parte de 35 e a nona parte de 35, isto é, $\frac{35}{2} + \frac{35}{3} + \frac{35}{9} = (17 + \frac{1}{2}) + (11 + \frac{2}{3}) + (3 + \frac{8}{9}) = (17 + 11 + 3) + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{8}{9}) = 31 + \frac{9+12+16}{18} = 31 + \frac{37}{18} = 31 + \frac{36+1}{18} = 31 + 2 + \frac{1}{18} = 33 + \frac{1}{18}$

Quantos camelos sobravam? Façamos a subtração: $35 - (33 + \frac{1}{18}) = 2 - \frac{1}{18}$

Portanto, sobravam quase 2 camelos, ou seja, $2 - \frac{1}{18} = \frac{35}{18} = 1{,}9444...$ camelos .

É natural, então, que fosse possível dar um pouco mais a cada irmão e ainda restasse 1 camelo para pagar o hábil Beremiz.

O habilidoso Beremiz utilizou dos seus conhecimentos sobre divisibilidade para resolver o problema da herança dos irmãos.

O interessante problema que examinamos foi extraído de uma das obras do talentoso professor de Matemática e escritor brasileiro Júlio César de Mello e Souza, esta bela obra é o livro "O Homem que Calculava". Ele escreveu mais de cem obras, muitas delas abordando o lado recreativo e histórico da Matemática.

2.3.3 Santo do Dinheiro

Um homem chega numa igreja que tem 3 santos, ele se dirige até o primeiro santo e fala:

- Se você dobrar o que eu tenho no bolso, lhe dou 20 reais.

O santo dobra o que ele tem no bolso e o homem lhe dá os 20 reais e parte para o segundo santo, e fala:

- Se você dobrar o que eu tenho no bolso, lhe dou 20 reais.

O santo dobra o que ele tem no bolso e o homem lhe dá os 20 reais e parte para o terceiro santo. Ao chegar, ele fala:

- Se você dobrar o que eu tenho no bolso, lhe dou 20 reais. O santo dobra o que ele tem no bolso e o homem dá os 20 reais para o santo e fica sem nada no bolso.

Pergunta: como pode ele dobrar 3 vezes o que tinha no bolso e acabar sem dinheiro algum? Com quanto dinheiro o homem chegou na igreja?

Resolução: Podemos resolver este enigma utilizando o conhecimento de equação do 1º grau.

Seja x o valor que o homem chegou a igreja.

A equação obtida após sair do 1º santo é: $2x$-20

Após sair do 2º santo, temos: 2($2x$-20)-20

Saindo do 3º santo e posteriormente da igreja ele percebe que saiu sem dinheiro algum. Essa situação pode ser representada pela equação: $2[2(2x\text{-}20)\text{-}20]\text{-}20=0$

Resolvendo a equação acima encontramos o valor do dinheiro que o homem chegou a igreja.

$$2[2(2x\text{-}20)\text{-}20]\text{-}20=0$$
$$2[4x\text{-}40\text{-}20]\text{-}20=0$$
$$8x\text{-}120\text{-}20=0$$
$$8x=140$$
$$x=17{,}50$$

Logo, o homem entrou com R$17,50 na igreja.

Esta resolução com equação do 1º grau pode ser explorada com alunos a partir do 7º ano. Mas também poderíamos resolvê-la de forma mais elementar para o aluno do 6º ano, utilizando o raciocínio da volta. Isto é: onde vimos o termo dobrar, na volta entenderemos como metade; onde vimos o termo retirar 20 reais, na volta, entenderemos como acrescentar 20 reais.

Se, ao sair do 3º santo, após dar 20 reais, ele saiu sem dinheiro algum, então devolvemos os 20 reais dados, ficando, então, com 20 reais. Se dobrou a quantia e ele ficou com os 20 reais, então, reduzimos a metade e fica com 10 reais.

Se, ao sair do 2º santo, após dar 20 reais, ele saiu com 10 reais, então devolvemos os 20 reais dados, ficando, então, com 10+20=30 reais. Se dobrou a quantia e ele ficou com os 30 reais, então, reduzimos a metade e fica com 15 reais.

Se, ao sair do 1º santo, após dar 20 reais, ele saiu com 15 reais, então devolvemos os 20 reais dados, ficando, então, com 15+20=35 reais. Se dobrou a quantia e ele ficou com os 35 reais, então, reduzimos a metade e fica com 17,50 reais.

Logo, o homem entrou na igreja com R$17,50.

2.3.4 Problema das Idades

Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a tua idade. Quando tu tiveres a minha idade, a soma das nossas idades será de 45 anos. Quais são as nossas idades?

Resolução: Seja y a idade que tu tinhas e x a idade que eu tinha. Então se hoje tu tens x anos, eu tenho $2y$.

Observe que a diferença das idades sempre será a mesma independente do ano. Seja k essa diferença das nossas idades. Assim:

$$\begin{cases} x - y = k \\ 2y - x = k \end{cases} \tag{2.1}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos que $k = \frac{y}{2}$. Logo a diferença das nossas idades é $k = \frac{y}{2}$ e portanto quando tu tiveres a minha idade $(2y)$ eu terei a tua "nova"idade mais a diferença de nossas idades, isto é, $2y + \frac{y}{2} = \frac{4y+y}{2} = \frac{5y}{2}$.

Sabendo que soma das idades futuras é igual a 45, montamos a equação:

$$\begin{gathered} 2y + \frac{5y}{2} = 45 \\ \frac{4y+5y}{2} = 45 \\ 9y{=}90 \\ y{=}10 \end{gathered}$$

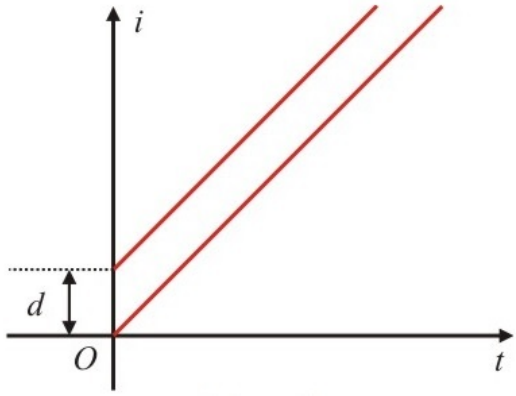
Como hoje eu tenho $2y$ e tu tens $x = \frac{3y}{2}$, então:

Eu tenho $2y = 2 \cdot 10{=}20$ anos

Tu tens $x = \frac{3y}{2} = \frac{3 \cdot 10}{2} = \frac{30}{2}{=}15$ anos.

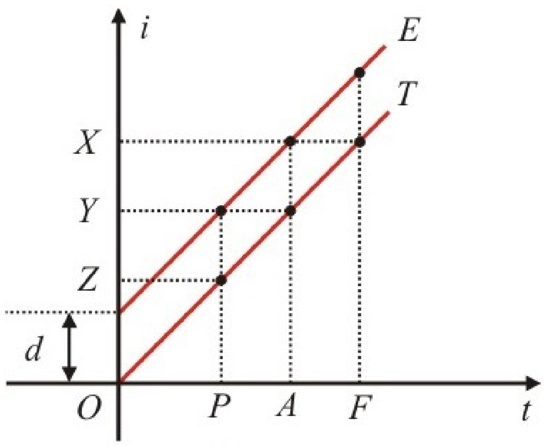
Vamos agora resolver este problema geometricamente.

Para resolvermos geometricamente primeiramente representamos, num sistema de coordenadas cartesianas, a evolução da idade (em anos) de um indivíduo através do tempo (em anos), obteremos sempre uma reta paralela à bissetriz do quadrante. Na realidade, obtermos a própria bissetriz se tomarmos o "ano zero" como ano de seu nascimento, pois no ano 1 ele terá 1 ano, e assim por diante. Já a idade de uma pessoa d anos mais velha terá como gráfico uma reta paralela, pois a diferença entre as idades dos dois permanecerá constante e igual a d em qualquer ano.



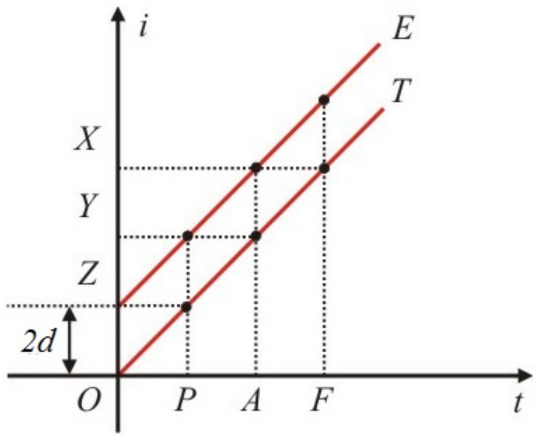
Voltando ao problema inicial, notamos que há dois indivíduos envolvidos: um que fala (vamos chamá-lo de E) e outro que escuta (vamos chamá-lo de T). Evidentemente E é mais velho que T ("quando eu tinha a idade que tu tens"), digamos que d anos, de modo que graficamente assemelham-se à figura acima.

Notamos também que há três épocas mencionadas no problema, que chamaremos de P (passada), A (atual) e F (futura). A maneira como se relacionam A e P ("quando eu tinha a idade que tu tens") e A e F ("quando tu tiveres a idade que eu tenho") mostra que elas se situam graficamente como a figura abaixo:



A inclinação de 45º das retas do gráfico acarreta que todos os segmentos assinalados verticalmente têm comprimento igual a d.

O dado de que a idade de E tem na época A (isto é, OX) é o dobro da idade que T tinha na época P (isto é, OZ), juntamente com o fato de que XY = YZ = d, obriga a que OZ seja também igual a d (estamos evitando escrever a equação OX = 2OZ → $2d$ + OZ = 2OZ → OZ = $2d$, já que isto podemos observar na figura). Mas, então, a reta da idade de E tem obrigatoriamente de passar por Z e o gráfico da figura 2 se transforma em:



Agora, então, é claro que na época F, a idade de T é $4d$ enquanto a de E é $4d + d$. Logo, os dois juntos têm $9d$ que deve ser igual a 45, então d é igual a 5 e "a idade que eu tenho" é 4 x 5 = 20 anos e a "a idade que tu tens" é 3 x 5 = 15 anos , e esta é a resposta!

2.3.5 Problema dos Galhos e os Pássaros

Numa árvore pousam pássaros. Se pousarem 2 pássaros em cada galho fica um galho sem pássaros. Se pousar um pássaro, fica um pássaro sem galho. Qual o número de pássaros e de galhos?

Resolução: Seja g o número de galhos e p o número de pássaros.

Com a interpretação da questão temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} g = \frac{p}{2} + 1 \\ g = p - 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Igualando as duas equações temos: $\frac{p}{2} + 1 = p - 1$

Resolvendo a equação acima encontramos p=4, substituindo na 2ª equação do sistema (2.2) temos que g=3.

Logo, temos 4 pássaros e 3 galhos.

Capítulo 3

Jogos de Raciocínio

O uso do raciocínio é uma habilidade muito importante não só para a Matemática, mas para todas outras disciplinas e para a vida em sociedade. Com a utilização de jogos que ajudam a desenvolver o raciocínio, é possível que o aluno seja estimulado a pensar, criar hipóteses e estratégias com o objetivo de resolver os problemas.

Os problemas lógicos, travessias e o *sudoku* são bons exemplos de como a ludicidade ajuda no exercício do raciocínio lógico, pois, para que sejam bem jogados, é necessário que os participantes criem estratégias, utilizem as dicas, formulem hipóteses e estruturem o seu raciocínio de forma que consigam resolver os problemas propostos.

Esses jogos podem ser trabalhados em sala de aula em grupos de 3 a 5 alunos. A cada grupo será dado um problema lógico ou travessia a ser resolvido dentro de 20 minutos. Depois de resolvido, o grupo deverá expor para a turma o problema e as estratégias da resolução do mesmo, pedindo, ainda, que a solução seja dada através da dramatização, no caso dos jogos de travessia. Caso a escola possua um laboratório de informática, esses jogos podem ser resolvidos *online* no endereço http://rachacuca.com.br/, o que torna a resolução bem mais interativa e agradável para os alunos.

3.1 Problemas Lógicos

3.1.1 Leilão de Antiguidades

Num leilão de antiguidades, Angélica, Sônia e Viviane arrebataram as peças mais antigas da sessão.

As peças antigas são: Bengala, Jarra e Violino.

Os sobrenomes são: Cardoso, Morais e Passos.

Com bases nas dicas abaixo, tente descobrir o nome completo de cada uma, bem como o objeto que adquiriu.

1. Viviane não adquiriu nem o violino nem a bengala antiga.

2. A sra. Morais adquiriu a bengala.

3. O sobrenome de Angélica é Passos.

Nome	**Sobrenome**	**Objeto**
Angélica		
Sônia		
Viviane		

Resolução do Desafio:

1. Inicialmente, iremos preencher a tabela com uma afirmação dada, tipo "O sobrenome de Angélica é Passos".

2. Em seguida, iremos utilizar as dicas para concluir alguns resultados. A 1ª dica informa que "Viviane não adquiriu nem o violino e nem a bengala antiga"; concluímos, então, que, se não adquiriu o violino nem a bengala, logo, só pode ter adquirido a jarra.

   A 2ª dica informa que a Sra. Morais adquiriu a bengala, deduzimos que a Sra. Morais não é Viviane, pois a mesma adquiriu a jarra; também, não pode ser Angélica, pois o sobrenome de Angélica é Passos, e não Morais. Apartir dessas deduções, podemos concluir que a Sra. Morais é Sônia, logo, Sônia Morais adquiriu a bengala. Preenchendo a tabela, fica da seguinte forma:

Nome	**Sobrenome**	**Objeto**
Angélica	Passos	
Sônia	Morais	Bengala
Viviane		Jarra

3. Para concluir a resolução do desafio, iremos preencher as lacunas que faltam com as informações que sobraram, observe que nesse desafio não houve choques. Podemos concluir, então, que Angélica Passos adquiriu o violino e que o sobrenome de Viviane é Cardoso.

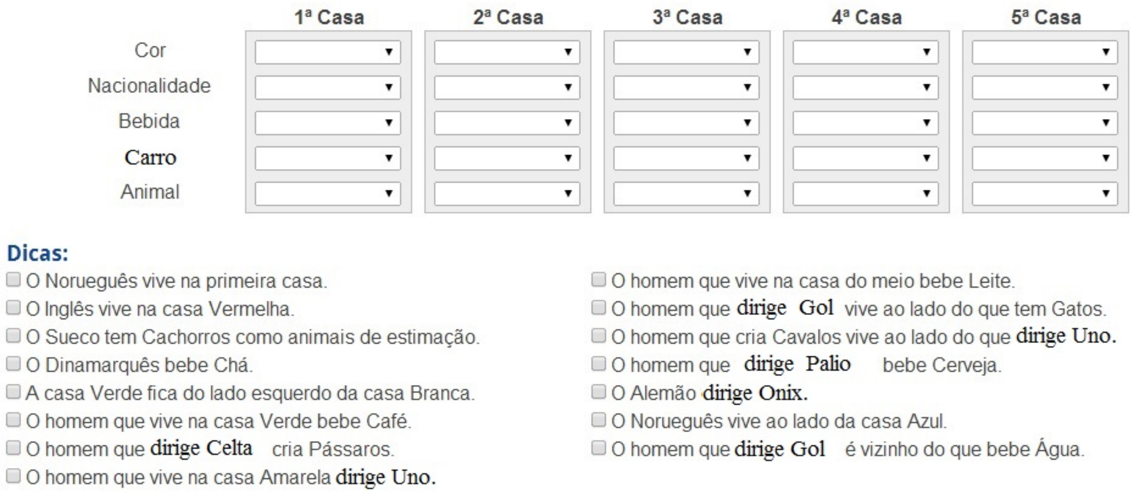
   Finalmente, temos, então, nosso desafio resolvido. A Tabela do desafio resolvido é a seguinte:

Nome	**Sobrenome**	**Objeto**
Angélica	Passos	Violino
Sônia	Morais	Bengala
Viviane	Cardoso	Jarra

3.1.2 Teste de QI de Einstein adaptado

Regras básicas para resolver o teste.

1. Há 5 casas de diferentes cores;
2. Em cada casa mora uma pessoa de diferente nacionalidade;
3. Esses 5 proprietários bebem diferentes bebidas, dirigem diferentes tipos de carro e têm um certo animal de estimação;
4. Nenhum deles têm o mesmo animal, dirigem o mesmo carro ou bebem a mesma bebida.



Resolução do Teste de QI de Einstein adaptado: Primeiramente, iremos preencher a tabela utilizando as dicas que nos informam as cores de cada casa, juntamente com as dicas que são fixas, como por exemplo: "O Norueguês vive na primeira casa"e "O homem que vive na casa do meio bebe leite". A dica "O Norueguês vive ao lado da casa azul"nos leva a deduzir que a segunda casa é de cor azul, uma vez que o Norueguês vive na primeira casa.

Temos duas dicas que nos auxiliarão a encontrar a casa Verde e a Branca, são elas: "A casa Verde fica do lado esquerdo da casa Branca"e "O homem que vive na casa Verde bebe Café". Temos três hipóteses: A casa Verde é a terceira cas (essa hipótese não é válida pois o homem que vive na casa verde bebe café e já sabemos que o homem da terceira casa bebe Leite); a Casa Verde é a quinta casa (essa hipótese também será descartada, pois a casa Verde fica do lado esquerdo da casa Branca e, caso ela fosse a quinta casa, não estaria ao lado esquerdo de nenhuma casa). Logo, a casa Verde é a quarta casa e o homem desta casa bebe café; também concluímos que a quinta casa é Branca.

Após determinar onde fica a casa Branca e a casa Verde, juntamente com a dica: "O inglês vive na casa Vermelha", podemos identificar a casa Vermelha facilmente. A casa Vermelha não pode ser a primeira, pois, na primeira casa vive o Norueguês; e não pode ser a segunda, pois a mesma é azul, restando apenas a terceira casa, isto é, a terceira casa é Vermelha, logo, o inglês vive nela.

Já que sabemos as cores de quatro casas, é fácil perceber que a primeira casa é de cor Amarela e o homem que vive nela dirige Uno, concluímos isto pela dica: "O homem que vive na casa Amarela dirige Uno".

	1ª Casa	2ª Casa	3ª Casa	4ª Casa	5ª Casa
Cor	Amarela	Azul	Vermelha	Verde	Branca
Nacionalidade	Norueguês		Inglês		
Bebida			Leite	Café	
Carro	Uno				
Animal					

Temos uma dica que informa: "O homem que cria cavalos vive ao lado do que dirige Uno", logo, o homem da segunda casa cria cavalos.

Agora, iremos analisar duas dicas: "O dinamarquês bebe chá"e "O homem que dirige Palio bebe cerveja"para deduzirmos que o morador da quarta casa é o Alemão e que ele dirige Ônix.

Observe que a dica "O dinamarquês bebe chá"nos leva a duas hipóteses: a 1ª hipótese é que o dinamarquês é da segunda casa; a 2ª hipótese é que o dinamarquês é da quinta casa. O mesmo acontece para a dica: "O homem que dirige Palio bebe cerveja", isto é, ou ele é da segunda casa ou da quinta casa. Note que ambas as hipóteses só preenchem a nacionalidade, bebida ou carro da segunda ou quinta casa. Isso nos ajuda a concluir que a quarta casa será do Alemão que dirige Ônix, uma vez que a única casa que pode atender às duas categorias dessa dica, nacionalidade e carro, é a quarta casa.

	1ª Casa	2ª Casa	3ª Casa	4ª Casa	5ª Casa
Cor	Amarela	Azul	Vermelha	Verde	Branca
Nacionalidade	Norueguês		Inglês	Alemão	
Bebida			Leite	Café	
Carro	Uno			Ônix	
Animal		Cavalos			

Uma vez sabendo que o Alemão mora na quarta casa, nos ajuda a concluir que o Sueco mora na quinta casa e tem cachorros como animais de estimação, pois a dica informa que: “O Sueco tem Cachorros como animais de estimação”. Ajudando-nos a concluir que o Sueco não poderá ocupar a segunda casa, uma vez que o morador da mesma tem como animal de estimação um cavalo.

Voltando ao raciocínio das dicas “O dinamarquês bebe chá”e “O homem que dirige Palio bebe cerveja”, agora fica mais claro saber que o dinamarquês mora na segunda casa e, portanto, o homem que dirige Palio mora na quinta casa e ele bebe cerveja, esta conclusão fica clara na dica:“O homem que dirige Palio bebe Cerveja”.

	1ª Casa	2ª Casa	3ª Casa	4ª Casa	5ª Casa
Cor	Amarela	Azul	Vermelha	Verde	Branca
Nacionalidade	Norueguês	Dinamarquês	Inglês	Alemão	Sueco
Bebida		Chá	Leite	Café	Cerveja
Carro	Uno			Ônix	Palio
Animal		Cavalos			Cachorros

Agora, utilizaremos a dica: “O homem que dirige Gol é vizinho do que bebe Água”. Até então, somente na primeira casa não foi preenchida a bebida, restando apenas água. Logo, concluímos que o morador da primeira casa bebe água e o morador da segunda casa dirige Gol.

Observe que falta somente descobrirmos qual o carro que o morador da terceira casa dirige e, por eliminação, concluímos que é o Celta. E pela dica: “O homem que dirige Celta cria Pássaros”, podemos preencher todas informações da terceira casa.

Uma vez sabendo que o morador da segunda casa dirige Gol e que o morador da terceira casa cria Pássaros, podemos concluir que o morador da primeira casa tem gatos como animais de estimação. Esta conclusão retiramos da dica: “O homem que dirige Gol vive ao lado do que tem Gatos”.

Para finalizar, por eliminação, deduzimos que o animal de estimação do morador da quarta casa é o peixe.

	1ª Casa	2ª Casa	3ª Casa	4ª Casa	5ª Casa
Cor	Amarela	Azul	Vermelha	Verde	Branca
Nacionalidade	Norueguês	Dinamarquês	Inglês	Alemão	Sueco
Bebida	Agua	Chá	Leite	Café	Cerveja
Carro	Uno	Gol	Celta	Ônix	Palio
Animal	Gatos	Cavalos	Pássaros	Peixes	Cachorros

Dicas:

- ☑ O Norueguês vive na primeira casa.
- ☑ O Inglês vive na casa Vermelha.
- ☑ O Sueco tem Cachorros como animais de estimação.
- ☑ O Dinamarquês bebe Chá.
- ☑ A casa Verde fica do lado esquerdo da casa Branca.
- ☑ O homem que vive na casa Verde bebe Café.
- ☑ O homem que vive na casa do meio bebe Leite.
- ☑ O homem que dirige Gol vive ao lado do que tem Gatos.
- ☑ O homem que cria Cavalos vive ao lado do que dirige Uno.
- ☑ O homem que dirige Palio bebe Cerveja.
- ☑ O Alemão dirige ônix
- ☑ O Norueguês vive ao lado da casa Azul.

3.2 Travessias Rio/Ponte

3.2.1 Missionários e Canibais

Instruções

Leve os missionários e os canibais até a margem oposta.

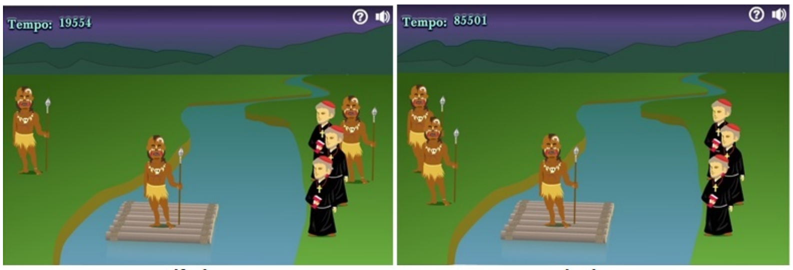
O barco só suporta 2 por vez.

Preste atenção para não deixar mais canibais do que missionários de um lado, pois se isso acontecer, os canibais irão comer os missionários.

(a)

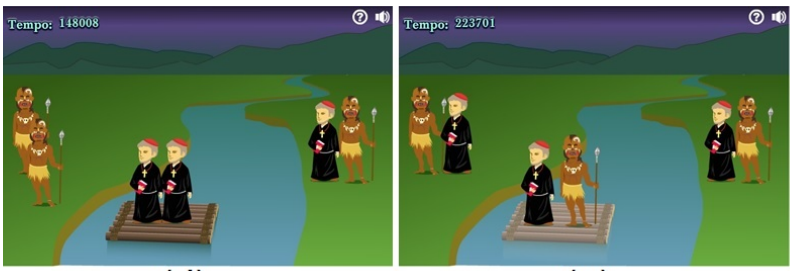
Resolução:

Passo 1: Atravesse dois canibais para o lado esquerdo do rio e retorne com um para o lado direito(b).



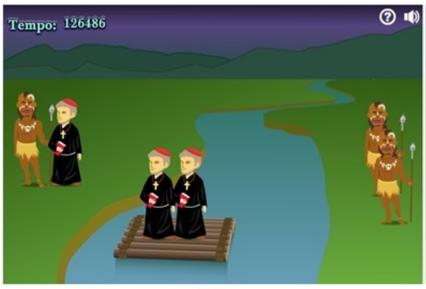
(b) (c)

Passo 2: Atravesse o terceiro canibal para o lado esquerdo, e retorne um deles para o lado direito (c); atravessa então, dois missionários para o lado esquerdo (d), e retorne com um missionário e um canibal para o lado direito (e).

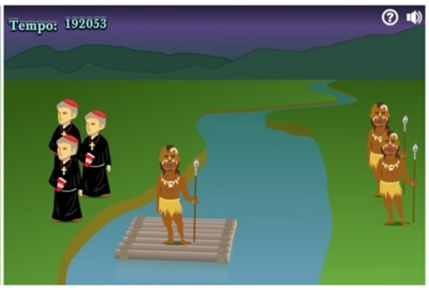


(d) (e)

Passo 3: Agora, deixando um canibal do lado direito, atravesse o segundo e o terceiro missionários para o lado esquerdo (f); em seguida, retorne com um canibal para o lado direito (g).

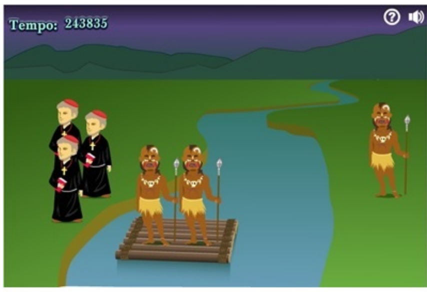


(f)

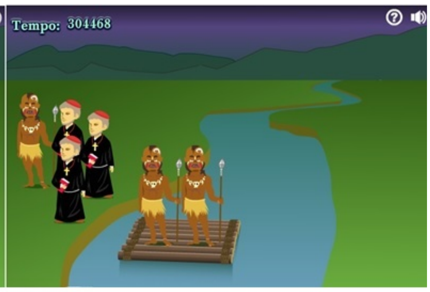


(g)

Passo 4: Finalmente, atravesse dois canibais para o lado esquerdo (h), deixando um e retornando um, para o lado direito; em seguida, atravesse os dois canibais restantes para o lado esquerdo(i).



(h)



(i)

Jogo Vencido!

(j)

3.2.2 Ponte Escura

Instruções

Ajude todas as pessoas a atravessarem a ponte.

Está tudo escuro, por isso é necessário usar a lanterna para atravessar a ponte. Cada pessoa anda numa velocidade e a ponte suporta 2 por vez.

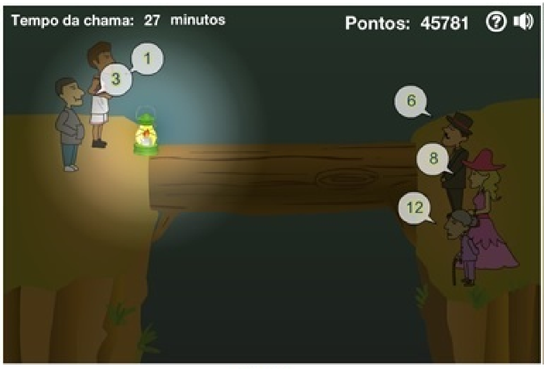
A lamparina tem uma chama com duração de 30 minutos e cada pessoa leva um determinado tempo (mostrado nos balões) para atravessar a ponte. O menino atleta leva 1 minuto; o jovem de capote leva 3 minutos; o senhor de chapéu, 6 minutos; a jovem senhora, 8 minutos e a senhora com a bengala, 12 minutos.

Fique atento, pois as duas pessoas escolhidas irão atravessar a ponte no tempo da pessoas mais lenta.

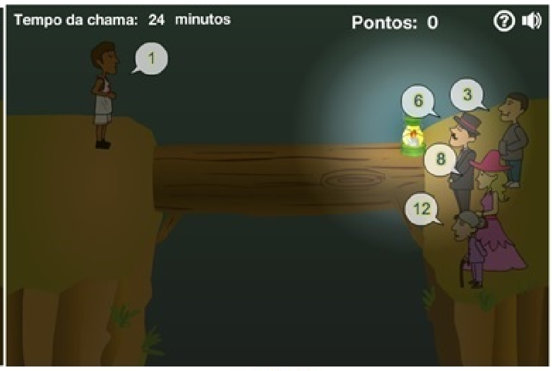
(a)

Resolução:

Passo 1: Atravessa o menino que leva 1 minuto com o menino que leva 3 minutos para o lado esquerdo (b), e retorna o que leva 3 minutos (c).



(b)



(c)

Passo 2: Atravessa a jovem que leva 8 minutos com a senhora que leva 12 minutos, para o lado esquerdo (d), e retorna para o lado direito com o menino que leva 1 minuto (e).

(d) (e)

Passo 3: Atravessa para o lado esquerdo com o homem que leva 6 minutos com o menino que leva 1 minuto (f), e retorna para o lado direito com o menino que leva 1 minuto(g).

(f) (g)

Passo 4: Finalmente, atravessa para o lado esquerdo o menino que leva 1 minuto e o menino que leva 3 minutos e termina o jogo(h).

(h)

3.3 Sudoku

Sudoku é um jogo de estratégia desenvolvido em 1779, pelo matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783).

Aparecendo pela primeira vez ,em 1979, em uma revista Nova Iorquina chamada Math Puzzles and Logic Problems, com o nome de Number Place. Logo após, em 1984, a idéia foi levada para o Japão pelo cidadão japonês de nome Nobukiko Kanamota.

O nome sudoku é uma abreviação japonesa de "suuji wa dokushin kagiru"que pode ser traduzido como "os números devem permanecer sozinhos nas colunas, linhas e regiões".

O jogo passatempo consiste em um quadrado 9x9 em que estão divididos em subgrades 3x3, que deverão ser preenchidos pelos números de 1 a 9, de tal forma que nenhum número se repita em linhas horizontais ou verticais, sendo que em cada subgrade deverá conter os números de 1 a 9. Veja o exemplo abaixo:

9	4		1		2		5	8
6				5				4
		2	4		3	1		
	2						6	
5		8		2		4		1
	6						8	
		1	6		8	7		
7				4				3
4	3		5		9		1	2

Figura 3.1: Exemplo de Sudoku

Algumas dicas de resolução do Sudoku: Abordaremos as dicas resolvendo o sudoku acima.

- A primeira coisa a ser feita é relaxar e encontrar uma boa posição para começar a resolver o jogo. Afinal, quando se tem uma boa postura se consegue trabalhar de uma forma melhor e mais agradável.

- Antes de começar a sair colocando os números de qualquer jeito no sudoku pare, observe, analise o que você já tem de início.

- Dê preferência a começar com os níveis mais fáceis do Sudoku e então com o tempo vá aumentando-o.

- Lembre-se das três condições para um número poder ser colocado em um quadradinho: ele não deve se repetir em uma mesma linha, mesma coluna ou mesma subgrade.

- Se você perceber que existem mais linhas quase completas do que colunas ou subgrades comece por estas linhas e tente completá-las logo de início.

- Se você perceber que existem mais colunas quase completas opte por tentar preenchê-las primeiro.

- No caso de existirem mais subgrades quase completas, então comece a completá-los.

- Observe o número que está presente em maior quantidade e verifique as possíveis jogadas com ele.

Para um melhor entendimento na resolução do sudoku da figura 3.1, classificamos as suas subgrades, linhas e colunas. Observe essa classificação na figura abaixo:

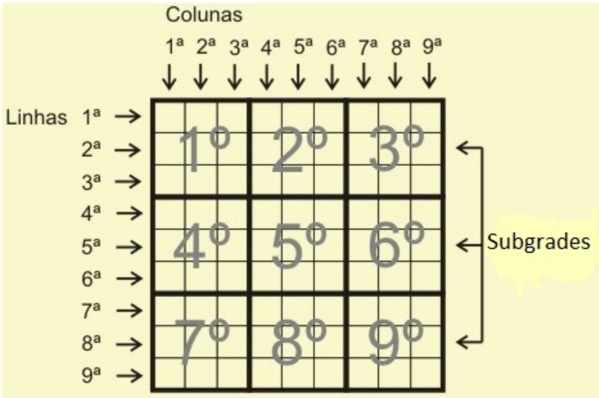


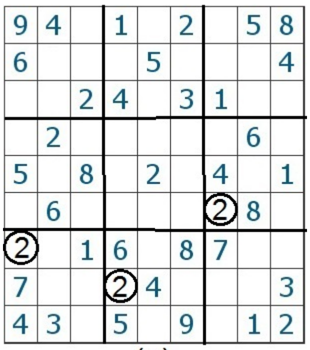
Figura 3.2: Classificação do sudoku em subgrades, linhas e colunas

Este sudoku foi resolvido praticamente com dois métodos: Casa Forçada e Casa Única.

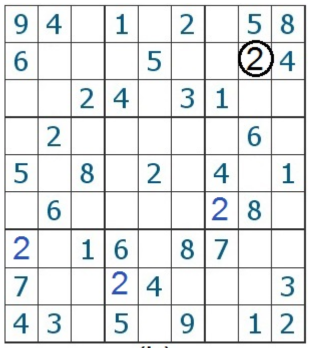
Casa Forçada: Considere uma casa fixa. Ao eliminar os outros algarismos que aparecem na mesma coluna, na mesma linha ou na mesma subgrade, é possível que sobre uma única possibilidade, com a qual a casa deve ser preenchida.

Casa Única: Aqui, um determinado algarismo é focado, por exemplo, o 2. Nas colunas 2 e 3, das subgrade 4 e 1, já existem o número 2, mas não na coluna 1, que deve conter um 2. Onde ele deve ficar? Não na terceira casa da coluna 1 da subgrade 1, pois a primeira subgrade já contém um 2. Não na quarta ou sexta casa da coluna 1, pois sua subgrade também já contém um 2. Assim, o 2 da coluna 1 só poderia entrar na sétima que é a única disponível, o número 2 vai para lá.

Resolução: O primeiro passo a ser feito, para resolução, é observar o número que está presente em maior quantidade e verificar as possíveis jogadas com ele. Iniciaremos com uma análise dos possíveis locais que o número 2 poderá preencher.



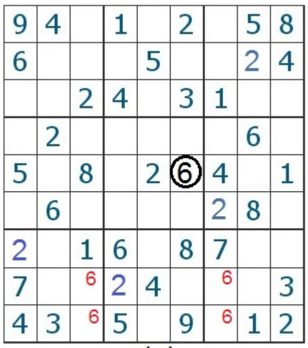
(a)



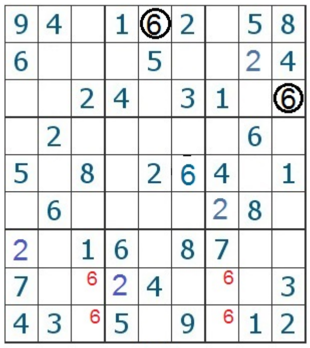
(b)

Observe que nas 6ª, 7ª e 8ª subgrades estão faltando o número 2. Colocaremos, primeiro, o 2 na 7º subgrade; observe que já temos o número 2 na 2ª e 3ª colunas, mas não na 1ª coluna. Ele poderia estar nas 3ª, 4ª, 6ª ou 7ª casas desta 1ª coluna, mas perceba que ele não pode ocupar as 3ª, 4ª ou 6ª, pois as 1º e 3º subgrades já possuem o 2, restando apenas ele preencher a 7ª casa desta 1ª coluna(a). O mesmo acontece para o 2 da 4ª coluna, pois as 5ª e 6ª colunas já possuem o 2, restando apenas colocá-lo na 8ª casa desta 4ª coluna, que se encontra na 8ª subgrade (a). Vamos, agora, preencher a 6ª subgrade com o número 2; note que ele só poderá ocupar a 7ª casa da 6ª linha, pois as 4ª e 5ª linhas, e 9ª coluna, já possuem o número 2 (a). Após termos o número 2 colocados nas 6ª, 7ª e 8ª subgrades, podemos preencher a 3ª subgrade com o número 2, a única casa que ele poderá ocupar é 2ª da 8ª coluna, pois já temos o número 2 nas 1ª e 2ª linhas, e na 9ª coluna(b).

Agora, iremos fazer a mesma análise com o número 6.



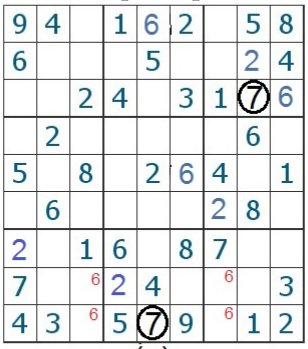
(c)



(d)

Primeiramente, preenchemos a 5ª subgrade com o número 6, a única casa que pode ser ocupada por este número é a 6ª da 5ª linha, pois as 4ª e 6ª linhas, e 4ª coluna já possuem o número 6(c). Observe que há alguns números 6 em vermelho, de tamanho pequeno, nos cantos de alguns quadrados das 7ª e 9ª subgrades; essa notação é para indicar os possíveis locais que eles podem ocupar. Os números 6 em vermelho da 7ª subgrade estão nas 8ª e 9ª casas da 3ª coluna, pois as 1ª e 2ª colunas já possuem o número 6. Já os números em vermelho da 9ª subgrade estão ocupando as 8ª e 9ª casas da 7ª coluna, pois na 7ª linha e 8ª coluna já possuem o número 6(c). Logo, após esta análise, podemos colocar o número 6 na 3ª subgrade, a única casa que ele pode ocupar é 3ª casa da 9ª coluna, pois na 7ª(os que estão de vermelho) e a 8ª coluna já possuem o 6(d). Com o mesmo raciocínio, colocamos o 6 na 2ª subgrade, note que nas 2ª e 3ª linhas já tem o 6, portanto, ele só poderá ocupar a 5ª casa da 1ª linha(d).

Podemos agora preencher as 1ª, 3ª, 4ª e 8ª subgrades com o número 7 e aproveitaremos a oportunidade para preencher toda a 3 ª subgrade com os números 3 e 9.



(e)

(f)

Primeiramente, iremos colocar o 7 na 3ª subgrade , observe que na 7ª coluna já temos um número 7, portanto, a única casa que ele poderá ocupar é a 3ª da 7ª coluna(e). É fácil perceber que o 7 da 9ª linha, que se encontra na 8ª subgrade, ocupará a 5ª casa, pois as 7ª e 8ª linhas já possuem o 7, e esta é a única casa que ele poderá ocupar(e). Observe que a 1ª linha ainda não possui o número 7 e ele ocupará a 3ª casa desta linha(f), uma vez que a 3ª subgrade já possui o 7. Logo após termos preenchido o 7 da 1ª subgrade, percebemos que podemos preencher o 7 da 4ª subgrade , pois as 1ª e 3ª coluna já possuem o número 7, logo a única casa que ele poderá ocupar é a 5ª, da 2ª coluna, pois na 1ª e 7ª subgrades já possuem o 7(f). Observe que na 1ª linha há uma casa vazia e ela será ocupada pelo número 3, pois é o único número que não consta nesta linha, note também que a 3ª subgrade possui uma casa em branco e será preenchida pelo número 9, pois é o único número que ainda não foi colocado nesta subgrade(f).

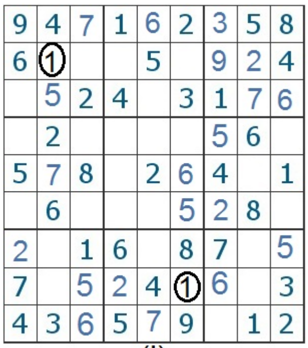
Iremos, a partir de agora, sintetizar a resolução do *sudoku* utilizando os termos "casa única"e "casa forçada", pois, todos os passos explicados são as dicas da casa única e casa forçada.

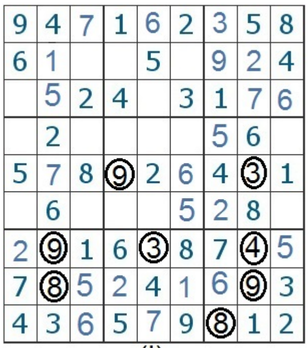
Podemos agora preencher as 1ª, 5ª, 6ª e 7ª subgrades com o número 5(g), e aproveitaremos também para preencher as 7ª e 9ª subgrades com o número 6 (h). Faremos todos eles com o dica da casa única.


(g)

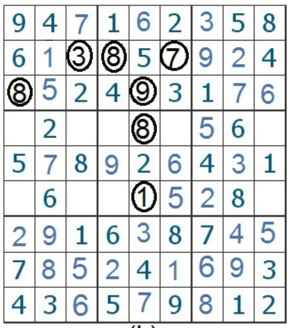

(h)

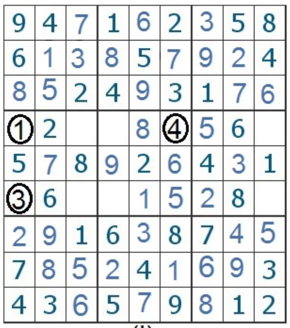
Agora, iremos preencher as 1ª e 8ª subgrades com o número 1 pela dica da casa única (i) e, após isto, ficará fácil preencher totalmente as 7ª, 8ª e 9ª subgrades utilizando as dicas da casa única e casa forçada. Bem como a 5ª linha, com os números 9 e 3(j).

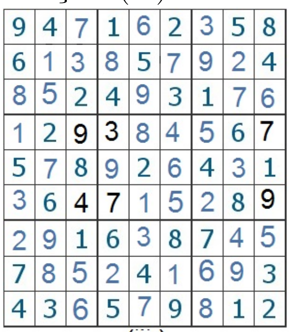

(i)


(j)

Agora, iremos colocar o número 8 as 1ª, 2ª e 4ª subgrades (k), também preencheremos totalmente as 1ª, 2ª e 3ª subgrades e a 5ª coluna(k). Para preencher todas estas subgrades utilizamos as dicas da casa única e forçada. Também, vamos preencher a 4ª subgrade que ainda faltam os números 1 e 3 e a 3ª coluna com o número 4 (l). Basta agora concluir a solução do *sudoku* utilizando a dica da casa forçada(m).


(k)


(l)


(m)

Capítulo 4

Jogos Matemáticos de quebra-cabeças

Os jogos podem ser usados também como uma forma de ensinar ou introduzir conteúdos de uma forma que vá conquistando o aluno, principalmente aquele que tem dificuldade de aprendizado, fazendo com que ele se sinta motivado e confiante no processo de aprendizagem. Por meio deles, o aluno interage com o processo, o que gera resultados positivos, dentre os quais: aprender a lidar com a vitória e a derrota, desenvolver aspectos cognitivos e afetivos, trabalhar em grupo, aprender o conteúdo, ter estímulo ao raciocínio rápido, diminuição no fracasso escolar e viver bem em sociedade.

Apresentaremos alguns jogos matemáticos que podem ser usados como uma forma divertida de aprender determinados assuntos. Aqui, trataremos de alguns jogos e abordaremos uma forma de trabalhar com eles em sala de aula.

4.1 Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um jogo de quebra-cabeças que foi criado, em 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas.

O jogo consiste em três hastes. Em uma delas, encontra-se uma quantidade finita de discos organizados em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo.

O objetivo do jogo é transportar a torre de discos de uma haste para outra, movendo apenas um disco por vez, de maneira que o disco maior não sobreponha o menor.

O jogo Torre de Hanói é muito conhecido por ser rico em suas aplicações em sala de aula. Pode ser utilizado para introdução ou complementos de assuntos como potenciação, introdução de função, função exponencial, indução matemática, dentre outros.

Abordaremos uma possível atividade de função exponencial para o 2º Ano do Ensino Médio.

Figura 4.1: Torre de Hanói

Conteúdo a ser trabalhado

Determinando a lei da Função Exponencial e construção de seu gráfico.

Objetivos

Montar a torre e utilizar o experimento para estudar a dependência do número mínimo de movimentos com diversos números de discos. Também a construção do gráfico de uma função exponencial.

Forma de Trabalho

Dividir a turma em equipes com 3 ou 4 componentes.

Material

Cada grupo de alunos constrói seu equipamento em materiais diversos, observando a funcionalidade, a originalidade e a criatividade.

Procedimentos

1. No primeiro momento utilize um disco encontre o número de movimentos mínimos, obedecendo as regras do jogo.

2. Repita o processo para dois, três e quatro discos.

3. Observe os resultados e construa uma tabela contendo o número de discos e o número de movimentos mínimos.

4. Apresente as soluções escritas para solucionar o problema para uma, duas e três peças .

5. Sabendo que toda função exponencial é da forma $M(n) = ba^n + c$. Determine os coeficientes a, b e c. De acordo com a tabela construída, fazendo associação de n com número de discos e *M(n)* com o número de movimentos mínimos.

6. Conhecendo a lei da função, encontre a quantidade de movimentos mínimos para 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 discos.

7. Com o auxílio da tabela e os conhecimentos prévios já adquiridos em aula, construa o gráfico da função encontrada.

Observe agora um exemplo que demonstra uma solução para $n = 3$ discos.

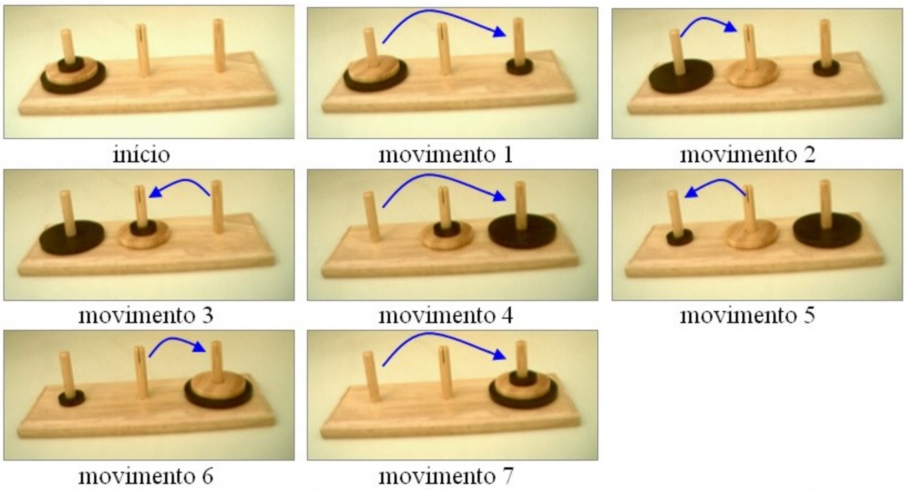


Figura 4.2: Solução da Torre de Hanói para 3 discos

Uma possível solução do Procedimento: Os passos 1, 2 e 3 devem ser mediados pelo professor.

A tabela do passo 3 deverá constar as seguintes informações:

Números de discos n	**Quantidade de movimentos $M(n)$**
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	
6	
7	
8	
9	
10	

O passo 5 deverá ser feito mediante a utilização de três pares ordenados obtidos na tabela do passo 3, montando assim um sistema de equações com três equações e três incógnitas. Sabendo que a função exponencial é da forma $M(n) = ba^n + c$, onde a>0 e a≠1, e utilizando os pares ordenados (n,$M(n)$) encontrados na tabela: (1,1), (2,3) e (3,7). Podemos construir o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ba^1 + c = 1 \\ ba^2 + c = 3 \\ ba^3 + c = 7 \end{cases} \tag{4.1}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos que a=2, b=1 e c=-1. Logo, a função exponencial é: $M(n) = 2^n - 1$.

Já conhecendo a lei da função podemos encontrar a quantidade de movimentos para 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 discos.

Logo, para 4 discos temos: $M(4) = 2^4 - 1$= 16-1 = 15 movimentos.

Para 5 discos temos: $M(5) = 2^5 - 1$= 32-1 = 31 movimentos.

Para 6 discos temos: $M(6) = 2^6 - 1$= 64-1 = 63 movimentos.

Para 7 discos temos: $M(7) = 2^7 - 1$= 128-1 = 127 movimentos.

Para 8 discos temos: $M(8) = 2^8 - 1$= 256-1 = 255 movimentos.

Para 9 discos temos: $M(9) = 2^9 - 1$= 512-1 = 511 movimentos.

Para 10 discos temos: $M(10) = 2^{10} - 1$= 1024-1 = 1023 movimentos.

Na figura 4.3 abaixo vemos o gráfico da função M(n) , produzido pelo Geogebra.

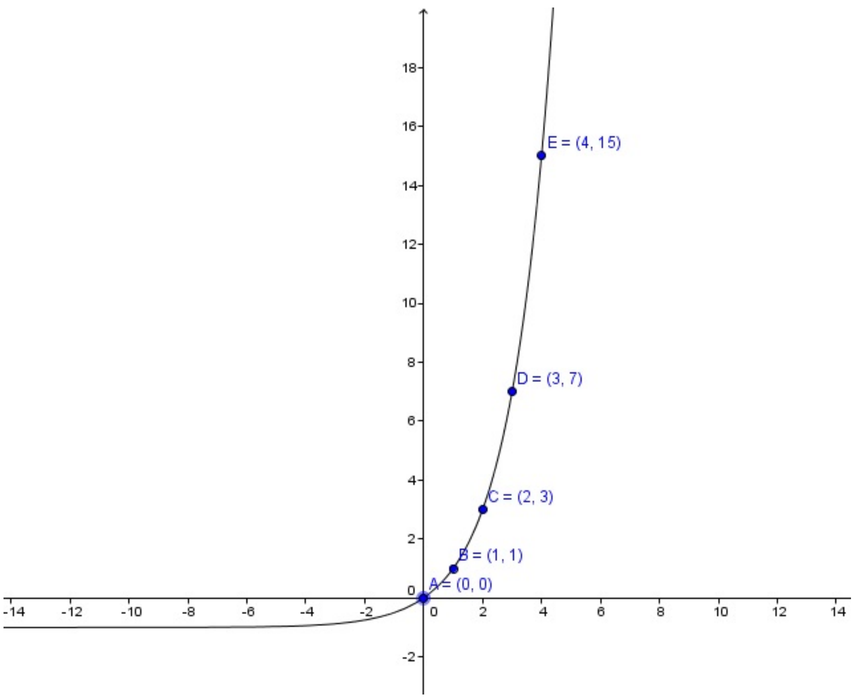


Figura 4.3: Gráfico da função M(n)

4.2 Quadrado Mágico

É uma tabela quadrada que são dispostos números não repetidos de tal forma que a soma de qualquer linha(horizontal, vertical ou diagonal) dê uma constante. Embora a sua origem não seja conhecida, era muito popular na idade média.

Inicialmente, a tabela contém 9 casas(3x3) com números de 1 a 9.

O objetivo do jogo é encontrar a constante da soma e preencher a tabela de modo que as linhas dê essa constante.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 4.4: Quadrado Mágico

Com o quadrado mágico, podemos abordar alguns conteúdos matemáticos como: Simetrias e P.A(Progressão Aritmética).

Para a resolução do quadrado mágico original, precisamos determinar a constante da soma proposta, que pode ser resolvida utilizando o conhecimento de soma de P.A. Uma vez encontrada a constante, podemos determinar o número que fica no centro da tabela, também com a utilização de conhecimentos da soma de P.A. Já sabidos a constante e o número que se encontra no centro, fica mais fácil preencher a tabela, utilizando, agora, a soma de termos equidistantes do extremo de uma P.A.

Uma vez preenchida a tabela usando os conhecimentos de simetria, podemos encontrar outras possíveis soluções para o mesmo problema.

Observando os comentários acima percebemos que o quadrado mágico é uma excelente ferramenta para ser utilizada pelo professor quando estiver abordando o assunto Progressão Aritmética.

Segue abaixo um roteiro para utilizar essa atividade.

Conteúdo a ser trabalhado

Soma dos n primeiros termos de uma P.A

Objetivos

Utilizar os conhecimentos da soma dos n primeiros termos de uma P.A para resolução do quadrado mágico 3x3.

Forma de Trabalho

Em grupos de quatro alunos.

Material

Cada grupo de alunos constrói seu equipamento em materiais diversos, observando a funcionalidade, a originalidade e a criatividade.

Procedimentos

1. Deixe que os alunos tentem resolver o quadrado mágico apenas sabendo das regras.

2. Oriente que eles determinem a constante da soma, utilizando os conhecimentos da soma dos números de 1 a 9 sendo divididos nas três colunas.

3. Peça que encontrem o número que fica no centro do quadrado, utilizando os conhecimentos da soma das duas diagonais, da linha vertical central e da linha horizontal central.

4. Preencha a tabela utilizando o conhecimento da soma dos termos equidistantes do extremo.

Uma possível solução do procedimento

Para determinar a constante da soma, devemos observar que as nove casas serão preenchidas pelos números de 1 a 9 e essa soma deverá ser igual em todas as linhas. Determinamos, então, a soma de três colunas e observe que nessas três colunas constam todos os números de 1 a 9, isto é, $1+2+3+4+5+6+7+8+9=\frac{(1+9)\cdot 9}{2}=45$. Como a soma das nove casas foi 45, basta agora distribuir nas três colunas e/ou três linhas. Ou seja, a soma de três parcelas em qualquer linha deverá ser igual a $\frac{45}{3}=15$.

Para determinar o número que fica no centro do quadrado mágico, apresentaremos o quadrado da seguinte forma:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Somando os termos das duas diagonais, da coluna central e da linha central temos:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_5 + a_9 &= 15\\
a_3 + a_5 + a_7 &= 15\\
a_2 + a_5 + a_8 &= 15\\
\underline{a_4 + a_5 + a_6} &\underline{= 15}
\end{aligned}$$

$$a_1 + a_5 + a_9 + a_3 + a_5 + a_7 + a_2 + a_5 + a_8 + a_4 + a_5 + a_6 = 15 + 15 + 15 + 15$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9} + 3a_5 = 60$$

$$45 + 3a_5 = 60$$

$$3a_5 = 60 - 45$$

$$3a_5 = 15$$
$$a_5 = \frac{15}{3}$$
$$a_5 = 5$$

Já sabendo que o centro será preenchido pelo número 5 e que a soma deverá ser 15, então os extremos tem que somar 10. Pela soma dos termos equidistantes da P.A de 1 a 9, temos que: 1+9=10, 2+8=10, 3+7=10 e 4+6=10.

Logo, uma das soluções do quadrado mágico fica da seguinte forma:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Fazendo as simetrias em relação as retas r, s, m e n, encontramos 8 soluções para o quadrado mágico.

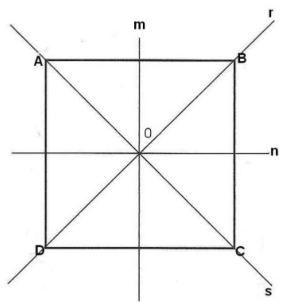


Figura 4.5: Quadrado e seus 4 eixos de simetria

Veja as oito possíveis soluções na figura abaixo:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figura 4.6: As oito possibilidades de solução de um quadrado mágico 3x3

Partindo para a abstracção, podemos utilizar o mesmo argumento para qualquer quadrado nxn. Ao preencher o quadrado com números de 1 a n^2, a soma total será igual a: $1 + 2 + 3 + ... + (n^2 - 1) + n^2 = \frac{(1+n^2)\cdot n^2}{2}$.

Para obter a configuração “mágica”, é necessário garantir que a soma de cada uma das n colunas dê o mesmo resultado. Logo:

Constante da soma: $\frac{(1+n^2)\cdot n^2}{2} \div n = \frac{(1+n^2)\cdot n}{2}$

Esta fórmula é muito importante, uma vez que esclarece à partida de qual será o valor da soma mágica. Por exemplo, no caso 4x4, a existir quadrado mágico, a constante da soma “mágica” terá de ser igual a: $\frac{(1+4^2)\cdot 4}{2} = 17 \cdot 2 = 34$

Capítulo 5

Conclusão

Apresentamos algumas dificuldades que podem ser encontradas no processo de ensino, as quais criam barreiras para um bom aprendizado, propondo uma reforma nas salas de aula, que facilite o bom entendimento do aluno, bem como o amadurecimento do educador como profissional.

Os governos do Estado e do Munícipio têm dado um pontapé inicial adotando projetos como o Gestar e o Mente Inovadora, trazendo, assim, a proposta de trabalhar de forma diferenciada e inovadora em sala de aula com nossos alunos, por intermédio de jogos e situações-problemas interessantes. Cabe a nós, professores, estarmos sempre em busca de aperfeiçoamento em nossa profissão, conseguindo, assim, ensinar o conhecimento matemático de forma eficaz e prazerosa.

É importante levar em consideração que o aprendizado em Matemática possibilita ao educando o desenvolvimento de certas habilidades psíquicas e sociais, as quais ele carregará por toda a vida.

Vale lembrar, também, que o professor deve estar atento às atividades lúdicas para que essas não sejam atividades para brincar somente, mas que essas atividades venham, de forma divertida, ter um fim pedagógico.

O lúdico em sala de aula desenvolverá no aluno habilidades sociais, tais como o senso de cidadania, o espírito de cooperação e de equipe e o ajudará a aguçar sua criatividade. Esses alunos conseguirão se adaptar com mais facilidade à sociedade atual, que tem avançado bastante em diferentes aspectos, exigindo, assim, pessoas que sejam capazes de ter um bom e rápido uso da razão.

Os jogos no ensino da Matemática, relacionados aos conteúdos e à ludicidade, portanto, ajudarão os professores a transformar seus alunos em cidadãos bem inseridos na sociedade, e de forma que seus ensinamentos nunca venham a ser esquecidos.

Referências Bibliográficas

[1] AGUIAR, João Serapião de. Educação inclusiva: jogos para o ensino dos conceitos. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2004.

[2] ALMEIDA, Paulo Nunes. Educação Lúdica: Técnica e Jogos Pedagógicos. SP: Loyola,1990

[3] ALVES, Eva Maria Siqueira. A Ludicidade e o ensino de matemática. Campinas, SP: Papirus, 2001.

[4] BICUDO, M A.V. Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: EDNESP, 1999.

[5] BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática), Brasília: MEC/SEMT, 1999.

[6] BRENELLI, R. P. O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas. Campinas: Papirus, 1996

[7] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática. São Paulo. Ática. 1990.1ª edição.

[8] FREIRE, Paulo. Educação e Mudança. Trad. De Moacir Godotti e Lílian Lopes Martin. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1983. 12ª edição.

[9] GRANDO, R. C. O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino aprendizagem de Matemática. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1995.

[10] KISHIMOTO, T. M. (org.).Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 2001.

[11] LARA, Isabel Cristina Machado de. Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série. 1ª edição; São Paulo; Rêspel, 2003.

[12] LEIF, J. O Jogo pelo jogo. Rio de Janeiro: Zahar, 1978

[13] PIAGET, Jean. O raciocínio na criança. Rio de Janeiro: Real, 1967.

[14] POLYA, George. A arte de resolver problemas. Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

[15] RABELO, E. H.; LORENZATO, S. A. Ensino da matemática: reflexões para uma aprendizagem significativa. Zetetiké, Campinas, ano 2, n.2, p.37-46, 1994.

[16] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Estela Milani. Jogos de matemática de 6º ao 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

[17] SMOLE, K. S. et al. P. Jogos de matemática de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

[18] TAHAN, M. Matemática Divertida e Curiosa. Rio de Janeiro: Record, 2001. 15º edição.

[19] TAHAN, M. O homem que calculava. Rio de Janeiro: Record,1968.

[20] VELASCO, Casilda Gonçalves. Brincar, o despertar psicomotor. Rio de Janeiro: Sprint, 1996

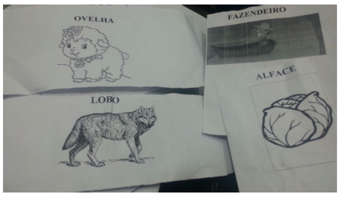
[21] VOLPATO, Gildo. Jogo, brincadeira e brinquedo: usos e significados no contexto escolar e familiar. Florianópolis: Cidade Futura, 2002.

[22] RACHACUCA - Portal de entretenimento inteligente dedicado a todas as idades. Jogos de Travessia Rio/Ponte. Disponível em: <http://www.rachacuca.com.br/jogos/tags/travessia-de-rio/>. Acesso em: 7 de maio de 2014

Apêndice

A.1 Fotos da Aplicação de algumas atividades

A.1.1 Travessias Lógicas no Vespertino



A.1.2 Travessias Lógicas no Noturno

A.1.3 Sudoku