



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

ROGÉRIA MALACRIDA MENOTTI

FRAÇÕES E SUAS OPERAÇÕES:
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA TRAJETÓRIA
HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

ROGÉRIA MALACRIDA MENOTTI

**FRAÇÕES E SUAS OPERAÇÕES:
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA TRAJETÓRIA
HIPOÉTICA DE APRENDIZAGEM**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, para obtenção do Título de mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profa. Dra. Pamela Emanuelli
Alves Ferreira

Londrina
2014

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M547f Menotti, Rogéria Malacrida.

Frações e suas operações : resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem / Rogéria Malacrida Menotti. – Londrina, 2014.
156 f. : il.

Orientador: Pamela Emanuelli Alves Ferreira.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Construtivismo (Educação) – Teses. 3. Frações – Teses. 4. Números racionais – Teses. 5. Matemática – Solução de problemas – Teses. I. Ferreira, Pamela Emanuelli Alves. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

ROGÉRIA MALACRIDA MENOTTI

FRAÇÕES E SUAS OPERAÇÕES:
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA
DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, para obtenção do Título de mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Ulysses Sodré
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná- UTFPR

Londrina, 27 de novembro de 2014.

Dedico este trabalho à minha família e amigos
que me apoiaram em cada etapa desta
caminhada.

AGRADECIMENTO(S)

Agradeço a Deus pela oportunidade de estar viva e permitir que eu aprenda todos os dias, me dando a chance de me levantar quando o cansaço bater.

Agradeço a minha orientadora não só pela constante orientação neste trabalho, mas, sobretudo pela sua amizade, paciência e dedicação em cada passo.

Aos membros da banca professores Dr. Ulysses Sodré e Dr. André Luis Trevisan.

Aos colegas do PROFMAT que contribuíram para meu aprendizado dando forças a cada final de semana.

Aos amigos que colaboraram me dando força e acreditando que era possível concretizar este trabalho.

À minha família que me apoiou em cada passo.

Aos meus pais que sempre acreditaram que a educação é capaz de mudar a vida do ser humano.

Ao meu esposo que soube compreender a minha ausência em alguns momentos e me apoiou e incentivou a concluir esta etapa de nossas vidas.

Gostaria de agradecer, também, algumas instituições que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho: SBM, PROFMAT, CAPES e UEL.

A todos que acreditaram em mim quando eu não mais acreditava.

*“É das hipóteses mais simples que
mais devemos desconfiar, porque são
aquelas que têm mais possibilidades
de passar despercebidas.”
Poincaré*

MENOTTI, Rogéria Malacrida. **Frações e suas operações**: Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2014. 156f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta didática por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) e orientada pela Resolução de Problemas, visando o ensino de Números Racionais, em especial, os números fracionários, com foco em algumas das relações existente entre estes números. Neste trabalho são propostas tarefas para trabalhar com alunos de 7º ano/6ª série que possuam noções sobre as frações possibilitando a ampliação de seu conhecimento e propiciando uma aprendizagem em uma perspectiva construtivista. São apresentadas e propostas sete tarefas que tem como objetivos: estabelecer relações entre frações equivalentes, identificar e realizar simplificações; conhecer os processos que envolvem operações de adição e subtração de frações com mesmo denominador e denominadores diferentes; compreender, resolver e conhecer os processos presentes nas operações de multiplicação e divisão de frações, em diferentes contextos e em situações problema.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Números Racionais. Operações com frações.

MENOTTI, Rogéria Malacrida. **Frações e suas operações**: Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2014. 156f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This paper aims to present a didactic proposal by a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) and directed Troubleshooting, aimed at teaching Rational Numbers, in particular, fractional numbers, focusing on some of the existing relations between these numbers. This work tasks proposed to work with students from 7th grade who have ideas about fractions enabling the expansion of their knowledge and providing learning in a constructivist perspective. Seven tasks whose objectives are presented and proposals: establishing relationships between equivalent fractions, identify and perform simplifications; understand the processes involving operations of addition and subtraction of fractions with the same denominator and different denominators; understand, solve and understand the processes present in the operations of multiplication and division of fractions, in different contexts and problem situations.

Key words: Troubleshooting. Hypothetical Learning Trajectory. Rational Numbers. Operations with fractions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ciclo de ensino matemática abreviado.....	20
Figura 2 – Trajetória hipotética de aprendizagem.	21
Figura 3 – Domínio do conhecimento do professor.	24
Figura 4 – Papiro de Ahmes ou Rhind.	29
Figura 5 – Mapa conceitual.	36
Figura 6 – Tiras de papel entregues aos alunos.....	47
Figura 7 – Interpretando frações como parte todo – metade.	48
Figura 8 – Interpretando e representando frações como parte todo – metade.	49
Figura 9 – Interpretando frações como parte todo – um quarto.	49
Figura 10 – Representando frações como parte todo – um quarto.	50
Figura 11 – Interpretando frações como parte todo – um oitavo.	50
Figura 12 – Representando frações como parte todo – um oitavo.	51
Figura 13 – Comparando as frações um quarto e um oitavo.	51
Figura 14 – Comparando as frações um quarto e um oitavo.	52
Figura 15 – Interpretando frações como parte/todo – um dezesesseis avós.	53
Figura 16 – Representando frações como parte todo – um oitavo.	53
Figura 17 – Comparando as frações um oitavo e um dezesesseis avós.	54
Figura 18 – Comparando as frações.	54
Figura 19 – Comparação de frações equivalentes.	57
Figura 20 – Construindo a fração – um terço.	59
Figura 21 – Comparando as frações encontradas.	60
Figura 22 – Folha quadriculada de numeradores e denominadores.	67
Figura 23 – Folha quadriculada de numeradores e denominadores.	68
Figura 24 – Representando as frações.	71
Figura 25 – Esquema representando a divisão dos camelos.	85
Figura 26 – Representação da fração correspondente a cada irmão.	85
Figura 27 – Representação das frações correspondente aos camelos.	86
Figura 28 – Fração dos camelos em um único desenho.	87
Figura 29 – Quantidade de camelos por irmão.	88
Figura 30 – Divisão dos camelos.	88
Figura 31 – Frações de camelos.	89
Figura 32 – Sobreposição de metade e um terço.	89
Figura 33 – Dividindo em partes iguais.	90
Figura 34 – Sobreposição, fração meio.	90
Figura 35 – Sobreposição de meio e um terço.	91
Figura 36 – Sobreposição de um terço e um nono.	91
Figura 37 – Sobreposição metade e um nono.	92
Figura 38 – Dividindo em partes iguais.	92
Figura 39 – Fração meio e um nono, sobreposição.	93
Figura 40 – Frações equivalentes.	93
Figura 41 – Representação da adição.	103
Figura 42 – Representação das frações de cada amigo.	109
Figura 43 – Representando a quantidade de alunos.	119
Figura 44 – Representando a quantidade de alunos por partes.	120
Figura 45 – Representando a quantidade de alunos por partes e fração.	121
Figura 46 – Figurinhas por partes.	126
Figura 47 – Dobras no papel para representar a fração $\frac{3}{5}$	135
Figura 48 – Dobras no papel para representar a fração $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$	136
Figura 49 – Multiplicação de frações com “barrinhas”	138
Figura 50 – Resultado da multiplicação de frações com “barrinhas”	138
Figura 51 – Sobreposição realizada pelo aluno.	139
Figura 52 – Sobreposição da “barrinhas” para representar a multiplicação.	139
Figura 53 – Resultado da multiplicação de frações com “barrinhas”	140
Figura 54 – Verificando a multiplicação com “barrinhas”.	140

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Folha de trabalho da TAREFA I entregue impressa aos alunos.	44
Quadro 2 – Frações equivalentes com denominadores 2, 4, 8 e 16.	58
Quadro 3 – Frações equivalentes com denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 e 16.....	63
Quadro 4 – Folha de trabalho da TAREFA II entregue impressa aos alunos.	71
Quadro 5 – O problema dos 35 camelos.....	79
Quadro 6 – Folha de trabalho da TAREFA III entregue impressa aos alunos.	81
Quadro 7 – Ficha de trabalho da TAREFA IV entregue impressa aos alunos.	100
Quadro 8 – Quantidade de figurinhas de cada amigo.	101
Quadro 9 – Quantidades de figurinhas com total.	101
Quadro 10 – Fração total de figurinhas de cada amigo.	108
Quadro 11 – Fração equivalente ao total de figurinhas de cada amigo.....	110
Quadro 12 – Frações equivalentes (simplificada).....	111
Quadro 13 – Frações com representação decimal.....	112
Quadro 14 – Frações com representação decimal, comparando casas decimais.	112
Quadro 15 – Situação Problema da TAREFA V entregue impressa aos alunos.	115
Quadro 16 – Continuação da situação problema TAREFA V.	117
Quadro 17 – Ficha de trabalho da TAREFA V entregue impressa aos alunos.	124
Quadro 18 – Organizando a situação problema.	125
Quadro 19 – Organizando a situação problema.	128
Quadro 20 – Ficha para a realização da Tarefa V.....	132
Quadro 21 – Ficha para desenvolvimento da TAREFA VII.	143

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:.....	14
2.2 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA).....	17
2.3 CONTEÚDO: FRAÇÕES E NÚMEROS RACIONAIS	25
2.4 NÚMEROS RACIONAIS, FRAÇÕES E O ENSINO DE MATEMÁTICA	30
3 DESENVOLVIMENTO METODOLOGICO	34
3.1 OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS DA PROPOSTA.....	37
3.2 DAS TAREFAS PRESENTES NA PROPOSTA	38
4 UMA PROPOSTA DE TRAJETÓRIA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES	40
4.1 TAREFA I.....	43
4.2 TAREFA II.....	70
4.3 TAREFA III.....	78
4.4 TAREFA IV	99
4.5 TAREFA V	114
4.6 TAREFA VI	131
4.7 TAREFA VII	142
CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
REFERÊNCIAS.....	152

1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades apresentadas pelos alunos da Educação Básica brasileira atualmente está em compreender e resolver diferentes situações do cotidiano que apresentam o uso das frações e suas operações. Pensando nesta realidade, este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma sequência de tarefas que possam contribuir para o ensino de frações.

Este trabalho foi estruturado por meio de uma revisão bibliográfica que constitui a fundamentação teórica que aborda a estratégia didática e metodológica da Resolução de Problemas e o modelo de ensino baseado nas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem de Martin Simon (1995), assim como os conceitos sobre os Números Racionais e temas fundamentais para elaborar esta proposta.

Para compor a sequência de tarefas, foi escolhida a Resolução de Problemas, uma estratégia didática e metodológica para o ensino de matemática. Esta escolha se deve à abordagem que o professor pode realizar sobre o tema estudado por diferentes formas, permitindo ao aluno propor e explorar diferentes caminhos e estratégias, contribuindo para a compreensão e ampliação do aprendizado, apresentando situações significativas e não mecanizadas.

Juntamente com a Resolução de Problemas foi realizada a escolha de um modelo de ensino que busca contribuir para o processo de ensino e aprendizagem em matemática, baseado nas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). Este modelo foi apresentado em 1995, pelo pesquisador americano, Martin Simon, tendo como base a reconstrução das práticas matemáticas construtivistas.

Neste processo o conhecimento matemático do professor, o conhecimento sobre a turma em que o professor ministra as aulas e as tarefas propostas devem contribuir para cumprir seus objetivos que serão baseados em suas hipóteses sobre o processo de aprendizagem e conhecimentos apresentados pelos alunos. Uma constante avaliação do processo deve ser realizada para verificar tanto o conhecimento dos alunos quanto a forma de abordagem dos temas, podendo sofrer alterações sempre que necessário.

Analisando o ensino atual de frações na Educação Básica, em particular no Ensino Fundamental, foi possível observar por meio de experiências

próprias que o conceito e estudo desse tema estão muitas vezes limitados ao uso da fração como parte/todo e como operador, deixando esquecidos os demais conceitos como razão e divisão, equivalência de frações e as operações envolvendo as frações.

Na proposta de trabalho aqui apresentada, espera-se que o professor tenha a oportunidade de abordar a equivalência e as operações com frações com seus alunos partindo de suas experiências anteriores com o ensino de frações ou não, para construir conhecimentos.

Dentro da proposta apresentada, é sugerida ao professor uma sequência de tarefas e possíveis respostas dos alunos e sugestões. Esta sequência não deve ser seguida como uma receita pronta e acabada, sendo uma sugestão para encaminhamento, em sala de aula, do trabalho com as frações e suas operações, podendo sofrer alterações caso o professor julgar necessário.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:

A Resolução de Problemas é uma estratégia didática e metodológica para o ensino da matemática que permite diversas formas de abordar os temas estudados, por meio da qual diferentes caminhos e estratégias devem ser explorados.

A resolução de problemas amplia o aprendizado, e deve apresentar situações significativas e não mecanizadas.

Dante (2003, p.9) apresenta diferenças entre um problema e um problema matemático, o primeiro “é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la” e o segundo “é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” (DANTE, 2003, p.10). Para que um aluno solucione um problema é preciso que ele lance mão de diferentes conhecimentos e estratégias em situações novas para serem solucionadas.

A Resolução de Problemas é muito discutida no ensino de matemática, porém muitos professores tem uma visão equivocada dela e a tratam como uma ação na qual se resolvem problemas repetitivos, rotineiros, nos quais as soluções são mecanizadas, e refletem meros exercícios para trabalhar apenas algoritmos.

No entanto, a Resolução de Problemas exige o pensar matemático, o desenvolvimento do raciocínio lógico independente, produtivo, com iniciativa e criatividade. Ao desenvolver familiaridade com a estratégia da Resolução de Problemas o aluno é capaz de refletir e solucionar diferentes situações problemáticas, principalmente aquelas que são novas no seu cotidiano e não somente as de dentro da escola.

Desta maneira, para que um problema possa ser resolvido, desenvolvendo o pensar matemático, Polya (2006, p. 4) acredita que a Resolução de Problemas deve estar pautada em quatro fases:

- compreender o problema (perceber o que é necessário);

- estabelecer um plano (encontrar conexão entre dados e incógnita);
- executar o plano (verificando cada passo);
- retrospecto, verificação (examinar a solução obtida, revendo-a e discutindo-a).

Para que o aluno compreenda os problemas propostos é necessário que o professor saiba fazer uma “boa” escolha, que os enunciados estejam em um nível adequado para a turma, não muito fáceis que não possam trazer desafios e não muito difíceis que causem o desinteresse e não proporcionem aos alunos o desejo de resolvê-los.

Ao resolver um problema os alunos necessitam identificar todas as variáveis e condicionantes da tarefa proposta, esquemas, desenhos e incógnitas encontrando conexão entre os elementos para estabelecer um plano, buscando algum problema similar, se possível agregar algum elemento auxiliar, reformular e traçar metas a serem alcançadas. Para o professor fica o papel de questionar, provocar o aluno para que as ideias fiquem claras e sugestões de resolução venham aflorar.

Com o plano traçado é necessário executá-lo, para isto é preciso lançar mão de conhecimentos anteriores, de experiências vividas, o professor deve observar os passos definidos pelo aluno, acompanhando se estão coerentes ou não, sempre questionando-o, porém, quando verificar que o aluno cometeu equívocos, não deve mostrar o erro e sim questionar se os passos estão corretos, retomando os passos o aluno é capaz de verificar se cometeu alguma distração, assim, o aluno sempre ficará atento aos passos da resolução, se estão de acordo com a proposta inicial.

Quando o aluno chegar a uma solução para o problema, ela não pode ser o fim do processo, pois é extremamente importante que o aluno valide-a, verificando os caminhos percorridos, retomando seus conhecimentos e aprimorando sua capacidade de resolver e interpretar problemas, pensando em possibilidades de encontrar outras soluções, se os caminhos traçados podem ser úteis em outras situações ou não.

A Resolução de Problemas não deve ser vista de maneira isolada no processo de ensino aprendizagem, ela deve fazer parte em todos os conceitos abordados e desenvolvidos pelo professor em sala de aula. As situações problemas

devem ser desafiadoras tanto para os alunos quanto para o professor, pois cabe ao professor estar atento e preparado para as diferentes possibilidades de soluções, podendo e sendo capaz de aprofundar as discussões que surgirem ao longo das resoluções estando disposto a sempre aprender.

No Currículo Oficial do estado de São Paulo a Resolução de Problemas faz parte da metodologia empregada em sala de aula permitindo que o aluno construa suas hipóteses para checar e solucionar problemas em diferentes contextos. Nesse sentido, a problematização é uma estratégia muito fecunda,

[...] os problemas constituem, em cada situação concreta, um poderoso exercício da capacidade de inquirir, de perguntar. Problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema. [...] é necessário discernir o que é relevante e o que não é relevante no caminho para a resposta (SÃO PAULO, 2010, p. 46 – 47).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, p.37) a Resolução de Problemas é sugerida como prioridade, pois o aluno precisa

resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.

A Resolução de Problemas não deve ser tratada apenas na disciplina de matemática, o Currículo Oficial do estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) apresenta esta perspectiva de trabalho também para outras áreas do conhecimento, como as Ciências da Natureza (Ciências, Química, Física e Biologia), tratando também das relações e do trabalho, focando os objetivos a serem desenvolvidos para que a aprendizagem ocorra.

A relação harmoniosa entre os objetivos educacionais, os conteúdos científicos e as atividades a serem realizadas é essencial para a definição de uma proposta de ensino. Uma atividade de ensino associada a um conteúdo científico pode desenvolver vários objetivos educacionais, assim como um objetivo educacional pode ser alcançado por diferentes tipos de atividades. Por exemplo, uma atividade de resolução de problema que envolva um tema [...] (SÃO PAULO, 2010, p. 33).

Resolver um problema contribui para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno e do ser humano, permite que seus conhecimentos sejam validados, desafios possam ser superados e que a aprendizagem ocorra, assim ensinar por meio da Resolução de Problemas permite que o aluno desenvolva habilidades que possam ser utilizadas não somente em sala de aula, em matemática ou outros componentes curriculares, mas também para a resolução de problemas cotidianos, fora sala de aula, por meio da organização do pensamento planejado e conseguindo solucioná-los.

Em seu trabalho Polya (2006) ressalta a importância de se trabalhar com Heurística¹, permitindo ao aluno procurar e compreender o processo para solucionar os problemas em especial as operações mentais que fazem parte deste processo.

O professor nesta estratégia didática deve assessorar os alunos no decorrer do processo de aprendizagem, traçando objetivos, planejando e levantando as possíveis hipóteses que possam surgir no aprendizado dos alunos. Assim o papel do professor deve ser de questionar e provocar os alunos para que construam suas soluções, não mostrando soluções ou apontar erros.

2.2 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA)

Em 1995, o pesquisador americano, Martin Simon introduz a noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) como parte de seu modelo para o ensino de matemática, buscando contribuir para o processo de ensino aprendizagem, tendo como base a reconstrução das práticas matemáticas construtivistas juntamente com a planificação do ensino.

A planificação de ensino que constitui o processo de planejar as ações para um determinado período de ensino, constituído por metas, estratégias de ensino/aprendizagem, que organiza o que e como deve ser ensinados, estratégias e tempo para desenvolver cada conceito.

¹ Heurística, Hurética ou “ars inveiendi” era o nome de certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Filosofia ou a Psicologia. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Heurístico: “que serve para descobrir”.

Tendo o professor como foco principal no planejamento de suas atividades para que estas resultem em uma boa situação de aprendizagem.

A concepção construtivista, refletida na estratégia metodológica utilizada em sala de aula, pode proporcionar resultados satisfatórios desde que um planejamento seja realizado, partindo de ações que favoreçam o processo ensino aprendizagem, valorizando a individualidade, equilíbrio e interação de cada aluno. Nesta concepção, o sujeito aprende a partir de suas experiências, interesses e conhecimentos prévios, produzindo novo conhecimento, agregando valor a um conhecimento já existente, como um processo constante, nunca completo, sempre interpretando, interagindo com as partes e o todo, integrando e interiorizando novas experiências e conhecimentos.

O professor necessita de conhecimento e teorias que lhe sirvam de embasamento para a construção de suas práticas em sala de aula. Para que ele possa atingir suas metas de ensino, precisa saber planejar o que será realizado, analisar as diferentes possibilidades, modificar situações para um desenvolvimento satisfatório dos alunos em sala, sabendo os momentos de tomar decisões e adaptar as situações para cada turma e cada aluno.

As ações em sala de aula para promover um aprendizado não podem estar focadas somente no professor, mas devem possibilitar situações que promovam e despertem significados no aluno para seu aprendizado, analisar as ações dos alunos. Assim,

[...] a concepção construtivista não determina formas de ensino, mas, oferece elementos para a análise e reflexão sobre a prática, possibilitando a compreensão dos processos que nela intervêm e avaliação de sua conexão educativa, oferecendo, ainda, critérios valiosos para o planejamento, a concretização e a avaliação do ensino” (MIRANDA, 2011, p. 24).

Pires (2009) em reflexões com seu grupo de pesquisa² observou que existe uma confusão quanto ao “currículo” que é entendido como planificação de uma trajetória a ser realizada por alunos, seja ao longo da Educação Básica ou durante o Ensino Superior. Observou que muitas vezes ocorre o pensamento equivocado de acreditar que tal planificação deva ser feita, em uma perspectiva

² Grupo de Pesquisa que desenvolve o projeto “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio”, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

construtivista, alguns interpretam que o conhecimento deva vir apenas por interesse dos alunos e sem definir objetivos e conteúdos. Porém, com os estudos realizados por Simon (1995) verificou-se que este pensamento de deixar o aluno sozinho definir seus objetivos e conteúdos não está totalmente correto, necessitando de aprofundamentos e estudos sobre o assunto para que sejam elaborados modelos de ensino baseados no construtivismo, para que ocorra uma transformação no ensino atual da matemática.

Na tentativa de superar as dificuldades encontradas pelos professores da Educação Básica, Simon propôs estudos baseados em THA's.

Uma THA é uma construção pedagógica que propõe caminhos de aprendizagem, na qual, ao percorrer estes caminhos, o indivíduo constrói seu conhecimento buscando o desenvolvimento de seu pensamento vinculado a investigação e atitudes para realização das tarefas.

Uma THA para Simon e Tzur (2004, p. 93) consiste em traçar uma meta para a aprendizagem dos alunos, por meio de tarefas matemáticas que possibilitarão a aprendizagem, e hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos. Nesta elaboração estão as seguintes premissas:

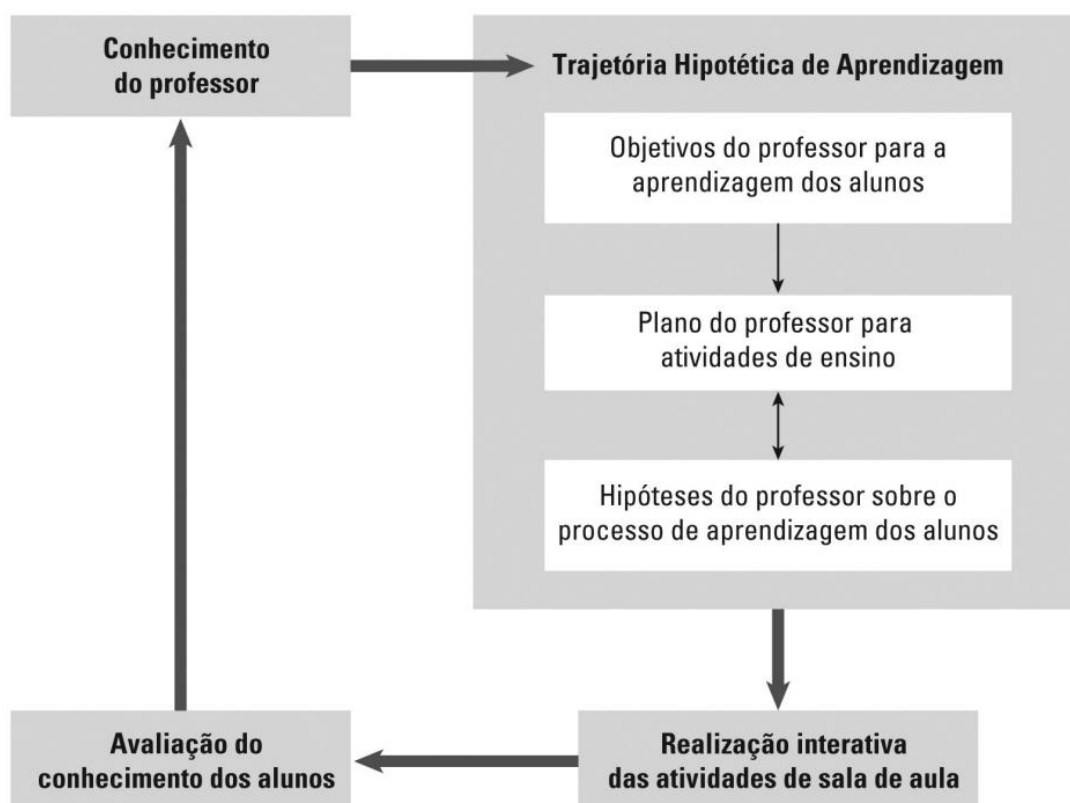
1. a geração de uma THA está baseada na compreensão do conhecimento atual dos alunos envolvidos;
2. uma THA é um veículo para o aprendizado de planejamento de determinados conceitos matemáticos;
3. tarefas matemáticas fornecem ferramentas para a promoção da aprendizagem de matemática, em especial, dos conceitos e são, portanto, uma parte fundamental do processo de ensino;
4. devido à natureza hipotética e inerentemente incertas deste processo, o professor está regularmente envolvido em modificar os aspectos da THA .

Para o desenvolvimento de qualquer tarefa é necessário algum conhecimento por parte dos alunos, para isto, é necessário a realização do levantamento dos conhecimentos prévios e, a partir desses conhecimentos, o professor desenvolve e propõe tarefas significativas para os alunos. Para que isto ocorra o professor deve estar disposto a sempre buscar novos conhecimentos,

refletir sobre suas ações e tomadas de decisões, ser flexível e estar disposto ao novo.

Simon (1995) em seu trabalho desenvolveu um modelo esquemático e cíclico, mostrado na Figura 1, relacionando conhecimento, pensamento e tomada de decisões, no qual o professor deve ser capaz de conduzir o processo de aprendizagem para que os objetivos sejam alcançados.

Figura 1 – Ciclo de ensino matemática abreviado.



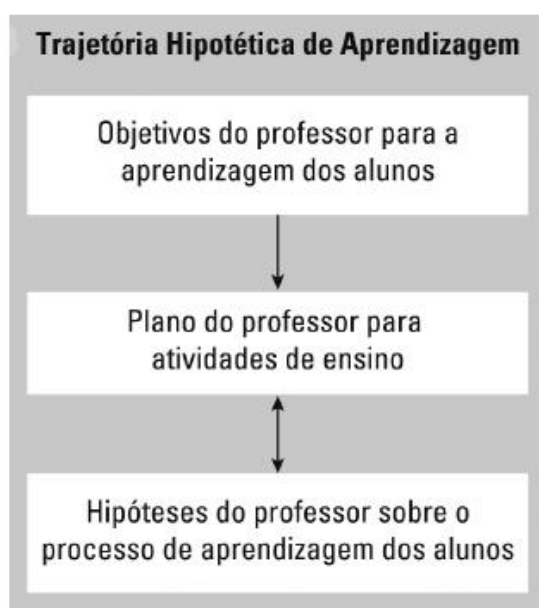
Fonte: SIMON, (1995 apud PIRES, 2009, p.156).

Numa trajetória de aprendizagem são identificados: o *objetivo*, isto é, um aspecto de um tópico matemático que os alunos devem aprender, por exemplo, a multiplicação nos inteiros positivos; uma *progressão no desenvolvimento*, ou percurso de aprendizagem, através do qual os alunos se movem nos níveis de pensamento e desenvolvem compreensão e competência num dado tópico matemático; o ensino, expresso num *conjunto de tarefas*, que os ajuda a caminharem através daquele percurso (SERRAZINA; OLIVEIRA, 2010, p.44).

Em uma trajetória hipotética de aprendizagem os objetivos de aprendizagem devem ser claros, explicitando o que o aluno precisa alcançar. Sabendo disto ocorre um direcionamento para outros componentes a serem desenvolvidos. Definidos os objetivos deve ser proposta uma sequência de aprendizagem que proponham desafios a partir dos quais os alunos possam estabelecer formulações e solucioná-las.

Cabe ao professor mediar o processo, avaliando e retomando as tarefas desenvolvidas e se necessário realizar as reformulações necessárias para que os objetivos iniciais possam ser alcançados ou até mesmo alterados. Os alunos formulam suas hipóteses de maneiras diferentes, pois são pessoas diferentes com conhecimentos diferentes, cada um apropria-se do conhecimento em seu tempo e de maneira gradativa. O professor deve estar preparado para reformular uma THA sempre que verificar que seus alunos estão apresentando dificuldade em compreender algum conceito abordado.

Figura 2 – Trajetória hipotética de aprendizagem.



Fonte: SIMON, (1995 apud PIRES, 2009, p. 157).

Uma trajetória hipotética de aprendizagem – THA – é composta por três componentes.

1. o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
2. as tarefas de ensino;

3. o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos será colocado em ação no contexto de aprendizagem das atividades). (PIRES, 2009, p. 157).

A criação das possibilidades de modificações da trajetória hipotética de aprendizagem é a parte central do modelo referente a Figura 2 diagramado.

Em resumo, as trajetórias de aprendizagem descrevem os objetivos de aprendizagem, os processos, o pensamento e a aprendizagem de alunos em vários níveis, e as tarefas de aprendizagem que eles podem realizar (CLEMENTS; SARAMA, 2009, p. 4).

Simon (1995) deixa claro em seus estudos sobre a importância da escolha da palavra trajetória: esta tem a intenção de referir a um caminho, fazendo referência com a meta a ser alcançada, ao propor uma sequência de atividades aos alunos. Os alunos podem reagir de diferentes maneiras quando desenvolvem suas tarefas que estão vinculadas a trajetória hipotética, este desenvolvimento depende de suas experiências matemáticas anteriores e das inferências realizadas pelo professor.

Simon (1995, p. 136-137, tradução nossa) faz a seguinte analogia:

Considere que você decidiu viajar ao redor do mundo, a fim de visitar lugares que você nunca viu. Não se faz isso de forma aleatória (por exemplo, ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra), mas também não há um itinerário a seguir. Então, você adquire o máximo de conhecimento relevante para planejar a sua possível viagem. Você, então, elabora um plano. Você pode inicialmente planejar a viagem inteira ou apenas parte dela. Você estabelece o caminho de acordo com o seu plano. No entanto, você deve constantemente ajustar sua viagem, por causa das condições que você encontrar. Você continua a adquirir conhecimentos sobre a viagem, sobre as condições atuais, e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos com relação à ordem dos seus destinos. Você modifica a duração e a natureza de suas visitas, de acordo com o resultado das interações com as pessoas ao longo do caminho. Você pode adicionar destinos que antes de sua viagem eram desconhecidos para você. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa a qualquer ponto no tempo é a sua "trajetória hipotética".

O professor deve estar sempre atento aos conhecimentos matemáticos, a história de sua construção, para poder contribuir na formação dos alunos, saber agir e ser capaz de reformular o percurso. Sendo parte importante neste processo, cabe a ele definir uma trajetória hipotética de aprendizagem. Diferentes experiências acontecem a partir das observações e interações realizadas pelo professor na realização das tarefas, seja individual ou coletivamente, ao desenvolver a tarefa cabe a reflexão e retomada de decisões sempre que necessário. O professor faz um planejamento, os resultados obtidos podem ser diferentes, ou não, dos propostos inicialmente.

A avaliação do pensamento dos alunos, que faz parte deste modelo de ensino aprendizagem, traz contribuições importantes para a adaptação do conhecimento do professor, que o levará a uma nova trajetória ou modificar as hipóteses anteriormente apresentadas para esta aprendizagem.

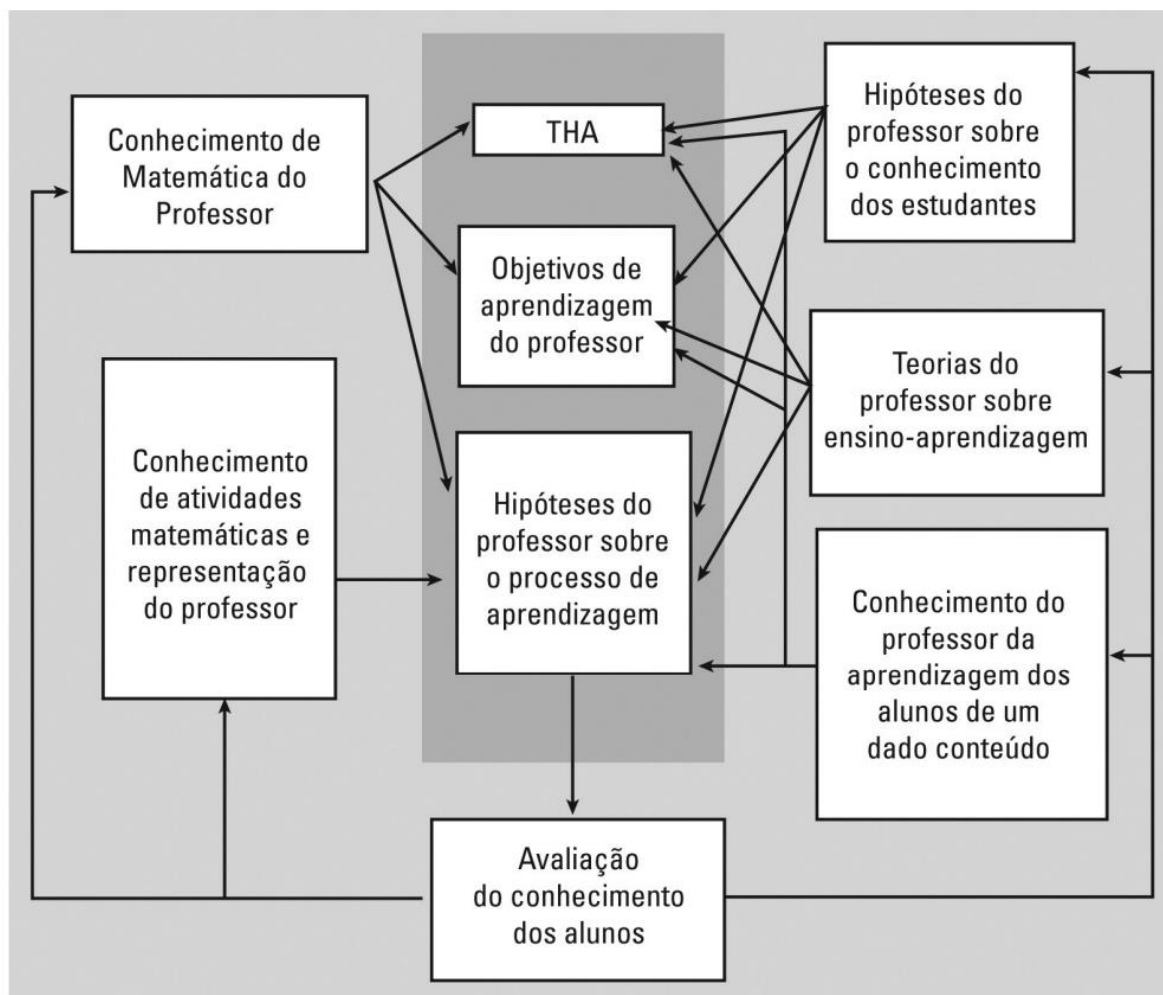
O pensamento e o conhecimento docente devem ser constantemente avaliados, adaptando e interagindo com as ideias do contexto da sala de aula, tornando-se um ciclo no qual ocorre o planejamento dos objetivos de aprendizagem, das tarefas propostas e hipóteses sobre o processo ensino aprendizagem dos alunos, em uma sequência de aprendizagem a realização das tarefas deve estar aliada à constante avaliação do professor, quanto ao conhecimento dos alunos e seu próprio conhecimento.

O conhecimento do professor relacionado com as hipóteses que tem sobre o conhecimento de seus alunos contribui para estabelecer os objetivos de aprendizagem. Esses fatores mencionados, quando relacionados, contribuem para o desenvolvimento satisfatório das situações de aprendizagem juntamente com o processo hipotético de aprendizagem, que deixa de ser hipotético quando o aluno desenvolve suas tarefas.

Se necessário, durante a trajetória, o professor realiza adaptações gerando um novo objetivo, podendo propor outras tarefas ou usando as mesmas, para desenvolver as hipóteses do processo de ensino por parte dos alunos, que realizam as tarefas. O processo não para, sendo possível a reconstrução e ressignificação do conhecimento e da aprendizagem.

Para Simon (1995) o diagrama representado pela Figura 3, descreve a relação existente entre os domínios do conhecimento e saber docente, a aprendizagem hipotética e as interações com os alunos.

Figura 3 – Domínio do conhecimento do professor.



Fonte: SIMON, (1995 apud PIRES, 2009, p. 159).

A constante avaliação desta trajetória de aprendizagem permite que ajustes sejam realizados constantemente e tomadas de decisões ocorram, para isto o professor deve estar sempre atento para que o conhecimento seja validado. Todos os itens desta trajetória, o objetivo, as tarefas, ou a construção da aprendizagem, podem ser adequados, conforme a necessidade de cada turma.

Para Simon (1995) este tipo de trabalho deve ser planejado e, em algumas situações, o tempo suposto é necessário, e, muitas vezes, fica muito aquém do esperado, gastando-se mais tempo que o previsto, pois se ao observar

que o aluno não atinge algum conhecimento é preciso refletir e reformular sua trajetória e realizar adaptações, se necessário com novas tarefas. Essa abordagem difere da abordagem tradicional que promove uma habilidade por vez, com atividades sistemáticas para “reforçar” a aprendizagem. Quando os alunos apresentam uma dificuldade conceitual, esta não deve ser evitada e sim enfrentada, para que possa ocorrer uma superação destas dificuldades.

O ensino de matemática deve buscar uma reflexão constante docente de seu papel em sala de aula, de sua compreensão, do seu saber e do saber dos alunos, quais as articulações podem ser feitas para promover a aprendizagem.

Uma trajetória hipotética de aprendizagem favorece o trabalho docente e aprender dos alunos, o professor precisa estar em constante pesquisa buscando aprofundar seus saberes, para atuar de maneira coerente, sabendo avaliar seu desenvolvimento e de seus alunos, retomando suas hipóteses, modificando e aprimorando sua situação de aprendizagem proposta. “O professor vai ampliando o seu conhecimento juntamente com o desenvolvimento conceitual dos alunos” (SERRAZINA, 2010, p.54). Com um professor investigador teremos alunos reflexivos, capazes de ultrapassar obstáculos.

2.3 CONTEÚDO: FRAÇÕES E NÚMEROS RACIONAIS

A história da invenção dos números é muito extensa e fragmentada, muitas civilizações antigas perceberam a necessidade de contar e assim o fizeram de sua maneira, utilizando sistemas de numeração com algumas características que também estão presente no nosso sistema atual. A evolução do método de contagem e registro trouxe aos dias de hoje, a forma de registrar, que é uma das principais heranças trazidas dos povos antigos, os algarismos que utilizamos hoje para representar os diferentes números e conjuntos numéricos.

Para Ifrah (2005), “houve um tempo que o homem não sabia contar” (p. 15). É possível verificar que até nos dias atuais ainda há pessoas que não fazem tal relação. Alguns povos “primitivos”, atualmente, não fazem uso de contagem ou do registro dos números, estão no processo de “Um, dois e ... muitos”, tendo a visão do

indivíduo e da paridade, não sentindo a necessidade de ampliar seus conhecimentos quantitativos para a representação numérica.

A necessidade de contar faz parte das relações humanas, para solucionar situações; por uma questão de praticidade e utilidade geral, esta necessidade se faz presente desde a antiguidade, quando realizava-se uma relação biunívoca de contagem, na qual uma pedra (cálculo) representava um animal, pessoa ou objeto a ser contado. Não se sabe bem ao certo onde teve seu início e qual forma de número (cardinal ou ordinal) surgiu primeiro.

Hoje nossa forma de registro utiliza os “algarismos arábicos” que possuem dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e nosso sistema de numeração é o decimal, cuja base de contagem é 10 (potências de base dez). Nesta base e com os algarismos, podemos representar qualquer quantidade e qualquer número de forma clara e compreensível, dando origem aos conjuntos numéricos que hoje conhecemos.

Podemos denominar um conjunto como uma coleção de objetos, sendo que esses objetos são os elementos deste conjunto. Aqui especificamente abordaremos os conjuntos numéricos, sendo os conjuntos dos números Naturais ($\mathbb{N}$), Inteiros ($\mathbb{Z}$), Racionais ($\mathbb{Q}$), Irracionais ($\mathbb{I}_r$) e Reais ($\mathbb{R}$).

Lima et al., (2003, p. 25) citam os compêndios tradicionais para mencionar os números:

número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se *contagem* e o resultado é um numero inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real.

Partindo da ideia inicial de contagem e associação com a necessidade do surgimento do registro, os números, dá-se assim a noção inicial do conjunto dos números Naturais, que surgiu a partir desta necessidade de contar. Devido à insuficiência de registro para valores negativos ocorre a ampliação do conjunto dos números Naturais ($\mathbb{N}$) para os inteiros ($\mathbb{Z}$), faz-se necessária, também, a ampliação do conjunto dos números Inteiros ($\mathbb{Z}$) para o conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$).

Feitosa (2011) cita a ampliação do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais, com o acréscimo dos números fracionários, para ele um número racional é determinado a partir de dois números inteiros e por meio de uma divisão. Um dos conceitos envolvidos no conjunto dos números racionais está principalmente ligado à relação existente com a divisão e partilha. Ainda em seu livro Feitosa (2011, p. 141) define uma fração como: “um par ordenado de inteiros em que o primeiro componente é o *numerador* e o segundo componente é o *denominador*, o qual tem que ser diferente de zero”.

O conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$) é um conjunto ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$) onde está estabelecida a seguinte relação:

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, e q \in \mathbb{Z}^*\}$$

Neste conjunto, dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ são válidas as seguintes operações:

Adição: dados dois racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, a adição pode ser definida por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Como $\mathbb{Q}$ é um corpo³ são válidas as seguintes condições:

Quaisquer que sejam q, r e $s \in \mathbb{Q}$

- (i) a adição é associativa: $(q + r) + s = q + (r + s)$;
- (ii) a adição é comutativa: $r + s = s + r$;
- (iii) o $0_{\mathbb{Q}}$ é um elemento neutro para a adição: para todo $r \in \mathbb{Q}$,
 $r + 0_{\mathbb{Q}} = r$;
- (iv) todo elemento de $\mathbb{Q}$ admite um elemento oposto: para cada $r \in \mathbb{Q}$ existe s , tal que $r + s = 0_{\mathbb{Q}}$.

O elemento oposto de r é único e denotado por $(-r)$.

Multiplicação: dados dois racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ a multiplicação é definida geralmente por:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

³ Corpo: conjunto munido de uma operação de adição (+) e uma operação de multiplicação (×).

Quaisquer que sejam q, r e $s \in \mathbb{Q}$:

- (i) a multiplicação de racionais é associativa, isto é,
 $(q \times r) \times s = q \times (r \times s)$;
- (ii) a multiplicação de racionais é comutativa: $q \times r = r \times q$;
- (iii) o 1 é o elemento neutro da multiplicação de racionais: para todo $r \in \mathbb{Q}$, $r \times 1 = r$;
- (iv) todo elemento de $\mathbb{Q}$ admite um elemento inverso: para cada $r \in \mathbb{Q}$ existe s , tal que $r \times s = 1_{\mathbb{Q}}$.
- (v) a multiplicação é distributiva em relação à adição:
 $q \times (r + s) = (q \times r) + (q \times s)$.

Divisão: dados dois racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ a divisão é definida geralmente

por:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Uma das primeiras civilizações que apresenta frações como uma notação racional foi a babilônica com sua base sexagesimal, na qual o denominador era uma potência de base 60, muito semelhante à representação de frações de horas e minutos. Porém eles não usavam a notação com vírgula que usamos atualmente, o que em alguns casos dificultava o entendimento da representação, que precisava de interpretação e contextualização.

Os egípcios também contribuíram com o uso das frações, eles utilizavam as frações egípcias⁴ para diferentes representações, tais representações estão presentes no Papiro de Ahmes ou Rhind (Figura 4).

⁴ Frações egípcias: também denominada frações unitárias, cujo numerador é um.

Figura 4 – Papiro de Ahmes ou Rhind.



Fonte: <http://www.matematica.br/historia/prhind.html>.

Muitos matemáticos usaram os diferentes tipos de frações em seus trabalhos como:

Fibonacci (1170 – 1250) em seu *Liber abaci* [...] usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais, e unitárias – mas não frações decimais. [...] Fibonacci costumava colocar a parte ou as partes fracionárias de um número misto antes da parte inteira [...] com a justaposição de frações unitárias e inteiros implicando adição. Fibonacci gostava das frações unitárias – ou julgava que seus leitores gostassem – pois o *Liber abaci* contém tabelas de conversão de frações comuns a unitárias [...] (BOYER, 2012, p.181).

A notação que vemos hoje sobre frações ordinárias é uma herança dos hindus, com sua numeração decimal e posicional, que representavam frações como $\frac{a}{b}$, sendo que a representava o numerador e b o denominador.

Com o uso das frações decimais, cujo denominador é uma potência de base 10, surgiu o interesse em representar uma fração de uma outra maneira utilizando a representação que conhecemos hoje com números após a vírgula, os números decimais, ficando diferenciado um número inteiro e um número com casas decimais, facilitando a representação de números racionais.

Assim, François Viète (1540-1603) realizou grandes contribuições, pois ele:

[...] deve ser lembrado por seu apelo em favor do uso de frações decimais. [...] Sexagesimais e múltiplos de sessenta devem ser

pouco, ou nunca, usados em matemática, e milésimos e milhares, centésimos e centenas, décimos e dezenas, e progressões semelhantes, ascendentes e descendentes, devem ser usadas frequentemente ou exclusivamente (BOYER, 2012, p. 213).

A numeração decimal de posição assim concluída introduziu também a infinita complexidade do universo dos números, e levou os matemáticos a um avanço prodigioso (IFRAH, 2005, p. 329). Hoje é possível afirmar que as frações racionais são densas, pois entre dois racionais, por mais próximos que estejam, sempre há outro racional. Os gregos antigos já haviam descoberto a incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, como diagonal de um quadrado, dando assim à origem a um conjunto desconhecido, que não se tratava nem de um número inteiro e nem uma fração, o conjunto dos números Irracionais.

2.4 NÚMEROS RACIONAIS, FRAÇÕES E O ENSINO DE MATEMÁTICA

O conjunto dos números Racionais, em particular, as frações, vem enfrentando grandes problemas no ensino de matemática, há muitos desafios a serem superados, muitos alunos visualizam a matemática como um grande problema.

Avaliações externas, como PISA, SAEB, SARESP, vem apontando a grande dificuldade que os alunos da Educação Básica estão apresentando na aprendizagem de frações, seu conceito, representações e operações.

Os maiores problemas do ensino de frações, diagnosticados, estão de um modo geral em trabalhar o conceito matemático envolvido, seja ele a ideia parte/ todo, como quociente entre dois números, como razão ou como um operador. Para que a aprendizagem ocorra de maneira eficaz é preciso partir de conhecimentos próximos aos alunos, fenômenos, situações práticas como partilha de bolos, chocolates, pizzas e, então, formalizar conceitos.

Estes problemas aparecem mesmo com o estudo da noção de frações sendo abordado, segundo os PCN (BRASIL, 1997, p. 58), ainda no segundo ciclo, visando no aluno a progressão na construção de conceitos e procedimentos matemáticos. Porém não deve ficar estabelecido o fim deste aprendizado neste

ciclo, estes conceitos devem ser abordados e aprofundados no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Nos PCN (BRASIL, 1998, p. 64) ficam definidos os objetivos no estudo de frações para o terceiro ciclo, no qual o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns pontos históricos que motivaram sua construção;
- resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros e racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, inteiros e racionais, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não matemáticos.

As frações podem assumir contextos diversos, assim, é importante mostrar para o aluno diferentes situações e permitir por meio de tarefas diversificadas que o aluno possa aprender cada conceito e posteriormente utilizá-los em seu cotidiano. Ainda nos PCN (BRASIL, 1998, p. 102-103) são abordados estes diferentes significados dos números racionais nos diversos contextos: relação parte/todo, divisão, razão e operador:

- a relação **parte/todo** se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais;
- como **divisão**, consiste no quociente entre dois números inteiros, ou seja, $a \div b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$;

- como **razão**, usado como um índice comparativo entre duas quantidades;
- como **operador**, desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

Não somente os PCN apresentam os significados de frações. Segundo Nunes (2003) há cinco significados definidos para um número fracionário: fração como números, parte/todo, quociente, medida e operador multiplicativo, sendo assim definidos:

- fração como **Número**: assim como números inteiros, não precisam obrigatoriamente referir a uma quantidade específica, cuja representação pode ser fracionária, ordinária ou decimal;
- fração como **Parte/todo**: é a partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$;
- fração como **Quociente**: em situações onde está envolvida a ideia de divisão;
- fração como **Medida**: em situações de quantidades extensivas (medida de quantidade de mesma natureza, parte/todo) nas quais a quantidade refere-se a relação entre duas variáveis;
- fração como **Operador Multiplicativo**: o papel de transformador, como uma ação a ser desenvolvida sobre um número ou quantidade.

Os significados precisam ser desenvolvidos e aprendidos pelos estudantes do Ensino Fundamental, eles deveriam conhecer e saber diferenciar as diferentes abordagens que um número racional pode conter, normalmente aprendem, primeiramente, a noção parte/todo, que é a mais trabalhada pelos professores e tratada nos livros didáticos, e, muitas vezes, não são exploradas as outras noções de frações. Cabe ao professor propor situações, incentivar e apoiar seus alunos, para que estes conhecimentos sejam construídos adequadamente.

Outra noção abordada é o significado de razão, estando diretamente relacionada com os conceitos de proporcionalidade.

O professor deve estar atento, definindo abordagens coerentes que levem o aluno para o aprendizado, e sanando as dificuldades dos alunos com atividades significativas e propostas que possam dialogar com a realidade e cotidiano do aluno.

3 DESENVOLVIMENTO METODOLOGICO

Este trabalho foi pensado a partir de uma reflexão pessoal a respeito da aprendizagem de alunos do Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio, com a qual pude concluir, por meio de tarefas propostas em sala de aula e da observação dos resultados de avaliações externas e internas, nas diferentes escolas que trabalhei com estes níveis de ensino, que o processo ensino e aprendizagem envolvendo os números racionais, mais especificamente, o ensino das frações, não está sendo desenvolvido a contento.

Os alunos geralmente chegam dos anos iniciais do Ensino Fundamental conhecendo frações, com noção de representação parte/todo, alguns com noção de fração como operador, e estes conceitos se mantêm pelos anos seguintes não se perdendo, porém, a maior inquietação e grande dificuldade dos alunos ocorre com relação à compreensão sobre a equivalência de frações e com o ensino das operações envolvendo os números fracionários.

Por meio de uma revisão bibliográfica sobre o Ensino de Matemática e estudo de propostas a respeito do processo ensino e aprendizagem sobre Resolução de Problemas e Trajetória Hipotéticas de Aprendizagem (THA), é possível constatar que a resolução de problemas há muito tempo tem sido difundida como metodologia para o ensino de matemática, porém, ainda muitos professores não estão atentos às mudanças e, muitas vezes, não se sentem preparados para desenvolver este processo.

Acredito que por falta de conhecimento, e, ou despreparo, ou até mesmo pela falta de tempo, pelo excesso da carga horária do professor, além disso está havendo uma redução das aulas de matemática por sala, alguns professores preferem recorrer apenas aos exercícios de fixação e não desenvolvem o trabalho com Resolução de Problemas e deixam ou não desejam preparar tarefas diferenciadas por demandar um certo tempo .

As THA - Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem fazem parte de estudos realizados por Martin Simon divulgados em 1995, e vem sendo difundidas no Brasil, trazendo uma “nova” perspectiva, aos nossos olhos, para o processo de ensino e aprendizagem por meio das concepções construtivistas. Uma THA está focada na preparação de tarefas, com a qual o professor deve visar os objetivos a

serem alcançados e pensar em suas hipóteses em relação ao conhecimento dos alunos, estando pronto para interagir e interferir no desenvolvimento das tarefas, retomando conceitos e, se preciso, realizando alterações necessárias para que o aluno possa atingir um objetivo. Nessa perspectiva, o professor deve estar constantemente atento às respostas dos alunos para alcançar êxito em seu trabalho.

Na sequência deste trabalho foi apresentada uma breve retomada do contexto histórico dos números racionais, em particular os números fracionários, desde a motivação para o seu surgimento, passando pelas diferentes representações e antigas civilizações, até o ensino atual. Para esta pesquisa houve estudo de diferentes livros sobre história da matemática, vários artigos científicos que contribuíram para a escrita, também houve consulta a documentos nacionais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo do Estado de São Paulo.

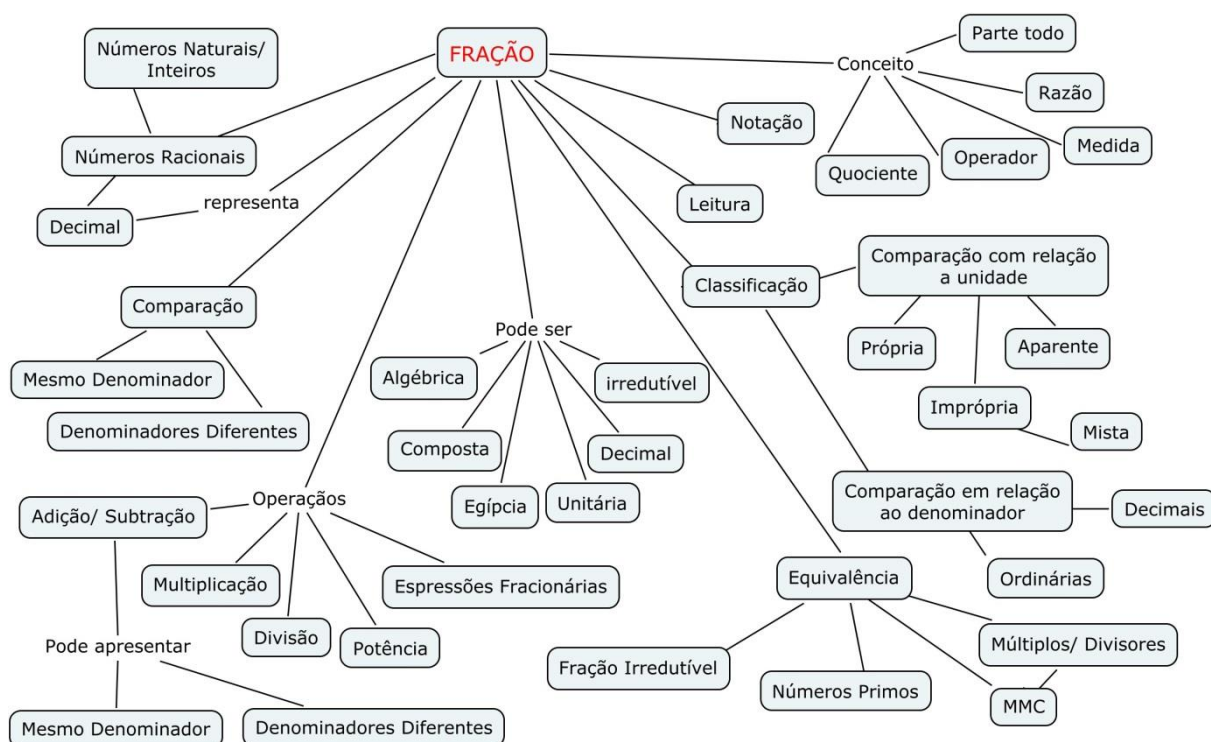
Para a pesquisa referente à Resolução de Problemas, além destes documentos nacionais, dissertações mestrado e teses de doutorado, livros sobre o assunto foram pesquisados, dois principais autores tratam deste tema George Polya e Luiz Roberto Dante, este era um tema já conhecido e de grandes discussões e caminhos para o trabalho em sala de aula.

Quanto à pesquisa sobre as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem o texto referência em inglês de Martin Simon e Ron Tzur, no Brasil difundido e estudado por Célia Maria Carolino Pires. Outros autores, como Lourdes Serrazina, apresentam o tema com muita propriedade, sendo muito bem discutido, apesar de pouco difundido no Brasil. Uma leitura leva a outras, e a partir delas foi possível concluir que é possível aplicar estes conhecimentos em sala de aula. Acredito que demanda tempo para o professor se familiarizar a realizar estas tarefas, mas é possível acreditar que tais metodologias possam ser vistas como um caminho para o ensino de matemática.

Alunos com grande dificuldade precisam ser motivados para aprender e a Resolução de Problemas juntamente com as THA podem contribuir para o desenvolvimento do conhecimento dos alunos. As tarefas propostas foram definidas e pensadas a partir da experiência com as dificuldades apresentadas pelos alunos no ensino das frações, equivalência de números fracionários, operações com frações.

Um mapa conceitual⁵ (Figura 5) sobre o ensino de números racionais/fracionários foi elaborado e a partir dele é possível estabelecer quais conhecimentos os alunos precisam ter para compreender o ensino de frações, Sendo alguns pré-requisitos para outros, os conhecimentos são interligados, não podemos “ver” o ensino de frações como um processo dissociado do ensino de outros conceitos ou entre si.

Figura 5 – Mapa conceitual.



Fonte: da autora.

Neste trabalho será apresentada uma proposta didática por meio da THA que visa o ensino de números racionais, em especial os números fracionários com enfoque principal na equivalência de frações e as operações envolvendo frações. Ao final do desenvolvimento das tarefas o aluno deverá ser capaz de reconhecer as frações equivalentes e resolver problemas com operações entre frações, como adição e subtração, com denominadores iguais ou diferentes e também as operações de multiplicação e divisão.

⁵ Mapa conceitual: representação gráfica de um conjunto de conceitos construídos de tal forma que as relações entre eles sejam evidentes, sendo uma ferramenta utilizada para organizar e representar o conhecimento por meio de um esquema.

Uma intenção desta proposta é ser uma alternativa para sanar dificuldades apresentadas com relação ao uso das frações e suas operações e contribuir para diminuir os grandes índices de erros apresentados pelos alunos do Ensino Fundamental nos anos finais e também alunos do Ensino Médio, tanto em sala de aula, quanto em avaliações externas como SARESP, SAEB e PISA.

3.1 OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS DA PROPOSTA

De um modo geral esta proposta foi elaborada a partir da reflexão sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos da Educação Básica, Ensino Fundamental, anos finais e também do Ensino Médio no ensino de frações, as relações envolvidas e suas operações. Espera-se que esta Trajetória Hipotética de Aprendizagem seja uma proposta alternativa por meio da qual os alunos possam compreender e aprender os conceitos desenvolvidos e atinjam os objetivos de

- estabelecer relações entre frações equivalentes;
- identificar classes de equivalência;
- identificar e simplificar frações equivalentes;
- compreender o processo para realizar as operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador;
- resolver operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador ou denominadores diferentes;
- compreender uma fração como operador;
- resolver situações problema tendo frações como operadores;
- compreender os processos envolvidos na multiplicação e divisão de frações;
- resolver situações problema que envolvem operações de multiplicação e de divisão entre frações.

3.2 DAS TAREFAS PRESENTES NA PROPOSTA

A primeira tarefa tem como foco o conceito de equivalência, simplificação de frações e classes de equivalências. Por meio de uma tarefa prática pretende-se que o aluno possa abstrair a noção e procedimentos para o desenvolvimento dos objetivos especificados. Ao desenvolver esta tarefa com uso de materiais práticos, um problema surge para que possa ser superado, cabe aos alunos o desenvolvimento da atividade e do professor realizar o acompanhamento sempre questionando e proporcionando situações de aprendizagem.

Para a segunda tarefa, a proposta é trabalhar com um problema que trata das operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

A escolha da terceira tarefa com o foco na leitura, vai ao encontro do o Currículo Oficial do Estado de São Paulo que visa a construção da competência leitora nas diferentes áreas de conhecimento, não somente na área de linguagens e códigos.

Em uma cultura letrada como a nossa, a competência de ler e de escrever é parte integrante da vida das pessoas e está intimamente associada ao exercício da cidadania. As práticas de leitura e escrita, segundo as pesquisas que vem sendo realizadas na área, tem impacto sobre o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Essas práticas possibilitam o desenvolvimento da consciência do mundo vivido (ler e registrar o mundo pela palavra, afirma Paulo Freire), propiciando aos sujeitos sociais a autonomia na aprendizagem e a contínua transformação, inclusive das relações pessoais e sociais. (SÃO PAULO, 2010, p. 15).

Visando o desenvolvimento desta competência a terceira tarefa, traz um conto que contempla um problema, *Os 35 camelos*, texto escrito por Malba Than, em seu livro *O Homem que Calculava*. Com este problema o aluno é levado a pensar, refletir e explicar porque sobrou um camelo dentre os trinta e cinco que havia inicialmente, visualizando na matemática um caminho para solucionar este ou outros problemas do cotidiano.

Para a quarta tarefa foi selecionada uma situação problema, que permitirá ao aluno construir, desenvolver e aprimorar seu conhecimento sobre as frações e desenvolver habilidade em realizar as operações de adição e subtração de frações.

Ao trabalhar com Resolução de Problemas, o professor não deve esquecer-se de incentivar os alunos a uma leitura atenta, se necessário realizar a leitura do problema e instigar a interpretação até que o aluno compreenda o problema, verificando os elementos importantes para que possa estabelecer um plano para a resolução e execução do plano, sempre verificando se os seus passos para a resolução estão coerentes e, ao término da resolução, verificar se o problema está resolvido, se o conteúdo matemático foi bem aplicado e compreendido ou se falta algo para ser solucionado e respondido.

A quinta tarefa retoma os problemas apresentados nas Tarefas II e IV, trabalhando as frações como operadores. As situações problemas sofrerão pequenas alterações para que os alunos possam resolver e construir outros conhecimentos. Nesta Tarefa V as situações problemas apresentadas, já são parcialmente conhecidas pelos alunos.

As Tarefas VI e VII apresentam situações problemas que visam levar o aluno a compreender os processos das operações de multiplicação e divisão de frações.

A construção destas duas últimas tarefas é apresentada de maneira sintetizada, com apenas algumas orientações e intervenções que o professor pode realizar durante o desenvolvimento das tarefas, contendo algumas prováveis dificuldades que possam surgir ao decorrer das tarefas. O professor, ao utilizar esta proposta, não deve ficar preso a ela, nem a utilizá-la como uma receita, mas sim como uma alternativa didática que possa suscitar outros questionamentos de outras complexidades.

4 UMA PROPOSTA DE TRAJETÓRIA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem a seguir foi elaborada para alunos do 7º ano/ 6ª série do Ensino Fundamental, partindo do pressuposto que os alunos tenham desenvolvido conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento desta tarefa, sobre fração: conceito, equivalência, frações próprias e impróprias, mínimo múltiplo comum (m.m.c.).

Visando o desenvolvimento desta THA, é sugerido que sejam elaboradas algumas normas para a sua realização, um contrato pedagógico deve ser estabelecido entre professor e alunos, buscando planejar as ações para o bom andamento das aulas.

O professor deve conversar com os alunos explicando como será o desenvolvimento das tarefas, determinar o que será permitido ou não. As tarefas serão desenvolvidas em grupos, em duplas ou individualmente; quando abordadas em grupos, que serão pré-determinados pelo professor, visando a melhor organização, para permitir que todos os alunos participem.

Um contrato pedagógico deve conter um tratado entre professor e alunos, no qual deverão estabelecer as regras do que os alunos e professor devem ou não fazer em sala de aula, também conter as consequências caso as normas não sejam cumpridas. Essas normas podem ser definidas pelos alunos e professor no início de cada ano letivo e retomadas sempre que necessário.

Para a realização dessa THA, esse tratado deve ser retomado enfatizando algumas destas normas, para o aluno e para o professor.

O professor deverá:

- organizar a sala para que todos prestem atenção nas orientações;
- organizar momentos para cada aluno falar, respeitando o colega ou o professor quando este tiver falando;
- separar a sala em grupos ou duplas, quando as tarefas permitirem;

- orientar os alunos sobre o respeito com os colegas e que eles não devem fazer “gracinhas” ou rir quando algum colega estiver perguntando ou expondo o seu ponto de vista;
- orientar os alunos sobre as tarefas a serem cumpridas;
- esclarecer as dúvidas dos alunos sobre a organização das tarefas;
- permitir que os alunos expressem as suas opiniões e sugestões;
- cabe ao professor andar pela sala de aula auxiliando os alunos, sempre perguntando se precisam de ajuda. Essa caminhada permite ao professor acompanhar o desenvolvimento das atividades e verificar as principais dificuldades dos alunos, podendo agir pontualmente;
- orientar os alunos para que durante a socialização prestem atenção nas resoluções, não faça correções nem acréscimos, prestando atenção às diferentes resoluções encontradas;

Para o aluno, podem ser definidas as seguintes normas:

- sempre tentar realizar as tarefas, mesmo que tenha dificuldade; somente com os erros é possível tomar decisões e reformular a THA;
- sempre que sentirem a necessidade de perguntar, devem fazê-lo;
- conversar com os componentes do grupo e não falar alto para não atrapalhar os outros grupos;
- permanecer em seu lugar, não atrapalhando os colegas;
- esperar a vez para falar;
- ao recortar papel ou outro material não deixar cair no chão e, se isto acontecer, recolher o papel, separar e depois algum aluno (com revezamento e pré-determinado) poderá passar com o lixo para que os resíduos sejam descartados;
- organizar a sala quando o professor solicitar, levantando as carteiras sem arrastar, evitando barulho;

- os grupos serão organizados pelo professor de acordo com as necessidades de cada tarefa;
- as tarefas serão entregues em folhas separadas;
- colar as fichas de tarefas no caderno após a resolução;
- resolver as tarefas na própria folha ou no caderno;
- ao término da socialização das resoluções pelos alunos, os alunos irão reorganizar as suas resoluções caso estejam incompletas, parcialmente corretas ou incorretas;
- alguns alunos serão escolhidos para iniciar as resoluções ou explicações, podendo ser no quadro (lousa) ou oralmente do próprio lugar.

No desenvolvimento dessa THA, cada uma das tarefas estará proposta em fichas, as orientações das tarefas para auxiliar neste desenvolvimento, será realizado a seguir, com orientações, comentários e prováveis respostas dadas pelos alunos, com sugestões de questionamentos que o professor pode realizar, para aproveitar as situações propostas.

Para compreender esta THA fica definido que o diálogo entre professor e alunos serão (A) para os alunos e (P) para o professor. Durante o desenvolvimento, também serão apresentados alguns comentários, não caracterizando perguntas e respostas, apenas comentários ou orientações.

O professor pode propor um trabalho integrado juntamente com professores de Língua Portuguesa, História, Geografia e Ciências, Trabalhando com a escrita, leitura, contexto histórico (divisão da herança), localização, enriquecendo ainda mais o trabalho desenvolvido.

4.1 TAREFA I

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Estabelecer relações entre frações equivalentes.
- Identificar classes de equivalência.
- Identificar e simplificar frações equivalentes.

MATERIAL: tiras de papel dobradura; tesoura; régua, folha quadriculada, impresso contendo as tarefas (Quadro 1).

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala em duplas;
- ✓ entregar as cinco tiras de papel dobradura, todas com as mesmas dimensões para os alunos;
- ✓ orientá-los para desenvolver as divisões utilizando a ideia de repartir o papel sempre na metade, e realizar comparações;
- ✓ questionar os alunos sobre as conclusões obtidas;
- ✓ verificar as conclusões dos alunos, e entregar mais oito tiras de papel dobradura;
- ✓ orientá-los para desenvolver as repartições das tiras buscando outros denominadores (divisores), realizar comparações, sempre questionando os alunos sobre as suas conclusões;
- ✓ verificar as conclusões dos alunos, apresentar a tabela de frações apresentadas na Tarefa I (item 5 - Quadro 01) entregue aos alunos impressa, para que eles encontrem um outro método para localizar frações equivalentes.

Quadro 1 – Folha de trabalho da TAREFA I entregue impressa aos alunos.

- 1) Marque a fração que corresponde à posição em cada parte do papel em relação ao todo nas representações que aparecem a seguir.

--

--	--

--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 2) Depois de recortar o papel em 2, 4, 8, e 16 partes e realizar as comparações entre as partes dos papeis, responder quais frações representam o mesmo valor? Preencher o quadro e em cada linha colocar todas as frações equivalentes.

Quadro de frações equivalentes com denominadores 2, 4, 8 e 16

- 3) Marque a fração que corresponde à posição em cada parte do papel em relação ao todo nas representações que aparece abaixo.

--

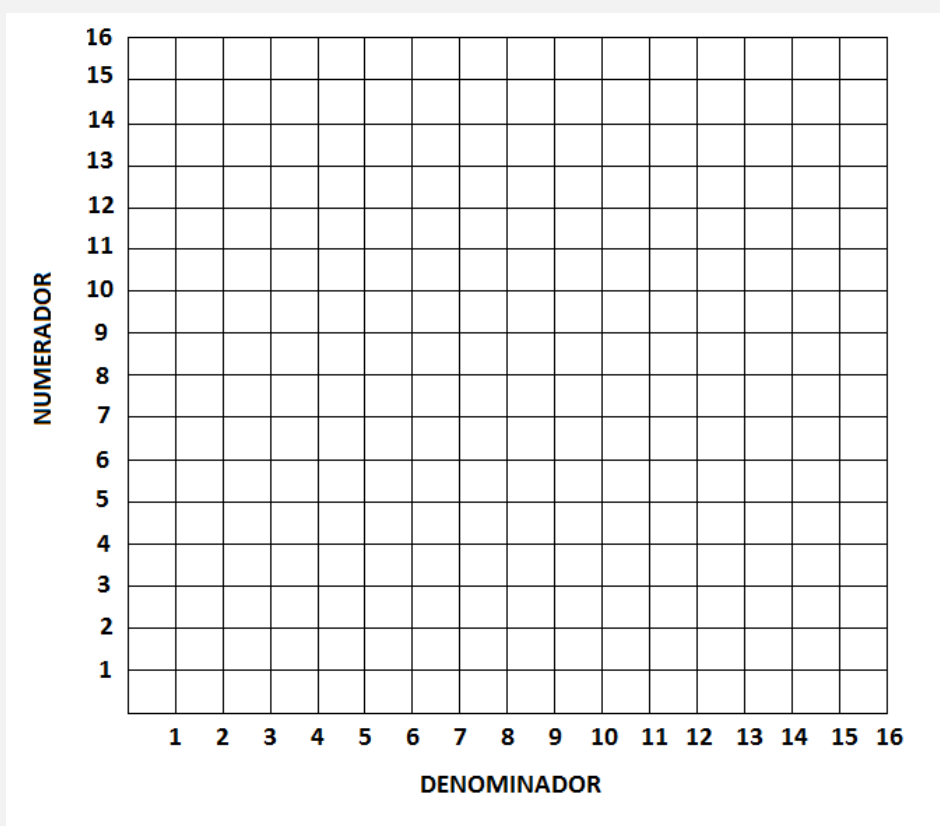
--	--

--	--	--

4) Depois de recortar o papel em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 e 16 partes e realizar as comparações entre as partes dos papeis, responder quais frações representam o mesmo valor? Preencher o quadro e em cada linha colocar todas as frações equivalentes.

Quadro de frações equivalentes com denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 e 16

- 5) Com a folha quadriculada de numeradores e denominadores, registre as frações equivalentes a $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ e $\frac{2}{8}$ que você encontrou na tarefa anterior. Cada conjunto de números equivalentes com uma cor.



Fonte: da autora.

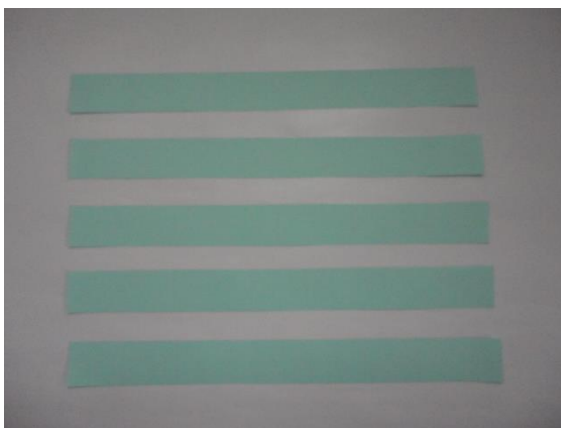
Ao desenvolver esta tarefa espera-se que o aluno relembre a ideia de fração, verifique e compare as frações quanto ao denominador (maior menor ou igual) concluindo que alguns valores representam as mesmas quantidades. O professor deve questionar os alunos constantemente quanto aos resultados obtidos por eles.

Esta tarefa será realizada em duplas, o professor deverá separar as duplas buscando parcerias produtivas, que consigam realizar juntos as tarefas propostas e possam colaborar para a solução do problema.

Antes de começar a tarefa, o professor deverá questionar os alunos se eles lembram o que é uma fração, como representar, para que elas servem, onde utilizamos no nosso cotidiano, motivando os alunos para o desenvolvimento das tarefas, acrescentado se preciso a fala dos alunos.

Entregar as primeiras cinco tiras de papel (Figura 6) aos alunos que já estão sentados em duplas e orientá-los para seguir os roteiros⁶ em cada fase da tarefa. Algumas roteiros serão entregues para que os alunos possam preencher com as suas conclusões.

Figura 6 – Tiras de papel entregues aos alunos.



Fonte: da autora.

Começando os roteiros⁷:

a) Pegue a primeira tira: divida na metade (Figura 7).

⁶ Roteiros: orientações impressas entregues aos alunos como forma de guiar a tarefa.

⁷ Os roteiros estão destacados em negrito.

Deixar um tempo para a execução da comanda, quando perceber que os alunos terminaram, partir para a próxima comanda.

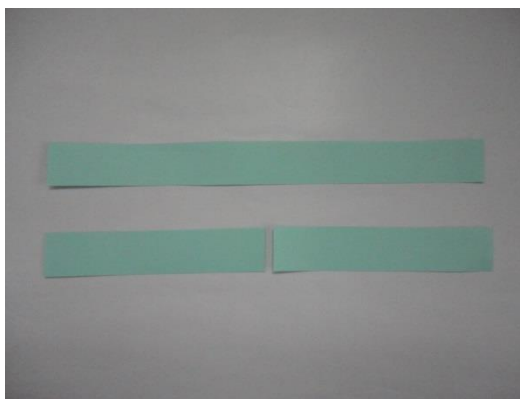
b) Quantas partes vocês encontraram?

A: 2 partes (Figura 7).

P: Como representar cada parte em forma de fração?

A: Cada parte eu posso representar como $\frac{1}{2}$.

Figura 7 – Interpretando frações como parte todo – metade.



Fonte: da autora.

P: Todos conseguiram entender?

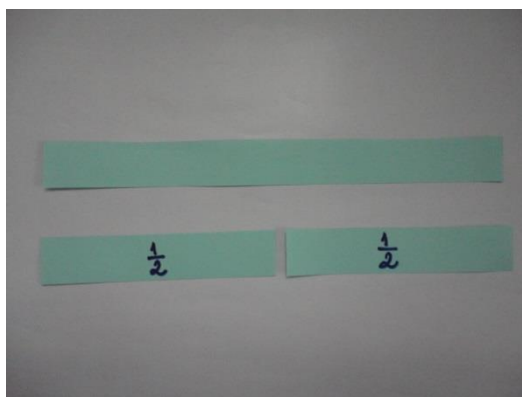
A: Porque $\frac{1}{2}$?

P: Alguém poderia ajudar a responder esta pergunta?

A: Se eu dividir uma “coisa” em duas partes e pegar uma, será uma parte de duas partes, então eu represento como a fração $\frac{1}{2}$ (Figura 8).

P: Isto mesmo $\frac{1 \text{ (numerador)}}{2 \text{ (denominador)}}$.

Figura 8 – Interpretando e representando frações como parte todo – metade.



Fonte: da autora.

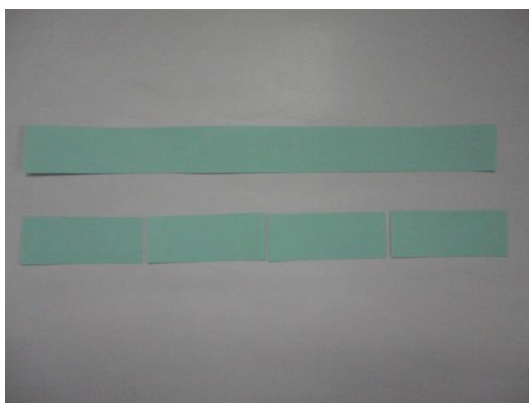
- c) a segunda tira: divida na metade e na sequência divida cada parte na metade novamente.**

Deixar um tempo para a execução da comanda, quando perceber que os alunos terminaram, partir para a próxima comanda.

- d) Quantas partes você encontrou?**

A: 4 partes.

Figura 9 – Interpretando frações como parte todo – um quarto.



Fonte: da autora.

P: Estas partes são iguais?

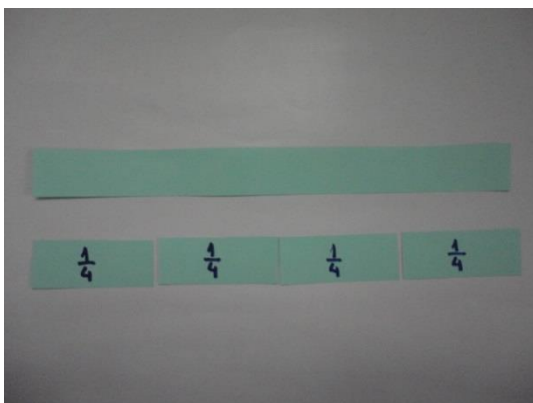
A: As partes são iguais, eu dividi na metade e depois reparti na metade novamente.

P: Como representar estas quantidades em frações?

A: Foram repartidos em quatro partes, que será o meu denominador. E cada parte apenas uma será o numerador.

A: Cada parte pode ser representada como $\frac{1}{4}$ (Figura 10).

Figura 10 – Representando frações como parte todo – um quarto.



Fonte: da autora.

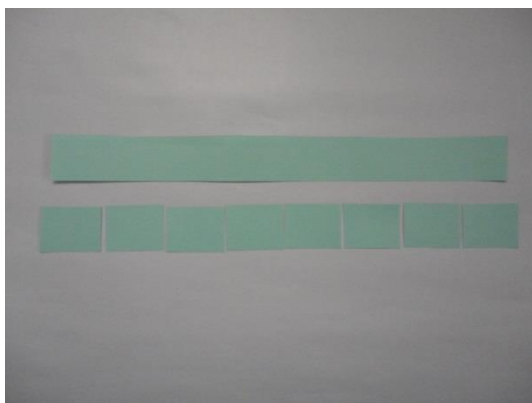
e) a terceira tira: repetir o processo anterior de dividir ao meio por três vezes.

Deixar um tempo para a execução da comanda, quando perceber que os alunos terminaram e partir para a próxima comanda.

f) Quantas partes você encontrou?

A: Encontrei 8 partes.

Figura 11 – Interpretando frações como parte todo – um oitavo.



Fonte: da autora.

P: Estas partes são iguais?

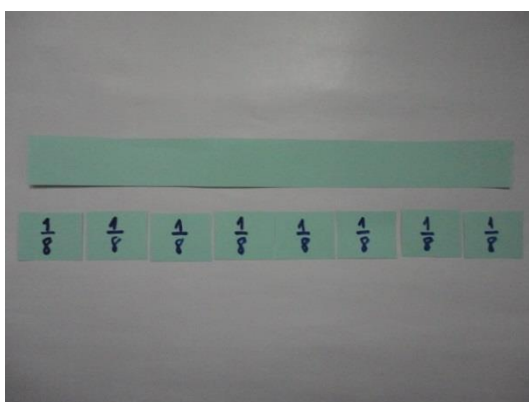
A: São iguais, eu usei a mesma ideia anterior, para dividir o papel em partes iguais

P: Como representar com uma fração estas partes?

A: Foram repartidos em oito partes iguais, que será o meu denominador. E cada parte apenas uma será o numerador.

A: Cada parte representa $\frac{1}{8}$.

Figura 12 – Representando frações como parte todo – um oitavo.

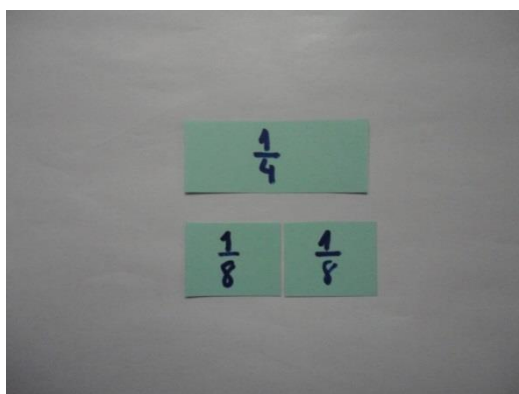


Fonte: da autora.

P: Posso dizer que $\frac{1}{8}$ é maior ou menor que $\frac{1}{4}$?

A: Pelo tamanho de cada pedaço $\frac{1}{8}$ é menor que $\frac{1}{4}$, só que parece que $\frac{1}{8}$ é maior $\frac{1}{4}$, quando eu olho para a fração.

Figura 13 – Comparando as frações um quarto e um oitavo.



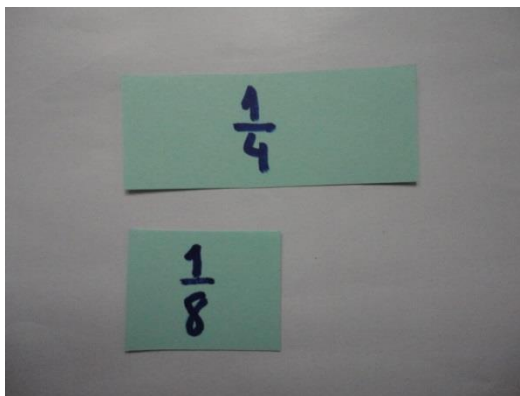
Fonte: da autora.

A: Quando eu divido 1 em 8 partes, cada parte fica menor que a divisão de 1 em 4 partes.

P: Se eu comparar $\frac{1}{8}$ com $\frac{1}{4}$, quantas partes do papel de que foi dividido em oito partes cabem em um pedaço de quatro partes?

A: Cabem 2 partes, posso então dizer que $\frac{1}{8}$ é metade de $\frac{1}{4}$?

Figura 14 – Comparando as frações um quarto e um oitavo.



Fonte: da autora.

P: Vocês concordam com ele?

A: Como eu dividi o papel que representa $\frac{1}{4}$ ao meio, então $\frac{1}{8}$ é metade de $\frac{1}{4}$.

A: Comparando com os pedaços de papel, sim ele está certo.

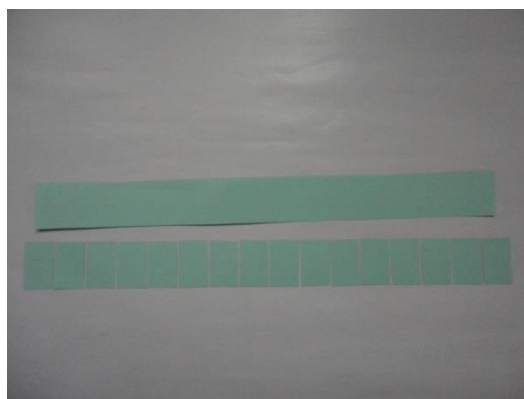
g) A quarta tira: repetir o processo anterior de dividir ao meio por quatro vezes.

Deixar um tempo para a execução da comanda, quando perceber que os alunos terminaram, partir para a próxima comanda.

h) Quantas partes você encontrou?

A: Agora a tira de papel ficou repartida em 16 partes, todas as partes tem o mesmo tamanho.

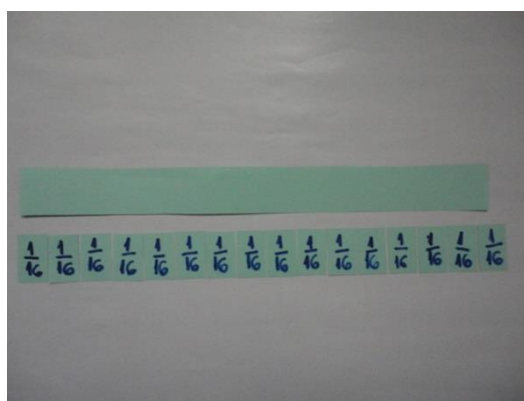
Figura 15 – Interpretando frações como parte/todo – um dezesseis avós.



Fonte: da autora.

P: Qual fração representa cada parte que você encontrou?

Figura 16 – Representando frações como parte todo – um oitavo.

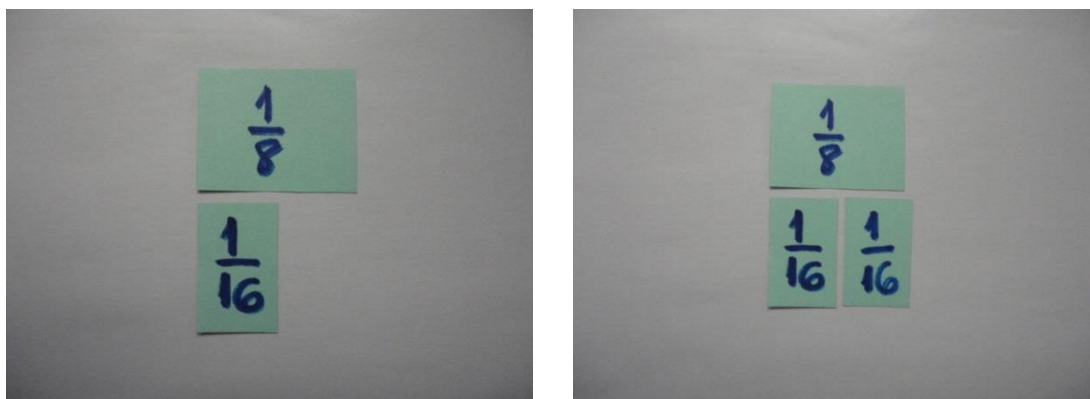


Fonte: da autora.

A: Cada parte representa $\frac{1}{16}$, (Figura 16) e pensando bem $\frac{1}{16}$ é metade de $\frac{1}{8}$ (Figura 17), e o tamanho do papel de $\frac{1}{8}$ é maior que o papel de $\frac{1}{16}$.

A: Isto acontece porque dividimos $\frac{1}{8}$ ao meio para obter $\frac{1}{16}$.

Figura 17 – Comparando as frações um oitavo e um dezesseis avós.



Fonte: da autora.

- i) Organizar as tiras começando pela tira que não foi dividida até a tira com maior quantidade de divisões.

Os alunos podem encontrar dificuldade na organização, o professor deve ficar atento e se preciso auxiliar os alunos nesta organização. Uma organização semelhante pode ser apresentada na lousa, após os alunos tentarem realizar esta organização em suas carteiras.

Figura 18 – Comparando as frações.



Fonte: da autora.

- j) Agora vamos marcar em uma folha que vou entregar a fração correspondente a posição em cada parte do papel em relação ao todo.

Neste ponto o professor pode começar a resolução na lousa perguntando como isto pode ser feito, antes de entregar o impresso e os alunos começarem a resolver.

P: Como posso representar esta situação?

A: Cada parte eu coloco a fração que corresponde ao tamanho do papel.

P: Como escrever?

A: Assim:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
---------------	---------------

P: Desta maneira você está representando quanto vale cada parte e esta representação está correta, pois a primeira parte vale meio e a segunda parte também vale meio. Assim você está pensando na posição de cada parte do papel em relação ao todo, mas cada parte representa uma posição, certo? Então como representar esta posição?

A: Não sei ainda como fazer.

A: Sei que a primeira parte é $\frac{1}{2}$ e a segunda não sei.

P: São quantas partes?

A: São duas partes de duas partes.

A: Posso representar como $\frac{2}{2}$.

A: Então vai ficar assim:

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$
---------------	---------------

P: Vocês entenderam qual a fração correspondente a cada posição e como fazer?

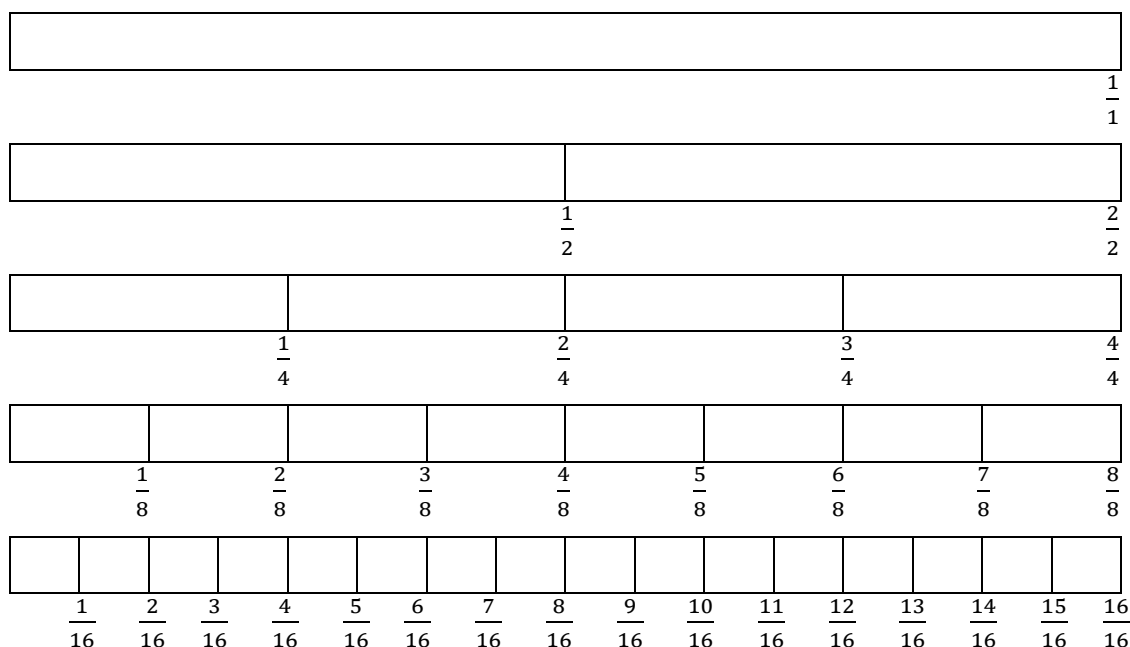
A: Vamos fazer e se tivermos dúvida perguntaremos.

Após a discussão anterior, entregar o impresso contendo os desenhos representando os recortes feitos pelos alunos nas tiras de papel para que eles possam preencher. Ficar atento, passar pelas carteiras e verificar se os alunos estão preenchendo corretamente. Se necessário parar e orientar novamente.

1) Marque a fração que corresponde à posição em cada parte do papel em relação ao todo nas representações que aparecem abaixo.

P: Quem poderia vir aqui para representar as respostas na lousa?

A: Eu vou à lousa e vai ficar assim.



Neste momento o aluno deve ser capaz de visualizar e localizar as frações que representam os mesmos valores, quais são as frações equivalentes. O professor pode utilizar a palavra equivalente para definir frações que representam a mesma quantidade da fração e possuem o mesmo valor posicional.

P: Quais frações representam a mesma posição?

A: Ao olhar para os pedaços de papel posso dizer que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$?

P: Somente estas frações podem representar frações equivalentes?

A: Não, também temos $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$.

P: Como você consegue fazer esta comparação?

A: Olhando para os valores que estão na mesma direção⁸ (Figura 19).

P: Somente estes estão nesta mesma direção e representam $\frac{1}{4}$?

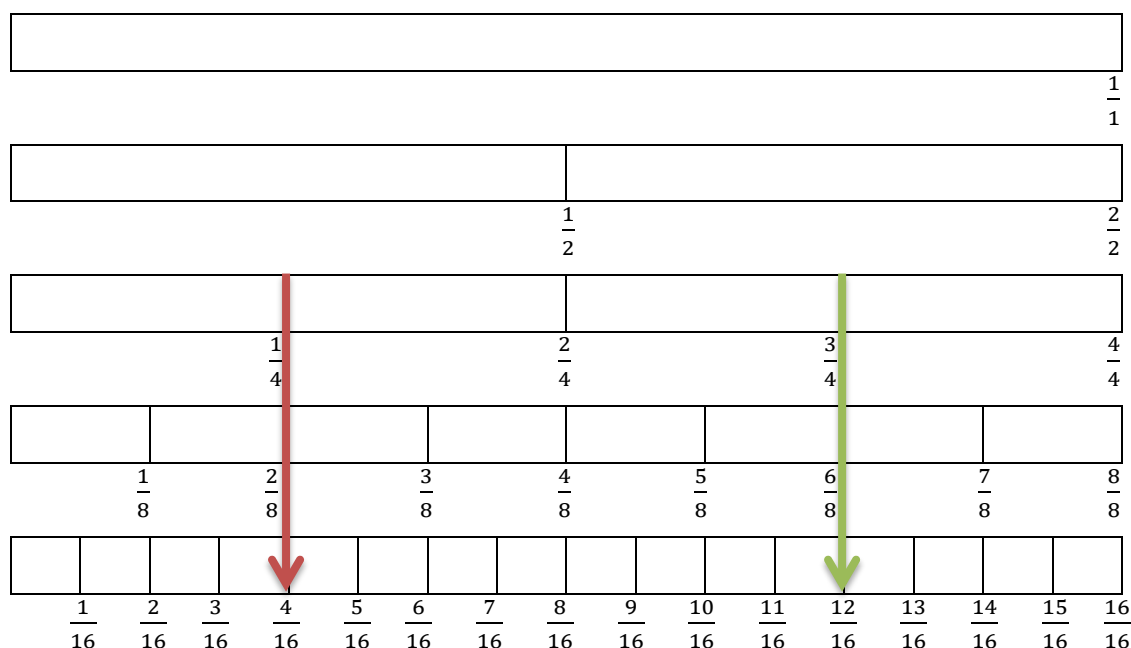
⁸ A direção citada se encontra representada na Figura 19 por uma seta.

A: Na mesma direção sim, tem outros valores que estão representando esta mesma quantidade que é o $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$.

P: Eles estão na mesma direção de $\frac{1}{4}$? Então eles são equivalentes?

A: Se olhar do fim para o começo, estão na mesma direção e são equivalentes.

Figura 19 – Comparação de frações equivalentes.



Fonte: da autora.

P: O que quer dizer a palavra equivalente?

A: Que equivale.

P: O que quer dizer que equivale?

A: Que tem o mesmo valor.

P: Então a fração $\frac{1}{4}$ é equivalente a $\frac{3}{4}$?

A: Não, pois $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{3}{4}$, então para ser equivalente tem que estar na mesma direção.

P: Como faço para obter todas as frações equivalentes, nestes recortes?

A: Olhando as frações que estão na mesma posição.

P: Na tabela (apresentada a seguir) preencher com todas as frações equivalentes que você obteve.

Entregar a tabela para que os alunos possam preencher, dando um tempo de 5 minutos para esta parte da tarefa.

- 6) Depois de recortar o papel em 2, 4, 8, e 16 partes e realizar as comparações entre as partes dos papéis, responder quais frações representam o mesmo valor? Preencher o quadro e em cada linha colocar todas as frações equivalentes.**

Os alunos podem chegar à resolução apresentada a seguir ou em variações da mesma resposta, alterando as ordens das respostas ou preenchimento da tabela. Conferir as respostas dos alunos na lousa verificando se completaram todas as frações equivalentes. Estas são ditas classes de equivalência, nas quais os valores são os mesmos.

Quadro 2 – Frações equivalentes com denominadores 2, 4, 8 e 16.

Quadro de frações equivalentes com denominadores 2, 4, 8 e 16	
$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{16}{16}$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$
$\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$	$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$
$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$	$\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$

Fonte: da autora.

Após a conclusão dessa parte da tarefa, entregar as oito tiras de papel para os alunos, ainda sentados em duplas e orientá-los para seguir as comandas em cada fase da tarefa. Peça aos alunos que façam o que se pede em cada fase.

Começando o roteiro para esta parte da tarefa:

- a) Agora com as oito tiras vamos usar um procedimento semelhante, dividir cada tira em 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12 e 14 partes iguais.**

Estas quantidades podem ser escritas na lousa. Os alunos podem usar, régua para medir e realizar as marcações, em seguida os cortes, assim como a operação de divisão, após medir com a régua, dividindo em 3, 5, ... partes ou realizando as marcações no papel com dobraduras por estimativas. É preciso ficar atento para que as repartições do papel sejam realizadas em partes iguais, caso contrário, as comparações podem não ser verdadeiras.

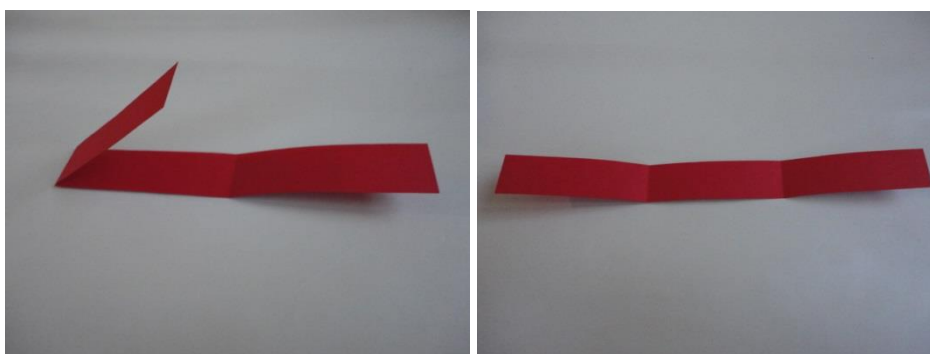
b) Como podemos realizar estas repartições?

A: Dobrando o papel nas quantidades pedidas.

P: Como podemos fazer isto?

A: Para dividir em três partes posso dobrar as duas partes para o meio.

Figura 20 – Construindo a fração – um terço.



Fonte: da autora.

P: Você garante que as partes são iguais?

A: Pode ser que uma parte fique um pouco maior e a outra um pouco menor.

P: Como resolver este problema?

A: Posso medir com a régua, fazer a divisão nas partes que tenho que dividir, medir novamente, marcando nas quantidades obtidas na divisão e marcar com a régua.

P: Será que teríamos partes iguais?

A: Só tenho que tomar cuidado para não medir errado.

P: Agora façam com muita atenção estas repartições.

Dar um tempo de aproximadamente 20 minutos para os alunos realizarem essa parte da tarefa, não esquecendo de percorrer entre as carteiras, orientar e esclarecer todas as dúvidas que surgirem. Quando os alunos terminarem partir para o próximo roteiro.

- c) Marcar as frações correspondentes em cada parte do papel. Organizar novamente as tiras começando da tira que não foi dividida até a tira com as 16 partes iguais.

Aqui novamente o aluno deve estabelecer relação entre as frações visualizando as frações equivalentes, realizando uma comparação.

Figura 21 – Comparando as frações encontradas.

$\frac{1}{1}$															
$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{2}$							
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$	
$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{14}$	
$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$	

Fonte: da autora.

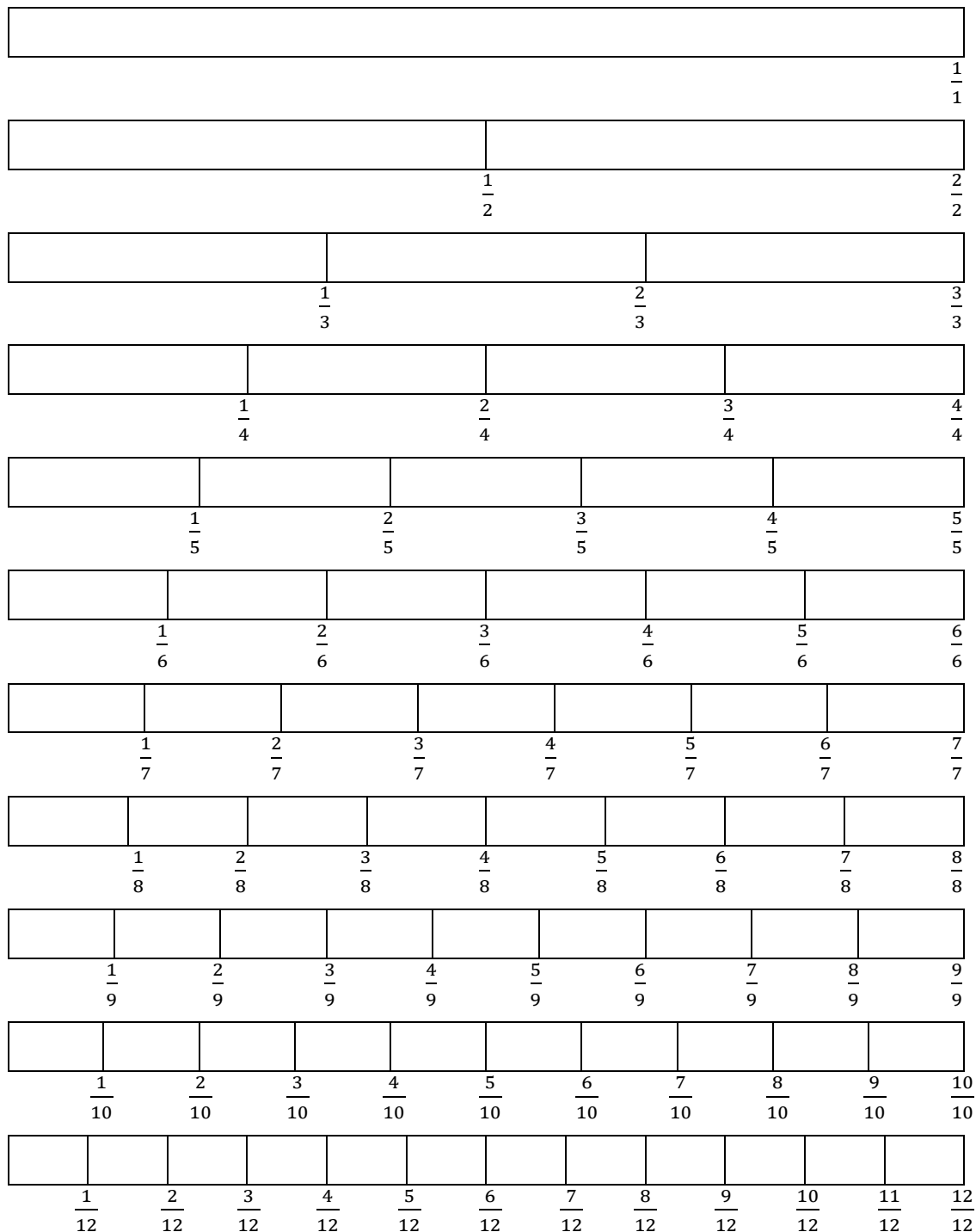
- d) Agora vamos marcar em uma folha, semelhante ao que foi realizado com os outros recortes e frações, a fração correspondente a posição em cada parte do papel em relação ao todo.

Se sentir necessidade, retomar e fazer novamente um exemplo. Entregar o impresso contendo os desenhos representando os recortes feitos pelos alunos nas tiras de papel para que eles possam preencher. Ficar atento, passar

pelas carteiras e verificar se os alunos estão preenchendo corretamente. Se necessário, parar e orientar novamente.

7) Marque a fração que corresponde a posição em cada parte do papel em relação ao todo nas representações que aparece abaixo.

P: Por favor venha até a lousa para preencher com sua resolução.



$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{14}{14}$		

$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$

Entregar a planilha (Quadro 3) para os alunos para que possam identificar as frações equivalentes. Para a próxima parte da tarefa, dar um tempo de aproximadamente dez minutos. Como uma tarefa semelhante já foi realizada anteriormente, supõe-se que os alunos serão capazes de resolver sem muitas dificuldades. Caso surja alguma, cabe ao professor ficar atento, orientar e esclarecer qualquer dúvida que venha surgir.

- 8) Depois de recortar o papel em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 e 16 partes e realizar as comparações entre as partes dos papéis, responda quais frações representam o mesmo valor? Preencha o quadro (Quadro 3) e em cada linha coloque todas as frações equivalentes.**

Em uma possível resolução apresentada pelos alunos (Quadro 3), eles podem chegar à resolução apresentada a seguir ou em variações da mesma resposta, alterando as ordens das respostas ou preenchimento do quadro. Neste momento o professor deve observar as respostas dos alunos na lousa verificando se completaram todas as frações equivalentes.

O aluno deve ser capaz de visualizar e localizar as frações equivalentes, observando que nenhuma destas frações da segunda parte da tarefa é equivalente às frações da tarefa anterior (metade). Aqui o professor pode reforçar a palavra equivalente para definir frações que representam o mesmo valor posicional. Ao término do tempo dado de dez minutos, abrir para a socialização dos alunos quanto à tarefa desenvolvida.

Quadro 3 – Frações equivalentes com denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 e 16.

Quadro de frações equivalentes com denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14 e 16			
$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10} = \frac{12}{12} = \frac{14}{14} = \frac{16}{16}$			
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16}$			
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$		$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$	
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$		$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$	
$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$	$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$
$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$	$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$	$\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$	$\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$
$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$	$\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$	$\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$	$\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$
$\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$	$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$	$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$	$\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$

Fonte: da autora.

Fração equivalente: fração obtida ao se multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{ad}{bd} = \frac{acd}{bcd} = \dots$$

Exemplo:

$$\frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{12}{36} = \dots$$

P: Quais frações representam o mesmo valor? Houve alguma dificuldade em localizar as frações equivalentes agora?

A: Foi mais difícil, tinha muito pedaço de papel.

P: Então, esta forma de localizar frações equivalentes não é muito boa?

A: No começo parecia ser muito boa, conseguimos localizar fácil, mas agora quando começou a ter muitos denominadores, não achei muito bom.

P: Como você localizou as frações equivalentes?

A: Primeiro eu olhei as que estavam na mesma reta, e deu certo.

P: E depois, como você fez?

A: Eu fui comparando os pedaços de papel com o mesmo tamanho.

P: Será que tem outra forma de obter frações equivalentes?

A: Acho que sim, eu percebi que, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, olha só é o dobro, dois é o dobro de um e quatro é o dobro de dois, $\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$, também é o dobro.

P: Para encontrar frações equivalentes é só fazer o dobro do numerador e o dobro do denominador?

A: Acho que sim.

P: Vocês obtiveram como frações equivalentes $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, e três não é o dobro de um nem o dobro de dois, assim como seis não é o dobro de dois nem o dobro de quatro, como explicar?

A: Não vai dar, quanto será que é?

A: Neste caso eu acho que é o triplo.

A: Se multiplicar um por três vai dar três e multiplicar dois também por três vai dar seis.

P: Então como eu posso resolver este problema?

A: Se eu multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número eu encontro frações equivalentes?

A: Acho que sim, porque multipliquei por dois e por três.

P: Basta multiplicar o numerador e denominador pelo mesmo número, diferente de zero, que você encontra frações equivalentes. Mas, será que só posso usar a multiplicação ou posso usar outra operação?

A: A adição será que dá certo.

A: A adição não dá certo, porque se eu somar um no numerador e um no denominador de $\frac{1}{2}$ eu vou ter $\frac{2}{3}$, e eu já vi na minha tabela que meio não é equivalente a dois terços.

P: Qual a outra operação que podemos usar?

A: Já que não posso usar a adição também não posso usar a subtração, então se eu usar a divisão será que dá certo?

A: Como a divisão?

P: Como você pode verificar isto?

A: Vou pegar as frações que eu sei que são equivalentes como $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ se eu multiplicar três por três vai dar nove e multiplicar quatro por três vai dar doze, então se eu dividir doze por três e nove por três, vai dar certo.

A: Vale sempre?

A: Vamos testar outro valor.

A: Será que dá certo com $\frac{6}{16}$. Vamos testar:

$$\frac{6 \div 2}{16 \div 2} = \frac{3}{8}$$

A: É verdade, deu certo também.

P: Muito bem, então quais operações podemos usar para obter frações equivalentes?

A: Posso usar a multiplicação e a divisão, eu multiplico ou divido o numerador e o denominador sempre pelo mesmo número.

P: Qual é a relação existente entre as operações de multiplicação e de divisão?

A: Uma é o contrário da outra.

P: Chamamos estas operações de operações inversas.

A: São contrárias, o contrário da multiplicação é a divisão e o contrário da divisão é a multiplicação.

Operação Inversa:

Toda divisão pode ser escrita como uma multiplicação

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} \quad (\text{com } b \neq 0)$$

A multiplicação e a divisão são operações inversas.

Exemplo:

$$15 \div 3 = 15 \div \frac{1}{3}$$

P: Este tipo de operação sempre dará certo? Teria outros exemplos?

A: Tem este daqui $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.

P: Qual seria outra fração equivalente a estas que não está representado nestes recortes que fizemos?

A: Pensando na divisão ou multiplicação, a fração equivalente pode ser $\frac{15}{18}$.

A: Por que encontrou $\frac{15}{18}$?

A: Multipliquei o numerador 5 por 3 que resultou em 15 e o denominador 6 eu também multipliquei por 3 e deu 18.

P: Só existe uma fração equivalente a uma fração dada?

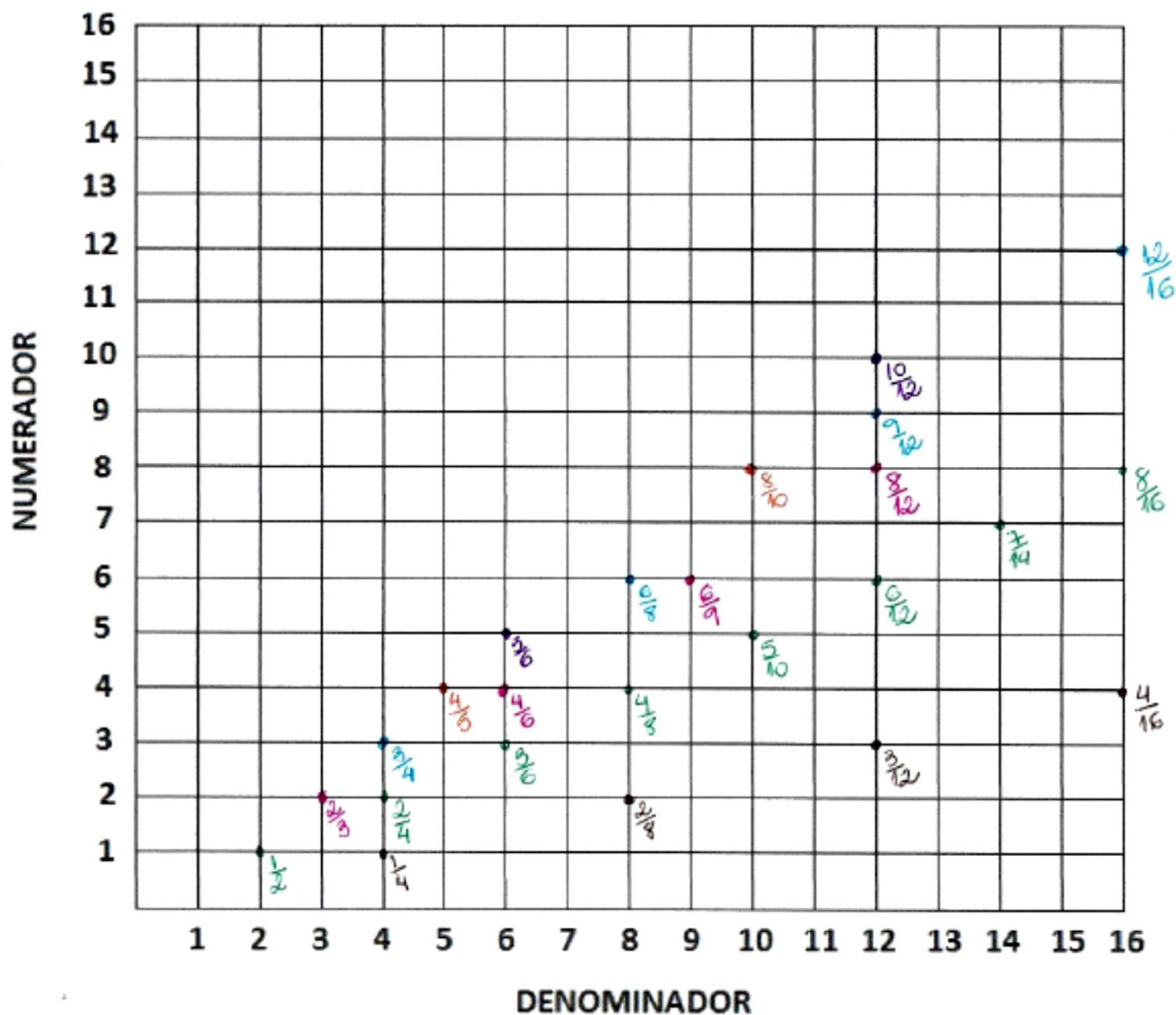
A: Não, porque eu posso multiplicar ou dividir o numerador por qualquer número?

Concluída a tarefa anterior e sanadas todas as dúvidas dos alunos, tendo desenvolvido o conceito de frações equivalentes, o professor irá propor a próxima parte da tarefa que permitirá que o aluno explore de uma outra maneira as frações equivalentes.

A próxima parte da tarefa consiste em uma tabela com números na horizontal para os numeradores e números na vertical para os denominadores, o encontro destes valores, resulta no registro de uma fração. Nesta parte o professor deve explicar para os alunos como preencher a tabela, deixando que completem a tabela como proposto. O professor deve agir como um orientador, solicitando que os alunos prestem bastante atenção em suas ações para evitar equívocos ou erros por distração, argumentando e observando o que está acontecendo.

5) Com a folha quadriculada de numeradores e denominadores, registre as frações equivalentes a $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ e $\frac{2}{8}$ que você encontrou na tarefa anterior. Cada conjunto de números equivalentes com uma cor.

Figura 22 – Folha quadriculada de numeradores e denominadores.



Fonte: da autora.

Espera-se que o aluno observe que cada classe de equivalência está em uma reta partindo da origem (0), caso o aluno não visualize, cabe ao professor questionar para que esta conclusão seja realizada.

P: Quais observações podemos fazer?

A: Registre todas as frações nesta tabela. Cada uma ficou em seu lugar, as frações não ficaram no mesmo lugar, uma em cima da outra.

P: O que mais podemos verificar?

A: Que as frações que são equivalentes ficaram do mesmo lado.

A: Ficaram do mesmo lado?

A: É todas ficaram na parte de baixo.

P: Continue observando as frações com a mesma cor, o que há em comum?

A: Elas estão na mesma direção.

A: Como assim na mesma direção?

A: Colocando a régua, elas estão na mesma direção, como se fosse uma reta.

A: Ainda não entendi.

A: Só fazer uma reta unindo as representações da frações (Figura 23) que são os pontos.

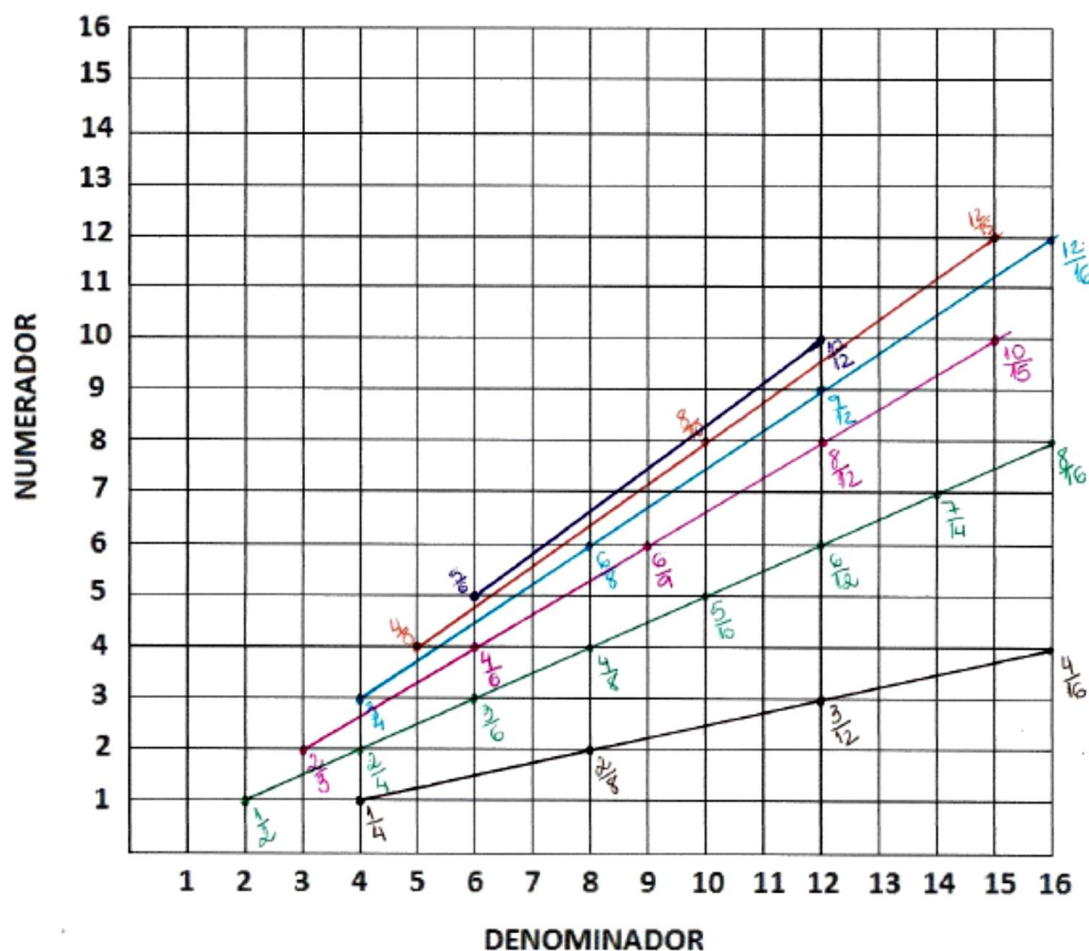
P: Quando encontramos frações, o que podemos fazer para verificar se elas são equivalentes?

A: Se passar uma reta, as frações que estarão sobre ela serão equivalentes.

P: Esta reta vai passar pela fração ou pelo ponto que representa a fração?

A: Quando passar pelo ponto eu verifico qual é a fração que representa este ponto (Figura 23).

Figura 23 – Folha quadriculada de numeradores e denominadores.



Fonte: da autora.

P: Você descobriu alguma outra fração equivalente que não havia marcado anteriormente?

A: Obtive a fração $\frac{10}{15}$ que é equivalente a fração $\frac{2}{3}$.

A: Por que $\frac{10}{15}$?

A: Se simplificar $\frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$.

P: Somente esta fração ou encontrou mais alguma outra fração equivalente?

A: Tem também $\frac{12}{15}$ que é equivalente à fração $\frac{4}{5}$.

Espera-se que o aluno visualize as frações equivalentes, numeradores e denominadores, números que sejam múltiplos ou divisores entre si, com elementos comuns.

4.2 TAREFA II

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender o processo para realizar as operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador.
- Resolver as operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

MATERIAL: Ficha (Quadro 4) com o problema para desenvolver a tarefa, lápis de cor.

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala para que os alunos possam realizar a resolução deste problema individualmente;
- ✓ entregar a ficha com o problema;
- ✓ orientá-los para a resolução individual, visando uma leitura atenta;
- ✓ realizar questionamentos junto aos alunos;
- ✓ autorizar e orientar o uso da calculadora comum, que nesta tarefa, pode ser utilizada para validar procedimentos e cálculos realizados;
- ✓ verificar os processos de resolução dos alunos.

Esta tarefa deverá ser realizada individualmente, propor aos alunos que façam uma leitura atenta e que tentem resolver o problema utilizando os mecanismos que acharem mais adequados. Este ainda não é o momento de explicar como realizar as operações com as frações, deixar que os alunos proponham as suas resoluções. Durante o desenvolvimento dessa THA espera-se que o aluno possa ser levado a compreender o processo de adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

Entregar o Quadro 04 que contém o problema proposto nesta tarefa, estipular o tempo de aproximadamente 15 minutos para a leitura e resolução do problema, abrir para a discussão, valorizando as diferentes resoluções obtidas pelos

alunos, levando-os a compreensão do processo de adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

Quadro 4 – Folha de trabalho da TAREFA II entregue impressa aos alunos.

Organizando uma festa:

A turma da sala de Lucas resolveu organizar uma festa para comemorar o aniversário da escola, Lucas e seus colegas começaram a pensar como fariam para organizar esta festa, sabiam que iriam precisar levar refrigerante, suco, salgados e doces, mas eles não conseguiam entrar em um acordo. Ficou decidido que João e Lucas iriam determinar a quantidade de cada item para ser levado pelos colegas de sala. Lucas conversando com seu colega João sugeriu:

Se $\frac{1}{9}$ dos alunos ficar responsável pelo refrigerante, $\frac{2}{9}$ pelo suco e $\frac{4}{9}$ pelo salgado, será que seria o suficiente?

João no mesmo instante questionou:

Qual fração dos alunos ficaria responsável pelos doces?

Antes de Lucas responder, como você ajudaria João e Lucas na resolução desta situação problema?

Fonte: da autora.

P: Quem poderia ajudar Lucas e João nesta tarefa?

A: Eu fiz um desenho para ver a fração que ficaria para cada item e pintei cada um de uma cor.

P: Você poderia mostrar a sua solução?

A: Desenhei um retângulo e dividi em nove partes. Em seguida pintei uma parte de azul para representar o refrigerante, duas partes eu pintei de verde para representar o suco e quatro partes eu pintei de amarelo para representar o salgado (Figura 24).

Figura 24 – Representando as frações.



Fonte: da autora.

P: Quantas partes você pintou ao todo?

A: Ao todo eu pinte sete partes, uma parte de azul, duas partes de verde e quatro partes de amarelo.

P: Como você poderia representar esta quantidade em fração?

A: Para representar esta fração eu posso escrever $\frac{7}{9}$.

A: Por que $\frac{7}{9}$?

A: Ao todo eu pinte uma parte de azul, duas partes de verde e quatro partes de amarelo, que ao somar resulta em sete partes de nove.

A: Então sete partes de nove partes posso escrever assim $\frac{7}{9}$.

P: Como encontrar este resultado com operações matemáticas? Isto é possível?

A: É possível, para chegar no número sete eu adicionei $1 + 2 + 4 = 7$.

P: Neste caso você somou apenas os numeradores da fração, como você faria a soma destas frações, usando também o denominador?

A: Vou somar todas as frações $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{27}$.

P: Explique o que você fez.

A: Somei os numeradores, $1 + 2 + 4 = 7$.

A: Por que deu 27?

A: Porque eu somei os denominadores $9 + 9 + 9 = 27$.

P: O que aconteceu com o denominador ao realizar esta soma?

A: O denominador ficou igual a vinte e sete.

A: Mas o resultado que você encontrou ao realizar a adição é 27 e o resultado da representação do desenho inicial não é 27?

A: Não, no desenho ficou representado como $\frac{7}{9}$.

P: O que aconteceu com o denominador, porque não está igual nas duas situações?

A: Se são as mesmas frações o resultado teria que ser o mesmo no denominador da conta e também no resultado da representação do denominador do desenho. Acho que eu errei em algum lugar.

P: O que fazer para resolver este seu problema. Qual das duas soluções você considera correta e por quê?

A: No desenho não pode ser, eu estou verificando e eu fiz certo, eu acho que errei quando eu fiz a adição.

P: O que provavelmente aconteceu?

A: Acho que foi na adição, porque na adição eu somei os denominadores e quando eu desenhei o denominador não mudou.

A: O denominador das partes é o mesmo denominador da soma.

P: Assim para adicionar frações com o mesmo denominador o que pode ser feito?

Para **adicionar** frações com mesmo denominador, adicionam-se os numeradores e conserva-se o denominador.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Exemplo:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2 + 3}{7} = \frac{5}{7}$$

Para **subtrair** frações com mesmo denominador, subtraem-se os numeradores e conserva-se o denominador.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

Exemplo:

$$\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6 - 3}{8} = \frac{3}{8}$$

A: Para somar frações com o mesmo denominador eu vou somar os numeradores, mas os denominadores serão sempre os mesmos.

P: Mostre para seus colegas como ficou a sua operação e discuta com eles se esta solução é correta.

A: Agora, a minha resolução é esta $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$, o que vocês acharam?

A: Eu achei que a sua resolução anterior que tinha como resultado $\frac{7}{27}$ estava correta, eu tinha feito assim, mas pensando bem e comparando com o desenho (Figura 24), a resposta correta é $\frac{7}{9}$.

A: Acho que você acertou, eu também pensei que podia adicionar os denominadores.

A: Então para somar frações com mesmo denominador o que eu tenho que fazer? Ainda não sei.

A: Mantém o denominador, se for igual, e adiciona os numeradores.

A: Então adiciona os numeradores e copia o denominador.

P: Todos concordam com esta maneira de resolver a adição de frações com o mesmo denominador?

A: Agora eu concordo.

P: Agora vamos voltar ao nosso problema inicial, a pergunta do colega de Lucas, o João: “Qual fração dos alunos ficaria responsável pelos doces?”

A: Voltando ao nosso desenho (Figura 24), ficaram apenas duas partes de nove sem pintar, assim a fração dos alunos que ficarão responsáveis pelo doce serão $\frac{2}{9}$ dos alunos da sala.

A: Por que $\frac{2}{9}$?

A: Porque é a parte que sobrou sem pintar. São sete partes pintadas de nove, quer dizer que faltam duas partes destas nove.

A: Agora sim, pode continuar.

P: Ficou alguma dúvida?

A: Não, eu consegui entender.

P: Agora vamos representar esta situação com uma operação matemática. Qual seria esta operação?

A: Agora eu tenho que subtrair?

A: Por que subtrair?

A: Quando subtraio encontro o que falta.

A: Como você resolveu?

A: De todos os alunos se eu retiro os alunos que vão levar o refrigerante, o suco e o salgado, vão sobrar os alunos que vão levar o doce.

P: Bom, tente fazer como interpretou e mostre para seus colegas.

A: Como uma parte inteira representa todos os alunos da sala, de 1 eu vou retirar $\frac{1}{9}$,

que vai levar o refrigerante. Vai ficar $1 - \frac{1}{9}$, mas desta forma eu não sei resolver.

P: O que está acontecendo, quem pode ajudá-lo nesta situação?

A: Estou pensando, mas não sei o que fazer, se ele fizer 1 menos 1?

A: Se eu subtrair 1 de 1 não sobra nada e isto não é verdade.

A: Tem que sobrar 8 partes dos alunos.

A: Como você sabe?

A: Olhei no desenho (Figura 24) e contei, das nove partes tira uma.

A: Verdade, 1 (um) representa a sala inteira.

A: O seu desenho como um todo, mas a sala foi repartida em quantas partes?

A: A sala foi repartida em nove partes, então eu não posso usar o número um para representar a sala e sim $\frac{9}{9}$, nove partes de nove, quer dizer que eu tenho um inteiro, estou certo agora?

A: Como que você pensou?

A: A sala inteira representa 1(um) que é o meu desenho inteiro, certo?

A: Sim, pode continuar.

A: Só que eu dividi a sala em nove partes, então um inteiro (sala) agora pode ser representada por $\frac{9}{9}$.

A: Agora entendi.

P: Continue realizando as suas operações e explicando.

A: Da sala inteira que representa $\frac{9}{9}$, vou subtrair $\frac{1}{9}$, vai ficar $\frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

A: Por que deu 0 (zero) no denominador?

A: Acho que não pode ser zero no denominador, a subtração também deve manter o denominador?

P: O que você acha?

A: Conferindo na minha representação se de $\frac{9}{9}$ eu retirar uma parte vai sobrar oito partes de nove. Então a subtração vai ficar assim: $\frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

A: Na subtração, eu faço igual à adição?

A: Parece que sim.

A: Subtrai o numerador e mantém o denominador.

P: Esta é sua resposta para o problema?

A: Ainda não, falta retirar a fração que representa os alunos que vão levar o suco e a fração dos alunos que vão levar o salgado.

P: Estas retiradas você vai fazer de qual fração?

A: De $\frac{9}{9}$, vai ficar $\frac{9}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. Depois $\frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

A: O que fazer com os resultados?

A: Não sei. Não chegou a nenhum lugar.

A: Pensei diferente.

A: Como você pensou? Será que vai dar certo?

A: Vou retirar da fração que encontrei quando retirei a fração dos alunos que vão levar o refrigerante.

P: Mostre como ficarão as suas operações.

A: De $\frac{8}{9}$ vou retirar $\frac{2}{9}$, minha operação vai ficar assim: $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$.

A: Ainda falta alguma coisa.

A: Falta retirar a fração dos alunos que irão levar os salgados. Agora de $\frac{6}{9}$ que sobrou quando subtrair $\frac{2}{9}$ de $\frac{8}{9}$, vou retirar $\frac{4}{9}$, minha operação será: $\frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.

Agora sim está pronto.

A: Assim ficou bem melhor, agora eu concordo.

P: Esta parte do problema poderia ser resolvida de outra forma?

A: Poderia ter somado as frações dos alunos que levariam o refrigerante, o suco e salgado e em seguida subtrair do todo.

P: Explique para seus colegas como ficaria esta representação?

A: Somando as frações $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$, agora subtraio do todo $\frac{9}{9} - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.

P: Teria outra maneira de resolver?

A: Do todo posso subtrair todas as partes.

P: Como ficaria?

A: A operação seria esta: $\frac{9}{9} - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right)$, posso escrever os numeradores em uma só fração com o mesmo denominador?

P: Sim, esta é uma das maneiras que podemos usar para resolver as operações com frações, pode continuar a sua resolução.

A: Continuando, a minha operação vai ficar:

$$\frac{9}{9} - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{9 - (1 + 2 + 4)}{9} = \frac{9 - 7}{9} = \frac{2}{9}$$

P: Esta é a resposta para o nosso problema inicial que é a pergunta do João? Qual é a fração dos alunos que ficaria responsável pelos doces?

A: Agora sim, temos uma resposta para a pergunta do João.

P: E qual seria esta resposta.

A: A fração dos alunos que ficaria responsável por levar os doces seria $\frac{2}{9}$.

Ao final dessa segunda tarefa o aluno deve ser capaz de resolver problemas envolvendo as operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador, permitindo que situações semelhantes a estas sejam solucionadas, ou permita que busque caminhos para a sua solução.

Após esta tarefa o professor pode recorrer a outras tarefas do mesmo tipo, para que os alunos pratiquem o que estão aprendendo em diferentes situações e contextos. O professor não precisa sair da Tarefa II e ir de imediato para Tarefa III.

4.3 TAREFA III

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Estabelecer relações entre frações equivalentes.
- Compreender o processo para realizar as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.
- Realizar as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

MATERIAL: Texto impresso *O problema dos 35 camelos* (Quadro 5); Ficha (Quadro 6) com as questões propostas aos alunos.

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala de aula para que os alunos sentem-se em duplas;
- ✓ colocar na lousa: o nome do texto, o nome do autor;
- ✓ questionar os alunos a respeito de o que o texto fala;
- ✓ se eles sabem em que lugar passa este conto;
- ✓ entregar o texto *O problema dos 35 camelos* para os alunos;
- ✓ pedir para realizarem a leitura silenciosa;
- ✓ discutir entre eles o texto e resolver as tarefas que seguem.

Esta tarefa visa além da resolução de um problema matemático, a leitura e interpretação de texto (conto).

O professor deve ficar atento, alguns alunos podem precisar de um auxílio especial para compreender a situação problema, esclarecer as dúvidas, quando estas surgirem.

Após o questionamento inicial sobre nome do texto e o autor “Malba Than”⁹, o que eles imaginam ser o assunto do texto, se eles conhecem ou já ouviram falar, entregar o conto aos alunos para que eles realizem a leitura silenciosa; para esta parte da tarefa, determinar o tempo de aproximadamente dez minutos.

⁹ Malba Than: é o heterônimo ou o pseudônimo utilizado pelo professor de matemática, Júlio César de Melo e Sousa (6 de maio de 1895), para criar suas histórias

Leia o problema a seguir:

Quadro 5 – O problema dos 35 camelos.

O PROBLEMA DOS 35 CAMELOS¹⁰

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos, perto de um antigo caravanchará¹¹ meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!
- Isto é um roubo!
- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

– Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

– É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. - Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

– Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?

– Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali¹²! - replicou-me em voz baixa Beremiz. - Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no

¹⁰ Conto retirado do livro *O Homem que Calculava* de Malba Than.

¹¹ Caravanchará – Refúgio construído pelo governo ou por pessoas piedosas à beira do caminho, para servir de abrigo aos peregrinos. Espécie de rancho de grandes dimensões em que se acolhiam as caravanas.

fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal¹³, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

– Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos – fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

– Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saístes lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

– E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saístes com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

– E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

– Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos os três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá o resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

– Sois inteligente, ó Estrangeiro! - exclamou o mais velho dos três irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos camelos do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

– Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!

¹² Bagdalí – Indivíduo natural de Bagdá.

¹³ Jamal – Uma das muitas denominações que os árabes dão ao camelo.

E continuamos a nossa jornada para Bagdá.

Fonte: Tahan (1996).

Questionamentos realizados pelo professor aos alunos antes de entregar as questões:

P: Vocês gostaram do conto?

A: Achei engraçado.

A: Tinha que ser de matemática.

A: Não sabia que podia ter matemática em contos.

P: Vocês compreenderam o texto?

A: Achei diferente.

A: Porque sobrou um camelo?

A: O homem que calculava saiu com vantagem?

P: Do que o texto fala?

A: Camelo, herança, divisão, deserto.

Entregar as questões (Quadro 6), pedir que os alunos respondam somente até a pergunta três, para posteriormente abrir a discussão com os colegas e prosseguir as resoluções. Determinar o tempo para a realização dessa parte da tarefa em aproximadamente 15 minutos.

Quadro 6 – Folha de trabalho da TAREFA III entregue impressa aos alunos.

Leia com atenção as perguntas a seguir para solucionar o problema.

- 1) Releia o texto e grife as informações que considerar mais importantes.
- 2) Quantos camelos os irmãos possuíam no total? Quantos eram os irmãos para dividir os camelos?
- 3) Quantos camelos corresponderiam a cada irmão, antes da chegada de Beremiz?

- 4) Represente o problema por meio de desenho ou esquema, antes da chegada de Beremiz.
- 5) Com a chegada de Beremiz, que começou a resolver o problema, quantos camelos ficaram? Quantos camelos cada irmão receberia? Represente o problema por meio de desenho, esquema, depois da chegada de Beremiz.
- 6) Encontre frações equivalentes, com o mesmo denominador para as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$.
- 7) O pai dos três irmãos deixou em testamento uma partilha dos camelos, como será que Beremiz pensou e resolveu o problema? Será que ele utilizou alguma operação matemática, que o ajudou resolver o problema antes de acrescentar o camelo de seu Bagdalí? Qual foi esta operação matemática?
- 8) Como podemos explicar o final da história? Registre suas conclusões.

Fonte: da autora.

Após passado o tempo determinado de 15 minutos (se necessário prolongar ou reduzir o tempo para responder as questões), abrir para discussão com os alunos realizando indagações que possam permitir que os alunos reflitam sobre as suas respostas e possam traçar um caminho para a resolução final do problema.

1) Releia o texto e grife as informações que considerar mais importantes?

Os alunos provavelmente irão grifar no texto, retirando algumas informações, como quantidades de camelos, nomes das personagens, frações, resultados. Estes passos servem para que os alunos fiquem atentos e busquem as informações para traçar um plano para a Resolver do Problema.

P: Beremiz, O homem que calculava enganou alguém?

A: Acho que sim, ele saiu com um camelo para ele.

A: Acho que não, mas eu não sei explicar.

2) Quantos camelos os irmãos possuíam? Quantos eram os irmãos para dividir os camelos?

A: 35 camelos e 3 irmãos para fazer a divisão.

P: Cada irmão ficou com a mesma quantidade de camelo?

A: Sim, se dividir 35 por três.

P: No texto é assim a divisão?

A: Na história o pai deixa para cada filho uma quantidade diferente.

P: É justa esta divisão?

A: Acho que não, o mais velho ganhou mais camelos.

A: O pai resolveu deixar assim.

P: Cada irmão iria receber a mesma quantidade de camelos?

A: O mais velho recebe mais e o mais novo recebe menos.

3) Quantos camelos corresponderiam a cada irmão, antes da chegada de Beremiz? *[fração como quociente]*

A: Se eu dividir 35 por 3, vai dar 11,666... e a divisão não termina.

P: Mas é assim que é feita a divisão entre os irmãos?

A: Não, cada um recebe uma quantidade diferente.

P: Então, qual é esta quantidade?

A: O mais velho 17 e meio.

A: Como eu sei que é 17,5?

A: O pai deixou metade dos camelos para ele e metade de 35 é 17,5.

P: Que conta eu tenho que fazer?

A: Dividir 35 por dois.

P: E o irmão do meio, o Hamed, quantos camelos receberia?

A: Um terço de 35 que resulta em 11,666... que não é um número inteiro.

P: Que conta eu tenho que fazer?

A: Dividir 35 por três.

P: E o irmão mais novo, o Harim, quantos camelos ele iria receber?

A: Um nono de 35, que resulta em 3,888... que também não é um número inteiro, é só dividir 35 por 9.

P: Estes resultados não são números inteiros, os irmãos estavam fazendo a partilha corretamente?

A: A divisão está correta, pois eu fiz as contas.

P: Por que não estava dando certo esta partilha?

A: Por que na hora de dividir sobrava resto na conta.

A: Quando divide 35 por 2, 3 ou 9 o resultado não dá um número inteiro.

P: Alguém sabe por que isto acontece?

A: Não.

P: Ninguém tem uma ideia?

P: Então vamos descobrir juntos.

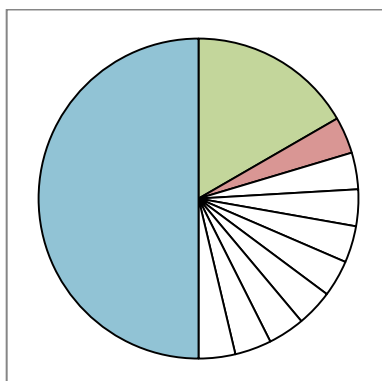
Os alunos vão retomar as questões para terminar de realizar as tarefas, serão dados aproximadamente 5 minutos para a realização da próxima parte da tarefa, orientar para utilizarem esquemas ou desenhos e fazer as representações também utilizando as frações. Ao realizar a socialização, partir de um grupo que tenha talvez realizado de maneira equivocada e pedir para cada grupo esperar a sua vez para expor sua resolução.

4) Represente o problema por meio de desenho ou esquema, antes da chegada de Beremiz. [representação parte/todo]

P: Como vocês fizeram esta representação? Venha na lousa para representar e explicar.

A: Eu fiz uma “pizza” e dividi na metade, e pintei uma parte, a quantidade do irmão mais velho. Depois dividi da parte que restou que não foi pintada em três partes e pintei uma, que é a quantidade do irmão do meio. O que restou sem pintar dividi em nove partes e pintei uma parte, que é a quantidade do irmão mais novo.

Figura 25 – Esquema representando a divisão dos camelos.



Fonte: da autora.

P: Porque você representou desta forma?

A: Fui representando as frações, onde não estava pintado e faltava ser dividido.

P: As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ eram da quantidade de camelos que restava ou da quantidade inicial de camelos?

A: A divisão deveria ser feita pela quantidade inicial que era de 35 camelos.

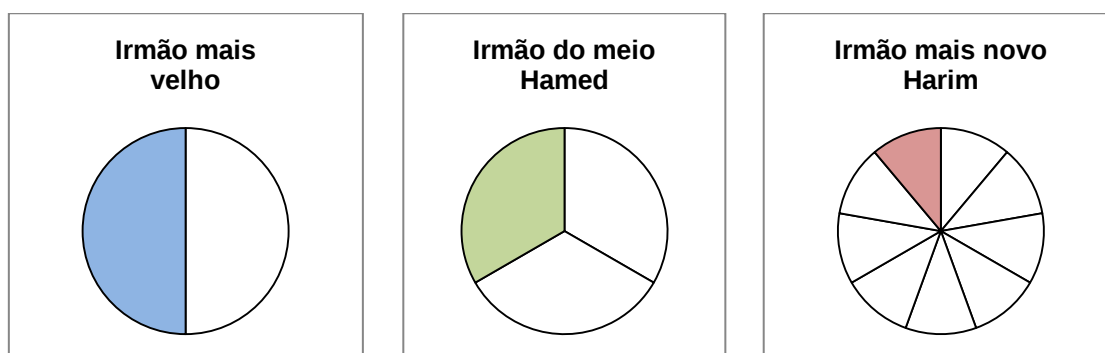
P: Então você fez de maneira correta com a quantidade inicial de camelos ou com a quantidade que restou?

A: Fiz as frações com o que restou, então não está certo.

P: Há outra forma de representar, como poderia ser realizada?

A: Fiz três “pizzas”, cada uma representando a fração de cada irmão: a primeira, do irmão mais velho, dividi em duas partes e pinteí apenas uma, metade; a outra dividi em três partes para representar um terço do irmão do meio e, por último, a terceira dividi em nove partes para representar um nono que é a parte do irmão mais novo.

Figura 26 – Representação da fração correspondente a cada irmão.



Fonte: da autora.

P: Desta forma, já é possível explicar e resolver o problema?

A: Dá para ver quanto em relação ao total de camelos que cada um levou, mas não dá para ver a quantidade de camelos.

P: Posso representar em um único desenho a divisão dos camelos?

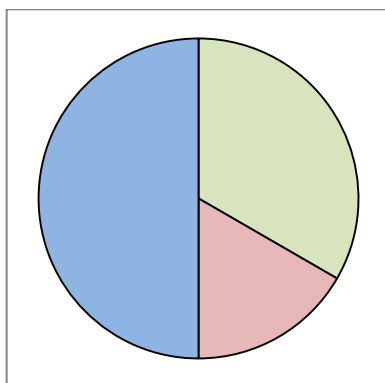
A: Se pegar cada parte desta, desmontar e colocar todos juntos eu acho que dá.

O aluno pode representar um nono como a quantidade que falta para completar o desenho. Após colocar metade e um terço, cabe ao professor ficar atento e, caso isto ocorra, questionar o aluno e, se preciso, mostrar que agrupar ou adicionar todas estas quantidades, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, não resulta em uma representação completa do desenho. O aluno ou professor pode usar recortes para facilitar sua explicação.

P: Represente sua ideia para que possamos entender.

A: Eu representei esta situação assim:

Figura 27 – Representação das frações correspondente aos camelos.



Fonte: da autora.

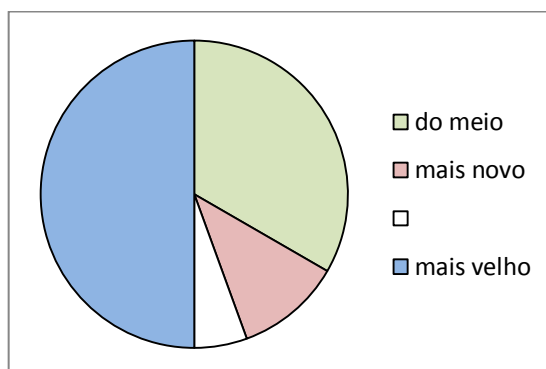
P: Por qual motivo, você representou desta maneira?

A: Coloquei a metade, depois um terço, o que sobrou considerei como um nono.

P: Será que isto é verdade? Se recortar as partes que correspondem a cada fração e colar como fica?

A: Acho que não é verdade, pois se eu recortar e colar vai ficar assim:

Figura 28 – Fração dos camelos em um único desenho.



Fonte: da autora.

P: As partes representadas tem a mesma quantidade de camelos?

A: Não, as frações são todas diferentes e, olha só, sobrou um pedacinho.

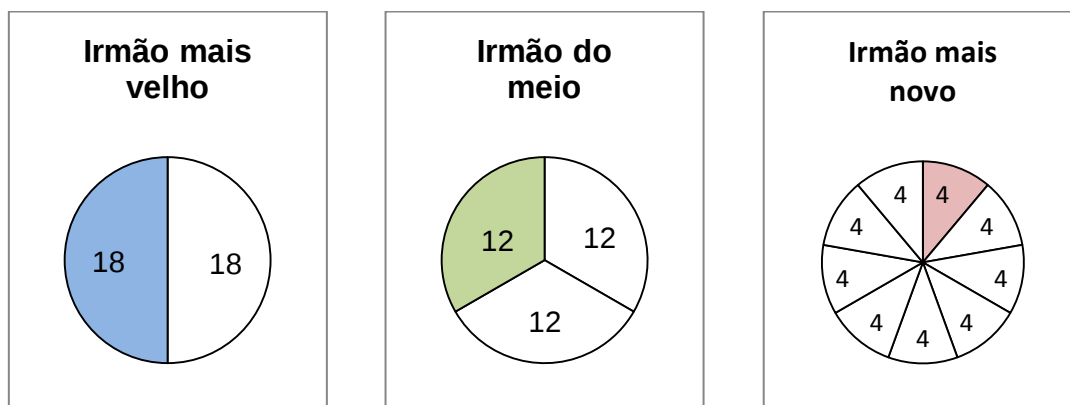
Após a resolução desta questão, que representa a verificação e validação de parte do problema, solicitar que os alunos prossigam na resolução da próxima pergunta usando as ideias da resolução anterior. Espera-se que, se bem discutida e entendida esta parte, o aluno faça as representações considerando e partindo das discussões realizadas nas questões anteriores.

5) Com a chegada de Beremiz, que começou a resolver o problema, quantos camelos ficaram? Quantos camelos cada irmão receberiam? Represente o problema por meio de desenho ou esquema, depois da chegada de Beremiz.

A: Ficaram 36 camelos, metade de 36 para o irmão mais velho que recebeu 18 camelos, um terço para o irmão do meio um terço de 36 é 12 e para o irmão mais novo um nono de 36 que é 4. Quando adicionamos $18 + 12 + 4 = 34$.

P: Como você representou estas informações com um desenho?

A: Meu desenho ficou assim:

Figura 29 – Quantidade de camelos por irmão.

Fonte: da autora.

P: Você representou com três desenhos, você consegue explicar por que sobraram dois camelos com a sua representação?

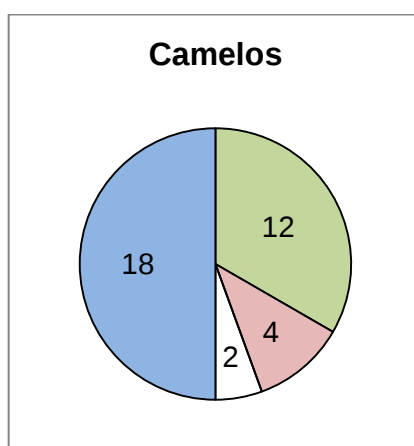
A: Sei que o primeiro é metade de 36 (18), no segundo um terço de 36 (12) e o último um nono de 36 (4). Somando não dá 36 e sim 34.

P: Posso representar em um único desenho a divisão dos camelos?

A: Pode, como fizemos a representação na tarefa anterior.

P: Você poderia representar esta situação?

A: Ficaria assim:

Figura 30 – Divisão dos camelos.

Fonte: da autora.

Pode acontecer do aluno não representar o desenho por completo, representando a última fração, como o que falta para o todo, por isto o professor deve ficar atento para que o aluno não complete o desenho com um nono.

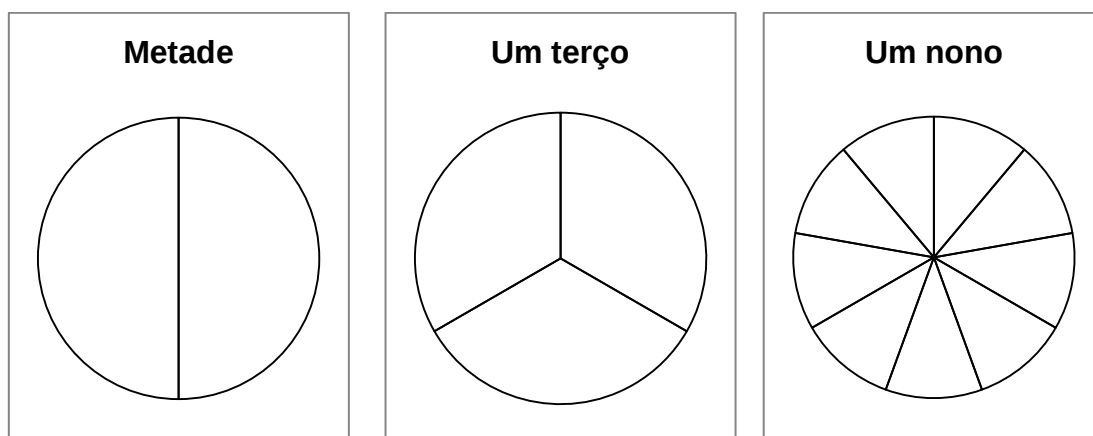
P: Os desenhos têm as mesmas repartições? As partes tem a mesma quantidade?

A: Não, o primeiro é maior que o segundo, e o terceiro menor que o segundo.

P: Como repartir os desenhos, para que fiquem com a mesma quantidade de repartições?

A: Podemos representar as frações desta maneira.

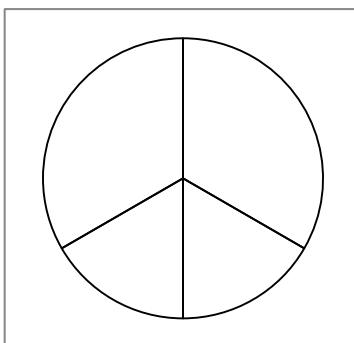
Figura 31 – Frações de camelos.



Fonte: da autora.

A: Podemos colocar uma fração em cima da outra e vamos ter esta fração:

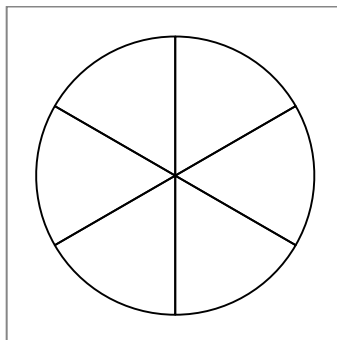
Figura 32 – Sobreposição de metade e um terço.



Fonte: da autora.

P: Quando você fez a sobreposição, as repartições do desenho não ficam com o mesmo tamanho, o que você poderia fazer para todas as partes ficarem com o mesmo tamanho?

A: Se a parte de baixo do desenho que estava dividida em três partes foi dividida ao meio, vou dividir as outras duas partes ao meio ficando assim com seis partes.

Figura 33 – Dividindo em partes iguais.**Fonte:** da autora.

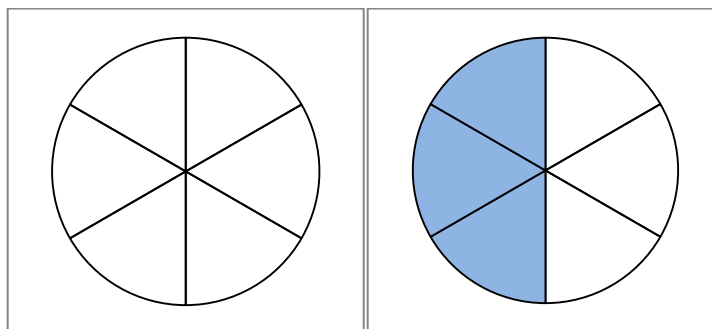
P: Com esta representação como podemos escrever a fração $\frac{1}{2}$ de outra maneira?

A: Como a metade está dividida em 3 partes, podemos representar como $\frac{3}{2}$.

P: Quer dizer que são três partes de duas?

A: Estava dividida em duas partes antes, agora uma parte foi dividida em três, então ficou três partes de duas.

P: Vamos olhar para o desenho novamente (Figura 34), ao todo o desenho está dividido em quantas partes?

Figura 34 – Sobreposição, fração meio.**Fonte:** da autora.

A: O desenho está dividido em seis partes.

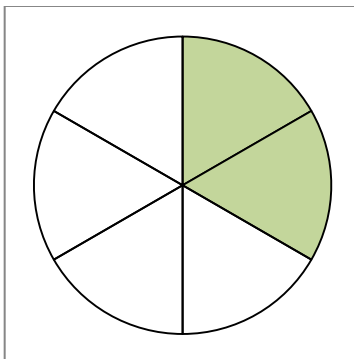
P: E quantas partes estão pintadas para representar a metade $\frac{1}{2}$?

A: São três partes de seis, então eu posso escrever como $\frac{3}{6}$.

P: E como escrever a fração $\frac{1}{3}$?

A: São duas partes de seis, então a fração é $\frac{2}{6}$.

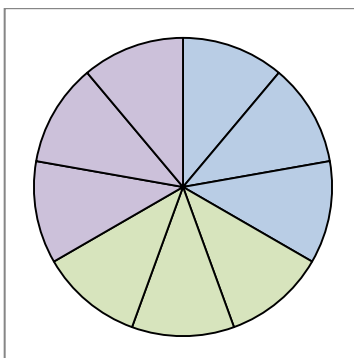
Figura 35 – Sobreposição de meio e um terço.



Fonte: da autora.

A: Podemos fazer o mesmo com as frações de um terço e um nono desta maneira.

Figura 36 – Sobreposição de um terço e um nono.



Fonte: da autora.

P: O que aconteceu neste caso?

A: Neste caso, o que estava dividido em três partes foi dividido novamente e cada parte ficou dividida em três partes novamente.

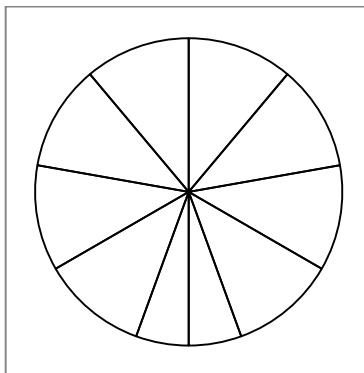
P: Como escrever a fração $\frac{1}{3}$ de outra maneira?

A: Como são três partes de nove a fração é $\frac{3}{9}$.

P: Vamos fazer o mesmo com meio e um nono e ver o que acontece?

A: Vai ficar assim, com a parte de baixo dividida ao meio.

Figura 37 – Sobreposição metade e um nono.

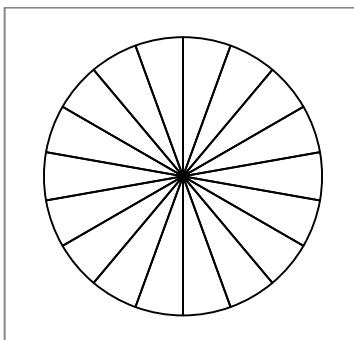


Fonte: da autora.

P: O que podemos fazer, pois as partes não estão com o mesmo tamanho?

A: Dividir cada uma das partes que estava dividida em nove ao meio.

Figura 38 – Dividindo em partes iguais.

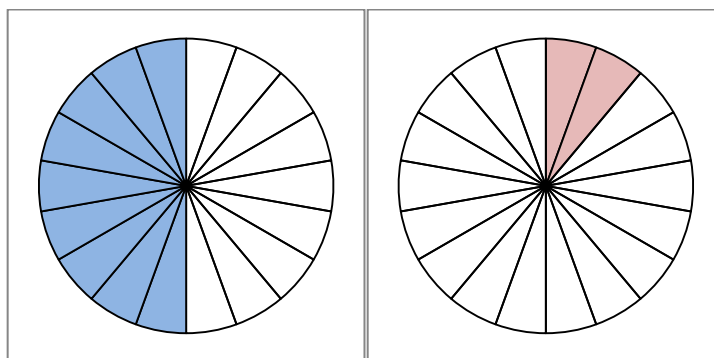


Fonte: da autora.

A: Ficou dividida em 18 partes.

P: Como representar a fração $\frac{1}{2}$ com este desenho?

A: Vai ficar pintado metade das 18 partes, a fração é $\frac{9}{18}$ e como eu dividi um nono em duas partes, então vou pintar duas partes de dezoito, a fração $\frac{1}{9}$ vai ficar equivalente a $\frac{2}{18}$.

Figura 39 – Fração meio e um nono, sobreposição.

Fonte: da autora.

P: Podemos encontrar a fração equivalente a $\frac{1}{3}$?

A: Acho que sim.

P: Como ficaria esta representação?

A: Se metade eu dividi 18 ao meio, para um terço vou dividir em três partes e vai ficar seis partes de dezoito.

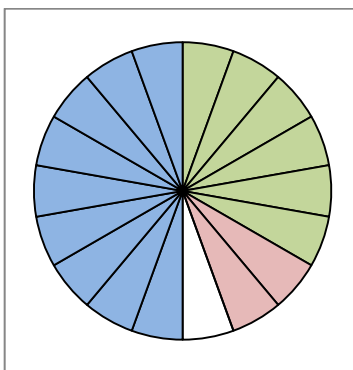
P: Alguém pensou de outra maneira?

A: Ao sobrepor um terço e um nono, um terço ficou dividido em três partes, se cada parte de um nono corresponde a duas partes de dezoito então eu tenho seis partes de dezoito que deu $\frac{6}{18}$.

A: Boa ideia, gostei.

P: Represente todas as frações no mesmo desenho.

A: Ficou assim:

Figura 40 – Frações equivalentes

Fonte: da autora.

Após encontrar frações equivalentes utilizando desenhos, os alunos vão encontrar frações equivalentes por escrito, todas com mesmo denominador e validar as hipóteses encontradas por eles na situação anterior.

6) Encontre frações equivalentes com o mesmo denominador para as

frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$.

O aluno pode utilizar desenhos, esquemas, se necessário apresentar o método utilizando o m.m.c. (mínimo múltiplo comum).

Para somar ou subtrair frações com denominador diferentes:

1. Obter o menor múltiplo comum entre os denominadores; ele será o novo denominador.

Aplicando a equivalência de frações, continuamos:

2. Se o denominador foi multiplicado por tal número, então multiplicamos também o numerador por esse número e determinar o numerador de cada fração.

Exemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9 + 2}{12} = \frac{11}{12}$$

O menor múltiplo comum (m.m.c.) entre 4 e 6 é 12.

Outra maneira:

Para reduzir frações a um mesmo denominador é preciso:

1. Determinar o menor múltiplo comum aos denominadores.
2. Registrar esse número, ele será o novo denominador das frações.
3. Para obter o novo numerador de cada fração, efetuar a divisão do novo denominador obtido (múltiplo encontrado) pelo denominador original e multiplicar o resultado obtido pelo numerador de cada fração.
4. Somar ou subtrair os numeradores.

Algumas possíveis respostas.

P: Vamos ver como vocês responderam.

A: Eu fui testando até chegar em frações com o mesmo denominador

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$$

P: Alguém teria outra forma de encontrar estas frações?

A: Como na tarefa anterior (Figura 40) eu tenho que $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$; $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ e $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$

P: Esta é uma das formas, quem poderia explicar outra forma?

A: Eu percebi que $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$ tem o mesmo denominador, mas não encontrei este mesmo denominador em $\frac{1}{9}$, fiz a primeira fração equivalente de $\frac{1}{9}$ que é $\frac{2}{18}$, então eu tinha que encontrar um denominador igual a dezoito, então eu pensei, “qual número que eu devo multiplicar por 2 para obter dezoito?”, era o nove então ficou $\frac{1 \times 9}{2 \times 9} = \frac{9}{18}$, multipliquei o numerador e o denominador por 9, fiz a mesma coisa com o $\frac{1}{3}$.

A: Também multiplicou por nove?

A: Não, multipliquei por seis, porque seis vezes três é dezoito e ficou $\frac{1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{6}{18}$, também multipliquei o numerador e o denominador por seis.

P: Quais frações você encontrou?

A: Encontrei $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$; $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ e $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$.

P: Sua resposta é igual a dos seus colegas?

A: É a mesma resposta, só que eu fiz diferente.

P: Há outra maneira de resolver este problema?

A: Sempre tem, podemos somar as frações ou pensar em outra solução, o mesmo problema pode apresentar diferentes maneiras de resolver e chegar no mesmo resultado.

Lançar a próxima parte da tarefa dando um tempo, de aproximadamente 10 minutos, para os alunos resolverem, alguns alunos podem achar que esta operação foi a de divisão, levar o aluno a pensar em uma outra forma de resolver.

7) O pai dos três irmãos deixou em testamento uma partilha dos camelos, como será que Beremiz pensou e resolveu o problema? Será que ele utilizou alguma operação matemática, que o ajudou a resolver o problema antes de acrescentar o camelo de seu Bagdalí? Qual foi esta operação matemática?

P: Qual seria esta operação matemática?

A: Poderia ser a adição e depois uma subtração?

P: Explique sua resolução.

A: Eu somei:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{14}$$

P: Para fazer uma soma de frações posso utilizar denominadores diferentes?

A: Já resolvemos com denominadores iguais, com denominador diferente ainda não.

A: Eu posso somar frações com mesmo denominador, para isto eu somo o numerador e tenho que manter o denominador, agora com frações de denominadores diferentes, não sei.

P: Para somar com denominadores iguais podemos somar os denominadores?

A: Eu sei que, se os denominadores forem iguais, não posso somar os denominadores, tenho que manter o mesmo denominador.

P: O que fazer para resolver este seu problema da adição de frações com denominadores diferentes? O que você deve fazer para realizar esta adição?

A: Tenho que deixar as frações com o mesmo denominador

P: E como fazer?

A: Uso as frações equivalentes $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$; $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ e $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$$

P: Com esta conta você chega à sobra de dois camelos? Esta seria a resposta de Beremiz?

A: Ainda não, tenho que encontrar a fração equivalente com denominador 36, pois seria a representação dos trinta e seis camelos, como trinta e quatro é o dobro de dezessete, fica:

$$\frac{17 \times 2}{18 \times 2} = \frac{34}{36}$$

P: Agora o que falta fazer?

A: Está faltando dois camelos de trinta e seis.

$$\frac{36}{36} - \frac{34}{36} = \frac{2}{36}$$

P: Teria outra forma de fazer esta mesma operação?

A: Pensei em multiplicar os três números que estão no denominador, para encontrar um só denominador e ficaria $2 \times 3 \times 9 = 54$.

P: E o que fazer com os numeradores?

A: Os numeradores eu multiplico pelos outros dois números que estão no denominador.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{27}{54} + \frac{18}{54} + \frac{6}{54} = \frac{51}{54}$$

A: Esta não é a resposta do problema.

A: Ainda não, encontrei $\frac{51}{54}$ e eu preciso resolver esta parte, pois está com 54 camelos e eu quero apenas 36.

P: Quem poderia ajudar a resolver esta parte?

A: Se encontrar uma fração equivalente, dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número, vou usar o três.

$$\frac{51 \div 3}{54 \div 3} = \frac{17}{18}$$

P: Você sabe como chama o que você acabou de fazer?

A: Fração equivalente?

P: Também podemos chamar de simplificação de fração. E chegamos a uma resposta para o problema?

A: Ainda não, é só fazer

$$\frac{17 \times 2}{18 \times 2} = \frac{34}{36}$$

$$\frac{36}{36} - \frac{34}{36} = \frac{2}{36}$$

A: Agora acabou, o Beremiz pensou, fez as contas antes e viu que se ele acrescentasse um camelo ficaria com 36 que era múltiplo de 2, 3 e 9.

P: Como resolver o problema com os 35 camelos?

A: Ficaria do mesmo jeito, iria sobrar um camelo e não dois como sobrou.

Para finalizar, proponha aos alunos que expliquem e escrevam como chegaram às resoluções. Peça que respondam à próxima pergunta e pensem em como a matemática pode auxiliar em diferentes situações do cotidiano.

8) Como podemos explicar o final da história? Registre suas conclusões.

Neste momento o aluno irá explicar o motivo da sobra de um camelo que ficou com Beremiz, espera-se que o aluno compreenda a adição de frações e explique que a adição inicial não resultava no total de camelos. E verificar que a falta de conhecimento dos irmãos, impedia uma solução com uma quantidade inteira de camelos, o fato foi a percepção da necessidade de mudar o problema e usar 36 camelos para que a solução do problema resultasse em um número inteiro.

4.4 TAREFA IV

OBJETIVO ESPECÍFICO:

- Resolver operações de adição e subtração de frações com mesmo denominador ou denominadores diferentes.

MATERIAL: Ficha (Quadro 7) com situação problema sobre adição e subtração de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes.

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala de aula para que as tarefas possam ser realizadas individualmente;
- ✓ entregar a ficha com os problemas;
- ✓ orientar os alunos para a resolução individual, visando uma leitura atenta;
- ✓ lembrar os alunos que eles podem já ter solucionado problemas que possam auxiliar na resolução deste, caso contrário buscar um novo caminho para solucionar;
- ✓ andar pela sala para observação e auxílio aos alunos;
- ✓ realizar os questionamentos aos alunos;
- ✓ verificar os processos de resolução dos alunos;
- ✓ socializar as diferentes soluções apresentadas pelos alunos.

Neste problema, o aluno precisa organizar as informações, traçar um plano para que possa ser solucionado, o professor deve ficar atento às soluções apresentadas realizando os questionamentos necessários para que o problema possa ser resolvido pelos alunos.

Apresentar o problema aos alunos na ficha apresentada no Quadro 7, esperar que eles façam a leitura da situação problema, compreendam e comecem a resolver as questões propostas, individualmente. Como os alunos estão familiarizados com os conceitos envolvidos nesta tarefa, o professor deve acompanhar as resoluções, contribuindo para que os alunos solucionem o problema, propor um tempo de aproximadamente 20 minutos para esta resolução e, se julgar

necessário, este tempo pode ser ampliado ou reduzido. Em seguida, quando a maioria dos alunos estiver com o problema resolvido, abrir para socialização das resoluções e possíveis intervenções, valorizar as diferentes soluções apresentadas pelos alunos.

Quadro 7 – Ficha de trabalho da TAREFA IV entregue impressa aos alunos.

Álbum de figurinhas

Os amigos Antônio, Beto, Carlos e Davi começaram a preencher cada um, um álbum de figurinhas. Durante um mês (4 semanas) foram comprando e trocando as figurinhas e a cada semana preenchiam uma tabela para saber quantas figurinhas haviam colado naquela semana. Ao final do mês decidiram verificar quem estava com a maior parte do álbum preenchida. Antônio falou que na primeira semana havia preenchido $\frac{1}{6}$, na segunda semana $\frac{2}{6}$, na terceira semana $\frac{1}{6}$ e na quarta semana novamente $\frac{1}{6}$ do total de figurinhas de seu álbum. Em seguida Beto disse que preencheu em cada semana nesta ordem $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ e $\frac{1}{5}$, Carlos já foi falando as frações das quantidades de figurinha que havia preenchido em cada semana $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{2}{10}$ e para finalizar Davi disse: Em cada semana meu álbum ficou com $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$, do total de figurinhas.

Após a leitura do problema, se necessário faça uma nova leitura e em seguida organize as informações para solucionar este problema.

a) Construa um quadro com as frações correspondentes às frações das quantidades de figurinhas de cada amigo.

b) Qual amigo preencheu a maior parte do álbum? E a menor quantidade?

a) Construa um quadro com as frações correspondentes às frações das quantidades de figurinhas de cada amigo.

P: Como ficou o quadro com as frações correspondentes as quantidades de figurinhas de cada amigo?

A: O meu quadro ficou assim:

Quadro 8 – Quantidade de figurinhas de cada amigo.

Antônio	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Beto	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
Carlos	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
Davi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Fonte: da autora.

P: Neste quadro é possível identificar a semana e os amigos?

A: Os amigos estão marcados e as frações correspondentes a cada semana está na ordem.

P: Alguém fez um quadro diferente?

A: O meu quadro ficou com algumas diferenças:

Quadro 9 – Quantidades de figurinhas com total.

Amigo	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	Total
Antônio	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
Beto	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	
Carlos	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	
Davi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	

Fonte: da autora.

P: Neste quadro é possível identificar as frações correspondentes a cada semana e também cada amigo?

A: Sim, é só olhar e verificar a linha e coluna.

P: O que é possível verificar com estas informações apresentadas na tabela?

A: A fração correspondente à quantidade de figurinhas de cada um em cada semana.

P: Alguma outra informação ou comparação?

A: Podemos comparar as frações das quantidades de figurinhas dos amigos por semana.

A: A fração correspondente a cada amigo no final das quatro semanas.

P: É possível responder à próxima pergunta só olhando para a tabela?

A: Acho que não, pois não sabemos exatamente quantas figurinhas havia neste álbum, apenas as frações correspondentes, e só de olhar não sei responder.

P: O quadro vai ajudar na resolução?

A: Vai sim, pois já consegui organizar as informações.

P: Vamos partir para a próxima pergunta.

b) Qual amigo preencheu a maior parte do álbum? E a menor quantidade?

P: Como resolver este problema?

A: Se eu somar todas as frações do Antônio, depois todas as frações do Beto e assim por diante eu vou descobrir a fração do álbum de cada amigo que está preenchida.

P: Como você fez esta adição?

A: Comecei pelo Antônio e somei:

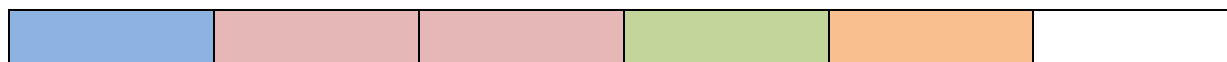
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1 + 2 + 1 + 1}{6} = \frac{5}{6}$$

P: Por que você somou desta forma?

A: Como as frações do Antônio eram com o mesmo denominador, somei os numeradores e o denominador ficou o mesmo.

P: Alguém pensou diferente?

A: Fiz uma representação na forma de desenho (Figura 41) e pintei a quantidade de figurinha de cada semana. Me lembrei da resolução do outro problema.

Figura 41 – Representação da adição.

Fonte: da autora.

A: E também deu o mesmo resultado porque eu pintei 5 partes de 6, que corresponde a fração $\frac{5}{6}$.

P: Muito bem e agora, o que você fez?

A: Somei as frações do Carlos.

P: O que houve com as frações do Beto?

A: As frações do Carlos têm o mesmo denominador e é mais fácil de somar.

P: Então como ficou a adição das frações de Carlos?

A: Minha adição ficou assim:

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3+1+3+2}{10} = \frac{9}{10}$$

P: Pode continuar sua resolução.

A: Somei as frações do Beto:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{28}$$

A: Como você resolveu, poderia me explicar?

A: Somei os numeradores e somei os denominadores.

A: Você não está lembrado que não podemos somar os denominadores?

A: Não podemos quando eles são iguais, neste caso eles são diferentes.

A: Mesmo assim não podemos, eu somei as frações assim:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{3+5+2+3}{15} = \frac{13}{15}$$

P: Como você chegou neste resultado?

A: Encontrei frações equivalentes a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ e $\frac{1}{5}$, com mesmo denominador.

P: Qual método você usou?

A: Como o maior denominador é 15, comecei pelo $\frac{1}{5}$.

P: Por que por $\frac{1}{5}$?

A: $\frac{1}{5}$ era o primeiro e também o último e tem o denominador menor que 15.

P: Como ficou sua fração equivalente?

A: A fração equivalente a $\frac{1}{5}$ é:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15}$$

P: Por que você parou no denominador 15?

A: Porque é o maior denominador desta adição.

P: E se você não tivesse obtido o denominador 15, o que faria?

A: Iria procurar até obter uma fração com mesmo denominador, também com a fração de denominador 15.

P: E agora, o que você fez?

A: Encontrei frações equivalentes a $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

P: Você encontrou as frações equivalentes e o que fazer?

A: Então eu somei as frações.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15}$$

A: Como agora as frações possuem o mesmo denominador, vou somar os numeradores e manter o denominador 15.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{3 + 5 + 2 + 3}{15} = \frac{13}{15}$$

P: Alguém resolveu esta adição de outra forma?

A: Eu fiz um pouco diferente.

P: Chegou no mesmo resultado?

A: Meu resultado deu um pouco diferente.

P: Explique como você fez.

A: Eu multipliquei os denominadores 3, 5 e 15 que é igual a 225. Encontrei frações equivalentes a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ e $\frac{1}{5}$, com denominador 225.

A: Eu sei que $225 \div 5 = 45$, então $5 \times 45 = 225$, agora eu multiplico o numerador 1 por 45, $1 \times 45 = 45$, a fração equivalente a $\frac{1}{5}$ vai ser:

$$\frac{1 \times 45}{5 \times 45} = \frac{45}{225}$$

P: Você fez o mesmo com as outras frações?

A: Eu descobri por quanto eu deveria multiplicar cada denominador para chegar ao denominador 225. Para o denominador 3 eu fiz $225 \div 3 = 75$, então $3 \times 75 = 225$ e o numerador 1 vai ser equivalente a $1 \times 75 = 75$. Para o denominador 15 eu fiz $225 \div 15 = 15$, então $15 \times 15 = 225$ e o numerador 2 vai ser equivalente a $2 \times 15 = 30$.

P: Agora que você já tem as frações equivalentes como terminou?

A: Eu somei as frações equivalentes e ficou assim:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{45}{225} + \frac{75}{225} + \frac{30}{225} + \frac{45}{225} = \frac{45 + 75 + 30 + 45}{225} = \frac{195}{225}$$

P: E este resultado é o mesmo que encontramos anteriormente, quando adicionamos $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ e $\frac{1}{5}$?

A: Não sei, será que são equivalentes?

P: Como faz para descobrir se são frações equivalentes?

A: Posso simplificar a fração e ver o que acontece.

Simplificar: Tornar simples ou mais simples. Tornar mais fácil. Reduzir uma fração a outra equivalente. Reduzir uma fração a termos menores.

Exemplo:

$$\frac{8^{\div 2}}{16^{\div 2}} = \frac{4^{\div 2}}{8^{\div 2}} = \frac{2^{\div 2}}{4^{\div 2}} = \frac{1}{2}$$

P: Como simplificar?

A: Vou dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número. Primeiro eu vou dividir 195 e 225 por 3, vou encontrar 65 e 75, na sequência vou dividir 65 e 75 por 5 e vai dar 13 e 15.

$$\frac{195 \div 3}{225 \div 3} = \frac{65 \div 5}{75 \div 5} = \frac{13}{15}$$

P: O resultado é o mesmo?

A: Sim, eu resolvi de outra forma e encontrei o mesmo resultado.

P: Alguém resolveu de outra maneira diferente?

A: Eu resolvi de uma forma muito parecida com esta.

P: Como você resolveu:

A: Como $3 \times 5 = 15$, eu encontrei frações equivalentes com denominador 15. Peguei a fração $\frac{1}{5}$ e multipliquei o numerador e o denominador por 3, depois peguei a fração

$\frac{1}{3}$ e multipliquei o numerador e o denominador por 5.

$$\frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15} \qquad \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$

P: Como você terminou sua operação?

A: Somei todas as frações:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{3 + 5 + 2 + 3}{15} = \frac{13}{15}$$

P: O resultado encontrado é o mesmo?

A: Foi o mesmo.

P: Tem outra forma de resolver?

A: Eu fiz usando o m.m.c..

P: Explique sua resolução usando o m.m.c. (mínimo múltiplo comum)

A: Primeiro eu encontrei o m.m.c. de 3, 5 e 15.

P: Como faz o m.m.c.¹⁴?

A: Coloco os números um do lado do outro, separando com uma vírgula, assim:

$$\begin{array}{ccc|c} 3, & 5, & 15 & 3 \text{) } x \\ 1, & 5, & 5 & 5 \\ \hline 1, & 1, & 1 & 3 \times 5 = 15 \end{array}$$

A: Vou dividir primeiro por 3, depois por 5, até o lado esquerdo chegar em todos os número em 1, então multiplico os números que estão do lado esquerdo. Neste caso $3 \times 5 = 15$, o m.m.c. é 15.

A: Depois como terminar?

A: Como o m.m.c. é 15, coloco no denominador:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{1 + 1 + 2 + 1}{15} = \frac{5}{15}$$

A: Será que este é o resultado?

A: Não pode ser, o que será que não deu certo?

P: Você mudou apenas o denominador, o que você fez com os numeradores?

A: Esqueci de mudar também.

A: Tem que encontrar frações equivalentes. Já sei o que fazer.

A: Coloco o denominador 15 e encontro frações equivalentes, dividindo o 15 pelo denominador e multiplico pelo numerador:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{3 + 5 + 2 + 3}{15} = \frac{13}{15}$$

P: O resultado encontrado foi o mesmo nos quatro casos?

A: Foi, não há apenas uma maneira de resolver adição ou subtração de frações.

P: O nosso problema já foi resolvido?

A: Não, ainda falta somar as frações das quantidades de figurinhas do Davi.

P: Como resolver?

A: Posso usar qualquer uma das quatro resoluções anteriores para resolver a adição das figurinhas do Davi?

P: Sim pode escolher qualquer uma delas.

¹⁴ O professor pode utilizar este contexto para inclusive elaborar uma nova THA que possibilitará “construir” o conceito de m.m.c.

A: Para resolver a adição de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$, primeiro encontrei o m.m.c. de 3, 4, 6, e 12 e ficou assim:

$$\begin{array}{cccc|c} 3, & 4, & 6, & 12 & 2 \\ 3, & 2, & 3, & 6 & 2 \\ 3, & 1, & 3, & 3, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 & 2 \times 2 \times 3 = 12 \end{array} \quad \times$$

A: O m.m.c. de 3, 4, 6 e 12 é 12, agora eu vou encontrar as frações equivalentes a 12, para completar a adição de frações.

$$\frac{1}{4^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{12^1} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3+4+2+1}{12} = \frac{10}{12}$$

P: Todas as outras formas de resolver chegaram neste mesmo resultado?

A: Sim, independente da maneira que eu vou resolver o resultado deve ser sempre o mesmo.

P: Terminou a resolução?

A: Não ainda falta descobrir quem estava com a maior parte do álbum completa.

P: O que fazer para descobrir?

A: Vou completar o quadro do item a)

Quadro 10 – Fração total de figurinhas de cada amigo.

Amigo	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	Total
Antônio	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
Beto	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{15}$
Carlos	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{9}{10}$
Davi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{12}$

Fonte: da autora.

P: Só completar o quadro te dará a resposta?

A: Acho que é o Beto, os números são maiores.

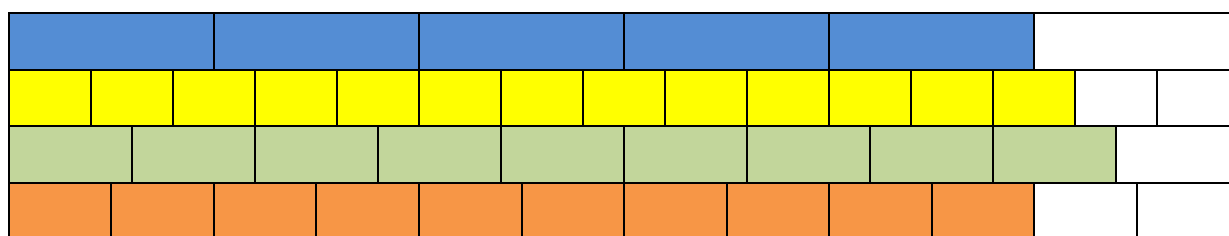
A: Parece que sim, mas podemos comparar frações desta maneira?

A: Acho que não, eu pensei assim: como eu descobri que Antônio preencheu $\frac{5}{6}$, Beto

$\frac{13}{15}$, Carlos $\frac{9}{10}$ e Davi $\frac{10}{12}$, preciso descobrir qual delas é a maior fração, para isto vou

fazer uma representação com desenhos (Figura 42). A primeira linha com o Antônio (azul), depois Beto (amarelo), na terceira linha o Carlos (verde) e por último o Davi (laranja).

Figura 42 – Representação das frações de cada amigo.



Fonte: da autora.

P: O que você descobriu com seu desenho?

A: Que o Carlos preencheu a maior parte do álbum de figurinha.

P: É possível descobrir mais alguma coisa?

A: Dá para ver que Antônio e Davi preencheram a mesma quantidade, sendo a menor delas.

A: Não dá para somente olhar os números que estão na fração e ver que eles são maiores e falar neste caso que a resposta é o Beto.

P: Alguma outra forma de descobrir qual das frações é a maior delas, a fração do Antônio, Beto, Carlos ou Davi?

A: Posso encontrar frações equivalentes a $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{9}{10}$ e $\frac{10}{12}$?

P: Pode explicar o seu pensamento.

A: Comecei por $\frac{5}{6}$, vou verificar algumas e depois vou fazer as frações equivalentes

até encontrar o mesmo denominador para as quatro frações.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{35}{42} = \frac{40}{48} = \frac{45}{54} = \frac{50}{60}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{26}{30} = \frac{39}{45} = \frac{52}{60}$$

$$\frac{9}{10} = \frac{18}{20} = \frac{27}{30} = \frac{36}{40} = \frac{45}{50} = \frac{54}{60}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{20}{24} = \frac{30}{36} = \frac{40}{48} = \frac{50}{60}$$

P: Agora que você já encontrou as frações equivalentes como concluir sua resolução?

A: As quatro frações são:

Quadro 11 – Fração equivalente ao total de figurinhas de cada amigo.

Antônio	$\frac{50}{60}$
Beto	$\frac{52}{60}$
Carlos	$\frac{54}{60}$
Davi	$\frac{50}{60}$

Fonte: da autora.

P: Qual sua resposta para o problema?

A: Carlos está com $\frac{54}{60}$ que representa a maior fração, depois vem o Beto com a fração $\frac{52}{60}$ do álbum de figurinhas preenchido, Antônio e Davi estão com a mesma quantidade de figurinhas no álbum com a representação de $\frac{50}{60}$.

P: Alguma observação para esta resolução?

A: Poderia ter usado as frações com denominador 30, para realizar as comparações.

P: Porque com o denominador 30?

A: Porque a fração $\frac{10}{12}$ aparece nas frações equivalentes a $\frac{5}{6}$, como as frações são

todas equivalentes posso usar a fração $\frac{25}{30}$, como fração equivalente de $\frac{10}{12}$.

P: Todos concordam com ele?

A: Sim, pois se simplificar $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ e $\frac{5}{6}$ é equivalente a $\frac{25}{30}$.

P: Como fica a resposta?

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{26}{30}$$

$$\frac{9}{10} = \frac{18}{20} = \frac{27}{30}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{20}{24} = \frac{30}{36}$$

A: As quatro frações com mesmo denominador são:

Quadro 12 – Frações equivalentes (simplificada).

Antônio	$\frac{25}{30}$
Beto	$\frac{26}{30}$
Carlos	$\frac{27}{30}$
Davi	$\frac{25}{30}$

Fonte: da autora.

A: Carlos está com um total de $\frac{27}{30}$ partes de seu álbum preenchido, que representa a maior fração, depois vem o Beto com a fração $\frac{26}{30}$ do álbum de figurinhas preenchido, Antônio e Davi estão com a mesma quantidade de figurinhas no álbum com a representação de $\frac{25}{30}$.

P: É possível resolver este mesmo problema de outra maneira?

A: Eu resolvi transformando a fração em um número decimal, dividindo o numerador pelo denominador.

P: Qual foi sua resposta para o problema?

A: Primeiro eu dividi os numeradores pelos denominadores, começando por:

$$5 \times 6 = 0,8333... , 13 \div 15 = 0,8666... , 9 \div 10 = 0,9 \text{ e } 10 \div 12 = 0,8333... .$$

P: Como saber qual dos números decimais é o maior?

A: Tenho que comparar.

Quadro 13 – Frações com representação decimal.

Antônio	$\frac{5}{6} = 0,8333 \dots$
Beto	$\frac{13}{15} = 0,8666 \dots$
Carlos	$\frac{9}{10} = 0,9$
Davi	$\frac{10}{12} = 0,8333 \dots$

Fonte: da autora.

P: Como saber qual decimal é o maior?

A: Olhando para eles eu achei que o maior era 0, 8666..., porque ele é maior que 0,8333... e também maior que 0,9.

P: Porque 0,8666... é maior que 0,9?

A: Porque tem mais casas decimais.

P: Para comparar números decimais, tenho que ver qual tem mais casas ou começo comparando a primeira casa decimal, o décimo?

A: É verdade tenho que comparar primeiro os décimos, centésimos e assim por diante, posso acrescentar zeros até ficar com a mesma quantidade de casas decimais.

Quadro 14 – Frações com representação decimal, comparando casas decimais.

Antônio	$\frac{5}{6} = 0,8333 \dots$
Beto	$\frac{13}{15} = 0,8666 \dots$
Carlos	$\frac{9}{10} = 0,9000$
Davi	$\frac{10}{12} = 0,8333 \dots$

Fonte: da autora.

P: Depois dessa sua comparação, qual será sua resposta?

A: A mesma resposta dos meus colegas, o que tem a maior fração do álbum preenchido é o Carlos, depois vem o Beto e em seguida com a mesma quantidade vem o Antônio e o Davi.

P: Chegamos a uma resposta para o nosso problema ou ainda será necessário realizar mais alguma operação.

A: O nosso problema era descobrir quem estava com a maior parte do álbum preenchida, descobrimos que foi o Carlos, então chegamos ao final.

4.5 TAREFA V

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender a fração como operador.
- Resolver situações problema tendo a fração como operador.

MATERIAL: Fichas (Quadros 15, 16 e 17) com as situações problema para o desenvolvimento da Tarefa V e questões para serem desenvolvidas.

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala de aula para que as tarefas possam ser realizadas em duplas;
- ✓ entregar a ficha com o primeiro problema;
- ✓ realizar questionamentos sobre o problema;
- ✓ orientá-los para a resolução, visando uma leitura atenta;
- ✓ entregar as questões norteadoras para o desenvolvimento da tarefa;
- ✓ socializar as resoluções encontradas pelos alunos do primeiro problema;
- ✓ apresentar outra situação problema;
- ✓ andar pela sala para observação e auxílio aos alunos;
- ✓ realizar os questionamentos aos alunos;
- ✓ verificar os processos de resolução dos alunos.

Em princípio, o professor deve organizar a sala de aula formando duplas de alunos previamente pensadas para que as resoluções sejam produtivas e os alunos encontrem as soluções de maneira conjunta, valorizando o trabalho em dupla, permitindo que o objetivo traçado seja alcançado.

Entregar aos alunos o problema presente no Quadro 15, deixar que eles realizem uma primeira leitura, em seguida realizar alguns questionamentos, presentes no decorrer do desenvolvimento da tarefa.

Quadro 15 – Situação Problema da TAREFA V entregue impressa aos alunos.**Organizando uma festa:**

A turma da sala de Lucas tem 36 alunos e resolveram organizar uma festa para comemorar o aniversário da escola, Lucas e seus colegas começaram a pensar como fariam para organizar esta festa, sabiam que iriam precisar levar refrigerante, suco, salgados e doces, mas não conseguiam entrar em um acordo. Ficou decidido que João e Lucas iriam determinar a quantidade de cada item a ser levado pelos colegas de sala. Lucas conversando com seu colega João chegou a seguinte conclusão:

Se $\frac{1}{9}$ dos alunos ficar responsável pelo refrigerante, $\frac{2}{9}$ pelo suco e $\frac{4}{9}$ pelo salgado, o restante ficará responsável pelos doces.

Fonte: da autora.

Questionamentos realizados pelo professor antes de entregar as questões norteadoras para o desenvolvimento da tarefa.

a) Vocês já conhecem este problema?

A: Nós já o resolvemos.

P: Faz muito tempo?

A: Não foi por estes dias.

P: Então ele é familiar, vocês sabem resolver?

A: Sabemos, perguntava da fração dos alunos que iriam levar doce na festa.

b) Tem algo de diferente neste problema em relação ao problema que vocês conhecem ou é o mesmo problema?

A: O problema é o mesmo, mas não tem a pergunta da fração do doce.

P: Tem mais alguma coisa de diferente?

A: No outro problema tinha a quantidade de alunos?

A: Não, tinha somente as frações.

A: Eu até fiquei me perguntando quantos alunos tinham nesta sala.

A: Minha curiosidade era saber quantos alunos levaram cada uma das coisas.

A: A minha curiosidade era saber quanto de comida teria.

c) Podemos dizer que nós já conhecemos a nossa situação problema?

A: Sim, o enunciado é o mesmo.

A: A história do problema é a mesma.

A: Qual é o problema? O que eu tenho que fazer?

A: Neste problema não há perguntas, eu não sei o que fazer.

A: Primeiro temos que organizar as informações.

A: Quais informações? Para que, se eu não sei o que fazer.

d) No problema apresentado para vocês está faltando alguma coisa?

A: Falta a pergunta.

P: Toda situação problema precisa ter uma pergunta?

A: Tem, para saber o que fazer.

A: Todo problema precisa de uma solução.

P: Neste problema você sabe o que fazer?

A: Não sei, não tem pergunta.

P: Então vocês acham que está faltando alguma coisa?

A: Está sim, eu não sei o que fazer.

A: Isto é mesmo um problema.

e) O que poderia perguntar esta situação problema?

A: A fração correspondente a quantidade de doce.

A: Vai fazer a mesma pergunta da situação problema que nós já resolvemos?

A: Se for, eu já sei resolver.

A: Acho que não, poderia ser se a quantidade de doces vai ser suficiente.

A: Ou a quantidade de suco ou a quantidade de refrigerante.

A: Sem salgadinho não pode ficar, acho que vai perguntar quantos alunos vão levar salgadinho.

A: Ou quantos alunos vão levar cada um dos itens.

P: Tem mais alguma sugestão?

A: Quantos anos vai fazer a escola? A festa é somente para os alunos da sala do Lucas e do João? E se outras salas quiserem participar?

A: Com estas informações não dá para saber a idade da escola.

Após o questionamento inicial sobre ser ou não uma situação problema, se é um problema conhecido para eles, quais os possíveis fins para a situação, entregar a ficha (Quadro 16) para as duplas, com a parte da situação problema que está faltando, deixar que eles discutam como solucionar o problema, reservando o tempo aproximado de 15 minutos, em seguida socializar as resoluções apresentadas pelos alunos, permitindo a discussão das resoluções pelos alunos.

Quadro 16 – Continuação da situação problema TAREFA V.

João perguntou:

– Quantos alunos ficarão responsáveis por cada item da festa?

Lucas ficou confuso, não sabe muito bem como responder a esta pergunta. João continuou perguntando:

– Vamos chamar os alunos das outras salas?

– Quantos alunos tem na escola inteira?

– Ouvi dizer que há 450 alunos.

– Quantos alunos irá trazer cada item se continuar usando as mesmas frações?

Ajude João e Lucas a resolver esta situação, pensando somente nos alunos de sua sala e depois nos alunos de toda a escola.

Fonte: da autora.

P: Agora que vocês possuem o final do problema e discutiram em duplas como resolver a situação problema. Como ficaram as soluções? Quem poderia compartilhar.

A: São 36 alunos, como $\frac{1}{9}$ dos alunos estão responsáveis pelos refrigerantes são 9

alunos, $\frac{2}{9}$ dos alunos estão responsáveis pelo suco e corresponde a 18 alunos, $\frac{4}{9}$ dos

alunos estão responsáveis pelo salgado que corresponde a 36 alunos e $\frac{2}{9}$ dos

alunos estão responsáveis pelo doce e corresponde a 18 alunos.

P: O que acontece se você adicionar todos os valores que você encontrou?

A: Se eu adicionar $9 + 18 + 36 + 18 = 81$ alunos.

P: Quantos alunos tinham na sala no início do problema.

A: No início do problema eram 36 alunos na sala.

P: Qual resultado você obteve ao adicionar os valores que você descobriu?

A: Ao somar obtive 81 alunos.

A: Tinha que ter dado 36, que é o total dos alunos, por que deu 81?

P: Explique sua resolução. Por que seu primeiro resultado deu 9?

A: Como a fração é $\frac{1}{9}$, então são 9 alunos.

A: Por que 9 alunos.

A: O denominador é 9, então são nove alunos.

P: Se tivesse 18 alunos, $\frac{1}{9}$ continuaria sendo 9 alunos?

A: Continuará, porque o denominador continua sendo nove.

P: O que os 18 alunos representam?

A: O total de alunos.

P: E o nove em relação ao todo que é 18, o que ele representa?

A: O nove em relação ao todo representa $\frac{1}{9}$.

A: Mas 9 é metade de 18. E $\frac{1}{2}$ é diferente de $\frac{1}{9}$, nós já vimos isto.

A: Se você considera que nove é metade de 18 como 9 pode também representar $\frac{1}{9}$?

A: Não sei, estou olhando para o denominador e o denominador é nove.

P: Quando o total de alunos era 36, para $\frac{2}{9}$ você considerou que seriam 18 alunos,

para 18 alunos a fração $\frac{2}{9}$ iria corresponder a quantos alunos.

A: Continuará sendo 18.

A: Por que dezoito?

A: O denominador é 9 e o numerador 2 é só multiplicar 9 por 2, que vai ter como resultado 18.

A: Mas se você considerar 18 como o total de alunos, 18 não pode ser $\frac{2}{9}$, porque 18 é o total de aluno.

P: Se você precisasse de $\frac{3}{9}$ de 18 como faria?

A: Como o denominador é 9 e o numerador 3 eu vou multiplicar 9 por 3, que vai ter como resultado 27.

A: Mas 27 é maior que 18, e $\frac{3}{9}$ é menor que um inteiro. Ainda não concordo com sua resolução.

A: Acho que o problema está em considerar o denominador como resultado. Se a quantidade total fosse menor que nove teria como resultado de $\frac{1}{9}$ ainda 9, sem saber quanto é o total de pessoas ou objetos?

P: Então você teria outra maneira de resolver?

A: A fração representa uma parte do todo, então eu quero uma parte de nove partes.

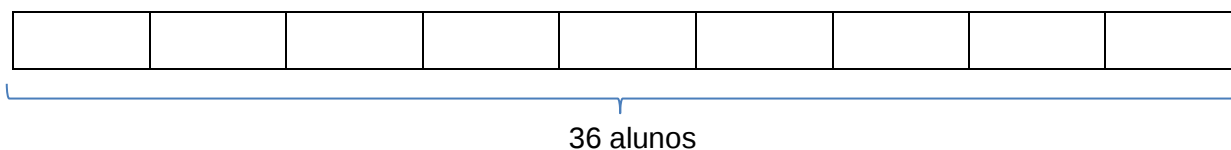
P: O que representa a parte e o todo?

A: A parte representa a quantidade de alunos que irá levar cada coisa e o todo a quantidade de alunos que há na sala.

A: Então você pode repartir a sala em grupos para encontrar a parte que deseja?

A: Esta foi a minha ideia para solucionar, eu representei na forma de desenho e ficou desta forma.

Figura 43 – Representando a quantidade de alunos.



Fonte: da autora.

A: Neste caso reparti o desenho em 9 partes e o total representa 36 alunos, para descobrir a quantidade de alunos em cada parte eu dividi 36 por nove.

A: Por que você dividiu por nove o total de alunos.

A: Pois desta maneira eu consigo descobrir quantos alunos ficariam em cada parte, fazendo a divisão de 36 por 9 o resultado é 4, então cada parte representa 4 alunos (Figura 44).

A: E qual fração estes quatro alunos pode representar?

A: Cada quatro alunos representa a fração $\frac{1}{9}$, se cada parte representa 4 e eu tenho nove partes, ao todo eu tenho 36, que representa o total de alunos.

Figura 44 – Representando a quantidade de alunos por partes.

4	4	4	4	4	4	4	4	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---

36 alunos

Fonte: da autora.

A: Para descobrir quantos alunos representam $\frac{1}{9}$ do total de alunos da sala que ficaram responsáveis em levar o refrigerante, vou pegar uma parte de nove. Consigo ver que uma parte de nove é 4, então quatros alunos ficaram responsáveis pelo refrigerante.

P: Alguém ficou ainda com dúvida na resolução que o colega propôs.

A: Então eu não posso pegar o número que está no denominador para dizer que é a parte que estou procurando, tenho que dividir a minha quantidade pelo número que está no denominador e em seguida descobrir quanto cada parte vale e a resposta é a soma das quantidades de parte que estou procurando?

A: Foi assim que eu resolvi.

P: Você usou o mesmo procedimento para descobrir as outras quantidades de alunos?

A: Usei a mesma ideia, o meu desenho já estava pronto então fui verificando as frações e somando até descobrir quanto de cada coisa cada aluno iria levar.

A: E quantos ficaram de levar o suco?

A: Como a fração de alunos é $\frac{2}{9}$, faço $4 + 4 = 8$, então são 8 alunos para levar suco.

A: Para levar salgado a fração é $\frac{4}{9}$, então são quatro alunos.

A: Não, são quatro partes e cada parte corresponde a quatro, ao todo serão 16 alunos.

A: Que conta você fez?

A: Somei $4 + 4 + 4 + 4 = 16$.

A: Poderia também ter multiplicado $4 \times 4 = 16$.

A: Tanto pode ser feito a adição quanto a multiplicação.

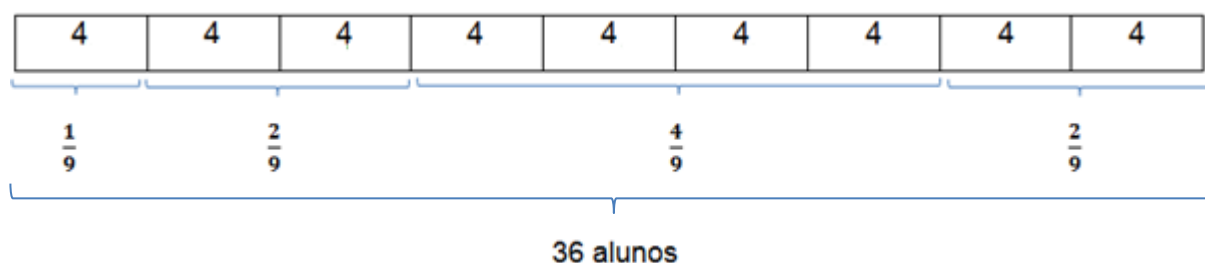
A: Verdade, para os doces a fração é $\frac{2}{9}$, então são 8 alunos.

A: Meu resultado foi este, descobri que 4 alunos estão responsáveis pelos refrigerantes, 8 pelo suco, 16 pelo salgado e 8 alunos responsáveis pelos doces.

P: Desta forma de resolver o que acontece ao adicionar todos os valores que você encontrou?

A: São 4 alunos responsáveis pelos refrigerantes, 8 pelo suco, 16 pelo salgado e 8 pelos doces, $4 + 8 + 16 + 2 = 36$, e 36 é o total de alunos.

Figura 45 – Representando a quantidade de alunos por partes e fração.



Fonte: da autora.

P: Foi possível validar a resposta dele?

A: Sim, porque olhando para o desenho que ele fez e ao somar as partes ele descobriu o total, assim é válida a resposta que ele obteve.

P: Alguém gostaria de comentar ou resolver de outra maneira?

A: Ele adicionou $4 + 4 = 8$ para descobrir a quantidade correspondente a fração $\frac{2}{9}$, ele poderia multiplicar 4 por 2, o resultado também seria quatro.

P: Algum outro comentário ou resolução?

A: Olhando para esta resolução, se é possível multiplicar o resultado da divisão de 36 por 9 pelo número que está no numerador, há uma outra maneira de pensar, mas eu não sei se dará certo.

P: E como seria esta sua resolução?

A: Poderia multiplicar o total de alunos pelo numerador e depois dividir o resultado pelo número que está no denominador.

P: Resolva para ver o que irá acontecer.

A: Vou tentar, 36 vezes 2 é igual a 72 e 72 dividido por 9 é 8, bateu com o resultado dele.

A: Será que também vai dar certo com a fração $\frac{4}{9}$?

A: Vou testar, 36 vezes 4 é igual a 144 e 144 dividido por 9 é 16, deu certo, então é válida esta outra forma de resolver?

P: O que vocês acham?

A: Eu acredito que vai dar certo sim, porque 36 vezes 1 é igual a 36 e 36 dividido por 9 é 4, deu certo também, então é válida.

P: Há outra forma de representar estas operações em uma única operação?

A: É uma multiplicação e uma divisão.

A: Posso representar uma divisão por meio de uma fração, será que podemos multiplicar um número comum por uma fração?

A: O que você está querendo fazer?

A: Quero escrever desta forma:

$$36 \times \frac{2}{9} = \frac{72}{9} = 4$$

A: Acho que pode, você está multiplicando e dividindo, só mudou a maneira de apresentar, verdade professora?

P: Sim é possível multiplicar um número natural por uma fração, neste caso a fração exerce o papel de operador, transformando o número natural. Neste caso podemos ler como $\frac{2}{9}$ de 36.

P: Como seria a sua resposta para o problema?

A: Vamos ler novamente o problema, pergunta quantos alunos ficariam responsáveis por cada item para levar na festa, para esta pergunta a resposta é: Dos 36 alunos da sala de Lucas e João, 4 alunos estão responsáveis pelos refrigerantes, 8 pelo suco, 16 pelo salgado e 8 alunos responsáveis pelos doces.

A: Mas tem mais uma pergunta, a outra parte do problema é se eles chamassem os alunos da escola inteira, quantos alunos ficariam responsáveis por cada item.

A: Para resolver esta parte do problema precisamos saber quantos alunos há na escola, eu não sei.

A: São 450 alunos, está escrito no problema, você não viu?

A: Verdade. Então eu posso dividir 450 por 9, que vai dar 50, então cada parte das nove representa 50 alunos. Uma parte dos alunos está responsável pelo refrigerante, 50 alunos, duas partes pelo suco, duas partes de 50 é 100, quatro partes pelo salgado, 4 partes de 50 é 200 e duas partes pelos doces que serão 100.

A: Se adicionarmos todos os valores vai ser 450?

A: Vai sim, vamos ver, $50 + 100 + 200 + 100 = 450$, então a resposta é se Lucas e João resolverem chamar todos os alunos da escola, 50 alunos ficarão responsáveis pelo refrigerante, 100 pelo suco, 200 pelo salgadinho e 100 pelos doces.

P: Alguma outra resolução?

A: Minha resposta é a mesma, mas minha resolução é um pouco diferente.

$$450 \times \frac{1}{9} = \frac{450}{9} = 50, \text{ (refrigerante)}$$

$$450 \times \frac{2}{9} = \frac{900}{9} = 100 \text{ (suco)}$$

$$450 \times \frac{4}{9} = \frac{1800}{9} = 200, \text{ (salgado)}$$

$$450 \times \frac{1}{9} = \frac{450}{9} = 50, \text{ (doce)}$$

P: Com isto está resolvido o nosso problema?

A: Agora acho que sim, não tem mais nenhuma pergunta e nosso problema está resolvido.

Ao término da resolução da primeira situação problema da tarefa, propor uma segunda situação problema, neste momento espera-se que os alunos possam solucionar esta situação sem maiores dificuldades, caso elas ocorram o professor deve ficar atento para realizar as interferências necessárias.

Para esta parte da tarefa entregar o Quadro 17, com a segunda situação problema contendo o problema da Tarefa IV, com a quantidade total de figurinhas do álbum, determinar o tempo de 25 minutos para a resolução da situação problema, orientá-los para organizar as informações, traçar um plano e executá-lo, não se esquecendo de validá-lo, deixar os alunos em duplas para resolver a situação apresentada, ao término do tempo determinado abrir para socialização, selecionando alunos que cometeram equívocos ao resolver para que estes alunos

exponham suas soluções e possam compreender o processo para solucionar o problema.

Quadro 17 – Ficha de trabalho da TAREFA V entregue impressa aos alunos.

Álbum de figurinhas

Os amigos Antônio, Beto, Carlos e Davi começaram a preencher cada um, um álbum de figurinhas com 180 figurinhas. Durante um mês (4 semanas) foram comprando e trocando as figurinhas e a cada semana preenchiam uma tabela para saber quantas figurinhas haviam colado naquela semana. Ao final do mês decidiram verificar quem estava com a maior parte do álbum preenchida. Antônio falou que na primeira semana havia preenchido $\frac{1}{6}$, na segunda semana $\frac{2}{6}$, na terceira semana $\frac{1}{6}$ e na quarta semana novamente $\frac{1}{6}$ do total de figurinhas de seu álbum. Em seguida

Beto disse que preencheu em cada semana nesta ordem $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ e $\frac{1}{5}$, Carlos já foi falando as frações das quantidades de figurinha que havia preenchido em cada semana $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{2}{10}$ e para finalizar Davi disse: Em cada semana meu álbum ficou com $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$, do total de figurinhas.

Na primeira semana qual dos amigos preencheu a maior quantidade de figurinhas do álbum? Qual a quantidade total de figurinhas cada amigo preencheu do álbum no final das quatro semanas? Para este mesmo problema poderia o álbum ter qualquer quantidade de figurinhas? Quais outras quantidades de figurinhas poderia ter este álbum?

Fonte: da autora.

Após o tempo determinado de 20 minutos, chamar alguns alunos para socializar suas soluções, pedindo para que os demais aguardem para discutir a resolução apresentada pelos colegas.

P: Comece explicando sua solução.

A: A história deste problema já era conhecida por nós.

P: Qual a diferença?

A: Tinha a quantidade de figurinhas e o que era para resolver.

P: Como você começou sua resolução?

A: Separei e organizei as informações, como já havíamos feito no outro problema.

Quadro 18 – Organizando a situação problema.

Amigo	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	Total
Antônio	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{25}{30}$
Beto	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{26}{30}$
Carlos	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{27}{30}$
Davi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{25}{30}$

Fonte: da autora.

A: Completei a tabela com os resultados do total de figurinhas que os amigos completaram ao final das quatro semanas.

A: Por que você deixou uma linha na frente do nome de cada amigo?

A: Para colocar as quantidades de figurinhas que eles completaram em cada semana e o total.

A: E como faz para descobrir quantas figurinhas eles completaram em cada semana?

A: Como nós aprendemos no problema anterior, tem varias formas de fazer, eu resolvi por meio da divisão.

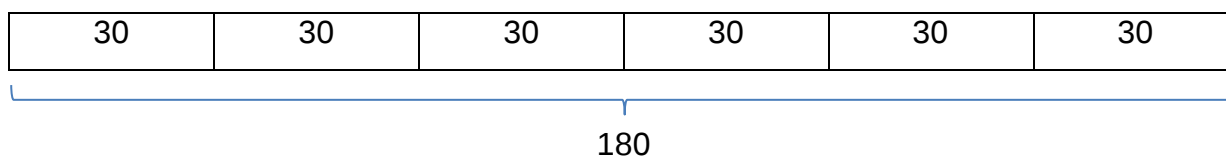
P: Pode continuar.

A: O álbum de figurinhas possui 180 figurinhas, na primeira semana Antônio completou $\frac{1}{6}$ do álbum, então eu dividi 180 por 6, o resultado deu 30.

A: O que quer dizer este resultado 30?

A: Quer dizer que o total de figurinhas do álbum foi repartida em seis partes e, cada parte desta corresponde a 30.

Figura 46 – Figurinhas por partes.



Fonte: da autora.

A: Se na primeira semana ele preencheu $\frac{1}{6}$ do álbum, quer dizer que ele preencheu uma parte de 6, então ele preencheu o álbum com 30 figurinhas.

P: Pode continuar sua resolução.

A: Na segunda semana ele preencheu $\frac{2}{6}$ do álbum de figurinhas, quer dizer que ele preencheu ($2 \times 30 = 60$), 60 figurinhas do álbum.

A: Na terceira e quarta semana repete a fração $\frac{1}{6}$ que já sabemos quanto é, pois dividimos 180 por 6 e resultou em 30, foi este o resultado que você encontrou certo?

A: É, então em cada semana, terceira e quarta, ele conseguiu colocar 30 figurinhas, a fração é $\frac{1}{6}$.

P: Com estas informações o que você pode fazer?

A: Consigo preencher o quadro (Quadro 19) que organizei as informações e descobrir a quantidade de figurinhas que ele preencheu no final de todas as semanas.

A: E como saber quantas figurinhas ele preencheu no final das quatro semanas?

A: Eu posso fazer $30 + 60 + 30 + 30 = 150$, que são as quantidades que ele conseguiu preencher em cada semana.

A: Como resolver o problema com a fração $\frac{25}{30}$?

A: Por que com a fração $\frac{25}{30}$?

A: Porque é o total de frações das 4 semanas.

A: Não sei como fazer, vamos pensar.

A: Se você dividiu 180 por 6, para descobrir a fração $\frac{1}{6}$, e 6 é o denominador, então podemos dividir 180 por 30, porque 30 é o denominador.

A: Acho que vai dar certo, vamos tentar, 180 dividido por 30 é igual a 6.

A: Agora eu não sei o que fazer.

A: Quantas partes de trinta são.

A: São vinte e cinco partes de trinta.

A: Então vamos multiplicar 6 por 25.

A: Vai dar 150, chegou ao mesmo número.

P: Tem outra maneira de resolver este mesmo problema?

A: Estava aqui observando e pensando, se eu divido a quantidade de figurinhas pelo numerador e multiplico o resultado pelo numerador. Posso multiplicar pelo numerador e dividir pelo denominador vai dar o mesmo resultado.

P: Explique melhor sua ideia, escreva.

A: Vou multiplicar 180 por $\frac{25}{30}$.

$$180 \times \frac{25}{30} = \frac{4500}{30} = 150$$

A: Deu o mesmo resultado 150.

P: Podemos usar esta ideia para resolver os problemas?

A: O resultado é o mesmo.

A: Então podemos resolver o problema desta maneira também.

P: Agora que sabemos maneiras diferentes de solucionar o problema, vamos terminar de resolver o problema. Quem pode continuar a resolução do problema.

A: Para saber o total de figurinhas do Beto vou multiplicar 180 por $\frac{26}{30}$.

$$180 \times \frac{26}{30} = \frac{4680}{30} = 156$$

A: Para saber o total de figurinhas do Carlos vou multiplicar 180 por $\frac{27}{30}$.

$$180 \times \frac{27}{30} = \frac{4860}{30} = 162$$

A: A quantidade de figurinhas do Davi é a mesma quantidade de figurinhas do Antônio no total são 150.

Quadro 19 – Organizando a situação problema.

Amigo	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana	Total
Antônio	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{25}{30}$
	30	60	30	30	150
Beto	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{26}{30}$
	36	60	24	36	156
Carlos	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{27}{30}$
	54	18	54	36	162
Davi	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{25}{30}$
	45	60	30	15	150

Fonte: da autora.

P: Como ficaria a sua resposta para o problema?

A: Preciso voltar ao enunciado para ver, lá está perguntando muitas coisas. A primeira é qual dos amigos preencheu a maior quantidade de figurinhas do álbum na primeira semana?

A: Para descobrir a resposta para este problema posso olhar no quadro que preenchemos e responder que na primeira semana quem mais preencheu o álbum

foi o Carlos com 54 figurinhas, depois o Davi com 45 figurinhas, o Beto com 36 e o Antônio preencheu a menor quantidade que foi 30.

P: Qual seria a resposta para a segunda pergunta?

A: A segunda pergunta é: qual a quantidade total de figurinhas cada amigo preencheu do álbum no final das quatro semanas?

A: Olhando novamente no quadro as quantidades de figurinhas de cada amigo é Antônio e Davi com 150 figurinhas cada um, Beto com 156 e Carlos com 162 que completou a maior parte do álbum.

A: Para o Carlos está faltando apenas 18 figurinhas.

P: Terminaram as perguntas?

A: Não, ainda tem mais duas perguntas, uma delas é se poderia o álbum ter qualquer quantidade de figurinhas?

A: Acho que um álbum pode ter qualquer quantidade de figurinhas.

A: A pergunta é em relação ao problema que estamos trabalhando. Se o álbum tiver 100 figurinhas é possível saber a quantidade de figurinhas que cada amigo preencheu?

A: Vamos testar, vou pegar o total de figurinhas do Antônio, ele tem $\frac{25}{30}$ do álbum completo, então tem que dividir 100 por 30 ...

A: Mas, não deu um número inteiro esta divisão o resultado foi 3,333... e não termina a conta. Vou multiplicar por 25, o resultado é 83,333...

A: É possível preencher esta quantidade de figurinhas 83,333...?

A: Se deu este resultado a conta, pode.

A: Não pode ter esta quantidade de figurinha 8,333..., a quantidade de figurinha deve ser sempre inteira.

A: Acho que não, será que eu fiz alguma conta errada, vou resolver de outra maneira.

$$100 \times \frac{25}{30} = \frac{2500}{30} = 83,333...$$

A: Deu o mesmo resultado, então algumas quantidades de figurinhas não vão dar certo.

A: E agora como fazer? Tenho que testar número por número?

A: Será que é o melhor caminho? Vamos tentar.

P: Depois de testar alguns números, descobriram quais seriam estes números?

A: Eu testei vários, deu certo o 120, o dele deu certo o 90 e o 60.

A: Além destes o meu deu certo o 210 e nenhum outro que eu testei.

P: O que estes números têm em comum?

A: Terminam em 0.

P: Quando um número termina em zero o que isto quer dizer?

A: Então eles pares.

A: Se eu continuar a tabuada do 5 eu os encontro.

A: Se eu continuar a tabuada do 10 eles aparecem.

P: E isto, o que quer dizer?

A: Que eles são múltiplos de 10.

P: Somente múltiplos de 10?

A: Não, também são múltiplos de 2 e 5.

A: Se eu tirar o zero eles são múltiplos de 3.

A: Com o zero são múltiplos também de 30.

A: Trinta é o denominador das fações do total de figurinhas que cada um preencheu.

A: Então para ser resposta do problema, o álbum não pode ter qualquer quantidade de figurinhas, elas precisam ser múltiplas de 30.

A: Assim responde também a próxima pergunta: Quais outras quantidades de figurinhas poderia ter este álbum?

Ao término dessas situações problemas é possível apresentar outras para que se possa verificar o aprendizado dos alunos e eles possam validar o conhecimento oportunizado nesta tarefa e implementá-lo em outras tarefas distintas desta.

4.6 TAREFA VI

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender o processo envolvido na multiplicação de frações.
- Realizar operações de multiplicação entre frações.

MATERIAL: Ficha de tarefa (Quadro 20) com situação problema para desenvolvimento da Tarefa VI, folhas de papel e lápis de cor.

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala de aula para que as tarefas possam ser realizadas em duplas;
- ✓ entregar a ficha com o primeiro problema e as questões norteadoras para o desenvolvimento da tarefa;
- ✓ orientar os alunos para a resolução, visando uma leitura atenta;
- ✓ socializar as resoluções encontradas pelos alunos do primeiro problema;
- ✓ apresentar outro problema;
- ✓ andar pela sala para observação e auxílio aos alunos;
- ✓ realizar os questionamentos aos alunos;
- ✓ verificar os processos de resolução dos alunos.

Entregar a ficha (Quadro 20) aos alunos deixando que eles resolvam a situação problema refletindo em cada passo de sua resolução, seguindo as orientações presentes na ficha e respondendo as questões inclusas.

Determinar o tempo de 15 minutos para resolução e abrir para a socialização entre os alunos, não deixando de questionar e pensar nas hipóteses apresentadas pelos alunos.

Quadro 20 – Ficha para a realização da Tarefa V.**Meia receita**

Ana estava ajudando sua mãe a fazer um bolo. Sua mãe pediu que ela separasse as medidas da receita, lá estava pedindo $\frac{3}{4}$ de xícara de leite e $\frac{2}{5}$ xícara de açúcar e dois ovos. Ana começou pelos ovos e percebeu que havia apenas um, avisou sua mãe, que disse que faria apenas metade da receita, pedindo para ela medir apenas metade dos ingredientes. Como Ana resolveu esta situação? Ajude Ana a resolver o problema explicando seus passos.

Em seguida:

- a) Escreva uma operação com frações que represente corretamente a fração da xícara que foi usada de leite e de açúcar da receita realizada.**

- b) Realize a operação indicada no item anterior utilizando um desenho com “barrinhas” para representar as frações e a operação.**

Fonte: da autora.

Em princípio os alunos irão explicar como Ana resolveu o problema por meio de desenhos, esquemas e explicações. Cabe ao professor ficar atento, orientar e esclarecer junto aos alunos as resoluções que apresentem equívocos de compreensão e resolução.

P: Se você fosse a Ana como você resolveria o problema?

A: Para medir o leite, iria medir a quantidade de $\frac{3}{4}$ da xícara e em seguida pegar apenas metade, dividindo em duas xícaras e devolvendo uma parte.

A: Eu iria marcar com uma caneta a xícara em $\frac{3}{4}$ e em seguida iria ver a metade, dividindo por dois.

Já na resolução das questões presentes na situação problema os alunos tendem apresentar dificuldades na resolução do item a), que pede para escrever uma operação entre as frações, provavelmente os alunos não consigam representar qual será esta operação que pode representar o problema. Neste momento a intenção é retomar o uso do conectivo “de” e sua representação como multiplicação, neste caso multiplicação entre duas frações. Para esta parte da tarefa questione os alunos sobre qual seria esta operação e como realizar esta operação.

P: No item a) pede para escrever uma operação matemática, qual é esta operação?

A: Eu acho que a divisão, $\frac{3}{4} \div 2$.

A: Como resolver esta divisão?

A: Neste caso eu não sei.

A: Mas diz no problema que a Ana fez metade da receita e você dividiu por dois e não por metade.

A: Mas metade é a divisão por dois.

A: Se eu estou dividindo um número por dois é o mesmo que representar $\frac{1}{2}$.

A: Então vou dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$?

P: Dividir por dois é o mesmo que dividir por $\frac{1}{2}$?

Frações inversas são duas frações cujo produto é igual a 1 $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1\right)$.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

A: É, representa a mesma situação.

A: Não consigo entender esta parte.

A: Não pode ser, meio é a fração inversa de 2, então não é a mesma coisa.

P: Se é a fração inversa à operação é a mesma?

A: Não, a operação é inversa também e qual é a operação inversa da divisão?

A: A operação inversa da divisão é a multiplicação.

P: Neste caso quando falamos em $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, qual a operação que está envolvida? O que representa este “de”?

A: A operação envolvida é a multiplicação e quando resolvemos os problemas das figurinhas e o problema da festa falava em $\frac{1}{9}$ de 36.

A: A operação envolvida também era a multiplicação.

A: Então sempre que tiver $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$ eu multiplico?

P: Sim este conectivo “de” representa a operação de multiplicação.

A: Quando tem este “de” a operação envolvida é a multiplicação.

A: Vou escrever a operação

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

A: A outra operação é:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

A: A operação está escrita, mas como resolve?

P: Para responder a esta pergunta vamos trabalhar com dobras em folhas de papel.

A: Dobrar papel? Como dobrar papel vai responder a minha pergunta?

A: Vamos esperar e ver onde vamos chegar.

P: O colega de vocês irá distribuir uma folha para cada dupla, vamos aguardar até que ele entregue para todos para começarmos o nosso trabalho. Por favor, distribua as folhas para seus colegas, uma folha por dupla.

A: Pronto, terminei. Já podemos começar?

P: Por meio de dobras horizontais e verticais vamos representar as frações. Cada fração devo escolher um sentido para dobrar.

A: Não estou entendendo.

A: Espera, não tem as frações ainda.

A: Verdade como vou dobrar sem saber quais são as frações.

P: Em um sentido dobre o papel para representar $\frac{3}{5}$.

A: Dobrei em três partes, está correto?

A: Não é para representar uma fração com três partes e sim com cinco partes.

A: Como assim?

A: A fração é $\frac{3}{5}$ então de cinco partes eu pego três.

A: Então eu peguei três.

A: Mas onde estão às cinco partes?

A: Vou representar no outro sentido.

A: Cada fração é em um sentido. A fração $\frac{3}{5}$ deve ser representada na horizontal ou na vertical, não é para representar o denominador em um sentido e o numerador em outro.

P: Como ficou a sua representação?

A: Dobrei em cinco partes e tenho que pegar estas três, mas o que fazer? Posso pintar?

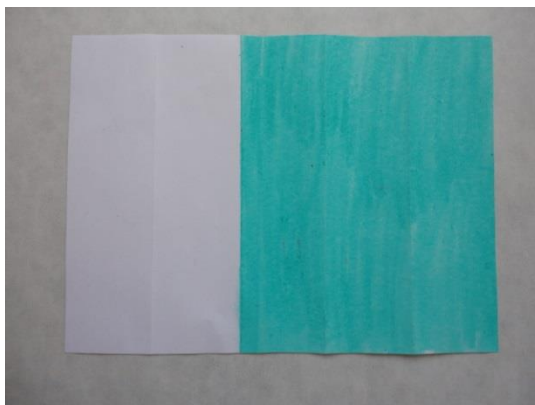
P: Tem outra forma de representar, sem ser pintando.

A: Neste caso não, ou eu pinto ou risco.

A: Posso usar também listas, bolinhas corações ou estrelas.

A: A minha ficou assim:

Figura 47 – Dobras no papel para representar a fração $\frac{3}{5}$.



Fonte: da autora.

A: A minha também.

P: Alguém fez diferente?

A: A minha ficou no outro sentido, tem problema?

A: Não ficou do mesmo jeito.

P: Agora vamos representar a fração $\frac{1}{4}$ no outro sentido.

A: Vou dividir em quatro partes e pintar uma só.

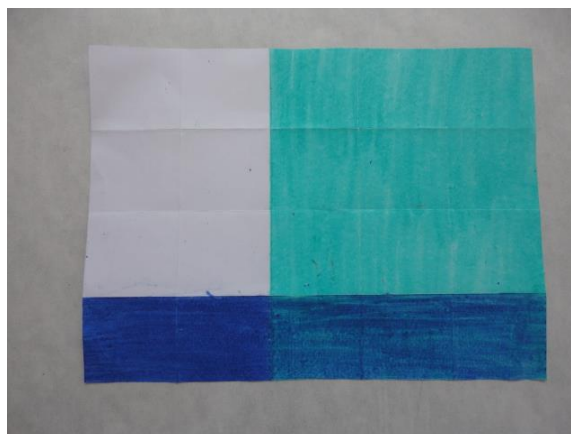
A: É para pintar do outro lado ou do mesmo lado?

P: É para pintar ou representar do mesmo lado.

A: Como a outra fração eu pinte, esta eu vou desenhar.

A: Boa ideia, a minha primeira fração eu desenhei esta eu vou pintar.

Figura 48 – Dobras no papel para representar a fração $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$.



Fonte: da autora.

P: O que podemos observar?

A: Que algumas partes ficaram pintadas com as duas cores.

A: Outras partes ficaram pintadas apenas de uma cor ou da outra cor.

P: Quantas partes ficaram divididas

A: São cinco partes da primeira fração.

A: Não, são quatro partes da segunda fração.

A: São vinte partes pequenas. Cinco em um sentido e quatro no outro sentido.

A: Exato ao todo são vinte partes.

P: Quantas partes ficaram pintadas com as duas cores ao mesmo tempo?

A: São quatorze partes. Eu contei todas.

A: Não são quatorze partes e sim três. A pergunta foi “Quantas partes ficaram pintadas com as duas cores ao mesmo tempo?”

A: São apenas três, tem duas partes pintadas de uma cor e nove partes pintadas de outra cor. Mas pintadas com as duas cores ao mesmo tempo são as três.

P: Qual a fração que posso representar com estas partes em relação ao todo?

A: São três partes de vinte.

A: A fração será representada por $\frac{3}{20}$.

P: Qual a relação entre as frações representadas no papel $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$ e a fração $\frac{3}{20}$?

A: Todas estão representadas no papel, as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{4}$ estão cada uma em um sentido do papel e a fração $\frac{3}{20}$ é a fração da parte pintada em comum.

A: Mas $1 \times 3 = 3$ e $5 \times 4 = 20$.

A: É assim que multiplica frações?

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

A: É verdade então é só multiplicar os numeradores e os denominadores.

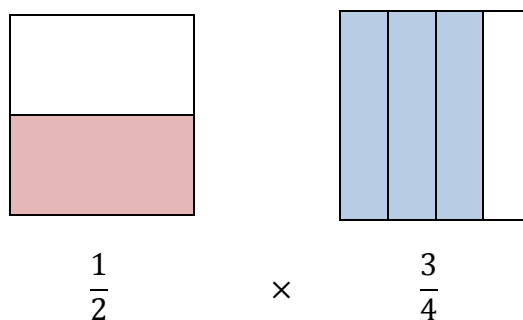
P: Vamos verificar se é verdade para outras frações.

Entregar folhas aos alunos e deixar que eles verifiquem a validade da multiplicação de frações para outras frações que eles determinarem, por meio do mesmo procedimento anterior. Em seguida abrir para verificação e validação das duplas, provavelmente cada dupla escolherá frações diferentes para multiplicar e poderão verificar que será válida a regra.

P: Para responder ao resultado da multiplicação vamos representar a multiplicação por meio de “barrinhas”. Para uma das frações as barrinhas devem ser horizontais e para a outra na vertical.

Oriente os alunos para resolver o item b) usando para representar as cada fração “barrinhas” horizontais e verticais, (mesma ideia das dobras no papel) para a compreensão e reflexão da operação de multiplicação entre as frações e encontro de frações equivalentes.

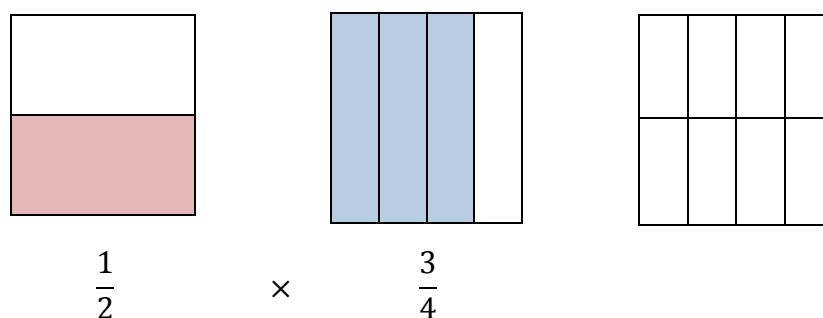
A: Vai ficar assim:

Figura 49 – Multiplicação de frações com “barrinhas”

Fonte: da autora.

P: Para representar a multiplicação com as barrinhas, sobreponha às duas representações.

A: Tem que colocar duas linhas e quatro colunas.

Figura 50 – Resultado da multiplicação de frações com “barrinhas”

Fonte: da autora.

A: Ficou sem pintar a representação das frações?

A: Eu não sei quanto será o resultado.

P: O que acontece se você sobrepor, colocar uma sobre a outra com cores diferentes?

A: Tenho que pintar a parte de baixo de vermelho.

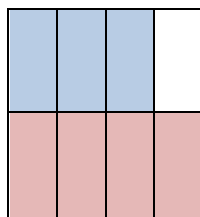
A: Como assim a parte de baixo?

A: A parte que representa a $\frac{1}{2}$ do desenho.

A: São os quatro que estão na parte de baixo.

A: E depois como você vai pintar a outra parte?

A: Tenho que pintar três colunas.

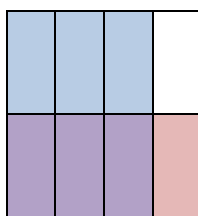
Figura 51 – Sobreposição realizada pelo aluno.

Fonte: da autora.

A: Assim está faltando pintar as três colunas inteiras.

A: Mas a coluna já está pintada.

A: Não você pintou apenas a parte de cima falta a parte de baixo também já que são três colunas.

Figura 52 – Sobreposição da “barrinhas” para representar a multiplicação.

Fonte: da autora.

P: Quantas partes estão pintadas?

A: Ao todo estão pintadas 7 partes de 8, então o resultado da multiplicação é $\frac{7}{8}$?

A: As partes não estão pintadas da mesma cor.

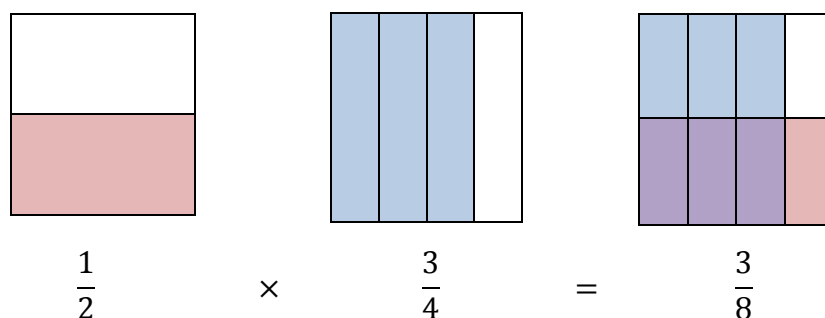
P: Quantas partes foram sobrepostas? Que ficaram pintadas com as duas cores?

A: Tem três partes pintadas com as duas cores ao mesmo tempo.

A: São três partes de 8 partes, a fração é $\frac{3}{8}$.

A: O resultado da multiplicação é com as barrinhas é $\frac{3}{8}$ (Figura 53).

P: Olhando para o resultado da multiplicação com as barrinhas, qual a relação com as frações que estão multiplicando?

Figura 53 – Resultado da multiplicação de frações com “barrinhas”.

Fonte: da autora.

A: O resultado é o numerador da segunda fração, mas o denominador não sei.

A: Olha 2×4 é oito.

A: E 1×3 é 3.

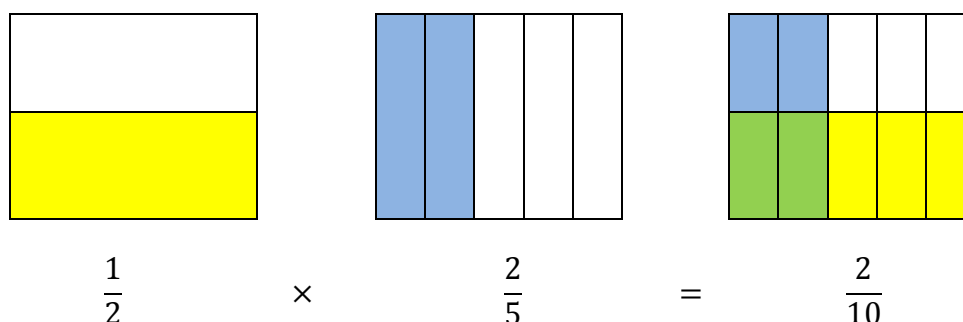
A: Como vai ficar a multiplicação?

A: Acho que tem que multiplicar os numeradores e os denominadores.

A: É assim mesmo?

P: Vale para a outra multiplicação de fração também?

A: Vamos verificar

Figura 54 – Verificando a multiplicação com “barrinhas”.

Fonte: da autora.

A: Vale para esta multiplicação também.

P: Formule uma regra para a multiplicação de fração.

A: Multiplica numerador pelo numerador e coloca o resultado no numerador, multiplica o denominador pelo denominador o resultado é o denominador da fração.

Para multiplicar frações: multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador, respeitando suas posições. Simplificar o resultado obtido, sempre que possível.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemplo:

$$\frac{4}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{4 \times 5}{7 \times 6} = \frac{20}{42} = \frac{20 \div 2}{42 \div 2} = \frac{10}{21}$$

Ao término da resolução deste problema propor aos alunos outras situações problema que tenham como objetivo resolver multiplicação de frações. As situações problema permitem que os alunos desenvolvam diferentes habilidades, contribuindo para o processo de aprendizagem.

4.7 TAREFA VII

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender o processo envolvido na divisão de frações.
- Realizar a operação de divisão entre frações.

MATERIAL: Ficha de trabalho (Quadro 21) para o desenvolvimento da TAREFA VII

PROCEDIMENTO:

- ✓ organizar a sala de aula para que as tarefas possam ser realizadas em duplas;
- ✓ entregar a ficha com o problema;
- ✓ realizar questionamentos sobre o problema;
- ✓ orientar os alunos para a resolução, visando uma leitura atenta;
- ✓ entregar as questões norteadoras para o desenvolvimento da tarefa;
- ✓ socializar as resoluções encontradas pelos alunos do problema;
- ✓ andar pela sala para observação e auxílio aos alunos;
- ✓ realizar os questionamentos aos alunos;
- ✓ verificar os processos de resolução dos alunos.

Para esta sétima tarefa, inicialmente foram pensadas duas situações problemas para desenvolver no aluno a competência de realizar a divisão de frações.

Entregar a ficha (Quadro 21) para os alunos propondo a resolução em duplas para que possam contribuir para a resolução dos dois problemas.

Determinar o tempo de aproximadamente 15 minutos para a solução e em seguida abrir para discussão.

Quadro 21 – Ficha para desenvolvimento da TAREFA VII.

Preparando doces

A mãe de Cristina comprou 9 barras de chocolate de 1kg cada para fazer doces para vender. Cristina resolveu ajudar, sua mãe pediu para ela colocar $\frac{3}{5}$ do quilograma em cada travessa para facilitar o preparo. Cristina começou a separar as quantidades pedidas pela sua mãe, quantas travessas Cristina vai precisar para colocar os chocolates? Quantas receitas serão preparadas?

Preço do suco

Mariana gosta muito de suco de morango, ela foi ao supermercado e comprou $\frac{2}{3}$ de litro de suco e pagou por esta quantidade R\$ 6,00, querendo comprar 1 litro deste mesmo suco, quanto ela teria que levar ao supermercado?

Fonte: da autora.

Deixar que os alunos resolvam as situações problemas da maneira que acharem mais adequadas, estimulando para que eles resolvam, independente da maneira, por desenho, esquema ou operações.

Provavelmente os alunos irão resolver esta situação por meio de desenhos ou esquemas, orientar e verificar caso eles cometam algum equívoco na representação das frações ou até mesmo para contar as quantidades.

Pode surgir um questionamento entre os alunos, dos tipos:

- “quando se multiplica frações elas diminuem” e
- “quando se divide frações o resultado é uma fração com valor maior”.

Estes questionamentos podem ser esclarecidos com esquemas e desenhos como realizado nas tarefas anteriores.

Alguns alunos podem compreender a intenção do problema em resolvê-lo pela operação de divisão, apresentando dificuldade em organizar a operação, cabe ao professor ficar atento e contribuir para que no momento da socialização todos os alunos possam compreender o processo envolvido na operação de divisão de frações.

Após o desenvolvimento da tarefa pelos alunos, da socialização inicial e possíveis resoluções com desenhos e esquemas discutir a solução com a operação de divisão.

P: Como resolver o problema por meio de uma operação?

A: Pelo que percebi a operação envolvida é a divisão, mas eu não sei como resolver.

A: Se é uma divisão tenho que escrever assim $9 \div \frac{3}{5}$.

A: Mas como resolver uma divisão de fração?

A: Tenho que dividir 9 por $\frac{3}{5}$.

P: Como escrever o nove na forma de fração?

A: O nove não é uma fração.

A: Tem como colocar o nove na forma de fração?

A: Para colocar na forma de fração tem que colocar o um no denominador.

A: Se colocar o um no denominador vai mudar o número nove.

A: Não, a fração também pode ser uma divisão, se dividir nove por um, não altera em nada o valor nove.

A: Vou escrever o nove na forma de fração e vai ficar assim: $\frac{9}{1}$.

A: Agora como escrever na forma de divisão?

A: Vai ficar $\frac{9}{1} \div \frac{3}{5}$, agora posso resolver.

A: Vou dividir 9 por 3 que vai dar 3 e depois dividir 1 por 5 que vai dar 5.

A: Um dividido por cinco não vai dar cinco, o resultado não é um número inteiro.

A: Acho que por este caminho não vai dar certo.

P: Como ficaria este resultado?

A: Ficaria $\frac{3}{0,2}$, mas assim acho que não vai dar certo.

A: Toda fração pode ser uma divisão, então tem que dividir 3 por 0,2¹⁵.

P: Se você fizer a divisão você irá encontrar o resultado.

A: Tem uma maneira mais prática?

P: Pense na divisão na forma de fração $\frac{9}{1} \div \frac{3}{5}$, o que pode ser feito.

A: A divisão vai ficar $\frac{9}{1} \div \frac{3}{5}$, posso usar a fração inversa da divisão?

A: Se na multiplicação eu usei a operação inversa, agora também pode.

A: Então vou usar a operação inversa da divisão.

A: A operação inversa da divisão é a multiplicação.

A: Vou inverter a segunda fração e inverter a operação, vai ficar $\frac{9}{1} \times \frac{5}{3}$.

A: O resultado é $\frac{9}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{45}{3}$.

A: Mas assim não vai dar um número inteiro.

A: Toda fração pode ser uma divisão, então é só dividir 45 por 3, vai dar 15.

A: Então vai dar para Cristina colocar em 15 travessas.

A: Se são 15 travessas, sua mãe vai fazer 15 receitas de doce com chocolate.

P: Escreva uma regra para representar a divisão de duas frações.

A: Para fazer a divisão de frações escrevo a primeira e multiplico pelo inverso da segunda fração.

Regra para divisão de frações: mantém a primeira fração (dividendo) e multiplicar pelo inverso da segunda (inverso do divisor). Simplificar o resultado obtido, sempre que possível.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemplo:

$$\frac{4}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{28}{30} = \frac{28 \div 2}{30 \div 2} = \frac{14}{15}$$

¹⁵ O professor pode utilizar este contexto para inclusive elaborar uma nova THA que possibilitará “construir” o conceito de divisão de números decimais.

P: Vocês falaram que toda fração podemos escrever como uma divisão, então podemos escrever uma divisão como uma fração?

A: Acho que não. Como posso escrever uma divisão na forma de fração?

A: Se $\frac{45}{3}$ posso escrever como $45 \div 3$, então eu posso escrever na forma de fração

a divisão $45 \div 3$ que ficará como $\frac{45}{3}$.

A: Agora eu acredito que sim.

P: Então podemos escrever a divisão de $\frac{9}{1} \div \frac{3}{5}$ como uma fração?

A: Será que vai dar certo?

A: Vamos tentar, vai ficar assim:

$$\frac{\frac{9}{1}}{\frac{3}{5}}$$

A: E agora o que fazer?

A: Vamos dividir, mas vamos dividir quem?

A: Se pensar como foi resolvida esta mesma divisão com a multiplicação, o que será que pode ser feito?

A: Na resolução com a multiplicação, fez nove vezes o cinco e uma vez o três.

A: Pensando por este caminho, também é possível, nessa situação, vamos multiplicar os dois que estão nas pontas e os dois que estão no meio da fração.

P: Esta é uma outra maneira de resolver uma divisão entre frações, multiplicando os extremos e os meios.

A divisão de fração colocada na forma

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

(com b, c e $d \neq 0$)

será o produto dos extremos $a \times d$ que será o numerador da fração resultante e o produto dos meios $b \times c$ será o denominador da fração resultante. Simplificar o resultado obtido, sempre que possível.

Há outro método para a resolução de divisão entre frações que pode ser abordada com os alunos, por meio de frações equivalentes.

Transformar as frações com denominadores diferentes, com mesmo denominador.

Exemplo:

$$\frac{4}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{28}{35} \div \frac{30}{35} = 28 \div 30 = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Ou pensar em uma multiplicação pela fração inversa.

Multiplicar o numerador e o denominador da fração pela fração inversa que está no denominador.

$$\frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a \times d}{b \times c}}{\frac{c \times d}{d \times c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{com } b, c \text{ e } d \neq 0).$$

O numerador da nova fração será o produto de $a \times d$ que será o numerador da fração e o produto de $b \times c$ será o denominador da fração, todo número dividido por um é ele mesmo. Simplificar o resultado obtido, sempre que possível.

Exemplo:

$$\frac{4}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{7}{6}}{\frac{6}{7} \times \frac{7}{6}} = \frac{\frac{28}{30}}{\frac{42}{42}} = \frac{28}{30} = \frac{28}{1} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

O professor deve ficar atento e garantir que os demais alunos também consigam compreender o processo de divisão de frações. Os alunos normalmente não aprendem no mesmo instante, cabe ao professor retomar explicar por meio de outros exemplos, e fazer com que os conceitos sejam compreendidos pelos alunos.

P: Para resolver o outro problema o que podemos fazer?

A: Usar a mesma ideia, agora ficou mais fácil.

Questionar os alunos sobre suas resoluções, conferir e garantir que os alunos compreendam o processo da operação de divisão de frações, o segundo problema da ficha de Tarefa (Quadro 21) permite que o aluno valide e aprimore sua compreensão da operação de divisão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta proposta foi elaborada como uma sugestão ao ensino de frações, por meio da qual o aluno possa compreender operações com frações, por meio de Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Seu desenvolvimento permite aos alunos construir diferentes soluções, partindo de seus conhecimentos e chegando à generalização de suas resoluções.

A Resolução de Problemas permite ao aluno refletir e pensar em soluções para as situações propostas, compreender, organizar seu pensamento, estabelecendo um plano de trabalho a ser seguido, executá-lo e realizar conferência dos resultados obtidos, traçando um percurso que permite a resolução, reflexão e tomada de decisões. Ao aluno é permitido buscar novas resoluções, em especial, que sejam de sua autoria. Contrapondo resoluções mecanizadas, prontas e acabadas, as ideias dos alunos para a resolução do problema devem ser aproveitadas e valorizadas.

Para que a aprendizagem ocorra é preciso conhecer o seu aluno e propor tarefas visando quais estratégias e procedimentos, os alunos podem utilizar ou criar. O professor deve estar preparado para as possíveis soluções e outros questionamentos que possam surgir. Nessa perspectiva, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem deve ser elaborada, e o planejamento é a chave fundamental para que o professor possa orientar sua prática.

Para desenvolver uma THA é preciso refletir muito sobre o que se pretende alcançar, definir claramente seus objetivos e propor tarefas que realmente consigam atingir seus objetivos. As situações problema propostas devem ser desafiadoras e sua elaboração muitas vezes demanda tempo.

Em alguns casos é preciso formular as questões mais de uma vez, para que a situação provoque reflexão no aluno e possa levá-lo a formalizar seu conhecimento, pois se uma questão não ficar clara para o entendimento do aluno, toda a proposta de trabalho elaborada pode vir a ser um fracasso. Para isto é fundamental estar preparado para possíveis intervenções que surgirem.

Uma situação problema pode ser muito boa, quando o professor “olha” para ela e imagina que seus alunos irão gostar, que poderão aprender e, ao prepará-la para a turma, acreditar que fará uma grande diferença na vida do aluno.

Não existem problemas ruins, apenas problemas que não foram bem selecionados e ou preparados para ser aplicados. Pode ocorrer também de a turma ainda não estar preparada para resolver. É preciso conhecer seus alunos para propor tarefas que favoreçam a aprendizagem.

Conhecer os conceitos envolvidos e contexto histórico contribui para o professor saber agir em situações que possam vir a surgir durante o desenvolvimento da THA. Sem conhecimento pedagógico do conteúdo o professor pode dar uma resposta sem sentido ao aluno e ele pode perder a oportunidade de aprendizagem. A intervenção do professor é fundamental para proporcionar ao aluno situações que o leve ao conhecimento. Caso o professor desperdice chances, este aluno pode não ter outra oportunidade para aprender este conceito novamente.

O processo de enfrentar os questionamentos dos alunos não deixando em aberto e caso eles realizem um comentário equivocado, instigar até que o aluno possa refletir sobre sua fala e encontrar o caminho, faz parte de uma trajetória e contribui para a formação do indivíduo. Alguns alunos não perguntam, não gostam de socializar suas respostas por achar que não sabem ou que possuem muita dificuldade, possuem vergonha ou até mesmo acham que podem ser ridicularizados pelos seus colegas de turma. Nesses casos, o professor deve tomar muito cuidado com estes alunos, pois eles tendem a não aprender e ficar marginalizados na sala de aula achando que não são capazes.

Em todo momento o aluno deve ser orientado a tentar resolver as situações propostas, pois só assim é possível ao professor compreender o que o aluno realmente sabe ou não, quais e como são os seus erros e como é possível enfrentá-los. O professor deve instigar os alunos para resolver da forma que sabem, qualquer que seja, só assim saberá como auxiliá-los em suas resoluções.

Andar pela sala de aula permite ao professor conhecer um pouco mais sobre os seus alunos, suas dificuldades e ansiedades. O lugar do professor não é somente na frente da sala, caminhar permite observar e contribuir para o desenvolvimento dos alunos. Há casos em que o aluno tem vergonha ou medo de perguntar diante da sala de aula, mas quando o professor vai até ele, este pode enfrentar sua vergonha e se abrir para o conhecimento.

Desde 1995, Martin Simon propõe o modelo de ensino das THA, que aos poucos está sendo difundido entre os professores, mas ainda em pequena escala, falta conhecimento e preparo para os professores da Educação Básica. Este

modelo de ensino tem muito a contribuir para a aprendizagem dos alunos, pois prevendo as possíveis respostas dadas pelos alunos, é possível antecipar ou prorrogar alguns conceitos, comentários, é possível prever como e quando enfrentar as dificuldades que possam surgir.

O ensino de frações para os alunos é uma tarefa árdua, não apenas para alunos de 6º ou 7º ano, quanto mais o tempo passa, mais difícil vai se tornando o aprendizado destes conceitos. Propor em todos os anos do Ensino Fundamental e Médio tarefas que apresentem recurso às frações, pode permitir aos alunos se familiarizar com elas e deixar de ser um tema tão temido por eles.

Esta proposta de trabalho permite uma reflexão do trabalho docente, em como atuar em sala de aula, como agir, permitindo ir além das tarefas propostas para uma determinada turma e de um determinado assunto, neste caso o ensino das operações com frações. Faz-se necessário pensar em como levar o aluno a aprender, o que deve ou não ser proposto e como propor tarefas que levem à aprendizagem que tanto almejamos aos alunos.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Ivanilda Jesus Almada. **A planificação docente e o sucesso do processo ensino-aprendizagem**. 2011. Disponível em <<http://bdigital.cv.unipiaget.org:8080/jspui/handle/10964/269>>

BRASIL. Secretaria de educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

CARDOSO, Leonilde Dias. A planificação do ensino: **Análise de planificações do 1.º Ciclo do Ensino Básico**. 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10316/15640>>

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que Problemas?! : estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

CLEMENTS, Douglas H, SARAMA, Julie; **Learning and teaching early math: The learning trajectories approach**. New York: Routledge; 2009.

COLL, Cesar...[et al.]. **O construtivismo em sala de aula**. 6ª ed., tradução Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12ª edição. São Paulo: Ática, 2003.

FEITOSA, Hécules de Araujo; NASCIMENTO, Mauri Cunha; AFONSO, Alexys Bruno. **Teoria dos conjuntos: Sobre a Fundamentação Matemática e a Construção de Conjuntos Numéricos**. Rio de Janeiro: Editora ciência Moderna Ltda., 2011.

IFRAH, Georges. **Os números: História de uma grande invenção**. 11ª edição. São Paulo: Globo, 2005.

KRULIK, Stephen. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; WAGNER Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LUPINACCI, Vera Lúcia Martins e BOTIN, Maria Lúcia Muller. **Resolução de problemas no Ensino de Matemática**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife

ONUICHIC, Lourdes de la Rosa. **Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo**. Disponível em: <<http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/lourdes.pdf>>

MERLINE, Vera Lucia. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnostico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental**. 2005. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-06-14T12:42:59Z-3489/Publico/dissertacao_vera_lucia_merlini.pdf>

MIRANDA, Maria do Carmo da Silva Rodrigues. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem: Leitura e Interpretação de Gráficos e Tabelas e medidas de tendência central em uma perspectiva construtivista**. São Paulo, 2011

MARTÍNEZ, Enrique Castro. **Resolución de problemas, Ideas, tendencias e influencias na España**. Disponível em: <<http://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf>>

MONTEIRO, Cecilia; PINTO Hélia; FIGUEIREDO, Nisa. **As frações e o desenvolvimento do sentido do número racional**. 2005. Disponível em: <http://arquivo.eese.ips.pt/eese/projectos/sentidonumero/Fraccoes_EM.pdf>

NEVES, Regina da Silva Pina. **A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores**. 2008. 543 f. Tese (Doutorado em Psicologia)-Universidade de Brasília, Brasília, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10482/5256>>

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Criança fazendo matemática**. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: artes Medicas, 1997.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POGGIOLI, Lisette. **Estrategias de resolución de problemas**. Disponível em: <http://spratfau.files.wordpress.com/2011/09/biblio_estrategias-de-resolucic3b3n-de-problemas.pdf>

RAMOS, Luzia Faraco. **Frações sem mistérios**. 19ª edição. São Paulo, SP: Editora Ática, 2006.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas na formação de professores e pesquisadores**. Disponível em: <<http://gterp10.blogspot.com.br/p/artigos.html>>

SERRAZINA, Lourdes; OLIVEIRA, Isolina. (2010). **Trajectória de aprendizagem e ensinar para a compreensão**. In GTI (Org.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 43-59). Lisboa: APM.

SIMON, Martin. A. (1995). **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, n. 2, pp. 114-145.

SIMON, Martin. A. e TZUR, Ron. (2004). **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory.** *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 6, n. 2, pp. 91-104.

SOUZA, Arian Bezerra. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino de matemática.** Disponível em:
<<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>>

TAHAN, Malba. **O homem que calculava.** Rio de Janeiro: 43ªed. Record, 1996.

ZABALZA, Miguel. **A escola como cenário de operações didáticas.** 1994.
Disponível em: <http://www3.uma.pt/liliana/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=268>

