Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

DCET

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Expressões Algébricas Exatas para Funções Trigonométricas

por

Luciano Godinho Almeida†

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientador:

Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

Luciano Godinho Almeida

Expressões Algébricas Exatas para Funções Trigonométricas

Ilhéus / BA
2013

Luciano Godinho Almeida

Expressões Algébricas Exatas para Funções Trigonométricas

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira

Ilhéus / BA

2013

A447 Almeida, Luciano Godinho.
Expressões algébricas exatas para funções trigonométricas / Luciano Godinho Almeida. – Ilhéus: UESC, 2013.
61f. : il.
Orientador: Francisco Bruno Souza Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Bibliografia: p. 60-61.

1. Trigonometria. 2. Números complexos. I. Oliveira, Francisco Bruno Souza. II. Título.
CDD – 516.24

Luciano Godinho Almeida

Expressões Algébricas Exatas para Funções Trigonométricas

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 11 de abril de 2013:

Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Jailson de Araújo Rodrigues

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

Àqueles que realmente torcem e fortalecem às minhas vitórias, estão sempre presentes vivenciando comigo cada momento difícil, me dando o apoio que preciso, muitas vezes distantes dos olhos, mas pertos do coração. Dedico aos meus pais Valmir e Lúcia, pela educação e atenção que me deram em toda vida, o amor que têm comigo e a presença no meu dia-a-dia. Dedico também a minha linda esposa Luíza pelo amor, atenção, carinho e paciência, sempre me trazendo muitas alegrias. Minhas filhas Lorena e Ana, meus tesouros. Aos meus irmãos Ariane, Christiano, Miguel e Valmizinho que sempre acreditaram em mim, verdadeiros amigos, meu sogro e minha sogra que estão sempre por perto me apoiando, meus cunhados (Claúdio em memória) e minhas cunhadas, meus sobrinhos e meus amigos. Estes são aqueles que diretamente me dão forças para continuar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a **Deus**, minha grande força espiritual. Ao meu grande amigo e mestre Gabriel.

A Minha esposa e minhas filhas, minhas verdadeiras motivações de querer crescer e melhorar profissionalmente, que tanto compreenderam minhas ausencias ao longo de todo este período de estudo, e que agora vencem comigo uma importante etapa.

A toda minha família, pessoas que sei que sempre poderei contar, são grandes responsáveis por cada vitória.

Aos amigos Hélio, Luzieme e família, que sempre me receberam com muito carinho, me apoiando na realização deste curso.

Agradeço aos meus amigos de turma que tornaram todo o processo mais agradável, especialmente Celso Eduardo Brito, que inicou a pesquisa junto comigo. Agradeço também ao meu Orientador Dr. Francisco Bruno por todo apoio prestado. Ao prof. Dr. Sérgio Mota, coordenador do curso, um amigo da turma que lutou por nossa vitória.

À **Capes** pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

ABSTRACT

This paper presents a study of trigonometry and complex numbers, seeking ways to determine algebraic expressions to provide exact values for trigonometric functions other than notable arches, thus demystifying the mysterious table that students learn to fill out in the second grade, and showing that it is possible to manipulate other arcs. To find these expressions, initial basic education level trigonometry formulas are formulated.

This study provides an overview of the origin of complex numbers, showing their acceptance in the mathematical world through the main historical figures over a period of two centuries, beginning with the Bombelli's contributions in the mid-sixteenth century aimed at manipulating complex square roots using the extraction of the nth root formula to provide sine and cosine values of non-notable arches for the comparison of results.

These expressions of trigonometric values are useful for carrying out calculations with greater accuracy, since the results obtained are not approximate but exact.

Key Words: Trigonometry; Trigonometric Expressions; non-notable arches; Complex Numbers; Complex Square Root.

RESUMO

O presente trabalho traz um estudo da trigonometria e dos números complexos, visando formas de se determinar expressões algébricas exatas que forneçam os valores para as funções trigonométricas em arcos além dos notáveis. Desmistificando, para muitos alunos, a misteriosa "tabelinha" que estes aprendem a preencher no segundo grau e mostrando que é possível manipular outros arcos. Para encontrar estas expressões, faz-se inicialmente uma abordagem de fórmulas básicas da trigonometria, em nível da educação básica.

Este estudo traz uma síntese da origem dos números complexos, mostrando sua aceitação no mundo matemático através dos principais personagens que perfazem esta história que durou mais de dois séculos desde as primeiras contribuições de Bombelli em meados do século XVI, visando uma manipulação da raiz quadrada complexa com a fórmula de extração da raiz n-ésima, de modo que por comparação dos resultados pode-se obter valores de senos e cossenos de arcos não-notáveis.

Estas expressões para valores trigonométricos são de grande utilidade para efeitos de cálculos que requerem mais precisão, uma vez que os resultados obtidos não possuem aproximações, são exatos.

Palavras Chaves: Trigonometria; Expressões Trigonométricas; Arcos Não Notáveis; Números Complexos; Raiz Quadrada Complexa.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os números complexos são encarados por muitos alunos do segundo grau como mais uma das teorias da matemática de conteúdo abstrato, difícil entendimento e, para piorar, sem muita aplicação prática.

Já no estudo da trigonometria, não é difícil para o professor mostrar a importância de se estudar este conteúdo. Porém, fica um tanto obscuro o fato de se conseguir obter os valores trigonométricos apenas para alguns poucos arcos, os chamados "arcos notáveis", onde se aprende uma técnica misteriosa de se preencher uma pequena tabela com o seno e o cosseno de três arcos (30^o, 45^o e 60^o), enquanto para a maioria dos outros arcos, somente podemos fazer os cálculos com o auxílio de uma calculadora científica ou com uma das ultrapassadas tabelas trigonométricas, ainda há o agravante de que tanto a calculadora quanto as tabelas trabalham com valores aproximados.

Assim, será possível com a manipulação de ferramentas trigonométricas, que perfazem o currículo de matemática do ensino médio, determinar expressões algébricas exatas para valores de senos e cossenos de outros arcos? Como isso poderia ser feito? E com a manipulação dos números complexos, será que também podemos obter algumas destas expressões algébricas exatas? E como isso seria feito?

Se estes questionamentos forem respondidos, ficará mais prática a manipulação dos valores trigonométricos, expandirá o modo de se trabalhar com estes números no sentido de se possibilitar cálculos exatos de senos e cossenos (sendo que com estes podemos obter o valor das demais funções trigonométricas) com muito mais arcos. Ficarão também relacionados dois grandes ramos da matemática, apresentando a importância e mais uma aplicação dos números complexos na trigonometria (que de modo geral é percebida pelos alunos como de grande importância para as ciências exatas), fazendo com que os alunos percebam a importância destes misteriosos números e melhorem a aceitação deste importante conjunto numérico.

Dessa forma, este estudo se fundamenta no sentido de apresentar uma nova abordagem destes conteúdos matemáticos, relacionando-os e tornando-os mais práticos, de modo a serem mais aceitos e que possam alcançar o objetivo de aproximar o aluno à matemática e assim estes consigam aproveitar mais da rainha das ciências, e desenvolver sua capacidade cognitiva de pensar logicamente, de raciocinar e argumentar com cada vez mais exatidão.

Este estudo é essencial para a educação matemática, primeiramente devido à importância da trigonometria em tantas ciências, no desenvolvimento da matemática e da sociedade, por buscar auxiliar no entendimento das formas de manipulação desta teoria. É importante também por oferecer métodos de obtenção de valores trigonométricos para muitos outros arcos alem dos notáveis, já que em situações práticas, muitas vezes não podemos escolher qual deve ser o ângulo para que possamos fazer os cálculos.

Considerando ainda, que a matemática é uma ciência que assusta muitos alunos, quando estes são informados que estudarão o conjunto dos números complexos e que estes possuem parte real e parte imaginária, eles poderão pensar que se já tinham dificuldade com os números chamados de Reais, será praticamente impossível entender os números que são chamados de complexos, deve ser extremamente complicado e para piorar estes ainda têm uma parte que é imaginária, ou seja, que não existe. Assim, poderão questionar a necessidade de se estudar estes números.

> *Descartes que batizou a $\sqrt{-1}$ de "número imaginário", o que é um termo inadequado, subjetivo e nada matemático. Lamentavelmente, o nome consagrou-se, juntamente com a expressão "números complexos", para trauma dos jovens que, um dia, ouvem de seus professores: "Hoje vamos começar o estudo dos números complexos, formados por uma parte real e uma parte imaginária". Isto é o equivalente matemático da seguinte frase odontológica: "Hoje vamos extrair-lhe um dente, sem anestesia". Na verdade não há nada de imaginário na $\sqrt{-1}$ nem são "complexos" os números que a contêm. São números como todos os outros e aprende-se a trabalhar com eles com a mesma facilidade com que se manuseiam os inteiros, as frações e os irracionais.*
> (GARBI 2009 [3], p. 75).

Este trabalho faz um breve passeio histórico que enfatiza a necessidade matemática destes números terem sido criados, devido à impossibilidade de se resolver alguns problemas somente com números reais. Traz também uma manipulação destes números, o que deve clarear para o aluno a sua importância.

Entendendo a importância da trigonometria para a matemática e suas tantas aplicações, ficará fácil perceber que os estranhos números complexos podem ser extremamente úteis, uma vez que estes trazem muitas aplicações e resultados na trigonometria. Este trabalho mostra como estes números podem ser utilizados para encontrar *Expressões Algébricas Exatas para Valores Trigonométricos* de arcos não notáveis e, principalmente, como trabalhar com as bases da trigonometria para obter algumas dessas expressões, que muitas vezes são bem úteis, principalmente para manipular soluções com radicais que permitem uma maior simplificação.

Os números complexos representam hoje um gigantesco ramo da matemática, com sentidos algébricos, geométricos, trigonométricos e analíticos, presentes em toda esta ciência com infindáveis aplicações, principalmente na Eletrônica. Estes números são uma das tantas abstrações matemáticas que facilitam o cálculo e a resolução de muitos problemas práticos, além de desenvolver o raciocínio lógico.

Assim, este trabalho visa obter expressões algébricas exatas, que forneçam valores para as funções trigonométricos em alguns arcos além dos notáveis através de fórmulas básicas da trigonometria e ainda apresentar uma forma de obter destas expressões, por meio dos números complexos.

Busca também apresentar algumas ferramentas básicas da trigonometria, construir suas relações fundamentais, *encontrar* os valores trigonométricos para os arcos notáveis, apresentar e trabalhar com o triângulo áureo, enfatizar a importância de se encontrar expressões trigonométricas ao invés de decorá-las, mostrar a necessidade da criação dos números complexos em seu contexto histórico para a resolução de equações, demonstrar formas de se calcular raiz quadrada e raiz *n-ésima* complexa, enfatizando a importância de se trabalhar com valores trigonométricos exatos.

Este estudo, objetiva ainda, apresentar uma organização de conteúdos relacionando ramos matemáticos, de modo que possa ser utilizada no ensino médio como uma proposta didática de ensino, onde as estruturas da organização dos conteúdos estão interligadas, o que proporcionará ao aluno uma visão mais aprofundada das ferramentas que eles estudam, fortalecendo neles o potencial de manipulação algébrica.

Para a realização deste estudo, será feito uma pesquisa bibliográfica referente à trigonometria e aos números complexos, os mecanismos para cálculo da raiz quadrada e a raiz *n-ésima* complexa. Pesquisaremos também, formas de se obter os valores trigonométricos exatos em arcos não notáveis.

Para cumprir com o objetivo deste estudo, que é a obtenção de expressões algébricas exatas para arcos trigonométricos além dos notáveis, o capítulo 1 traz uma breve conceituação de fundamentos da trigonometria, demonstrando algumas identidades importantes, relações fundamentais e algumas fórmulas. No capítulo 2, encontramos por construção os valores trigonométricos dos arcos notáveis, desvendando para muitos alunos os valores contidos na misteriosa tabelinha. Apresentamos, ainda neste capítulo, o *triângulo Áureo*, trabalhando com ele obtemos as expressões trigonométricas para mais dois arcos (18^o e 72^o). Com isso, mostramos que estes valores trigonométricos não precisam ser decorados e que não surgem do nada, podem ser facilmente determinados com conceitos geométricos e trigonométricos básicos.

Com o feito nos capítulos 1 e 2, que temos subsídios para apresentar como obter as expressões trigonométricas na primeira seção do capítulo 4. Nesta seção, manipulamos as fórmulas e identidades da trigonometria, de modo que determinamos os valores do seno e cosseno dos ângulos de 15º e de 3º, e mostramos, com os valores já determinados (os notáveis, os do triângulo áureo, e estes de 15º e 3º), como determinar os valores de quaisquer das funções trigonométricas, para qualquer arco, cuja medida em grau é um número inteiro múltiplo de 3.

No capítulo 3, fazemos um breve passeio histórico na construção dos números complexos, mostrando o quão necessário foi a criação destes números no processo de resolução de equações, um tema que sempre fascinou os matemáticos. Apresentamos brevemente o algebrismo complexo e os métodos de extração de raízes quadradas. Todo o desenvolvimento deste capítulo foi visando unicamente, a extração das raízes quadradas, pois com estas raízes, nós fizemos a segunda seção do capítulo 4, onde obtivemos mais algumas expressões algébricas trigonométricas para arcos não notáveis, mostrando que é possível manipular os complexos e obter algumas destas expressões.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

A trigonometria é um importante ramo da matemática. Suas aplicações se fazem presentes em simples situações do dia-a-dia, em outros ramos da matemática, e em situaçoes mais complexas nas ciências e na alta tecnologia. Suas origens são um tanto obscuras na história da matemática.

> *Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos sejam os chamados* ***Papiro de Ahmes*** *(ou de Rhind) e* ***Papiro de Moscou****. O de Ahmes (ou Amose) é um longo papiro egípcio, de cerca de 1650 a.C.*
> (GARBI 2009 [3], p. 11).

Neste Papiro de Rhind contém 84 problemas e em 4 deles fazem menção ao *seqt* de um ângulo, analisando o contexto do papiro, percebe-se que *seqt* corresponde ao conceito que temos como cotangente ([5], p. 36). Na mais notável das tábulas babilônicas analisadas, conhecida como *Plimpton 322* escrita no período babilônico antigo (entre 1900 e 1600 a.C.), existe também a presença da trigonometria, em uma notável tábua de secantes. Assim, a trigonometria foi se desenvolvendo ao longo da história, ainda antes de cristo, um dos grandes astronomos da antiguidade, Hiparco de Nicéia (séc. II a.C.) deu a abordagem astronômica à trigonometria, fazendo com que a trigonometria tivesse grande avanço (Hiparco é muitas vezes tratado como o pai da trigonometria).

Posteriormente Cláudio Ptolomeu (séc. II d.C.) ampliou o trabalho de Hiparco e chegou a criar uma tábua de cordas, provavelmente, baseado na tábua de Hiparco, onde encontra-se os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de $1/2^o$ a 180^o, com incrementos de $1/2^o$.

> *Essencialmente, então, a tábua de cordas de Ptolomeu fornece os senos dos ângulos de 0º a 90º com incrementos de 15'. A maneira de se calcular os comprimentos dessas cordas explicadas elegantemente por Ptolomeu, com toda a certeza era do conhecimento de Hiparco.*
> (EVES 2004 [2], p. 203).

A matemática continua se desenvolvento e a trigonometria acompanhando, *"A trigonometria, como a conhecemos hoje, na sua forma analítica, remonta ao século XVII. Seu florescimento dependia de um simbolismo algébrico satisfatório, o que não existia antes dessa época."* (IEZZI 2004 [5], p. 36)

De acordo com Lima (2006 [6], p. 213) *"o objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seus seis elementos (três lados e três ângulos) quando se conhece três deles, sendo pelo menos um lado"* . O estudo da trigonometria em arcos, deu origem a uma circunferência orientada de raio unitário e sentido positivo o anti-horário, chamado de ciclo trigonométrico. A trigonometria se dá basicamente através de seis funçoes *seno, cosseno, tangente, cotangente, secante* e *cossecante.* Com algumas identidades fundamentais, que citaremos na próxima seção, a partir do valor de uma destas funções obtemos todas a outras.

Os nomes atuais das funções trigonométricas *secante* e *tangente* são claros a partir do ciclo trigonométrico, se considerarmos o ângulo $\mathrm{A\hat{O}P} = \alpha$, na figura abaixo, temos que o valor da $\mathrm{tg}\,\alpha$ é dado pelo comprimento do segmento *tangente EC* e o valor da $\sec\alpha$ é dado pelo comprimento do segmento da *secante OC*. Temos ainda que *cotangente* significa simplismente "tangente do complemento" e assim por diante. Esses termos *tangente, cotangente, secante* e *cossecante* se consagraram antes do fim do século XVI.

Já a palavra *seno* não tem um significado tão simples de se explicar e visualizar.

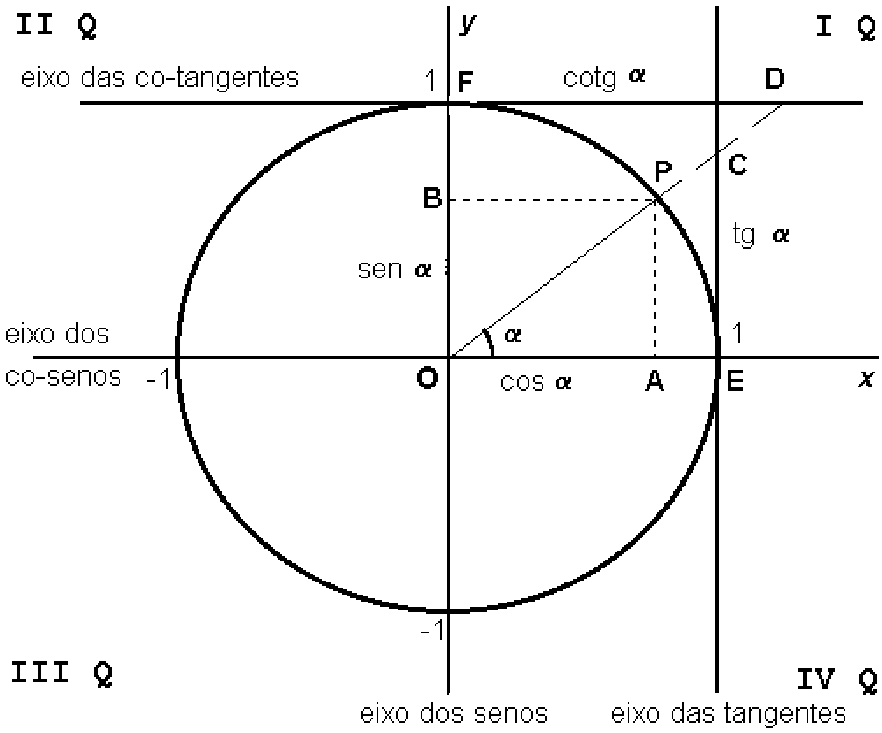

Figura 1.1: Ciclo e Eixos Trigonométricos

> *A origem a palavra seno é curiosa. Aryabhata usava ardha-jya ("semicorda") e também jya-ardha ("corda metade") e por brevidade escrevia apenas jya ("corda"). Partindo de jya os árabes foneticamente derivaram jîba que devido a prática entre eles de se omitir vogais, se escrevia jb. Afora seu significado técnico, hoje jîba é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com jb como abreviação da palavra sem sentido jîba passaram a usar jaib que faz parte do vocabulário árabe e que significa "enseada" ou "baía". Mais tarde ainda, ao fazer a traduçao de jaib para o latim, Gerardo de Cremona empregou o equivalente latino sinus, de onde vem nossa palavra atual seno*
> (EVES 2004 [2], p. 267).

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e alguns conceitos trigonométricos e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Não é objetivo deste estudo construir a trigonometria ou, menos ainda, de aprofundar neste ramo da matemática, e sim, ver a trigonometria como uma ferramenta que tem o potencial de apresentar ao aluno a exatidão da matemática, cujos conceitos estão interligados, o funcionamento da manipulação algébrica, desenvolvendo sua capacidade de raciocínio e seu pensamento lógico, que é um dos grandes objetivos da matemática com os estudantes da educação básica.

1.1 Identidades e transformações importantes

Existem muitas e muitas identidades e transformações trigonométricas. Esta seção visa lembrar as definições trigonométricas no triângulo retângulo, as propriedades fundamentais, e algumas identidades e fórmulas de transformaçoes trigonométricas que posteriormente serão de grande importância para o desenvolver do trabalho.

As demonstrações de algumas destas propriedades, fogem dos objetivos deste estudo por serem facilmente encontradas nas bibliografias e serem propriedades bem conhecidas de qualquer estudante que tenha afinidade com matemática, especialmente com a trigonometria.

De acordo com a figura abaixo (1.2)

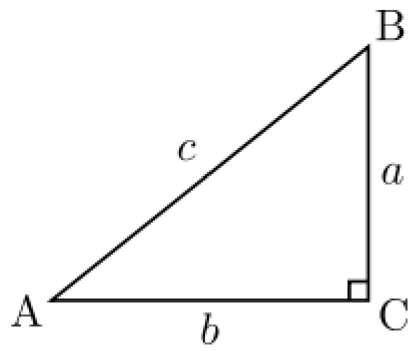

Figura 1.2: Triângulo Retângulo

E sabendo que *o Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa* então, temos que:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{c} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{c}$$

Já o *Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa*, assim, de acordo com a figura:

$$\cos\widehat{A} = \frac{b}{c} \qquad \text{e} \qquad \cos\widehat{B} = \frac{a}{c}$$

A *Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo*, assim, de acordo com a figura:

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{a}{b} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{b}{a}$$

E a *Cotangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo*, assim, de acordo com a figura:

$$\operatorname{cotg}\widehat{A} = \frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{cotg}\widehat{B} = \frac{a}{b}$$

Na figura 1.1 foi afirmado que a $\sec\alpha = OC$. Analisando o triângulo EOC desta figura, temos que

$$\cos\alpha = \frac{OE}{OC} = \frac{1}{OC} = \frac{1}{\sec\alpha}$$

qualquer que seja o ângulo α no I Quadrante. Portanto temos que a *Secante de um ângulo agudo é o inverso do cosseno deste ângulo*,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

ou ainda, *a Secante de um ângulo agudo é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente a este ângulo*. De acordo com a figura 1.2, temos que:

$$\sec\widehat{A} = \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad \sec\widehat{B} = \frac{c}{a}$$

Na figura 1.2 percebe-se claramente que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são complementares, ou seja, $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^{\text{o}}$, ou ainda,$\widehat{B} = 90^{\text{o}} - \widehat{A}$ e podemos perceber o porque da palavra *cosseno* que significa *seno do complemento*, observe que:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \cos\widehat{B} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\widehat{B} = \cos\widehat{A}$$

ou

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \cos(90^\circ - \widehat{A})$$

O mesmo podemos observar com a *tangente* e a *cotangente*, temos que:

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \operatorname{cotg}\widehat{B} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg}\widehat{B} = \operatorname{cotg}\widehat{A}$$

ou ainda:

$$\text{cotg}\,\widehat{A} = \frac{1}{\text{tg}\,\widehat{A}} \qquad \text{e} \qquad \text{cotg}\,\widehat{B} = \frac{1}{\text{tg}\,\widehat{B}}.$$

Na construção das funções trigonométricas, e o uso da medida do ângulo em radianos, precisa-se definir os valores das funções para todo x real. No estudo do ciclo trigonométrico, aprende-se que basta conhecer os valores das funções para o primeiro quadrande

$$0 \leq x \leq 90^{\text{o}} \qquad \text{ou} \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} rad,$$

para x com valores fora deste intervalo, podemos por simetrias e períocidades determinar os valores das funções. Desta forma nos concentraremos em x neste intervalo.

Podemos expandir as propriedades acima para $x \in \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,x = \cos(90^{\text{o}} - x) \quad &\text{ou ainda} \quad \text{sen}\,x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \\ \cos x = \text{sen}(90^{\text{o}} - x) \quad &\text{ou ainda} \quad \cos x = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) \end{aligned}$$

e

$$\text{cotg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x}, \qquad \text{para } x \neq 0.$$

1.1.1 Relações Fundamentais

Conhecidos as definições de $\text{sen}\,x, \cos x, \text{tg}\,x, \text{cotg}\,x, \sec x$ e $\text{cossec}\,x$ no ciclo trigonométrico[1], pode-se estudar as relações entre estes seis números. As demonstrações das relações conhecidas como fundamentais, não serão apresentadas neste trabalho. Para ângulos agudos, estas propriedades podem ser facilmente verificadas com o uso de um triângulo retângulo qualquer, como o dá figura 1.2 e para qualquer caso, pode-se verificar com o ciclo trigonométrico.

A primeira relação fundamental, a mais importante relação da trigonometria, é a seguinte:

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1. \tag{1.1}$$

[1]a construção do ciclo trigonométrico, determinação dos pontos, redução ao I quadrante e as definições das funções trigonométricas neste ciclo, é encontrada na referência [5], cap. III e IV

Com esta relação, percebemos que conhecendo o *seno* de um valor, podemos encontrar o módulo do *cosseno* deste valor, e vice-versa. Considerando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ temos que todas as funções trigonométricas possuem valores não negativos.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$[2], temos a relação:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \tag{1.2}$$

agora, com o $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$, podemos encontrar o módulo da $\operatorname{tg} x$.

Temos também, ainda para $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$ a seguinte relação:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}. \tag{1.3}$$

Como $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, para $\operatorname{tg} x \neq 0$ ou seja, $x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$[3] então temos que:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}. \tag{1.4}$$

Ainda para $x \neq k\pi, k \in \mathbb{N}$, fazemos a seguinte relação:

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}. \tag{1.5}$$

Estas são as relaçoes ditas fundamentais, com elas basta conhecermos um dos números $\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, \sec x$ e $\operatorname{cossec} x$, e poderemos determinar o módulo de todos os outros, se considerarmos o casa mais simples em que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, e estes números são não negativos, conhecendo um deles é possível determinar os outros cinco.

Agora, com estas relações, se considerarmos, x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, podemos obter as seguintes relações:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

[2]Nestes valores temos que o cosseno se anula e portanto a tangente não está definida

[3]Nestes valores temos que o seno se anula e o cosseno é diferente de zero, portanto a tangente é nula

$$1+\operatorname{cotg}^2 x = 1+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x$$

ou seja,

$$1+\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$$

Muitas outras identidades trigonométricas, são obtidas por manipulações algébricas destas relações fundamentais. Com uma análise do ciclo trigonométrico, e o entendimento das funçoes seno e cosseno temos que:

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \tag{1.6}$$

Assim, o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar

1.1.2 Fórmulas de Adição

Para se determinar as expressões algébricas exatas de certos arcos trigonométricas, as fórmulas de adição são bem úteis, uma vez que, se conhecermos os valores trigonométricos de α e β, com as fórmulas de adição, conheceremos para $\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha+\alpha, (\alpha+\beta)+\beta, \cdots$.

As clássicas fórmulas de $\cos(\alpha+\beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ em função dos $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta$, possuem inúmeras demosntrações, utilizaremos aqui a apresentada por LIMA ([6], p.229) por sua simplicidade e ser bem direta:

Observe a figura abaixo:

Na figura, onde $CB' \perp OB'$, temos

$$\begin{aligned} OA &= \cos(\alpha+\beta) \\ OB' &= \cos\beta \\ B'C &= \operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

Pela figura percebemos que $AB = A'B'$, e temos, pelo triângulo $CA'B'$, que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{A'B'}{\operatorname{sen}\beta} \Longrightarrow AB = A'B' = \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

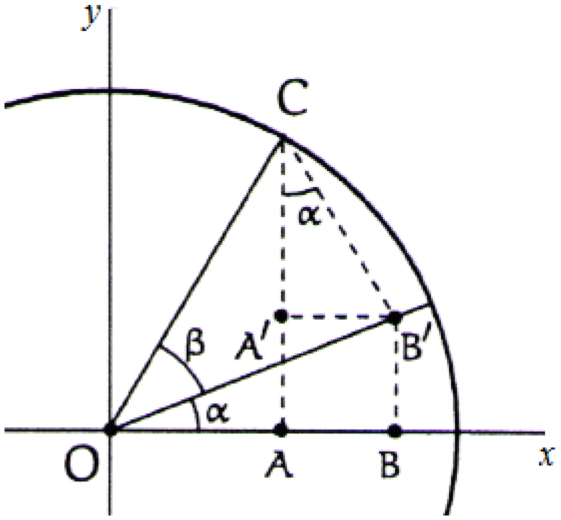

Figura 1.3: Adição de Arcos

Já considerando o triângulo OBB', temos que:

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OB'} = \frac{OB}{\cos\beta} \Longrightarrow OB = \cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Logo,

$$OA = OB - AB = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Uma vez que, $OA = \cos(\alpha+\beta)$ temos então que:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \tag{1.7}$$

Para provarmos a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos, $\cos(\alpha-\beta)$, basta tomarmos $-\beta$ em vez de β na fórmula 1.7, e, usando a paridade das funções seno e cosseno 1.6, obtemos:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\left(\alpha+(-\beta)\right)\\
&= \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)\\
&= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\beta)\\
&= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta. \tag{1.8}$$

Para provarmos agora a fórmula do seno da soma de dois arcos, usaremos a idéia de que o cosseno é o seno do complemento, usando assim a identidade $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ que foi citada anteriormente, segue que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] \\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\beta \\
&= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha. \tag{1.9}$$

Para encontrarmos o seno da diferença de dois arcos, procedemos de modo análogo ao que fizemos para o cosseno da diferença, $-\beta$ em vez de β na fórmula 1.9, assim temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) \\
&= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cdot \cos\alpha \\
&= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + (-\operatorname{sen}\beta) \cdot \cos\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha. \tag{1.10}$$

Para obtermos a tangente da soma de dois arcos, usaremos a relação fundamental 1.2 e as fórmulas 1.7 e 1.9,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}
\end{aligned}$$

Então,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \tag{1.11}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad \text{e}\quad \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Para determinarmos a tangente da diferença de dois arcos, fazemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \operatorname{tg}(\alpha+(-\beta)) \\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)} \\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha+(-\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot(-\operatorname{tg}\beta)}
\end{aligned}$$

então,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \tag{1.12}$$

Para determinarmos a cotangente da soma e da diferença de dois arcos, procedemos de modo análogo ao que fizemos para a tangente, obtendo para a cotangente da soma de dois arcos a fórmula:

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}. \tag{1.13}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$\alpha\neq k\pi,\quad \beta\neq k\pi,\quad \text{e}\quad \alpha+\beta\neq k\pi.$$

E para a cotangente da diferença de dois arcos, obtemos:

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}. \tag{1.14}$$

temos que esta fórmula, também, só é aplicável se:

$$\alpha\neq k\pi,\quad \beta\neq k\pi,\quad \text{e}\quad \alpha+\beta\neq k\pi.$$

Estas equações (da eq. 1.7 à eq. 1.14), são extremamente úteis para obtermos mais valores trigonométricos, a partir de poucos conhecidos.

1.1.3 Fórmulas de Multiplicação e Divisão

Nesta seção vamos deduzir algumas fórmulas de multiplicação de arcos para as funções trigonométricas, de modo que se conhecermos o valor de $\operatorname{sen}\alpha$ poderemos determinar o valor de $\operatorname{sen}2\alpha$, $\operatorname{sen}3\alpha$, $\operatorname{sen}4\alpha$ e etc., poderemos também pela fórmula de divisão determinar $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, o mesmo poderemos fazer para as demais funções trigonométricas.

As fórmulas de multiplicação, nada mais são do que formas de aplicação das fórmulas de adição, de modo que se quisermos calcular por exemplo o $\operatorname{sen}2\alpha$ fazemos $2\alpha=\alpha+\alpha$, e utilizamos a equação 1.9, fazendo $\beta=\alpha$, daí teremos:

$$\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

então:

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha. \tag{1.15}$$

Para o $\cos 2\alpha$, procedemos de modo análogo na equação 1.7, e assim obtemos:

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

então:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{1.16}$$

e aplicando a primeira relação fundamental (eq. 1.1), podemos ainda escrever a equação 1.16, das seguintes formas:

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1 \qquad \text{ou} \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Para a $\operatorname{tg} 2\alpha$, precederemos sobre a equação 1.11, assim:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

então:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{1.17}$$

Para obter valores nas demais funções trigonométricas $(\text{cossec}, \sec, \text{cotg})$ basta usarmos as relações fundamentais e analisarmos o sinal por meio do estudo das simetrias no ciclo trigonométrico.

Lembrando que o este estudo busca apresentar ferramentas que nos possibilitam a obtermos valores trigonométricos para arcos além dos notáveis, dessa forma, com o estudo do ciclo trigonométrico e o uso das propriedades fundamentais, se conhecermos o valor de uma das funções trigonométricas de um certo ângulo α podemos obter o valor nas outras cinco funções. Dessa forma poderiamos, por exemplo, nos limitar a encontrar "$\operatorname{sen}\alpha$" para o máximo possível de valores para α, que os demais valores trigonométricos poderiam também serem obtidos, uma vez que estão apresentadas as propriedades fundamentais.

Agora, vamos apresentar fórmulas que permitem calcular as funções trigonométricas de $\frac{x}{2}$, conhecida uma das funções circulares de x. Como já foi dito, se conhecermos o valor trigonométrico de um certo arco em uma das funções circulares, podemos encontrar nas demais, então sem perda de generalidade, **consideremos que seja conhecido** $\cos x$**.**

Sabemos, pela equação 1.16, que $\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$ assim, considerando $2\alpha = x$ e substituindo nesta equação, temos $\cos x = 2\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$, e portanto:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{1.18}$$

Ainda pela equação 1.16 temos que $\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha$ daí substituindo $2\alpha = x$ obtemos $\cos x = 1 - 2\cdot\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}$, e portanto:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \tag{1.19}$$

Para calcularmos a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, usaremos a segunda relação fundamental (eq. 1.2), assim:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$$

daí, temos que:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \tag{1.20}$$

Os sinais ($\pm$) são necessários quando se conhece o valor do $\cos x$ sem conhecer qual é este arco x. Pois, se conhecermos x, saberemos em que quadrante está o arco $\frac{x}{2}$ e assim saberemos o sinal do valor de seu seno, seu cosseno, sua tangente, sua secante, sua cossecante e sua cotangente.

No próximo capítulo, nos concentraremos em encontrar os valores das funções trigonométricas *seno* e *cosseno* para alguns arcos específicos. A partir dos quais, aplicaremos equações apresentadas nesta seção e obteremos várias expressões algébricas exatas para vários arcos.

CAPÍTULO 2

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS ESPECIAIS

Alguns arcos são considerados especiais por serem frequentemente usados nos estudos trigonométricos, por esta razão são chamados de arcos notáveis, são eles

$$\frac{\pi}{6} = 30^o; \quad \frac{\pi}{4} = 45^o \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{3} = 60^o$$

Os valores trigonométricos para estes arcos são até bem difundidos no segundo grau de nossas escolas, onde é ensinado aos alunos preencher uma tabela, as vezes até com "musiquinhas", para o seno, o cosseno e a tangente destes arcos. Segue a abaixo esta tabela:

razão - arcos	$\frac{\pi}{6} = 30^o$	$\frac{\pi}{4} = 45^o$	$\frac{\pi}{3} = 60^o$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2.1: Razões Trigonométricas Especiais

É até interessante que os alunos memorizem esta tabela, e assim possam trabalhar com estes arcos, mas o essencial é porque estes valores. Como estes arcos podem ser obtidos é ensinado por poucos professores, apesar de ser uma construçao bem simples e que podem ser facilmente compreendidas pelos alunos, o que daria bem mais sentido a estes valores. Então faremos isto nste seçao.

Razões Trigonométricas do Arco $\frac{\pi}{4} = 45^{\mathbf{o}}$

Consideremos uma quadrado $ABCD$ cujos lados medem l unidades. Tracemos neste quadrado a diagonal BD, assim, sabendo que a diagonal de um quadrado bissecta os ângulos dos vértices que a define, ficamos então com um triângulo retângulo isósceles ABD, onde podemos então afirmar que $\widehat{B} = \widehat{D} = 45^{\text{o}}$. Os catetos deste triângulo medem l unidades e a hipotenusa $BD = a$, pelo *teorema de pitágoras* temos:

$$a^2 = l^2 + l^2 \Longrightarrow a = l\sqrt{2}$$

então, temos:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{AD}{BD} \Longrightarrow \operatorname{sen}45^{\text{o}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BD} \Longrightarrow \cos 45^{\text{o}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{AD}{AB} \Longrightarrow \operatorname{tg}45^{\text{o}} = \frac{l}{l} = 1.$$

Razões Trigonométricas do Arco $\frac{\pi}{6} = 30^{\mathbf{o}}$

Consideremos agora, um triângulo equiátero ABC de lado l. Como este triângulo é equilátero, temos que

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^{\text{o}}$$

Tracemos neste triângulo a altura $\overline{CM}$ pelo vértice C relativa ao lado $\overline{AB}$ onde $M \in \overline{AB}$, sabendo que a altura em um triângulo equilátero é uma mediana e também uma bissetriz.

Temos assim que o triângulo AMC é retângulo, onde:

$$\widehat{M} = 90^{\text{o}}, \qquad \widehat{C} = 30^{\text{o}}, \qquad \widehat{A} = 60^{\text{o}}, \qquad \overline{AM} = \frac{l}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = l$$

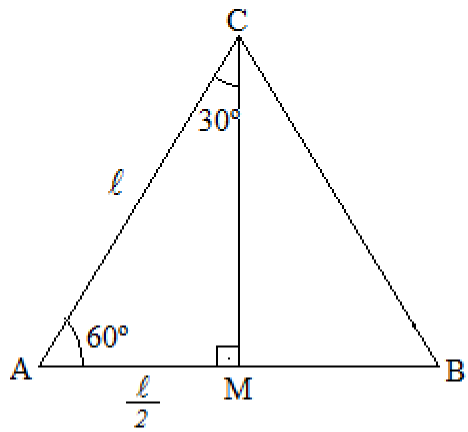

Figura 2.1: Triângulo Equilátero

e pelo teorema de pitágoras;

$$\begin{aligned}
\overline{AC}^2 &= \overline{CM}^2 + \overline{AM}^2\\
l^2 &= \overline{CM}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\\
l^2 - \frac{l^2}{2^2} &= \overline{CM}^2\\
\overline{CM}^2 &= \frac{4l^2 - l^2}{4}\\
&= \frac{3l^2}{4}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{CM} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{AM}{AC} &\implies \operatorname{sen}30^{\text{o}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}\\
\cos\widehat{C} = \frac{CM}{AC} &\implies \cos 30^{\text{o}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\operatorname{tg}\widehat{C} = \frac{AM}{CM} &\implies \operatorname{tg}30^{\text{o}} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Razões Trigonométricas do Arco $\dfrac{\pi}{3} = 60^{\mathrm{o}}$

Ainda considerando a figura 2.1, temos no triângulo retângulo AMC, que $\widehat{A} = 60^{\mathrm{o}}$ e $\widehat{C}$ são complementares, e desse modo o seno de um é igual ao cosseno do outro, tangente de um é a cotangente do outro, daí:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\widehat{A} = \cos\widehat{C} = \frac{CM}{AC} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}60^{\mathrm{o}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\cos\widehat{A} = \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{AM}{AC} \quad &\Longrightarrow \quad \cos 60^{\mathrm{o}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}\\
\operatorname{tg}\widehat{A} = \operatorname{cotg}\widehat{C} = \frac{CM}{AM} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}60^{\mathrm{o}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Assim, completamos a nossa misteriosa tabela 2.1, usando simples conceitos da geometria plana e as definições de seno, cosseno e tangente no triangulo retângulo. Essa construção pode perfeitamente ser apresentada aos alunos de 2^{o} grau, que têm claramente condições de absorver e assim entender de modo mais claro o sentido dos valores trigonométricos, de forma generalizada e fundamentada nas definições e propriedades simples.

No ciclo trigonométrico é possível definir a função conhecida como a *"função de Euler"*[1]

> *A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária (...)*
> *A função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a cincunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$*
> (LIMA 2006 [6], p. 218).

Com o entendimento do ciclo trigonométrico, cuja a equação é $x^2 + y^2 = 1$, perbemos que a imagem de $t \in \mathbb{R}$ via função E tem a seguinte característica: $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, ou seja, qualquer ponto (x, y) da ciclo trigonométrico tem-se que: $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, imediatamente desta definição constatamos a primeira propriedade fundamental $\cos^2 t +$

[1] Uma construção detalhada desta função pode ser encontrada no capítulo 9 da obra de Elon Lages Lima, 2006 (referência [6]).

$\operatorname{sen}^2 t = 1$. Desta forma, os valores do seno e cosseno, apresentados na tabela 2.1, e outros valores importantes dessas funções podem ser visualizados na figura 2.2:

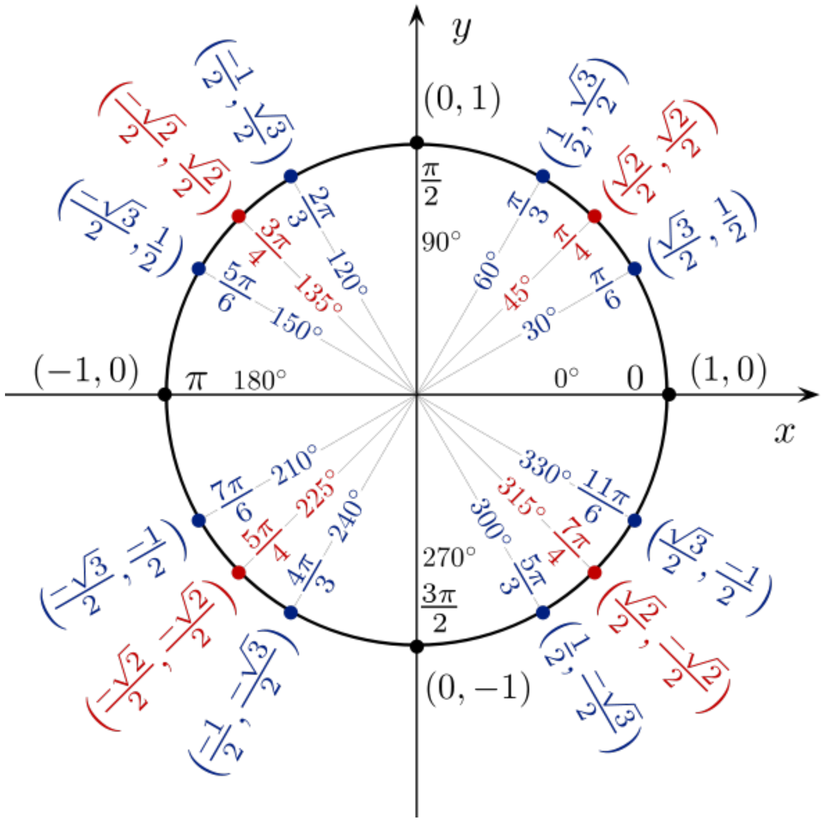

Figura 2.2: Circulo Unitário - $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, onde t é a medida do arco

2.1 Triângulo Áureo

A razão áureo é uma razão matemático rodeada de mistérios e de curiosidades, intriga os matemáticos há séculos e séculos, se faz presente em muitas situações matemáticas, como o límite da razão entre dois termos consecutivos dá fantástica *"Sequência de Fibonacci"*, e também na natureza como no crescimento de desenvolvimento de algumas flores. Mas, os situações que envolvem esta razão e suas curiosidades foge dos objetivos deste trabalho, aqui faremos apenas uma definição do que é a razão áurea e apresentaçao do triângulo áureo, neste encontraremos algumas razões trigonométricas de arcos importantes para a continuidade deste estudo.

De acordo com Eves (2004, p. 125 [2]): diz-se que um ponto C divide um segmento de reta AB em *média e extrema razão* ou faz uma *secção áurea* se o mais longo dos segmentos for a média geométrica entre o menor e o segmento todo, ou de outra maneira o segmento todo está para a maior parte assim como a maior parte está para a menor. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se *razão áurea*[2] De acordo com a figura abaixo: se o ponto C faz uma secção áurea no segmento então: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CB}$

Figura 2.3: Segmento Áureo

Para calcularmos o número áureo, chamaremos $AC = a$ e $CB = b$ (imediatamente $AB = a + b$). Fazendo as substituições na expressão acima, teremos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = b(a+b) \Rightarrow a^2 = ab + b^2, a \neq 0$$

dividindo ambos os membros da equação anterior por a^2, segue que:

$$1 = \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Temos que o número $\dfrac{b}{a}$ é a razão entre a menor e a maior parte que o segmento AB foi seccionado, pelo definição, temos que este número é a *razão áurea* uma vez que C divide o segmento em *média e extrema razão*. Seja $\varphi = \dfrac{b}{a}$, daí:

$$1 = \varphi + \varphi^2 \Rightarrow \varphi^2 + \varphi - 1 = 0$$

cujas soluções são $\varphi = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, como a e b são positivos, logo rejeitamos a soluçao $\varphi = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ que é negativa e consideramos apenas a outra solução $\varphi = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ que é o chamado *número áureo* ($\varphi = 0,61803398...$).

[2]alguns autores assumem como *razão áurea* o inverso da apresentada, sendo a razão entre o maior segmento e o menor.

Razões Trigonométricas dos Arcos $\dfrac{\pi}{10} = 18^{\text{o}}$ e $\dfrac{2\pi}{5} = 72^{\text{o}}$

Proposição 2.1. *Em um triângulo isósceles com ângulos de $72^o, 72^o$ e 36^o , a bissetriz interna de um dos ângulos de 72^o divide o lado oposto em média e extrema razão.*

Demonstração. Considere um triângulo ABC de modo que atenda as hipóteses desta proposiçao, tal que $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^{\text{o}}$ e $\widehat{A} = 36^{\text{o}}$ e ainda $AB = AC$.

Seja D a interseção da bissetriz de $\widehat{B}$ com o lado AC. Afirmamos então que o ponto D divide o segmento AC em *média e extrema razão.*

De fato, sejam $AB = AC = a$ e $BC = b$. Como BD é bissetriz do ângulo $\widehat{B}$, então temos dois novos triângulos ΔABD e ΔBDC isósceles, observe na figura,

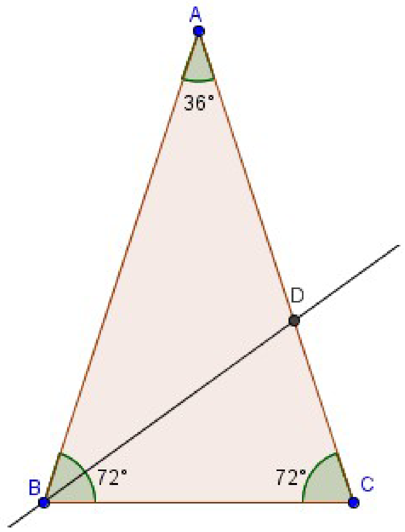

Figura 2.4: Triângulo Áureo

Podemos perceber que os ângulos internos e correspondentes dos ΔABC e ΔBDC são respectivamente congruentes (como o segmento BD é bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$, então $\widehat{DBC} = 36^{\text{o}}$, como $\widehat{BCD} = 72^{\text{o}}$, então o ângulo $\widehat{BDC} = 72^{\text{o}}$). Logo, estes triângulos são semelhantes. $\Delta ABC \sim \Delta BDC$.

Do ΔBDC (isósceles) temos $BD = BC = b$. Como o ponto D está em AC, então: $AC = AD + DC$.

Do ΔABD (também isósceles) temos $BD = AD = b$, e como

$$AC = AD + DC \qquad \Rightarrow \qquad a = b + DC \qquad \Rightarrow \qquad DC = a - b$$

Da semelhança dos triângulos ΔABC e ΔBDC, temos que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow b^2 = a^2 - ab$$

dividindo ambos os membros da última igualdade por $a^2 \neq 0$, temos

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{b}{a}$$

Fazendo $\varphi = \dfrac{b}{a}$, temos:

$$\varphi^2 + \varphi^2 - 1 = 0$$

cuja única solução positiva é o número áureo como vimos na seção anterior. Concluímos então que o ponto D divide o segmento AC em *média e extrema razão*, e a razão

$$\frac{b}{a} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

.

■

Por isso então este triângulo é chamado de *Triângulo Áureo*. Se considerarmos um triângulo ABC isósceles com estas característica (ângulos internos com medidas $\widehat{B} = 72^o, \widehat{C} = 72^o$ e $\widehat{A} = 36^o$) onde os lados congruentes medem 1 (na figura 2.4 $AB = AC = 1$), pelo valor da razão encontrada na proposição acima, $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, teríamos que:

$$\frac{BC}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Se traçarmos neste triângulo a bissetriz relativa ao vértice A (temos pelas propriedades do triângulos isósceles que esta bissetriz é também uma altura e uma mediana), e considerarmos M a interseção da bissetriz de $\widehat{A}$ com o lado BC, temos que esta dividirá o segmento BC em duas partes de mesmas medidas $BM = MC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Formando assim o triângulo retângulo AMB, onde $\widehat{BAM} = 18^o$ e o segmento AB mede 1, observe na figura abaixo:

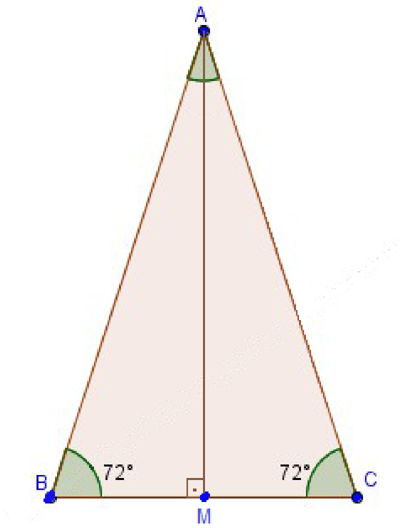

Figura 2.5: Triângulo Áureo cujos lados iguais medem 1

Podemos aplicar o teorema de pitágoras para determinar AM, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
AB^2 &= BM^2 + AM^2 \\
1^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + AM^2 \\
AM^2 &= 1 - \left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right) \\
AM^2 &= \frac{16-5+2\sqrt{5}-1}{16} \\
AM &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

Então, se aplicarmos as definições trigonométricas no triângulo retângulo AMB, teremos:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \operatorname{sen} 18^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \cos 18^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{1} \quad \Rightarrow \quad \cos 18^{\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \operatorname{sen} 72^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{1} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 72^{\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \cos 72^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1} \quad \Rightarrow \quad \cos 72^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Assim, com este interessante triângulo, conseguimos encontrar as razões trigonométricas de mais dois arcos, vale ressaltar que de acordo com a segunda relação fundamental (1.2)a tangente destes arcos podem ser facilmente determinadas. Sabermos as expressões algébricas exatas destes arcos será importantíssimo para o objetivo deste estudo no Capítulo 4.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo estudaremos brevemente o conjunto dos *Números Complexos*, $\mathbb{C}$. Fazendo uma abordagem histórica, uma apresentação do algebrismo básico dentro deste conjunto e a extração da raiz complexa.

Este capítulo tem neste estudo o objetivo de mostrar o quão relacionados estão estes dois grandes campos da matemática - *trigonométria e os números complexos.* Mostrar que através da manipulação de duas formas de extrair a raiz quadrada complexa, podemos obter nossas expressões algébricas para valores trigonométricos. O desenvolvimento do capítulo, visa então, construir somente o que se precisa para estabelecer a extração da *raiz quadrada complexa* e a *n-ésima raiz complexa.* É importante que se esclareça que o método não está sendo apresentado como o mais prático modo de se obter tais expressões, o que se deseja mostrar é que é possível e, no caso de se apresentar a alunos do segundo grau este método, estes terão um objetivo no estudo dos complexos e assim as ferramentas destes números poderão ser melhor fixadas.

No intuito de facilitar o entendimento de sua importância dentro da matemática, primeiramente vamos trazer um breve histórico, de como estes números surgiram, esta história mostra que eles tiveram papel fundamental no desenvolvimento desta ciência. A origem dos números complexos e sua aceitação no mundo matemático contou com grandes nomes que perfazem esta história e durou mais de dois séculos desde as primeiras contribuições de

Bombelli em meados do século XVI, passando por grandes nomes como Leibniz, DeMoivre, os irmãos Bernoulli, e como não podia estar de fora os grandes gênios sempre presentes Euler e Gauss.

3.1 Breve Histórico

É conhecido entre os matemáticos a frase de Leopold Kronecker, quando ele disse que *"Deus criou apenas os números naturais e que tudo o mais foi invenção do homem"*. Assim, cada evolução da matemática na conquista de novos números, *o zero, os inteiros negativos, os fracionários, os irracionais* e *os complexos*, era uma revolução e que necessitava de longos períodos de estudos para a aceitação. Assim, esta seçao busca trazer uma síntese da história da origem destes números desmistificando sua origem relacionada com as equações do 2º grau.

> *Ao longo da história, a necessidade de se introduzir os números complexos foi sendo detectada na medida em que se tentava resolver equações algébricas. A real motivação para a introdução dos números complexos surgiu no Século 16, quando Cardan descobriu que algumas equações do terceiro grau, chamadas por ele de caso irredutível, possuíam raízes reais, mas em cujas fórmulas resolventes não se conseguia evitar expressões envolvendo radicais quadráticos de números negativos.*
> (HEFEZ 2012 [4], cap. 1, p. 42)

A resolução de equações sempre foi um fascínio para os matemáticos de toda a história, deste os resquícios mais antigos que se tem notícia, existem estudos de resolução de equações. De acordo com Garbi 2009 [3], já no século 11, o matemático hindu *Sridhara* desenvolveu uma fórmula para a solução geral das equações do 2º grau e publicou em uma obra que não chegou até nós, sendo publicada posteriormente pelo também hindu *Bhaskara* , de modo que a tal fórmula acabou levando o seu nome e sendo amplamente conhecida.

Relembrando, temos que em uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a fórmula de *Bhaskara* nos dá como raízes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nestas soluções poderia ocorrer de o número $\Delta = b^2 - 4ac$ ser negativo, mas isso não era problema para os matemáticos deste tempo, que quando se deparavam com situações como esta simplesmente afirmavam que não existiam soluções.

A matemática continua sua história satisfeita com os números reais, até que no início do século XVI, no meio da controversa disputa com sofrimento e traição entre *Nicolò Fontana (Tartaglia)* - (1499-1557) e *Girolamo Cardano* - (1501-1576), pelas equações do 3º grau, os matemáticos voltam a ser desafiados na resolução de uma equação como esta:

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

onde facilmente percebe-se que $x = 4$ é uma raiz, porém se resolvermos pela fórmula que ficou conhecida como Fórmula de Cardano, chegaríamos em:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ora, esta equação se mostrou um problema que não poderia ser simplesmente ignorado, pois existe a solução e o procedimento para a determinação desta solução passava pela extração de raízes quadradas de números negativos, desse modo não dá para simplesmente dizer que não existe raiz.

> *Os fatos indicavam claramente que os números com que a matemática vinha trabalhando havia séculos não eram mais suficientes para o estudo da Álgebra. Não havia como negar as evidências de que se estava diante de um novo tipo de número, diferente de tudo o que se conhecia até então.*
> (GARBI 2009, [3], p. 50)

Foi então o Italiano Rafael Bombelli quem encarou este problema de modo a buscar regras para trabalhar com esses números, que ele denominou imaginários. Segundo Garbi (2009, [3] p. 51) Bombeli mesmo "revelou em 1572 no livro ***L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica***, seu método baseou-se no 'pensamento rude' segundo o qual $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente". Assim Bombelli buscou conciliar o resultado fornecido pela fórmula de Cardano com a solução $x = 4$. Daí,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$$

$$a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=4$$

donde vem $2a = 4 \Rightarrow a = 2$. Prosseguindo com o pensamento de Bombelli temos:

$$2+\sqrt{-b}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{121}\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$$

Com um pouco de álgebra, constata-se que $b = 1$. Obtemos assim,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

Assim, fazendo de conta que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e que, com ele opera-se do mesmo modo que os outros números que já conhecemos, uma raiz de nossa equação pela fórmula de Cardano e as definições de Bombelli é:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

desse modo Bombelli conciliou a fórmula de Cardano com o raiz encontrada por observação, com estes cálculos ele percebeu o funcionalidade de operar com o estranho número $\sqrt{-1}$. De acordo com Hefez (2012, [4] p. 2) Bombelli começou a estudar estes números por volta de 1550 e estabeleceu em sua obra *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*, algumas propriedades operatórias como:

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})=-1, \qquad (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1})=1,$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})=-1, \qquad (\pm 1)(\sqrt{-1})=\pm\sqrt{-1},$$

Criou também a regra para a soma e multiplicação de dois números do tipo $a+b\sqrt{-1}$, da seguinte forma:

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1},$$

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

Desta forma estavam lançadas as bases para o desenvolvimento da teoria dos **números complexos**, um ponta pé do início de uma revolução da matemática, que neste momento estava expandindo seus horizontes para a conquista de um novo conjunto numérico mais amplo do que, os até então perfeitos, números *reais.*

> *O tratamento formal dos números da forma $a + b\sqrt{-1}$, dado por Bombelli, não satisfazia minimamente os matemáticos da época, que os olhavam com muita desconfiança, admitindo-os apenas como artifício de cálculo, sem uma existência efetiva, tendo o próprio Cardano como feroz oponente. Os matemáticos da época, pela influência da cultura helenística predominante na área, relutavam em aceitar entidades matemáticas que não tivessem algum significado geométrico. Esse significado geométrico foi delineado no final do Século 18, início do Século 19.*
> (HEFEZ 2012 [4], p. 3)

As equações do 3º grau e a fundamentação dos números complexos precisaram aguardar ainda um século e meio, passando por algumas contribuições de Leibniz, Abraham DeMoivre, os irmãos Bernoulli, até que *Leonhard Euler* (1707-1783), de quem foi dito que calculava com a facilidade com que os outros respiram, desvendou os seus mistérios dando um ataque final. Dentre suas inúmeras contribuições quanto às notações matemáticas, foi Euler quem representou em um artigo publicado em 1777 o número $\sqrt{-1}$ pelo famoso "i". Euler dominou os números complexos e deixou pouco para ser desvendado. Mas deixou! O almejado tratamento geométrico destes números imaginários veio somente com o alemão *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) no ano de 1799 em sua tese de doutorado, posteriormente melhorada e apresentada em 1831 (foi nesta obra que Gauss batizou esses números como *Números Complexos*) e reproduzida em suas *Obras Reunidas.* Por isso o plano complexo e comumente chamado de Plano de Gauss.

> *A simples idéia de considerar as partes real e imaginária de uma número complexo $a + bi$ como coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois estes números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa.*
> (EVES 2004 [2], p. 524).

Portanto apesar de toda a conturbada e longa história que envolve os números complexos e sua raiz imaginária, estes termos são infelizes e subjetivas para a didática do ensino da matemática, uma ciência lógica e exata, mas estas designações são mantidas por respeito à história e aos matemáticos pioneiros nestes estudos que nos deram esta importante teoria acompanhada destas designações. Vale ressaltar aqui que existe um frequente equívoco cometido por professores de matemática quando ensinam que os números complexos surgiram da necessidade de solucionar equações de 2º grau com discriminantes negativos, enquanto que esta história apresentada mostra que a origem destes números são as equações de 3º grau que, a partir de Bombelli, desencadeou todo o desenvolvimento da teoria que durou mais de dois séculos.

3.2 Álgebra dos Complexos

Foge dos objetivos do presente trabalho uma construção rigorosa da teoria dos números complexos, desta forma será apresentado apenas algumas definições e algumas propriedades a cerca deste conjunto, para melhor compreensão da continuidade dos estudos. Assim, de modo sintético um número complexo z é aquele que pode ser escrito na forma $z = a + bi$, onde a e b são reais e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, de modo que $i^2 = -1$.

O número a é a parte real de z, e escreve-se: $Re(z) = a$, e o número b é a parte imaginária, escreve-se: $Im(z) = b$. Se $b = 0$, então o número é real: $z = a + 0.i \Rightarrow z = a$. Por outro lado se o complexo tiver $a = 0$, então ele é denominado imaginário puro: $z = 0 + bi \Rightarrow z = bi$, o complexo z é nulo se e só se $Re(z) = Im(z) = 0$. Desta forma fica fácil perceber que o conjunto de todos os complexos, que ficou representado por $\mathbb{C}$, contém o conjunto dos números Reais.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad i^2 = -1\} \quad \text{onde} \quad i \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}.$$

A forma $z = a + bi$ é denominada forma algébrica do complexo z, assim temos que os complexos $z = a + bi$ e $z' = a' + b'i$ são iguais se, e somente se $a = a'$ e $b = b'$. Seguindo

Bombelli e as notações de Euler, temos:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

É fácil mostrar que as operações de adição e multiplicação de complexos gozam de propriedades importantes da matemática, sendo $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ e sendo $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$, os chamados *zero* e *um*, temos as seguintes propriedades:

- Comutativa: $z + z' = z' + z$ e $z \cdot z' = z' \cdot z$;
- Associativa: $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ e $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$;
- Elemento neutro: $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$;
- Distributiva: $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$.

Temos ainda que para todo complexo $z = a + bi$ existe o complexo $z' = (-a) + (-b)i$, chamado de *simétrico* de z, tal que $z + z' = 0$. E, se $z \neq 0$, existe também o complexo $z'' = a'' + b''i$, chamado de *inverso* multiplicativo de z, tal que $z \cdot z'' = 1$. Mais explicitamente, temos:

$$1 = z \cdot z'' = (aa'' - bb'') + (ab'' + ba'')i$$

o que nos fornece o seguinte sistema de duas equações lineares nas incógnitas a” e b”:

$$\begin{cases} aa'' - bb'' = 1 \\ ab'' + ba'' = 0. \end{cases}$$

resolvendo, obtemos a seguinte solução:

$$a'' = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad b'' = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Portanto, temos o que inverso multiplicativo do complexo $z = a + bi \neq 0$, é:

$$z'' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i, \quad \text{tal que} \quad z \cdot z'' = 1.$$

Representamos o inverso multiplicativo de z por z^{-1}, ou seja, $z'' = z^{-1}$.

É definido como *conjugado* de $z = a + bi$ o complexo $\overline{z} = a - bi$. E o *módulo de z* é o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dessa forma, de acordo com a expressão acima do inverso multiplicativo, temos que:

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2} \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Como $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$, temos que:

$$\begin{aligned}
|z^{-1}| &= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)} \\
&= (a^2 + b^2)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= 1/|z|
\end{aligned}$$

Podemos também escrever o complexo $z = a + bi$ de outra maneira:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

Assim temos que os números $(a/\sqrt{a^2 + b^2})$ e $(b/\sqrt{a^2 + b^2})$ são números situados entre -1 e $+1$ e ainda, a soma de seus quadrados é sempre 1. A partir desta observação e das relações trigonométricas, os matemáticos perceberam que estes números poderiam ser considerados o cosseno e o seno de um ângulo θ, denominado *argumento de z*, e sendo o número $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o *módulo de z*, temos que o número complexo pode ser expresso por

$$z = r(cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

3.3 Raiz Complexa

3.3.1 Raiz Quadrada

Considerando um número complexo $z \neq 0$, temos que a equação $x^2 = z$ sempre admite duas soluções em $\mathbb{C}$, que são as *raízes complexas quadradas* de z, diferente do conjunto $\mathbb{R}$ onde nem sempre é possível extrair raízes quadradas. Para tanto seja um $w \in \mathbb{C}$, não nulo, tal que $w^2 = z$ e escrevamos $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Se $b = 0$ então $z = a$, assim, este número complexo pertence ao conjunto dos números reais, daí temos que:

$$w^2 = z \quad \Rightarrow \quad w^2 = a \quad \Rightarrow \quad w = \pm\sqrt{a}$$

perceba que $\sqrt{a}$ existe em $\mathbb{C}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. O que confirma a afirmação no caso em que $b = 0$. Consideremos então $b \neq 0$. Vamos encontrar a raiz quadrado do complexo $z = a + bi$ pelo procedimento apresentado por Hefez (2012, p. 17 - 18, [4]). Assim, consideremos um número complexo $w = c + di$ tal que:

$$z = w^2 \quad \Rightarrow \quad a + bi = (c + di)^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$$

Pela igualdade de números complexos, temos que:

$$\begin{cases} a &= c^2 - d^2 \\ b &= 2cd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 &= (c^2 - d^2)^2 \\ b^2 &= 4c^2d^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^4 + d^4 + 2c^2d^2 = (c^2 + d^2)^2$$

Portanto $c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, por outro lado temos que $c^2 - d^2 = a$, somando e subtraindo essas igualdades, temos que:

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \quad \text{e} \quad d^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}.$$

Logo

$$|c| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \qquad \text{e} \qquad |d| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}. \tag{3.1}$$

Portanto, como $b \neq 0$ e $b = 2cd$, devemos tomar os números c e d, com a propriedade 3.1, tais que o sinal do seu produto seja o mesmo do sinal de b. Dessa forma, quando $b > 0$, tomaremos $c > 0$ e $d > 0$, ou $c < 0$ e $d < 0$; quando $b < 0$, tomaremos $c > 0$ e $d < 0$, ou $c > 0$ e $d < 0$. Assim temos exatamente dois números complexos w e $-w$ cujo quadrado é $z = a + bi$, denotados por $\sqrt{z}$ e $-\sqrt{z}$ respectivamente.

Exemplo 3.1: *Calculemos a raiz quadrada do complexo* $z = 5 - 12i$

Devemos encontrar um complexo $w = c + di$ tal que $w^2 = 5 - 12i$, observando que $a = 5$ e $b = -12$, temos que $a^2 + b^2 = 169$, assim, pelas equações 3.1, temos que:

$$|c| = \sqrt{\frac{\sqrt{169} + 5}{2}} = \sqrt{\frac{13 + 5}{2}} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e} \quad |d| = \sqrt{\frac{\sqrt{169} - 5}{2}} = \sqrt{\frac{13 - 5}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Como $b < 0$, as soluções serão:

$$w_1 = 3 - 2i \quad \text{e} \quad w_2 = -3 + 2i.$$

Esse procedimento para extração de *raiz quadrada* será usado posteriormente para obtenção de expressões algébricas exatas para arcos trigonométricos, por meio de comparação deste método com outro método de extração de raiz quadrada, que depende da representaçao dos números complexos em sua *forma polar.*

3.3.2 Forma Polar

Um número complexo z é definido por um par ordenado de números reais (a, b), que chamamos de afixo de z e automaticamente é identificado com um ponto do plano cartesiano (chamado de plano complexo ou plano de Gauss). Portanto dado $z = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}*$, consideremos o ponto $P = (a, b)$ do plano, que corresponde ao afixo do número $z \neq 0$ e é diferente da origem O do plano. O segmento OP, que possui comprimento $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ e determina com a semi-reta Ox um ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$, chamado de argumento de z e denotado por $\theta = arg(z)$ (observando que θ não é único, visto que a igualdade é válida também para $\theta + 2k\pi$), conforme figura abaixo.

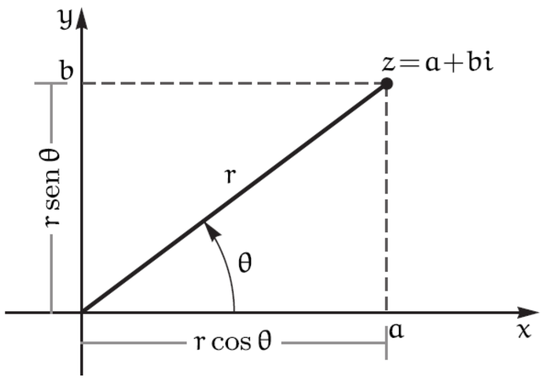

Figura 3.1: Forma Polar

Utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo formado temos que $a = r\cos\theta$ e $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, portanto a forma polar ou forma trigonométrica do número complexo e não nulo $z = a + bi$ é definida por:

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Com a representação polar e os conceitos de argumento e módulo podemos apresentar a seguinte proposião:

Proposição 3.1 (Produto de números complexos na forma polar). *Dados* $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ *e* $z' = r'(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta')$*, temos que*

$$z \cdot z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta + \theta')).$$

Demonstração. De fato, pois de $z \cdot z'$ na forma polar, temos:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \cdot r'(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta') \\ &= rr'((\cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta') + i(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta') \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de adição 1.7 e 1.9, onde:

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(\theta + \theta') = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'.$$

temos então:

$$z \cdot z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta + \theta'))$$

■

Esta proposição nos dá um interpretação geométrica da multiplicação de dois complexos não nulos: *para calcular o produto de z com z', calculamos o produto dos módulos de z e z' e somamos os seus argumentos θ e θ'* (HEFEZ 2012, p. 23-24 [4]).

Com a multiplicação na forma polar podemos determinar uma expressão para potências de expoente inteiro n cuja base é um número complexo não nulo, conforme veremos na seguinte proposição, cuja demonstração está de acordo com a apresentada por Hefez (2012, p. 26 [4]).

Proposição 3.2 (Fórmula de De Moivre [1]). *Dado um número complexo não nulo na forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, então, para cada número inteiro n, tem-se que*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)).$$

Demonstração. Esta demonstração será feita por indução sobre o expoente n. Primeiramente, para $n = 0$: como $r^0 = 1$, então $r^0(\cos(0 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1 = z^0$ o que confirma que a fórmula vale para $n = 0$

Seja $n \geq 0$ e suponhamos que a igualdade seja válida para n, isto é, $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$. Então,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n \\ &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot (r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))) \\ &= r^{n+1}(\cos(\theta + n\theta) + i \operatorname{sen}(\theta + n\theta)) \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta)) \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução, a terceira da multiplicação de números complexos na forma polar e a última mostra a validadeda fórmula do enunciado para $n+1$. Concluímos então, por indução, a validade da fórmula para todo número natural n.

Para concluir a demonstração, precisamos expandir o prova para os inteiros. Seja $n < 0$ um inteiro. Então, $-n > 0$ e $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Como

$$z^{-1} = \overline{z}/|z|^2 = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)),$$

assim, pela fórmula já demonstrada para o natural $-n > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} z^n = (z^{-1})^{-n} &= (r^{-1})^{-n}(\cos((-n) \cdot (-\theta)) + i \operatorname{sen}((-n) \cdot (-\theta))) \\ &= r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}$.

■

[1] Em homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754), autor dessa fórmula.

3.3.3 Raízes n-ésimas

Vimos no início desta seção que todo complexo $z \neq 0$ possui exatamente duas raízes complexas quadradas, nesta subseção, buscaremos generalizar este resultado, mostrado que todo complexo $z \neq 0$ possui n raízes *n-ésimas* complexas, além de apresentarmos como determiná-las.

Se considerarmos um natural $n \geq 1$ e um complexo z, temos que um outro complexo w será uma raiz *n-ésima* de z, se e somente se, $w^n = z$. O complexo z deve ser não nulo, uma vez que, se $z = 0$, então a equação $w^n = z$ terá uma única solução $w = 0$, para todo $n \geq 1$. Temos também que se $n = 1$ então a única raiz "*1-ésima*" de z é o próprio z.

Segue então a proposição que nos dá a generalização mencionada, de acordo com o apresentada por Hefez (2012, p. 30-31 [4]).

Proposição 3.3 (Raízes complexas *n-ésimas*)**.** *Todo número complexo $z \neq 0$ tem exatamente n raízes complexas n-ésimas, para cada número natural $n \geq 1$, a saber,*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

onde $r = |z| > 0$ e $\theta = arg(z)$.

Demonstração. Seja $n \geq 2$. Consideremos o complexo z na sua forma polar $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ queremos determinar os complexos $z_\lambda = \rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$ tais que $z = (z_\lambda)^n$.

Pela fórmula de *De Moivre* temos que: $(z_\lambda)^n = \rho^n(\cos(n\phi) + i\,\mathrm{sen}(n\phi))$, assim, temos que $z = (z_\lambda)^n$ se, e somente se:

$$\begin{cases} \rho^n &= r \\ n\phi &= \theta + 2\pi\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho &= \sqrt[n]{r}, \qquad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0 \\ \phi &= \dfrac{\theta + 2\pi\lambda}{n}, \qquad \lambda \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Portanto, temos que:

$$z_\lambda = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi\lambda}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi\lambda}{n}\right)\right), \qquad \text{onde} \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

Já temos que as raízes n-ésimas de z tem realmente o formado apresentado pela proposição, faltando assim mostrarmos que o número de raízes *n-ésimas* é n. Sejam $\lambda, \mu\mathbb{Z}$. Da igualdade de números complexos na forma polar temos que:

$$\begin{aligned}
z_\lambda = z_\mu \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\theta + 2\pi\lambda}{n} - \frac{\theta + 2\pi\mu}{n} = 2\pi l, \quad \text{para algum} \quad l \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi\lambda}{n} - \frac{2\pi\mu}{n} = 2\pi l, \quad \text{para algum} \quad l \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda}{n} - \frac{\mu}{n} = l, \quad \text{para algum} \quad l \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda - \mu = ln, \quad \text{para algum} \quad l \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda \equiv \mu \mod n.
\end{aligned}$$

Portanto, só interessa o resto que λ deixa na divisão por n. Para cada resto há uma raiz *n-ésima* de z.

Logo, para cada $k = 0, 1, \cdots, n-1$ há uma raiz complexa *n-ésima* de z, determinada pelo argumento $\phi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, sendo as raízes complexas *n-ésimas* de z, portanto, dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\phi_k + i \operatorname{sen}\phi_k), \qquad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{3.2}$$

■

Exemplo 3.2: Encontraremos as raízes cúbicas de $z = -16 + 16i$.

Inicialmente vamos determinar a forma polar de z. Sendo $r = |z|$ e $\theta = arg(z)$, temos que: $r = \sqrt{(-16)^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$ e

$$\cos\theta = -\frac{16}{16\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 135^{\circ} = \frac{3\pi}{4},$$

daí,

$$z = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right).$$

Agora determinaremos as raízes cúbicas de z, com $k = 0, 1, 2$ na equação 3.2 da proposição acima, assim temos:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)\right]\\
&= \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{12}\right);
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right]\\
&= \sqrt[3]{16\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right).
\end{aligned}
$$

Com esta proposição do cálculo da *raízes complexas n-ésimas*, fazendo $n = 2$ obtemos uma forma de calcular as raízes quadradas complexas, e temos também que as duas raízes quadradas complexas de um número podem ser obtidas pelas equações 3.1. Com estes dois métodos apresentados faremos no próximo capítulo uma manipulação de modo que possamos obter valores exatos para *senos* e *cossenos* de arcos não notáveis.

CAPÍTULO 4

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS EXATAS PARA VALORES TRIGONOMÉTRICOS

Os valores trigonométricos são extremamente importantes para as aplicações da trigonometria, para o uso da trigonometria na resolução de problemas práticos. Esses valores foram objetos de estudos de anos e anos de matemáticos ao longo da história que se dedicaram a construir as tábuas trigonométricas.

> *Provavelmente o mais ilustre dos matemáticos muçulmanos do século X foi Abû'l-Wefâ (940 - 998), nascido na região montanhosa persa de Khorâsân. Ele se tornou especialmente conhecido por sua traduçao de Diofanto, por ter introduzido a função tangente em trigonometria e por uma tábua de senos e tangentes, com incrementos de 15', que elaborou. Para tanto ele aperfeiçoou o método de Ptolomeu, obtendo* $\operatorname{sen} 30'$ *com nove casas decimais*
> (EVES 2004 [2], p. 261).

Houve muita dedicação de grandes matemáticos em conseguir cada vez mais casas decimais para os valores trigonométricos, buscando trabalhar com estes valores o mais próximos do exato possível. Como a maioria dos valores trigonometricos são irracionais, para trabalharmos com valores trigonométricos exatos recorremos as expressões algébricas.

De acordo com o site da UFF ([8]), usando o grau como medida de ângulo, temos que:

$$\operatorname{sen} 0^{\circ} = 0, \quad \operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} 90^{\circ} = 1, \quad \operatorname{sen} 210^{\circ} = -\frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 270^{\circ} = -1$$

Podemos então questionar se existe algum número racional θ para o qual $\operatorname{sen}\theta$ é racional e diferente de -1, -1/2, 0, 1/2 e 1? Temos então a seguinte proposição:

Proposição 4.1. *Os únicos valores racionais de* $\operatorname{sen}\theta$*, onde* θ *é um racional e representa a medida de ângulos em grau, são* 1*,* 1/2*,* 0*,* 1/2 *e* 1*.*

Segundo o site da UFF, a prova apresentada abaixo foi dada pelo alemão *Jörg Jahnel*

Demonstração. Vamos mostrar que para todo número racional θ (considerado como uma medida de ângulos em graus), $\cos\theta$ pertence ao conjunto $V = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. Provando isso, e considerando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = \cos(90-\theta)$, concluiremos que o resultado valerá também para a função seno.

Sabemos pela eqação 1.16 que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Portanto,

$$2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 - 2.$$

Seja $2\cos\theta$ um número racional, $2\cos\theta = a/b$ é um número racional, com $b \neq 0$, a e b inteiros primos entre si, ou seja, $mdc(a, b) = 1$. Assim:

$$2\cos 2\theta = \frac{a^2}{b^2} - 2 = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}.$$

Podemos afirmar que $a^2 - 2b^2$ e b^2 também não possuem fator primo em comum. De fato, pois supondo que exista um número primo p que é fator comum de $a^2 - 2b^2$ e b^2. Como p divide b^2, segue-se que que p divide b. Se p divide b e p divide $a^2 - 2b^2$, então p divide a. Logo, p seria um fator primo comum de a e b, uma contradição. Agora, se $b = \pm 1$ então:

$$2\cos 2\theta = a^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{2\cos 2\theta + 2}.$$

Daí, como $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ e $a \in \mathbb{Z}$, então temos três casos possíveis:

$$\cos 2\theta = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 0;$$

$$\cos 2\theta = -1/2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1; \quad \text{e}$$
$$\cos 2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2;$$

então obrigatorialmente a é igual a -2, -1, 0, 1, ou 2. Mas, se $b = \pm 1$ então

$$2\cos\theta = \pm a/1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \pm a/2,$$

portanto, nestes casos, $\cos\theta$ é um elemento do conjunto V, como queríamos demonstrar. Vamos agora mostrar que b não pode ser diferente de -1 e 1, o que concluirá a demonstração. Com efeito, se b é diferente de -1 e 1, então os denominadores de

$$2\cos(\theta), \quad 2\cos(2\theta), \quad 2\cos(4\theta), \quad 2\cos(8\theta), \quad \cdots, \quad 2\cos(2^k\theta), \quad \cdots$$

vão ficando arbitrariamente grandes. Isto significa que os números $2\cos(2^k\theta)$ acima *são todos diferentes*. Por outro lado, dado que θ é um número racional, digamos, $s = m360/n$, e dado que cosseno é uma função periódica de período 360, segue-se que o conjunto $\{2\cos(2^k\theta), k \in \mathbb{N}\}$ tem no máximo n elementos distintos, uma contradição, e portanto $b = \pm 1$. ■

Três arcos são considerados notáveis na trigonometria, são os arcos de 30º, 45º e 60º. Os valores trigonométricos exatos para estes arcos são bem conhecidos pelos alunos do segundo grau, que aprendem a preencher uma tabela (tabela 2.1) muitas vezes sem muita explicação da origem daqueles valores.

Neste capítulo apresentaremos como manipular as ferramentas apresentadas ao longo deste estudo, que perfazem o conteúdo matemático da educação básica da grande maioria dos livros didáticos do segundo grau, para obter expressões algébricas exatas para valores trigonométricos de muitos outros arcos além dos notáveis. Primeiramente faremos isto utilizando as ferramentas trigonométricas apresentadas no capítulo 1, e os valores trigonométricos **encontrados** no capítulo 2 (que são dos arcos notáveis e dos arcos de 18º e 72º). Na segunda seção deste capítulo, utilizaremos os números complexos e as formas de obtenção de raízes quadradas, construídas no capítulo 3, para encontrar algumas dessas tais expressões algébricas.

4.1 Obtendo as Expressões por Fórmulas Trigonométricas

Nesta e na próxima seção, trabalharemos especialmente as expressões algébricas para os valores do seno e do cosseno de alguns arcos, pois das demais funções trigonométricas pode-se encontrar as expressões referente a seus valores a partir das relações fundamentais apresentadas no Capítulo 1 e do estudo do sinal de acordo com o ciclo trigonométrico.

Nos restringiremos a estudar os valores trigonométricos para os arcos θ tais que $0 \leq \theta \leq 90^o$. Uma vez que para os demais arcos os valores dos senos e cossenos podem ser estudados pelas simetrias do ciclo unitário.

Com as informações encontradas no capítulo 2, sabemos quais são as expressões algébricas que nos fornecem os valores das funções trigonométricas dos arcos de medida 18º, 30º, 45º, 60º e 72º. Analisando o ciclo trigonométrico, percebemos também os valores para os arcos de 0º e 90º.

$$\operatorname{sen} 0^{\circ} = \cos 90^{\circ} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 90^{\circ} = \cos 0^{\circ} = 1$$

Conhecendo estes valores e utilizando as fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão (semi-arco), que foram construídas no capítulo 1, podemos então facilmente encontrar expressões exatas de muitos outros arcos.

Exemplo 4.1: Conhecidos que o $\cos 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen} 30^{\circ} = \dfrac{1}{2}$ e sabendo ainda as equações do semi-arco 1.18 e 1.19:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$

podemos determinar as expressões que fornecem os valores do $\cos 15^{\circ}$ e do $\operatorname{sen} 15^{\circ}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \cos 15^{\circ} = \cos\frac{30^{\circ}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} &= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \\ \Rightarrow \quad \cos 15^{\circ} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 15^{\circ} = \operatorname{sen}\frac{30^{\circ}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} &= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \\ \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 15^{\circ} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

podemos fatorar $\cos 15^{\circ}$ como segue

$$\begin{aligned} \cos 15^{\circ} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} &= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \end{aligned}$$

portanto,

$$\cos 15^o = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1);$$

analogamente, teremos:

$$\operatorname{sen} 15^o = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).$$

Agora conhecemos também as expressões algébricas para o seno e o cosseno do arco de 15^o.

Exemplo 4.2: Do triângulo áureo nós determinamos que:

$$\cos 18^o = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{5+\sqrt{5}})} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Então, pela equação 1.8 do cosseno da diferença de dois arcos que diz:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,$$

podemos determinar a expressão que fornece o valor do $\cos 3^o$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\cos 3^o = \cos(18^o - 15^o) &= \cos 18^o\cdot\cos 15^o + \operatorname{sen} 18^o\cdot\operatorname{sen} 15^o \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{5+\sqrt{5}})}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \\
&= \frac{1}{16}\left[2\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)\right] + \frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)\right] \\
\Rightarrow \quad \cos 3^o &= \frac{1}{16}\left[2(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)\right]. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

E pela equação 1.10 do seno da diferença de dois arcos, que diz:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha,$$

podemos determinar a expressão que fornece o valor do $\operatorname{sen} 3^{\circ}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3^{\circ} = \operatorname{sen}(18^{\circ} - 15^{\circ}) &= \operatorname{sen} 18^{\circ} \cdot \cos 15^{\circ} - \operatorname{sen} 15^{\circ} \cdot \cos 18^{\circ} \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{5+\sqrt{5}})} \\
&= \frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right] - \frac{1}{16}\left[2\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)\right] \\
&= -\frac{1}{16}\left[2[-(1-\sqrt{3})]\sqrt{5+\sqrt{5}}\right] + \frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right] \\
\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 3^{\circ} &= \frac{1}{16}\left[2(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right]. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Estas expressões 4.3 e 4.4 para o arco de 3° são um tanto quanto extensas e ruins de serem manipuladas, porém são fundamentais para obtermos várias outras. É a partir destas expressões do seno e cosseno de 3°, que nós poderemos determinar as expressões algébricas exatas para os valores trigonométricos de todos os arcos θ medido em graus desde que θ seja um múltiplo de três, para isso basta usar as fórmulas de multiplicação ou as fórmulas de adição, apresentadas no capítulo 1. Encontrar estas expressões é um excelente exercício de manipulação algébrica envolvendo radicais.

Por exemplo, se quisermos a expressão que fornece o valor do $\operatorname{sen} 78^{\circ}$, devemos calcular pela fórmula 1.9 da página 15 primeiramente $\operatorname{sen} 75^{\circ}$ fazendo $\operatorname{sen}(30^{\circ} + 45^{\circ})$, em seguida usamos novamente a mesma fórmula e calculamos $\operatorname{sen}(75^{\circ} + 3^{\circ}) = \operatorname{sen} 78^{\circ}$, uma vez que conhecemos os valores dos senos e dos cossenos dos arcos 3°, 30° e 45°. Se quisermos encontrar a expressão para o $\cos 6^{\circ}$, usaremos a fórmula da multiplicação 1.16 da página 18, e calculamos $\cos(2 \cdot 3^{\circ}) = \cos 6^{\circ}$.

E assim, para qualquer arco medido em graus múltiplo de três, com os valores dos senos e cossenos que conhecemos neste estudo, poderemos com as fórmulas apresentadas, encontrar as suas expressões algébricas exatas que fornecem seus valores trigonométricos.

4.2 Obtendo as Expressões por Números Complexos

Uma necessidade frequente no estudo dos números complexos é passar um complexo da sua forma algébrica para sua forma polar e vice-versa. No *Exemplo 3.2* dado na página 43,percebemos que não podemos escrever facilmente os complexos z_1 e z_2 na forma algébrica, a não ser com o auxilio de uma tabela trigonométrica ou calculadoras, utilizando valores aproximados para o seno e o cosseno, o que nem sempre é possível obter em determinados momentos. Para evitar o uso destas aproximações, podemos recorrer aos números complexos, mais precisamente aos processos de obtenção de raízes quadradas tanto pelo método 3.1 (**método 1**) da subseção 3.3.1 quanto pelo método 3.2 (**método 2**) da subseção 3.3.3, fazendo por fim uma comparação entre esses dois métodos. Vale ressaltar que essas aplicações são válidas apenas para alguns arcos trigonométricos. Vamos às aplicações práticas desse processo. Para esta seção trabalharemos com as medidas dos arcos em radianos.

Mostraremos a partir de um exemplo, como proceder para obtermos as expressões algébricas para valores trigonométricos, para isso, tomaremos como base o *Exemplo 3.2*. Inicialmente para o arco de medida $11\pi/12$ que é simétrico, em relação ao eixo vertical, ao arco de medida $\pi/12$. Portanto encontrando os valores de seno e cosseno para o arco de medida $\pi/12$ podemos determinar em módulo os valores dessas mesmas funções para o arco de medida $11\pi/12$, e analisando o ciclo trigonométrico e considerando que este arco pertence ao segundo quadrande, temos que o valor do seno será positivo e do cosseno será negativo.

Para conseguirmos isso, vamos considerar o número complexo $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ que na *forma polar* será dado por $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$. Calculemos então as raízes quadradas de z pelos dois métodos citados acima:

Método 1: Consideremos o complexo $w = c + di$ tal que $w^2 = z$, temos então que w é uma raiz quadrada complexa de z, assim, observando que $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ e $a^2 + b^2 = 1$, pelas equações 3.1, temos que:

$$|c| = \sqrt{\frac{\sqrt{1} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

e

$$|d| = \sqrt{\frac{\sqrt{1} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Como $b > 0$, as raízes quadradas de z serão:

$$w_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} i \qquad \text{e} \qquad w_1 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} i.$$

Método 2: Na forma polar $z = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$, daí calcularemos as raízes quadradas de z pela equação apresentada na proposição 3.3.3, fazendo $k = 0, 1$. Assim,

$$z_0 = \sqrt{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$$

e

$$z_1 = \sqrt{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2}\right)\right] = \cos\frac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}$$

Agora comparando as raízes quadradas de z em ambos os métodos. Lembrando que é válida apenas a comparação de complexos que geometricamente ocupam o mesmo lugar no plano complexo (mesmo quadrante), e neste caso temos que $w_0 = z_0$ e $w_1 = z_1$. De $w_0 = z_0$, temos:

$$\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} i$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Assim, por simetria em relação ao eixo vertical no ciclo trigonométrico, podemos determinar que:

$$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Com estes valores poderemos encontrar os valores das outras funções trigonométricas para este arco, utilizando as relações fundamentais da trigonometria.

Ainda neste exemplo dado, temos que $w_1 = z_1$, dessa afirmativa, temos que:

$$\cos\frac{13\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$$

$$\Rightarrow\quad \cos\frac{13\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\quad \text{e}\quad \operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Neste exemplo, mostramos então que é possível determinar expressões trigonométricas exatas para arcos não notáveis partindo de expressões de arcos conhecidas, utilizando números complexos. O método é um tanto limitado e não pode ser considerado um método prático, até porque apresentamos na seção anterior formas bem mais simples e bem mais abrangente de se obter estas expressões para muitos arcos. Mas, esta organização para o estudo dos complexos, dá uma formatação com um sentido que motivo os estudos e fundamenta a exatidão e a interrelação entre grandes campos da rainha das ciências, a **matemática**.

4.3 Expressões para Seno e Cosseno de Alguns Arcos

Segue abaixo algumas expressões obtidas com os mecanismos apresentados neste estudo, além destes ainda é possível encontrar os valores trigonométricos de outros arcos. Os cálculos realizados para obtermos estas expressões, não estão presentes, por serem desnecessários ao objetivo, uma vez que os mecanismos para **determiná-los** são os apresentados ao longo deste trabalho.

Arco: $\frac{\pi}{60}=3^\circ$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}=\operatorname{sen}3^\circ=\frac{1}{16}\left[2(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right];$

$\cos\frac{\pi}{60}=\cos3^\circ=\frac{1}{16}\left[2(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)\right];$

Arco: $\frac{\pi}{30}=6^\circ$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{30}=\operatorname{sen}6^\circ=\frac{1}{8}\left[\sqrt{6(5-\sqrt{5})}-\sqrt{5}-1\right];$

$\cos\frac{\pi}{30}=\cos6^\circ=\frac{1}{8}\left[\sqrt{2(5-\sqrt{5})}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\right];$

Arco: $\dfrac{\pi}{20} = 9°$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{20} = \operatorname{sen} 9° = \dfrac{1}{8}\left[\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) - 2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right];$

$\cos\dfrac{\pi}{20} = \cos 9° = \dfrac{1}{8}\left[\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) + 2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right];$

Arco: $\dfrac{\pi}{15} = 12°$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{15} = \operatorname{sen} 12° = \dfrac{1}{8}\left[\sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right];$

$\cos\dfrac{\pi}{15} = \cos 12° = \dfrac{1}{8}\left[\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + \sqrt{5} - 1\right];$

Arco: $\dfrac{\pi}{12} = 15°$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12} = \operatorname{sen} 15° = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1);$

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos 15° = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1);$

Arco: $\dfrac{\pi}{10} = 18°$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \operatorname{sen} 18° = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) = \dfrac{1}{2}\varphi;$

onde φ é a *proporção de ouro*;

$\cos\dfrac{\pi}{10} = \cos 18° = \dfrac{1}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};$

Arco: $\dfrac{7\pi}{60} = 21°$

$\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{60} = \operatorname{sen} 21° = \dfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{5})\right];$

$\cos\dfrac{7\pi}{60} = \cos 21° = \dfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}} + \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{5})\right];$

Arco: $\dfrac{\pi}{8} = 22,5°$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8} = \operatorname{sen} 22,5° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$

$\cos\dfrac{\pi}{8} = \cos 22,5° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$

Arco: $\dfrac{2\pi}{15} = 24°$
$\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{15} = \operatorname{sen} 24° = \dfrac{1}{8}\left[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right];$
$\cos\dfrac{2\pi}{15} = \cos 24° = \dfrac{1}{8}\left(\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \sqrt{5}+1\right);$

Arco: $\dfrac{3\pi}{20} = 27°$
$\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{20} = \operatorname{sen} 27° = \dfrac{1}{8}\left[2\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{2}\,(\sqrt{5}-1)\right];$
$\cos\dfrac{3\pi}{20} = \cos 27° = \dfrac{1}{8}\left[2\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2}\,(\sqrt{5}-1)\right];$

Arco: $\dfrac{\pi}{6} = 30°$
$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2};$
$\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

Arco: $\dfrac{11\pi}{60} = 33°$
$\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{60} = \operatorname{sen} 33° = \dfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2}(1+\sqrt{3})(\sqrt{5}-1)\right];$
$\cos\dfrac{11\pi}{60} = \cos 33° = \dfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2}(1-\sqrt{3})(\sqrt{5}-1)\right];$

Arco: $\dfrac{\pi}{5} = 36°$
$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5} = \operatorname{sen} 36° = \dfrac{1}{4}\sqrt{2(5-\sqrt{5})};$
$\cos\dfrac{\pi}{5} = \cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1}{2}\varphi^{-1};$
onde φ é a *proporção de ouro*;

Arco: $\dfrac{13\pi}{60} = 39°$
$\operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{60} = \operatorname{sen} 39° = \dfrac{1}{16}[2(1-\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}} + \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)];$
$\cos\dfrac{13\pi}{60} = \cos 39° = \dfrac{1}{16}[2(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}} + \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)];$

Arco: $\dfrac{7\pi}{30} = 42^\circ$

$\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{30} = \operatorname{sen} 42^\circ = \dfrac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1}{8};$

$\cos\dfrac{7\pi}{30} = \cos 42^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8};$

Arco: $\dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

Arco: $\dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}.$

Estas expressões algébricas trigonométricas para estes arcos, são algumas das expressões que podemos obter com os mecanismos apresentados neste estudo, lembrando que com os valorese dos senos e dos cossenos e com as relações fundamentais encontramos as outras funções trigonométricas.

O foco central deste estudo é apresentar mecanismos que permitem encontrar estes valores. Manipulando estas expressões em práticas trigonométricas, nos garantem que estamos trabalhando com valores exatos, sem aproximações, o que permite maior segurança nos resultados encontrados. Fica então, esta seção, como uma fonte destas expressões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A trigonometria é um ramo da matemática cuja origem remonta os primórdios da história. Na história da matemática, um dos mais importantes dentre os mais antigos documentos matemáticos que chegaram até nós, o egípcio **Papiro Rhind**, menciona algumas vezes relações associadas a ângulos que corresponde a atuais relações trigonométricas, mostrando que "sempre" foi importante para o homem, os estudos trigonométricos.

Para cumprir com o objetivo principal deste estudo, que é a obtenção de expressões algébricas trigonométricas exatas para arcos além dos notáveis, primeiramente foi feito uma fundamentação dos conceitos básicos da trigonometria, apresentando algumas ferramentas. Assim, percebemos que com estes fundamentos, deduzindo os valores para os arcos notáveis através de conceitos básicos trigonométricos e da geometria euclidiana plana, e ainda, encontrando os valores para os senos e os cossenos de mais dois arcos (18^o e 72^o) através do triângulo áureo, podemos determinar as expressões algébricas que fornecem os valores trigonométricos para qualquer arco cuja medida em grau seja múltiplo de 3, além de muitos outros arcos. Mostrando que é possível obter as expressões para os valores trigonométricos o que é bem mais matemático do que decorar algumas poucas.

Mostramos também que é possível obter destas expressões algébricas, através dos números complexos, para isso, foi apresentado o processo histórico de criação deste importante conjunto numérico, enfatizando a sua necessidade dentro do fascinante processo matemático que são as resoluções das equações. Apresentamos algumas das ferramentas para a manipulação algébrica dentro deste conjunto, com o foco centralizado nas formas de extração das raízes quadradas complexas, onde apresentamos dois métodos de calcularmos estas raízes e por comparação dos resultados encontramos expressões para valores trigonométricos para arcos não notáveis.

A trigonometria é um ramo da matemática muito importante, possui inúmeras aplicações nas ciências relacionadas com as exatas e merece uma atenção dos professores, não basta ensinarem aos alunos métodos milagrosos que simplesmente dão certo, é importante mostrar que eles podem manipular esta teoria, que têm fundamentação suficiente para entender o real sentido da trigonometria. O conteúdo do ensino médio traz ferramentas bem poderosas e interessantes de serem trabalhadas pelos professores, uma vez que estes estudos fortalecem a matemática dos alunos, o entendimento das teorias e a manipulação algébrica.

A maneira apresentada neste trabalho, de se estudar trigonometria e números complexas com um objetivo (que é a obtenção das expressões para os valores trigonométricos para os arcos não notáveis), se for bem trabalhado com os alunos, é um fator de motivação que cria a necessidade de melhor fixação dos conteúdos por parte dos alunos de modo que o entendimento destes, acerca destas teorias, será bem enriquecido. Os desafios propostos pelo professor, muitas vezes, se transformam em interesse e motivação para os alunos, mas na forma que a trigonometria vem sendo trabalhada hoje, não visa à construção do conhecimento matemático.

Fica então uma proposta de organização didática de conteúdos, que podem facilmente ser compreendido pelos alunos, uma vez que os conteúdos apresentados estão no nível de muitos livros didáticos de matemática da educação básica.

A origem dos números complexos foi uma grande revolução no pensamento matemático da história, foi necessária a participação de grandes nomes da área para a fundamentação da teoria e sua consolidação na matemática, tornando estes números uma ferramenta de grande importância nesta ciência. Neste trabalho apresentamos uma das tantas utilidades deste conjunto, o cálculo de valores das funções trigonométricas, fornecendo estes valores com maior precisão favorecendo a utilização destas funções. Vale ressaltar que esta ferramenta é limitada a apenas alguns arcos, é pouco prática, uma vez que podemos obter estas expressões por caminhos mais simples, como foi apresentado. Mas, é uma manipulação interessante e instigante, além de trabalhar com um tanto de temas matemáticos, tanto dos complexos quanto dos trigonométricos.

Este trabalho deixa aberto a possibilidade de mais estudos na busca de mecanismos que possibilitem atrair mais o interesse dos alunos pela matemática, visando à construção do conhecimento nesta ciência, em especial na trigonometria.

Pretendo montar uma oficina com alunos concluintes do segundo grau com os temas abordados neste trabalho, para que possa avaliar melhor a real praticidade deste estudo.

A estrutura apresentada neste trabalho para o estudo da trigonometria em busca de expressões trigonométricas para arcos além dos notáveis envolvendo ainda os números complexos, pode ser adequada em formato de oficina voltada para professores do segundo grau de escolas públicas, para que estes conheçam os meios apresentados, o potencial das ferramentas e assim possam colocar em prática em sala de aula, verificando a viabilidade desta estrutura no contexto escola e o grau de absorção dos conceitos matemáticos por parte dos alunos. Além de melhorar na formação destes profissionais, proporcionando-lhes novos meios de lecionar, de conduzirem suas aulas visando torná-las mais atrativas sem perder a formalidade conceitual da matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARMO, Manfredo P. – Trigonometria e Números Complexos / Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner – 3. ed. – Rio de Janeiro: SBM 2005 (Coleção Prof. de Matemática);

[2] EVES, Howard. – Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004;

[3] GARBI, Gilberto G. – O romance das equações algébricas / Gilberto G. Garbi – 3. ed. rev. e ampl. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009;

[4] HEFEZ, Abramo. – Polinômios e equações algébricas / Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela – São Paulo / Coleção PROFMAT, SBM, 2012;

[5] IEZZI, Gelson, – Fundamentos da matemática elementar, 3: Trigonometria / Gelson Iezzi . - 8 ed. - São Paulo: Atual, 2004;

[6] LIMA, Elon Lages - A matemática do ensino médio - volume 1 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 9 ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006;

[7] SOARES, Marcio G. – Cálculo em uma Variável Complexa / 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007 (Coleção Matemática Universitária).

[8] Universidade Federal Fluminense - UFF / Funções trigonométricas, parte 4: O gráfico da função seno (Usando-se o grau como medida de ângulos)/ Informações Suplementares: *Valores racionais da função seno calculada em números racionais* e *Lambert e os valores de* sen(s) *para s múltiplo inteiro de 3*; Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-seno-deg-br.html> Acesso em: 17 de Mar de 2013.