



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# A MATEMÁTICA DE ALGUNS EXPERIMENTOS SONOROS

MARIO SÉRGIO MATTOS DE ALMEIDA

Salvador - Bahia

2014

# A MATEMÁTICA DE ALGUNS EXPERIMENTOS SONOROS

MARIO SÉRGIO MATTOS DE ALMEIDA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROF-MAT - UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello

**Coorientador:** Prof. Dr. Perfilino Eugênio Junior

Salvador - Bahia

2014

A MATEMÁTICA DE ALGUNS EXPERIMENTOS SONOROS  
MARIO SÉRGIO MATTOS DE ALMEIDA

Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (Orientador)  
UFBA

---

Profa. Dra. Ana Lúcia Pinheiro Lima  
UFBA

---

Profa. Dra. Regina Célia de Souza Cajazeira  
UFBA

*À minha esposa.*

# Agradecimentos

[...] Guardando recordações, das terras onde passei, andando pelos sertões e dos amigos que lá deixei [...].

---

Vida de Viajante - Luiz Gonzaga,  
1953

Ficam os agradecimentos a muitas pessoas:

Ao Prof. Dr. *Vinicius Moreira Mello*, meu orientador, por ter-me direcionado numa escolha tão agradável e emocionante, intimamente ligada à minha realidade, mostrando que o conhecimento torna a pessoa grande, mas também que a simplicidade e a humildade de se mostrar sempre um aprendiz, a torna mais humana.

À minha esposa *Verena de Carvalho Pacheco*, também professora de Matemática, nas críticas, sugestões, apoio e paciência.

À Profa. Dra. *Maria do Rosário Paim de Santana* diretora do Colégio Sartre COC pelo incentivo e compreensão.

Ao amigo *Jonatas Daniel dos Santos*, companheiro de jornada, e incentivador nos momentos difíceis.

A *Victor Pacheco Carneiro*, pelas ideias, testes, ajuda nos experimentos e apoio sonoro.

A *Thiago Pacheco Queiroz* e *Tamires Simões Lopes*, pela colaboração nos experimentos.

A *Marcos Pires*, pelo suporte musical e todas as sugestões.

Ao amigo *Solón Montenegro Junior*, pelo apoio e colaboração durante todo o período do curso.

À Profa. *Ana Fátima Gandarela*, pelo apoio em língua estrangeira.

Às amigas Profa. *Alessandra dos Santos Batista*, Profa. *Flor de Lis Maria Nascimento Couto* e Profa. *Jamile dos Santos Cardoso*, pelos ajustes, conversas e paciência.

Ao Prof. *Roberto dos Santos Menezes Junior* pelo apoio nos conceitos tratados e ajustes finais.

Ao Prof. Dr. *Marco Antonio N. Fernandes*, coordenador do curso pela luta e responsabilidade assumida para a manutenção do nosso curso.

Ao Prof. Dr. *Evandro Carlos F. dos Santos* que sempre atiçou a curiosidade, demandando novas pesquisas e sugerindo novos desafios.

Aos Profs. Drs. *Ana Lúcia Pinheiro Lima, Cristiana B. Paiva Valente, José Nelson B. Barbosa, Joseph Nee Anyah Yartey, Perfilino Eugênio Junior* e *Rita de Cássia de J. Silva*, professores do Mestrado, que muito contribuíram com as discussões em sala, nos fornecendo novos recursos no uso da Matemática.

Aos meus colegas de Mestrado, turma de 2012, por tudo que aprendi com vocês.

Aos alunos e corpo técnico do Colégio Sartre COC, Colégio Salette e Colégio Bolivar Santana, pela compreensão, colaboração e realização dos experimentos.

A minha família.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram com minha jornada.

A todos vocês, um grande abraço.

“A música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números”

---

Leibniz

# Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta sobre a utilização de experimentos para o ensino da matemática, na matriz curricular da 1<sup>a</sup> à 3<sup>a</sup> séries do Ensino Médio, voltado em primeira instância à trigonometria. A proposta que se segue investiga **A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros** não se propondo a ser um manual de inovação, mas sim de gerar possibilidades investigativas de forma a tornar a matemática mais próxima à realidade dos estudantes de maneira curiosa, fomentando a utilização de métodos científicos, fazendo com que a aprendizagem aconteça de forma espontânea e servindo como ponto de partida a uma análise de caráter matemático. O que há em comum entre a matemática e a música? Na sua definição, música é a arte de combinar os sons. A matemática apresenta seus métodos formais, estéticos e simbólicos da mesma forma que a música estabelece estes mesmos conceitos, de suma importância nas duas ciências. O estudo da música pode direta ou indiretamente ser associado à matemática, seja no tratamento sistemático, dos relacionamentos entre formas e de escritas próprias e exatas, seja na abstração ou na arte de combinar números ou notas. Matemática e música: duas ciências, próximas, abstratas e com difícil definição, que reunidas nos trazem emoção.

**Palavras chaves:** matemática, música, educação, som, trigonometria, experimentos sonoros, objeto de aprendizagem, GeoGebra.



# Abstract

This dissertation presents a proposal on the use of experiments for the teaching of Mathematics curriculum from the 1<sup>st</sup> to 3<sup>rd</sup> year of High School, based mainly on trigonometry. The proposal investigates **The Mathematics of Some Sound Experiments** and it doesn't want to be a manual of innovation, but tries to build investigative possibilities in order to make Math closer to the students reality based on a curious way. It tries to encourage the use of scientific methods, so the learning can happen spontaneously and can be a starter for a mathematical analysis. What does Mathematics and Music have in common? In its definition, Music is the art of sound combination. Mathematics presents its formal, aesthetic and symbolic methods as the music does, which are very important in both sciences. The music study can be directly or indirectly associated with mathematics. It can be in the systematic treatment, with the relationships between forms and proper and accurate written, either in the abstraction or in the art of combining numbers and notes. Mathematics and Music: two sciences, close, abstract and difficult to define, which together bring us emotion.

**Keywords:** math, music, education, sound, trigonometry, sound experiments, learning object, GeoGebra.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>1 Matemática e Música</b>	<b>15</b>
1.1 A arte de experimentar nos caminhos da educação . . . . .	15
1.2 A música como instrumento motivador da aprendizagem . . . . .	16
1.3 O início da matemática na música . . . . .	17
1.4 Fisiologia do som . . . . .	21
1.5 Conceitos e definições necessárias . . . . .	22
<b>2 GeoGebra como Sintetizador</b>	<b>28</b>
2.1 O uso de software para o ensino da matemática . . . . .	28
2.2 O software GeoGebra . . . . .	28
2.3 Produção de som no GeoGebra . . . . .	29
<b>3 Experimentos Sonoros</b>	<b>37</b>
3.1 Experimento 1 - Produção de uma nota musical . . . . .	40
3.2 Experimento 2 - Tubos e Cordas . . . . .	45
3.3 Experimento 3 - Acorde . . . . .	51
3.4 Experimento 4 - Séries . . . . .	53
3.5 Experimento 5 - Batimento . . . . .	56
3.6 Experimento 6 - Som de Tartini . . . . .	59
3.7 Experimento 7 - Timbre . . . . .	62
3.8 Experimento 8 - Efeito Doppler . . . . .	64
3.9 Experimento 9 - Barreira Sônica . . . . .	67
3.10 Experimento 10 - Placa de Chladni . . . . .	70
<b>4 Fechamento</b>	<b>73</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>80</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>

# Lista de Figuras

1.1	Razões entre as notas musicais . . . . .	18
1.2	Aparelho auditivo . . . . .	21
1.3	Áreas dinâmicas do ouvido . . . . .	22
1.4	Período e amplitude. . . . .	24
1.5	Ondas longitudinais e transversais. . . . .	24
3.1	Função seno básica. . . . .	40
3.2	Alteração em A. . . . .	41
3.3	Alteração em B. . . . .	41
3.4	Alteração em K. . . . .	41
3.5	Alteração em M. . . . .	41
3.6	GeoGebra do experimento de nota musical. . . . .	44
3.7	Os quatro primeiros harmônicos de uma corda fixa nos extremos. . . . .	45
3.8	Os quatro primeiros harmônicos de um tubo aberto. . . . .	46
3.9	GeoGebra para o experimento de tubos. . . . .	47
3.10	Posição das notas em um teclado. . . . .	49
3.11	Posição das notas no braço do violão. . . . .	49
3.12	Harmônicos de uma corda fixa em duas extremidades. . . . .	53
3.13	GeoGebra de apoio ao experimento série de Fourier. . . . .	55
3.14	GeoGebra para o experimento de batimentos. . . . .	58
3.15	GeoGebra para o experimento de som de Tartini. . . . .	61
3.16	Gráficos de timbre. . . . .	62
3.17	GeoGebra para o experimento de timbre. . . . .	63
3.18	GeoGebra para o experimento de efeito Doppler. . . . .	65
3.19	Tirinha do Calvin e Haroldo. Por Bill Watterson. . . . .	67
3.20	Geogebra referente ao experimento de barreira sônica. . . . .	68
3.21	Onda bidimensional sobre um disco de maneira geral. . . . .	70
3.22	Experimento de Lissajous. . . . .	72
3.23	GeoGebra para o experimento de Lissajous. . . . .	72

4.1	Estudantes no Laboratório de Informática. . . . .	75
4.2	Demonstração dos limites de tempo do ouvido humano em uma feira de ciências. Experimento apresentado em um reco-reco robótico para gerar a continuidade do som. . . . .	76
4.3	Utilização de um berimbáu como monocórdio na procura das frações da corda. .	76
4.4	Três momentos dos experimentos com tubos. . . . .	77
4.5	Produção de um acorde no violão. . . . .	77
4.6	Cálculo dos harmônicos em uma feira de ciências. . . . .	77
4.7	Cálculo e produção dos harmônicos nas cordas do violão. . . . .	78
4.8	Produção do efeito Doppler através do brinquedo vai-e-vem confeccionado com barbante e garrafas PET. . . . .	78
4.9	Tentativa de quebra da barreira sônica com uma toalha molhada. . . . .	78
4.10	Produção de figuras geométricas na placa de Chladni através da voz. . . . .	79

# Lista de Tabelas

1.1	Progressão geométrica das frequências . . . . .	20
2.1	Razões dos intervalos. . . . .	30
2.2	Notas MIDI. . . . .	31
2.3	Instrumentos MIDI. . . . .	31
2.4	Figuras musicais de tempo. . . . .	33
2.5	Acordes no padrão JFugue . . . . .	34
2.6	Instrumentos de percussão do canal V9. . . . .	35
3.1	Arquivos do GeoGebra. . . . .	39
3.2	Notas MIDI. . . . .	49
3.3	Cálculo dos harmônicos. . . . .	54

# Introdução

“Não sei como pareço aos olhos do mundo, mas eu mesmo vejo-me como um pobre garoto que brincava na praia e se divertia em encontrar uma pedrinha mais lisa uma vez por outra, ou uma concha mais bonita do que de costume, enquanto o grande oceano da verdade se estendia totalmente inexplorado diante de mim.”

---

Isaac Newton

Realizar este trabalho sobre possibilidades de experimentos sonoros voltados à prática pedagógica para o ensino básico recai em um oceano de possibilidades. Escrever sobre tais possibilidades, remonta em escolher as mais belas “pedrinhas”, trazendo à escrita experimentos que tornem interessante o ensino da trigonometria, utilizando a música ou o som. Temos, então, o paradoxo da necessidade de tornar a prática próxima ao estudante com experimentos reais visto a dificuldade de escrever sobre tal sem que haja palavras para descrevê-las.

Envolvem-se dois segmentos da “arte”: matemática e música. De maneira geral, as pessoas as mantêm distantes e cabe trazê-las à tona como intimamente correlacionadas como as são. Ao mesmo tempo, mantêm-se laços estreitos com ambas, sabendo que uma demonstração matemática pode emocionar tanto quanto as mais belas canções. Tem-se, portanto, neste momento, a responsabilidade de registrar, de forma fidedigna, este trabalho sobre **A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros**, voltada à prática pedagógica para o ensino básico, sem o envolvimento de sentimentos.

Tal proposta atende ao conteúdo de matemática ministrado no Ensino Médio, no assunto de trigonometria, mais especificamente às funções trigonométricas.

O assunto fascina e cada “pedrinha mais lisa” que apareceu, fez-se enveredar em ideias, experimentos, novos gráficos e demonstrações. É exatamente neste ponto em que residiu a dificuldade: escolher em um grande oceano as conchas mais bonitas que se

encaixassem como peças de um imenso quebra-cabeça.

Coube, então, uma árdua seleção em que após definidos os temas era preciso viabilizá-los para serem abordados de maneira curiosa e atraente para fomentar a curiosidade dos estudantes. Segundo Morrison (2000), “[...] uma genuína curiosidade inquisitiva fomenta a aprendizagem, sendo essencial para manter viva a sabedoria, o carácter e o discernimento”.

Percebe-se, assim, a responsabilidade assumida com os leitores, e a preocupação em ter habilidade de não enfadá-los, apresentando um texto envolvente e, ao mesmo tempo, claro e coerente. Lembra-se, contudo, que o objetivo principal é ter uma matemática acessível aos estudantes do Ensino Médio, bem como prática e atraente aos professores de forma a ser convidativa para o uso.

Portanto, mesmo se tratando deste tipo de trabalho acadêmico, opta-se por um texto leve e ilustrado. Não se pretende aqui ensinar algo a alguém, seja do ponto de vista prático, seja teórico. Deseja-se, contudo, fomentar a dúvida, o processo investigativo, a oportunidade de diálogo, a troca de experiências e saberes. O desejo é confundir os papéis entre “autor” e “mestre”, aproveitando as habilidades de cada estudante e transformando-as em competências.

A rigor, do ponto de vista científico, não se pode educar a outrem [diretamente]. Não é possível exercer uma influência direta e produzir mudanças em um organismo alheio, só é possível educar a si mesmo, isto é, modificar as reações inatas através da própria experiência. (VYGOTSKY, 2003).

O texto que se apresenta, sugere a aplicação de experimentos sonoros para o ensino da trigonometria, e por uma questão organizacional, está dividido em três blocos distintos, porém dependentes.

No primeiro bloco, apresenta-se o corpo do trabalho, os objetivos, a importância e os subsídios, sugerindo uma mudança na forma de abordagem para o ensino da matemática. Apresenta-se, também, a parte técnica, traçando a ligação entre música e matemática e mostrando o conteúdo necessário, fazendo um breve passeio pela história, desde as lendas até os conceitos aplicados nos experimentos.

O segundo bloco foi dedicado ao uso do software GeoGebra como sintetizador, que será utilizado em diversas vertentes de aprendizagem, gerando sons, gráficos, interações e construções.

A “alma” do trabalho encontra-se no terceiro bloco, onde são sugeridos experimentos, aplicados com variações metodológicas.

# Capítulo 1

## Matemática e Música

### 1.1 A arte de experimentar nos caminhos da educação

No atual momento histórico em que vivemos, é preciso que cada indivíduo tenha habilidades desenvolvidas em diversas áreas do conhecimento, para obter o que chamamos de “sucesso”. Nesse contexto, a utilização da multidisciplinaridade, da pluridisciplinaridade, da interdisciplinaridade ou da transdisciplinaridade para o desenvolvimento do estudante, favorece o desenvolvimento de habilidades e, mediadas adequadamente, transforma-as em competências.

Nesse sentido, o conhecimento em Matemática no Ensino Médio, juntamente com as demais disciplinas da área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pode contribuir para a formação desses alunos, colaborando para o desenvolvimento de habilidades relacionadas às competências citadas que, como metas, devem ser perseguidas na formação escolar (BRASIL, 2002).

No encadeamento da realização de experiências fica a necessidade de trazer a Matemática à realidade do aluno, tornando-a prática, compreensível, dinâmica, sem, contudo, perder o caráter de linguagem própria em que cabe ao estudante ler, interpretar textos de matemática, utilizar representações como equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas e, também, transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa, com a utilização de recursos tecnológicos.

Experimentando, os estudantes estarão investigando, produzindo e compreendendo fenômenos e aplicações reais. Identificando e interpretando, formulando hipóteses, prevendo resultados, bem como buscando estratégias e aguçando o senso crítico e analisando resultados, distinguindo e utilizando raciocínio dedutivo e indutivo. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases:



O Ensino Médio brasileiro, [...] tem como finalidades a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania; a formação ética; o desenvolvimento da autonomia intelectual e pensamento crítico e, ainda, a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática no ensino de cada disciplina (BRASIL, 1996).

Faz-se necessária, portanto, uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de maneira que os aspectos e conteúdos associados à Matemática e suas linguagens sejam parte essencial da formação cidadã. A compreensão dinâmica da nossa vivência, o convívio harmônico com o mundo da informação deve ser ingrediente da percepção histórica da aventura humana, dando significado ao aprendizado.

## 1.2 A música como instrumento motivador da aprendizagem

O som de maneira geral é um elemento presente em todos os momentos da vida. Vive-se rodeado de sons diariamente. Alguns desagradáveis, outros bastante agradáveis. A música está presente em todas as civilizações, sendo dentre todas as artes, a mais dinâmica e atrativa, inclusa como beleza e elemento de união.

Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos (BRASIL, 2000).

Desde 2011, a música foi incluída em todas as escolas do Brasil, não, necessariamente, precisa ser uma disciplina da grade curricular, mas deve fazer parte da rotina educacional dos alunos. A Lei 11.769 determina a obrigatoriedade da música na escola.

Na sala de aula, buscar elementos que estejam ao alcance do entendimento do estudante, torna o aprendizado mais atraente. Buscar na música sua essência natural, utilizando não só o histórico, mas também a formação do som, desde seus elementos mínimos e naturais, explicando e investigando a essência da formação, compreendendo os

fenômenos sonoros, mostrando isso de maneira prática, tornando “vivo” o conhecimento que se encontra estático nos livros, cria uma cumplicidade no aprendizado entre o real e o processo investigativo.

[...] mas a música, em sala de aula, pode ir além de apenas um instrumento; ela é capaz de promover o desenvolvimento do ser humano, torná-lo capaz de conhecer os elementos de seu mundo para intervir nele, transformando-o no sentido de ampliar a comunicação, a colaboração e a liberdade entre os seres (LOUREIRO, 2007).

A música é ao mesmo tempo, uma arte e uma ciência, que deve ser apreciada pela emoção e compreendida pela inteligência. Tal como qualquer outra arte ou ciência, não existem limites para seu aperfeiçoamento nem para sua compreensão. Misturar a arte e a ciência da música e da matemática pode trazer mais um elemento motivador ao ensino.

Busca-se, portanto, a organização do aprendizado da matemática, através da interdisciplinaridade e contextualização, juntando-se a isso a possibilidade de atingir a sensibilidade do estudante através da música.

### 1.3 O início da matemática na música

Provavelmente, na jornada musical, os primeiros instrumentos sejam os de percussão, ou mesmo a voz humana. Utilizá-los para produzir sons, justifica a necessidade rítmica da natureza humana e acompanha o ser humano desde o nascimento, seja pelo ritmo do coração, da respiração ou observando os sons compassados de um camihar.

Muitas lendas e histórias foram tecidas, alimentando contos mitológicos, que abrangem a criação dos primeiros instrumentos musicais.

Segundo a mitologia grega e egípcia, a lira teria sido inventada por Mercúrio que, ao tropeçar casualmente numa carcaça de tartaruga, onde estavam alguns restos desse animal em forma de filamentos, ficou surpreendido com o som que dela nasceu. Outro exemplo é a flauta campestre de Pã, que utiliza um conjunto de tubos de diversos tamanhos para produzir sons. Neste trabalho, ambas serão transformadas em experimentos de cordas vibrantes e tubos ressonantes.

No contexto deste trabalho matemático, cabe o primeiro momento em que a matemática passa a ser usada como elemento estruturador da música. A variedade de formas ou a complexidade das relações existentes nas estruturas musicais torna a arte da música ainda distante de ser criada por um computador ou equacionada matematicamente. No entanto, segundo Pitágoras, temos a música como sendo a “ciência do número aplicada aos sons”.

Hoje tem-se a tentativa “impossível” do desenvolvimento de programas de computadores para a criação de arte. Como máquinas abstratas e portanto afastada da esfera

dos sentimentos, é possível “construir” sejam sons, como música ou imagens, como nos desenhos produzidos por funções fractais, contudo, a elaboração da obra ficando presa a fórmulas matemáticas, longe da obtenção de um estilo próprio. A arte portanto, fica afastada da possibilidade de ser elaborada mecânicamente, permitindo que se diga da música como a “arte dos sons”. Da mesma forma, matemática também não pode ser construída mecanicamente, necessitando de um estilo próprio permitindo ser chamada de a “arte dos números”.

A relação da matemática com a música começa da seguinte forma:

“Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso” (Guido d’Arezzo, 992 -1050?).

Pitágoras utilizava um monocórdio sobre o qual dizia que “é pelos números e não pelo sentido que se deve avaliar a sublimidade da música. Estudai o monocórdio”. O trabalho de Pitágoras consistiu em criar razões em uma corda esticada nas proporções de 1:1, 1:2, 2:3 e 3:4 (Figura 1.1).



Figura 1.1: Razões entre as notas musicais  
(Fonte: Franchinus Gafurius, Theorica musicae, 1492)

Na ilustração, a execução das proporções em instrumentos de percussão, de cordas e de sopro pode ser claramente observada. Os números harmônicos 6, 8, 9 e 12 têm ainda particularidades aritméticas notáveis, pois, além de 6 estar para 8, assim como 9 para 12 ( $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ ) e 6 para 9, tal como 8 para 12 ( $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ ), o número 9 é exatamente a média aritmética de 6 e 12 e 8, a média harmônica de 6 e 12, isto é,

$$\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{2}.$$

Tal prática está no Experimento 2: Tubos e Cordas ressonantes, que serão dimensionados com o objetivo de produzir sons diferentes.

Após esse primeiro momento, ao longo da história, diferentes povos, definiram distintas escalas musicais, utilizando a matemática para explicá-las.

Surge, então, na China, por algum músico que reuniu as divisões melódicas propostas por Pitágoras, sem uma data precisa, a escala pentatônica com apenas 5 notas. As escalas de 7 notas foram prováveis desenvolvimentos da escala pentatônica e têm-se o registro de sua utilização pelos gregos, embora qualquer tentativa de resgate da sonoridade dessas escalas, tratar-se-á de exercício puramente especulativo.

Algumas escalas possuem sons característicos bem marcantes, que nos remontam a diversas culturas. Por exemplo, a Escala Nordestina que altera a 7<sup>a</sup> nota meio tom abaixo, a Escala Japonesa ou a escala árabe. Escalas pentatônicas são boas para improvisar, como acontece no blues. Ainda se ressalta as Escalas Gregas, como o modo dórico, modo jônico, modo lídio, modo frígio, modo eólio ou modo mixolídio. E ainda a escala cromática, escala maior, escala menor, escala diatônica e segue um grande número de possibilidades.

A partir do século XVIII com o chamado “temperamento da música”, que procurava dar os mesmos valores proporcionais aos intervalos, dividindo-os em doze notas igualmente distribuídas, surge a escala “bem temperada” de J. S. Bach, uma nova escala, a partir de uma regra matemática para a construção da frequência das notas. Nessa escala, usada atualmente na música ocidental, a frequência (medida em Hertz<sup>1</sup>) referente a cada nota sofre um aumento sempre igual a 5.9463...% em relação à nota da tecla anterior. Duas notas de mesmo nome e consecutivas têm sempre um intervalo de 1 para 2 (a frequência da superior é igual ao dobro da frequência da anterior). E duas notas consecutivas têm sempre o mesmo intervalo (intervalo é o quociente entre as frequências e vale 1.059463...). Tabela 1.1.

O intervalo de frequências que abrange as 13 primeiras notas (Dó1-Dó2) é chamado de uma “oitava” (porque contém 8 teclas brancas no piano). Quando se avança uma

---

<sup>1</sup>O Hertz (símbolo Hz) é a unidade de frequência derivada do Sistema Internacional para frequência, a qual é expressa, em termos de ciclos por segundo. Um dos seus principais usos é descrever ondas senoidais, como as de rádio ou sonoras. (Wikipédia, em novembro de 2014).

oitava (12 notas para frente), a frequência da nota dobra. O símbolo # é chamado de “sustenido”: Dó# é lido Dó sustenido.

Ordem	Nota	Frequência	Frequência em Hertz
0	Dó central	$F_1 = F_0 / k^9$	261.6
1	Dó# central	$F_0 / k^8$	277.2
2	Ré central	$F_0 / k^7$	293.7
3	Ré# central	$F_0 / k^6$	311.1
4	Mi central	$F_0 / k^5$	329.6
5	Fá central	$F_0 / k^4$	349.2
6	Fá# central	$F_0 / k^3$	370.0
7	Sol central	$F_0 / k^2$	392.0
8	Sol# central	$F_0 / k$	415.3
9	Lá central	$F_0 = 440 \text{ Hz}$ Definido em 1939	440.0
10	Lá# central	$F_0 \cdot k$	466.2
11	Si central	$F_0 \cdot k^2$	493.9
12	Dó uma oitava acima	$F_2 = F_0 \cdot k^3 = 2 \cdot F_1$	523.3

Tabela 1.1: Progressão geométrica das frequências  
(Fonte: o autor.)

Da coluna Frequência da Tabela 1.1 resulta:

$$k^{12} = 2$$

$$k = \sqrt[12]{2}$$

$$k = 1,059463\dots$$

## 1.4 Fisiologia do som

Ouvimos um som quando as perturbações sonoras são captadas pelo complexo auditivo, convertidas em pulsos elétricos e enviadas ao nosso cérebro. As ondas penetram as orelhas pelo canal auditivo e atingem o tímpano, uma membrana elástica que pode vibrar. Quando as ondas o atingem pela variação da pressão no ar causada pela perturbação, o tímpano vibra com a mesma frequência da onda incidente, chegando ao nervo auditivo (Figura 1.2).

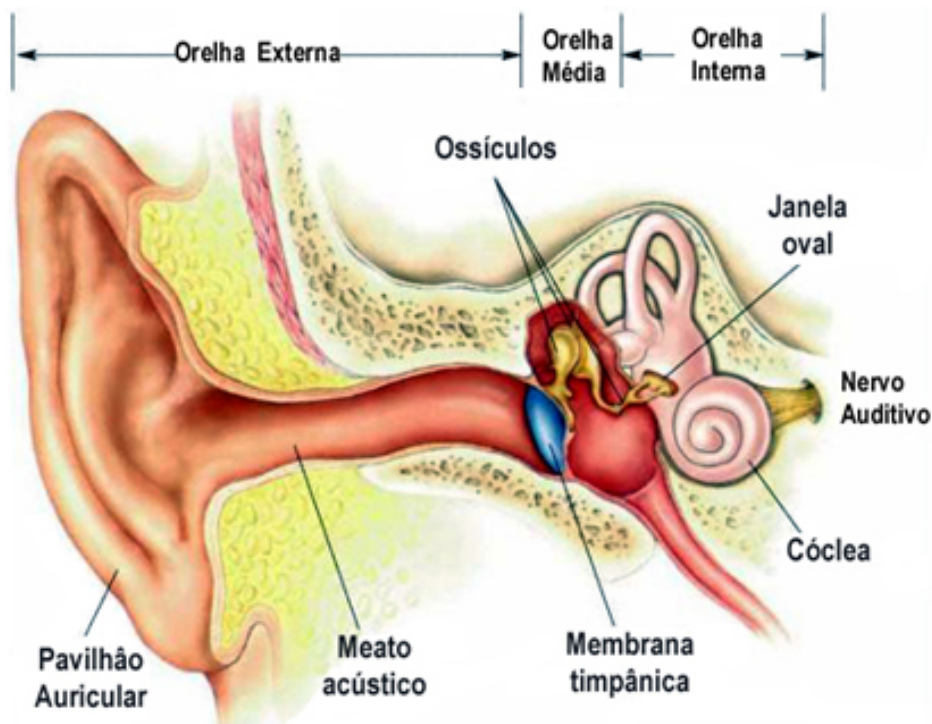


Figura 1.2: Aparelho auditivo

(Fonte: <https://lookfordiagnosis.com> em julho de 2014.)

A capacidade auditiva humana de detecção de frequências considerando-se os limites superiores e inferiores encontra-se entre 20 Hz e 22000 Hz. No entanto, deve-se considerar que há uma perda da sensibilidade auditiva gradativa ao envelhecermos.

A Figura 1.3 apresenta uma relação da capacidade auditiva humana, associando a frequência em Hertz com a intensidade medida em decibéis<sup>2</sup>.

Os ritmos podem ser percebidos de frações de um evento por minuto até cerca de 20 eventos por segundo, quando os ritmos e as alturas<sup>3</sup> se confundem. Esse é o efeito de eventos repetitivos na percepção do som. A metamorfose de ritmo em altura demons-

<sup>2</sup>O bel (B) é uma unidade de medida para intensidade do som. Normalmente se utiliza o seu submúltiplo, o decibel (dB).

<sup>3</sup>Uma das propriedades do som que o classifica em graves ou agudos.

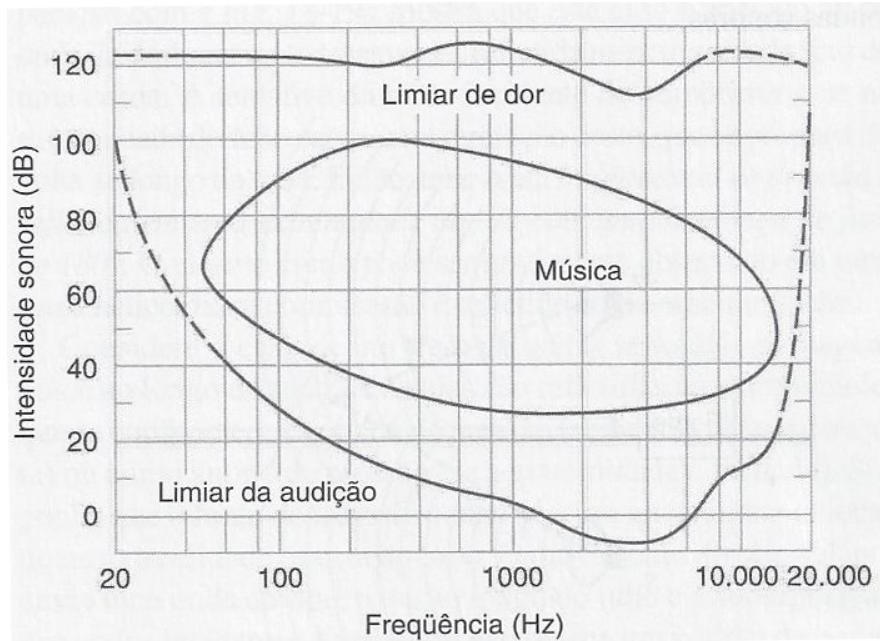


Figura 1.3: Áreas dinâmicas do ouvido

(Fonte: Hallyday, Física 2.)

tra as propriedades de transformação de eventos discretos em percepções supostamente contínuas. Alguns experimentos sugerem que a audição humana pode detectar eventos discretos e discernir a sua ordem de ocorrência até um período de cerca de 1 ms. A percepção musical, em especial, depende enormemente do tempo. Por exemplo: escolhida uma determinada frequência, à medida em que estreita-se o tempo entre duas emissões, inicia-se uma percepção de continuidade do som.

Podemos identificar a altura de um som em comparação com outro, mas, à medida que as amostras se tornam mais próximas, a diferenciação se torna cada vez mais difícil.

Tem-se ainda uma variação de percepção dos diversos aspectos alterados de indivíduo para indivíduo.

## 1.5 Conceitos e definições necessárias

Em razão da dificuldade de utilizar palavras para descrever alguns conceitos ou definições, escolheu-se a utilização de experimentos, motivando a necessidade de tornar prático o aprendizado, fazendo com que o estudante os vivencie.

Esta seção destina-se a definir e proporcionar subsídios básicos sobre conceitos necessários para o entendimento dos experimentos. Embora cada experimento traga subsídios teóricos, aqui seguem algumas definições iniciais.

As ondas são uma parte comum e essencial do ambiente humano. Diversos tipos

estão em toda parte e é possível controlá-las para conduzir informações ou transportar energia de um local para outro.

Dentre algumas ondas, existem as ondas na água, as ondas luminosas, a onda gravitacional, as ondas eletromagnéticas, as ondas sísmicas, o Raio-X.

Este trabalho baseia-se em um tipo específico de onda: a sonora. Esta, por sua vez, possui a característica de precisar de um meio de propagação e é classificada como uma onda mecânica.

Na física, o ramo que estuda o som é chamado de acústica e o som é um fenômeno ondulatório causado por diversos tipos de objeto e se propaga através de diferentes estados físicos da matéria, ou seja, é preciso que haja matéria para a sua propagação. Conclui-se, então, que não há propagação de som no vácuo.

Sendo o som uma onda, tal qual a onda na água, a onda luminosa, ou mesmo as ondas de rádio, pode ser calculada matematicamente. Os sons são produzidos por vibrações de partículas. Nem todas as vibrações são audíveis pelo ser humano. Para que as vibrações se propaguem é necessário que exista um meio material. A velocidade de propagação de uma onda sonora depende do meio material em que ela se encontra. No ar, ao nível do mar e a temperatura de 20° C é de 343,4 m/s.

Assim, é essencial esclarecer alguns conceitos. Temos que:

**Acústica** é o estudo do som.

**Onda** é uma perturbação que se propaga num meio contínuo.

**Som** é a propagação de uma frente de compressão mecânica ou onda mecânica; é uma onda longitudinal, que se propaga de forma circuncêntrica, apenas em meios materiais, como os sólidos, líquidos ou gasosos.

Ondas podem ser descritas usando um número de variáveis, incluindo amplitude, período e frequência. A **amplitude** de uma onda é a medida da magnitude de um distúrbio em um meio durante um ciclo de onda. Por exemplo, ondas em uma corda têm sua amplitude expressada como uma distância (metros), ondas de som como pressão. A amplitude pode ser constante (neste caso a onda é uma onda contínua), ou pode variar com tempo e/ou posição. A forma dessa variação é o envelope da onda.

O **período** é o tempo ( $T$ ) de um ciclo completo de uma oscilação de uma onda. A frequência ( $f$ ) é o inverso do período e expressa em Hertz.

$$f = \frac{1}{T}.$$



**Elementos de onda.** A Figura 1.4 mostra dois elementos da onda: período ( $p$ ) e amplitude ( $b$ ).

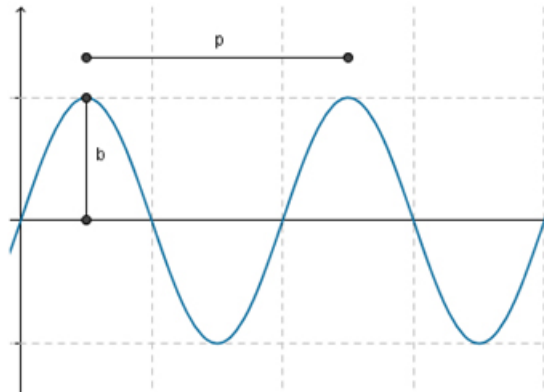


Figura 1.4: Período e amplitude.  
(Fonte: o autor.)

**Ondas transversais e ondas longitudinais.** Ondas transversais são aquelas em que a vibração é perpendicular à direção de propagação da onda; exemplos incluem ondas em uma corda ou as ondas geradas por uma pedra que cai sobre a superfície plana de um lago. Ondas longitudinais são aquelas em que a vibração ocorre na mesma direção do movimento como por exemplo as ondas sonoras.

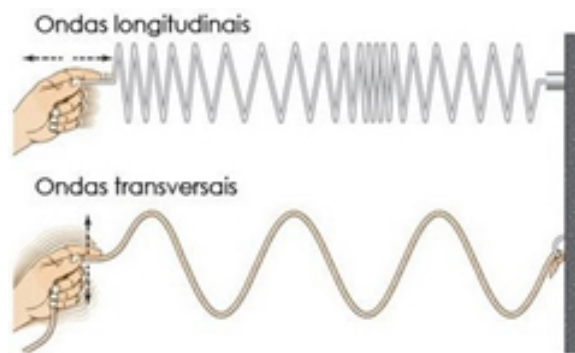


Figura 1.5: Ondas longitudinais e transversais.  
(Fonte: <www.explicatorium.com >, em agosto de 2014.)

A **propagação** do som acontece em um meio material. Nos sistemas vibrantes, como os propostos nos experimentos, as ondas são transmitidas mecanicamente através do ar.

### Propriedades da onda

Sabendo que as ondas possuem um comportamento específico em situações definidas, valem ressaltar as seguintes propriedades características:

**Reflexão:** é um fenômeno que caracteriza o desvio sofrido pela frente de onda quando atinge uma superfície refletora, originando uma trajetória de retorno onde o ângulo de reflexão é simétrico ao ângulo de incidência.

**Refração:** é um fenômeno que caracteriza o desvio sofrido pela frente de onda quando passa de um campo ondulatório a outro meio de elasticidade ou compressibilidade diferente, mantendo a frequência constante e sofrendo uma alteração do comprimento de onda e da velocidade de propagação.

**Difração:** é um fenômeno que caracteriza a propriedade da frente de onda ser capaz de contornar certos obstáculos que encontra durante sua propagação.

**Interferência:** é o fenômeno que ocorre quando dois sinais de frequências iguais se superpõem e se reforçam ou se anulam, em diferentes proporções, conforme estejam em concordância ou oposição de fase.

**Dispersão:** é a separação de uma onda em outras de diferentes frequências.

**Vibração:** algumas ondas são produzidas através da vibração de objetos, produzindo sons, exemplos: cordas (violão, violino, piano, etc.) ou tubos (órgão, flauta, trompete, trombone, saxofone, etc.).

**Polarização:** a onda pode ser polarizada pela utilização de um filtro de polarização. A polarização de uma onda transversal descreve a direção de oscilação no plano perpendicular à direção da viagem.

### Propriedades do som

Os fatores que implicam na percepção do som são: altura, intensidade e timbre. A duração do som é uma propriedade sonora. Seguem, então, alguns conceitos.

**Altura:** é a percepção de sons graves e agudos, frequências baixas e altas, medidas em Hertz (Hz).

**Intensidade:** é uma característica do som que está relacionada à energia de vibração da fonte que emite as ondas. A intensidade sonora é medida em bel, em homenagem ao cientista Graham Bell e por convenção,  $1\text{dB} = 0,1\text{ bel}$ .

**Duração:** é o tempo em que um determinado som é executado.

**Timbre:** é a qualidade sonora que nos permite distinguir os sons, independente da sua altura, intensidade ou duração. Sons com altura, intensidade e duração iguais, produzidos por instrumentos diferentes, podem ser identificados pela variação do timbre.

### Conceitos complementares

**Eco:** o fenômeno do eco ocorre quando o som refletido chega ao ouvido, passada a

fase de persistência auditiva. Para que ocorra este fenômeno, a distância do observador à superfície de reflexão deve ser superior a 17 metros. Para se distinguir os sons, tem de haver, no mínimo, um intervalo de tempo de 0,1 segundo, e como se sabe, a velocidade de propagação do som no ar é de 340 m/s e que a distância percorrida ( $d$ ) é o resultado da multiplicação da velocidade ( $v$ ) pelo tempo ( $t$ ). Logo,  $d = v \cdot t$ . Então,  $d = 340 \cdot 0,1 = 34$  metros para se ouvir o som. Como o som tem de ir e bater na superfície refletora e voltar tem-se  $34/2 = 17$  m.

**Reverberação:** o fenômeno da reverberação ocorre quando diversas reflexões do mesmo som chegam ao ouvido com tempos de atraso diferentes, dentro da janela de persistência auditiva. Isso ocorre quando o intervalo de tempo entre duas reflexões sucessivas é menor que 0,1 s. O resultado é a criação de um campo reverberante que, a partir de certo grau, impede o discernimento, tanto do som direto quanto do som refletido, e perdura, por algum tempo, depois da extinção do som original.

**Ondas Estacionárias:** constituem um fenômeno derivado da reflexão do som, caracterizado pela superposição do som direto e do som refletido em concordância de fase.

**Ressonância:** é a tendência de um sistema a oscilar em máxima amplitude em certas frequências. Nessas frequências, até mesmo forças periódicas pequenas podem produzir vibrações de grande amplitude, pois o sistema armazena energia vibracional.

**Velocidade do som:** é a velocidade de propagação de uma onda sonora em um determinado meio. No caso do ar em condições normais, 343,4 m/s.

**Barreira sônica:** é um empecilho físico causado pela compressão do ar no limiar de um corpo atingir a velocidade do som.

**Efeito Doppler:** a velocidade de propagação de uma onda é uma função exclusiva das propriedades do meio. Como consequência, quando uma fonte sonora se desloca em relação ao receptor, ocorre um fenômeno de variação da frequência percebida, que é denominado efeito Doppler.

**Batimento e Som de Tartini:** o batimento é o fenômeno que ocorre quando dois sinais de frequências diferentes se superpõem, alternando períodos de concordância e oposição de fase a intervalos de tempo regulares. Quando a frequência dos batimentos atinge o limiar da audição, ouvimos o que o físico alemão Herman Helmholtz chamou de “som de combinação”, anteriormente conhecido como “som de Tartini”, em homenagem ao violinista italiano Giuseppe Tartini, considerado o descobridor do efeito.

**Série de Fourier:** em 1822, o matemático francês Joseph Fourier descobriu que ondas senoidais podem ser usadas como blocos para construir, ou descrever, qualquer tipo de onda periódica, incluindo ondas quadradas. Fourier usou isso como ferramenta analítica no estudo das ondas. Qualquer forma de onda não senoidal, tais como as ondas

quadradas, ou mesmo os sons irregulares produzidos pela fala humana, são um conjunto de ondas senoidais de diferentes períodos e frequências juntas. A técnica para se transformar uma forma de onda complexa em suas componentes senoidais é chamada de transformada de Fourier.

**Dimensões da onda:** as ondas ainda podem ser caracterizadas, segundo as dimensões de propagação como: unidimensionais, que são as que se propagam em uma única de direção como as geradas em cordas; bidimensionais, que são as que se propagam em um plano como as ondas na superfície de um lago e tridimensionais, que são aquelas ondas que se propagam nas três dimensões, como as ondas sonoras.

# Capítulo 2

## GeoGebra como Sintetizador

### 2.1 O uso de software para o ensino da matemática

O estudo de instrumentos de aprendizagem interativos através do uso de computadores é um ganho no processo de ensino-aprendizagem, no momento em que o estudante deixa de ser um mero observador e passa a interagir com a máquina, fazendo-a de ferramenta em processos investigativos. Formar conjecturas, elaborar questionamentos, realizar trabalhos apontam para a interatividade, tornando o processo de aquisição do conhecimento mais fácil e agradável.

“O ministério da educação tem a seu cuidado o software do país. Ele cuida da ‘inteligência’ nacional. Seu objetivo é fazer o povo pensar. Porque um país – ao contrário do que me ensinaram na escola – não se faz com as coisas físicas que se encontram em seu território, mas com os pensamentos de seu povo” (ALVES, 1999).

### 2.2 O software GeoGebra

O GeoGebra é um programa de caráter interativo para o estudo da matemática. Possui distribuição livre e documentação no site: <<http://www.geogebra.org>>. O nome advém da junção das palavras **Geometria** e **álgebra** e foi construído na plataforma Java<sup>1</sup>, adaptando-se com facilidade aos sistemas operacionais e atende ao ambiente de álgebra, geometria, estatística e cálculo.

Neste trabalho, utiliza-se uma vertente pouco explorada do GeoGebra, que é a capacidade de emitir sons. Mais que isso, junta-se essa possibilidade ao estudo de funções trigonométricas, podendo não só visualizar as equações graficamente, como também executá-las sonoramente. Faz-se presente também a multidisciplinaridade no momento em que se faz a ligação com os estudos de ciências, ondas, acústica, fisiologia e física.

---

<sup>1</sup>Java é uma linguagem de programação orientada a objeto.

Dentre as várias vertentes possíveis do uso do GeoGebra, ressalta-se sua utilização como Objeto de Aprendizagem<sup>2</sup>. Os experimentos que compõem este trabalho fazem uso dessa possibilidade em que diversas variações podem ser feitas de forma a diversificar o uso didático.

## 2.3 Produção de som no GeoGebra

O uso do GeoGebra se dará não apenas como elemento gerador de gráficos, mas também como forma de trazer o som e a música para a sala de aula, tornando mais atrativo e curioso o aprendizado da matemática. Salienta-se, portanto, a possibilidade do GeoGebra reproduzir ritmos e sons, apresentar timbres diferentes bem como possibilitar a execução simultânea de notas distintas, facilitando, assim, a emissão de acordes musicais.

Uma vez que o GeoGebra não tem o intuito básico de tocar, é escasso o material de pesquisa existente, e muito precisa ser construído para possibilitar a realização dos experimentos. Considerando, então, o uso dessa vertente neste trabalho, segue um resumo de como executar sons e/ou utilizar o GeoGebra como instrumento ou sintetizador.

Em uma investigação mais profunda, seria viável uma sugestão aos autores do GeoGebra para a possibilidade de variação no andamento, visto que a divisão do tempo de compasso fica muito rígida.

Para que um determinado som seja emitido e ouvido, necessita-se que a função periódica possua períodos condizentes com a frequência captada pelo ouvido humano. No caso de gerar uma determinada nota a partir de uma função, precisa-se definir, em primeiro lugar, a função  $f(x)$ . Como exemplo, pode-se citar a função  $f(x) = B.\text{sen}(K.2.\pi.x)$ , na qual  $B$  representa a amplitude responsável pela intensidade da frequência, e  $K$ , o valor em Hertz da frequência desejada. Na Tabela 2.1, estão as frequências entre 261,6 Hz e 523,2 Hz (uma oitava acima), e seus respectivos nomes de notas musicais.

Seja o comando do GeoGebra:

$$\text{TocarSom}[\langle \text{Função} \rangle, \langle \text{Valor Mínimo} \rangle, \langle \text{Valor Máximo} \rangle]$$

Caso se deseje tocar a nota Lá, que possui frequência de 440 Hz, basta substituir os comandos:

$\langle \text{Função} \rangle = \text{sen}(440 * 2 * \pi * x)$

$\langle \text{Valor Mínimo} \rangle = 0$ , ponto de início na abscissa.

$\langle \text{Valor Máximo} \rangle = 3$ , ponto de término na abscissa (3 segundos depois)

---

<sup>2</sup>Entende-se como Objeto de Aprendizagem todo conteúdo educacional digital que pode ser reutilizado em sua íntegra ou em partes (TAROUÇO et al, 2004). Os Objetos de Aprendizagem, para facilitar a aprendizagem, devem ir do simples para o mais complexo (WILEY, 2000).

Ordem das notas	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª...
Nomes das notas	Dó	Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá	Lá#	Si	Dó
Frequências	261,6	277	293,5	311	329,6	349,2	370	392	415,1	440	466,2	493,8	523,2
Razão dos intervalos	1	1,059	1,122	1,189	1,260	1,335	1,414	1,498	1,587	1,682	1,782	1,888	2
Nº de Semitons	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabela 2.1: Razões dos intervalos.

(Fonte: o autor.)

Tem-se, então, no comando:

$$\text{TocarSom}[\text{sen}(440 * 2 * \pi * x), 0, 3]$$

a emissão da nota lá central cuja frequência é de 440 Hz, emitida pelo intervalo de 0 (zero) a 3 segundos.

O GeoGebra permite uma variação de comandos com possibilidades de gerar som. Para tanto, baseou-se no padrão MIDI <sup>3</sup> e JFugue <sup>4</sup>.

Pode-se também utilizar o comando:

$$\text{TocarSom}[\langle \text{Nota} \rangle, \langle \text{Duração} \rangle, \langle \text{Instrumento} \rangle]$$

onde:

$\langle \text{Nota} \rangle$ : as notas são definidas numericamente pela convenção da Interface Digital para Instrumentos Musicais. As notas são números inteiros de 0 a 127. Por exemplo, para  $\langle \text{Nota} \rangle = 60$ , a nota Dó Central (C4) é tocada. (Tabela 2.2)

$\langle \text{Duração} \rangle$ : para saber por quanto tempo uma nota é tocada, a duração é fornecida em segundos. Por exemplo: 0.5 emite o som por meio segundo.

$\langle \text{Instrumento} \rangle$ : é um número inteiro que representa o instrumento sintetizado usado para tocar a nota, e podem variar de 0 a 127. Muitos instrumentos são suportados,

<sup>3</sup>General MIDI ou GM (Musical Instrument Digital Interface) é uma especificação para sintetizadores que impõem vários requisitos para além da norma MIDI mais geral, enquanto que a norma MIDI proporciona um protocolo de comunicações que assegura que diferentes instrumentos (ou componentes) possam interagir a um nível básico.

<sup>4</sup>JFugue é uma biblioteca de programação de código aberto que permite programar a música na linguagem de programação Java, sem as complexidades do MIDI. Foi lançada pela primeira vez em 2002, por David Koelle. Brian Eubanks tem JFugue Descrito como “útil para aplicações que necessitam de uma maneira rápida e fácil de reproduzir música ou para gerar arquivos MIDI”

Notas Oitava	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
3	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
4	48	49	50	51	51	53	54	55	56	57	58	59
5	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
6	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
7	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
8	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
9	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
10	120	121	122	123	124	125	126	127				

Tabela 2.2: Notas MIDI.

(Fonte: sítio do GeoGebra.)

mas há diferenças entre as plataformas de computador. A referência aos instrumentos segue na Tabela 2.3.

<b>Pianos</b>	00 - Piano acústico 01 - Piano brilhante 02 - Piano elétrico 03 - Piano Honky tonk 04 - Piano Rhodes 05 - Piano com "chorus" 06 - Cravo 07 - Clavineta	<b>Baixos</b>	32 - Contrabaixo 33 - Baixo elétrico dedilhado 34 - Baixo elétrico com palheta 35 - Baixo sem trastes 36 - Baixo percutido 1 37 - Baixo percutido 2 38 - Baixo sintético 1 39 - Baixo sintético 2	<b>Palhetas</b>	64 - Saxofone soprano 65 - Saxofone alto 66 - Saxofone tenor 67 - Saxofone barítono 68 - Oboé 69 - Corno inglês 70 - Fagote 71 - Clarinete	<b>Efeitos Sonoros Sintéticos</b>	96 - Efeito 1 (chuva) 97 - Efeito 2 (trilha sonora) 98 - Efeito 3 (cristais) 99 - Efeito 4 (atmosfera) 100 Efeito 5 (brilho) 101 Efeito 6 (duendes) 102 Efeito 7 (ecos) 103 Efeito 8 (ficção científica)
<b>Percussão Cromática</b>	08 - Celesta 09 - Glockenspiel (lira de perc.) 10 - Caixa de música 11 - Vibrafone 12 - Marimba 13 - Xilofone 14 - Sinos tubulares 15 - Dulcimer	<b>Cordas</b>	40 - Violino 41 - Viola 42 - Violoncelo 43 - Contrabaixo 44 - Cordas em vibrato 45 - Cordas em pizzicato 46 - Harpa 47 - Tímpanos	<b>Flautas</b>	72 - Flautim 73 - Flauta transversal 74 - Flauta doce 75 - Flauta de Pã 76 - Garrafa 77 - Shakuhachi (fl. japonesa) 78 - Assobio 79 - Ocarina	<b>Instrumentos Étnicos</b>	104 Sitar 105 Banjo 106 Shamisen 107 Koto 108 Kalimba 109 Gaita de foles 110 Rabeca 111 Shehnai
<b>Órgãos</b>	16 - Órgão 17 - Órgão percussivo 18 - Órgão de rock 19 - Órgão de tubos 20 - Harmônio 21 - Acordeão 22 - Harmônica 23 - Bandoneon	<b>Orquestra</b>	48 - Orquestra de cordas 1 49 - Orquestra de cordas 2 50 - Cordas sintetizadas 1 51 - Cordas sintetizadas 2 52 - Coro Aahs 53 - Coro Oohs 54 - Coro sintetizado 55 - Batida Orquestral	<b>Solos Sintéticos</b>	80 - Solo 1 (onda quadrada) 81 - Solo 2 (dente de serra) 82 - Solo 3 (órgão a vapor) 83 - Solo 4 (silvo) 84 - Solo 5 (charango) 85 - Solo 6 (voz) 86 - Solo 7 (quintas) 87 - Solo 8 (metal e solo)	<b>Percussão</b>	112 Sino 113 Agogô 114 Tambor metálico 115 Caixa de madeira 116 Tambor Taiko 117 Timbal melódico 118 Caixa sintetizada 119 Prato invertido
<b>Violões e Guitarras</b>	24 - Violão (cordas de nylon) 25 - Violão (cordas de aço) 26 - Guitarra semi-acústica 27 - Guitarra elétrica 28 - Guitarra abafada 29 - Guitarra saturada 30 - Guitarra distorcida 31 - Harmônicos de guitarra	<b>Metais</b>	56 - Trompete 57 - Trombone 58 - Tuba 59 - Trompete com surdina 60 - Trompa 61 - Metais 62 - Metais sintéticos 1 63 - Metais sintéticos 2	<b>Fundos Sintéticos</b>	88 - Fundo 1 (nova era) 89 - Fundo 2 (morno) 90 - Fundo 3 (polisintetizador) 91 - Fundo 4 (coro) 92 - Fundo 5 (de arco) 93 - Fundo 6 (metálico) 94 - Fundo 7 (celestial) 95 - Fundo 8 (escovas)	<b>Efeitos Sonoros</b>	120 Corda de violão riscada 121 Respiração 122 Ondas do mar 123 Pássaro piando 124 Telefone tocando 125 Helicóptero 126 Aplauso 127 Tiro

Tabela 2.3: Instrumentos MIDI.

(Fonte: o autor.)



Como exemplo, tem-se:

TocarSom[ 60, 3, 71 ]

que emite a nota Dó durante 3 segundos, com o instrumento clarinete.

No comando:

TocarSom[ <Sequência de notas>, <Instrumentoo>]

depara-se com uma infinidade de possibilidades, baseadas no sistema JFugue. Nesse caso, pode-se emitir uma série de notas cifradas, conforme a seguinte lista:

A = Lá, B = Sí, C = Dó, D = Ré, E = Mi, F = Fá, G = Sol

Para bemóis ou sustenidos adiciona-se *b* ou *#* logo após a cifra: C# (Dó sustenido) ou Db (Ré bemol).

Para trocar a oitava, adiciona-se após a nota, o número da oitava desejada. Por “default”<sup>5</sup> as notas pertencem à quinta oitava<sup>6</sup>.

No comando:

TocarSom[“C D E F G A B C6”,0]

temos a execução da escala de Dó Maior por um piano.

É possível também colocarmos os tempos (ritmo) nas notas, fazendo com que possuam durações diferentes, utilizando os símbolos das figuras de tempo, conforme a Tabela 2.4. Dessa forma para escrever-se a nota Dó com duração de uma semibreve, utiliza-se “Cw” seguido de um espaço. Na notação percebe-se o “C” como cifra da nota Dó, o “w” como comando responsável pela duração, no caso uma semibreve (whole) e o espaço com a função de executar o comando anterior.

Também por “default” os tempos são de semínimas. A pausa é representada pela letra R (rest em inglês) seguida da sua duração. O espaço é utilizado para tocar a nota, combinação de notas ou pausa anterior a ele. Por exemplo:

TocarSom[“D G4i A4i B4i Ci Dq G4q G4q E Ci Di Ei F#i Gq G4q G4q”,40]

Ainda é possível emitir acordes da seguinte forma:

TocarSom[“Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Fi+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Ei+Gi Di+Bi Di+Bi Di+Bi Di+Bi Di+Bi Di+Bi C4q+C5q G3i Cw+Ew+Gw”,0]

<sup>5</sup>O termo técnico default é utilizado em vários contextos de informática. Normalmente com o significado de padrão ou de algo já previamente definido. (Wikipédia, novembro de 2014).

<sup>6</sup>Comparando o sistema JFugue com a numeração das escalas em um piano, a quinta oitava JFugue corresponde à quarta oitava de um piano.








Figura	Nome	Valor	Nome da figura em Inglês	Codificação GeoGebra	Tempo GeoGebra
	Semibreve	1	whole	w	/1
	Mínima	2	half	h	/.5
	Semínima	4	quarter	q	/.25
	Colcheia	8	eighth	i	
	Semicolcheia	16	sixteenth	s	
	Fusa	32	thirty-second	t	
	Semifusa	64	sixty-fourth	x	

Tabela 2.4: Figuras musicais de tempo.

(Fonte: o autor.)

Ou mesmo, utilizando acordes pré-estabelecidos no padrão JFugue<sup>7</sup> da Tabela 2.5.

```
TocarSom["D5majI D5majI A4majhi C5majI C5majI G4majhi D5majI D5majI A4majhi
C5majI C5majI G4majhi",0]
```

O uso de duas ou mais vozes também se torna possível, adotando-se o formato a seguir. É possível também a utilização de sons em polifonia (som em duas ou mais vozes) possibilitando a criação e execução de músicas bastante complexas:

```
TocarSom["V0 As Gs Ahi Gs Fs Es Ds C#q Diq Rq As Gs Ais Aq Ri Ei Fi C#i Dh Rq
V1 A3s G3s A3hi G3s F3s E3s D3s C#3q D3iq Rq A3s G3s A3is A3q Ri E3i F3i C#3i
D3h Rq",19]
```

Sendo que V, seguido de um número de 0 a 15, define o canal MIDI. "V9" define o canal de percussão MIDI.

Por exemplo, utilizando o instrumento agogô agudo (67 = G5) ou agogô grave (68 = G#5), tem-se no canal V9 que obedece à Tabela 2.6

<sup>7</sup>O sistema de acordes JFugue apresenta a nota fundamental com a numeração 0 (zero), diferente do padrão musical onde a nota fundamental tem valor 1. Assim, o acorde maior especificado como 0, 4, 7 do JFugue, deve ser corrigido para 1, 3, 5, representando a Tônica (grau I), a Mediante (grau III) e a Dominante (grau V). O mesmo deve ser feito aos demais acordes.

Nome do Acorde	Nome no JFugue	Intervalos (0 = dominante)
maior	maj	0, 4, 7
menor	min	0, 3, 7
aumentado	aug	0, 4, 8
diminuto	dim	0, 3, 6
7ª dominante	dom7	0, 4, 7, 10
7ª maior	maj7	0, 4, 7, 11
7ª menor	min7	0, 3, 7, 10
4ª aumentada	sus4	0, 5, 7
2ª aumentada	sus2	0, 2, 7
6ª maior	maj6	0, 4, 7, 9
6ª menor	min6	0, 3, 7, 9
9ª dominante	dom9	0, 4, 7, 10, 14
9ª maior	maj9	0, 4, 7, 11, 14
9ª menor	min9	0, 3, 7, 10, 14
7ª diminuta	dim7	0, 3, 6, 9
9ª aumentada	add9	0, 4, 7, 14
11ª menor	min11	0, 7, 10, 14, 15, 17
11ª dominante	dom11	0, 7, 10, 14, 17
13ª dominante	dom13	0, 7, 10, 14, 16, 21
13ª menor	min13	0, 7, 10, 14, 15, 21
13ª maior	maj13	0, 7, 11, 14, 16, 21
7-5 dominante	dom7<5	0, 4, 6, 10
7+5 dominante	dom7>5	0, 4, 8, 10
7-5 maior	maj7<5	0, 4, 6, 11
7+5 maior	maj7>5	0, 4, 8, 11
7ª menor maior	minmaj7	0, 3, 7, 11
7-5-9 dominante	dom7<5<9	0, 4, 6, 10, 13
7-5+9 dominante	dom7<5>9	0, 4, 6, 10, 15
7+5-9 dominante	dom7>5<9	0, 4, 8, 10, 13
7+5+9 dominante	dom7>5>9	0, 4, 8, 10, 15

Tabela 2.5: Acordes no padrão JFugue

TocarSom[“V9 G5q G#5q G5h G5q G#5q G5h G5q G#5q G5i G5i Ri G5i G#5q G#5q G5h”,0]

Foi previsto também a alteração de instrumentos:

TocarSom[“I[56] C5q D5q I[71] G5q F5q”,0]

Mais um comando:

TocarSom[ <Arquivo>]

Reproduz um arquivo MIDI (\*.mid) ou um arquivo de texto (\*.txt) em JFugue contendo uma sequência. <Arquivo>é o caminho do diretório para o arquivo, exemplo:

35 Bombo 2	59 Prato de condução 2
36 Bombo 1	60 Bongo agudo
37 Golpe no fuste da tarola	61 Bongo grave
38 Tarola 1 (pele)	62 Conga aguda abafada
39 Palmas	63 Conga aguda
40 Tarola 2 (aro)	64 Conga grave
41 Timbalão grave 2	65 Timbale agudo
42 Pratos de choque fechados	66 Timbale grave
43 Timbalão grave 1	67 Agogô agudo
44 Pratos de choque fechados (pedal)	68 Agogô grave
45 Timbalão médio 2	69 Afoxé
46 Pratos de choque abertos	70 Maracas
47 Timbalão médio 1	71 Apito curto
48 Timbalão agudo 2	72 Apito longo
49 Prato de ataque crash 1	73 Reco-reco curto
50 Timbalão agudo 1	74 Reco-reco longo
51 Prato de condução 1	75 Clavas
52 Prato de ataque china	76 Bloco de madeira agudo
53 Prato de condução (campânula)	77 Bloco de madeira grave
54 Pandeiro	78 Cuíca abafada
55 Prato de ataque splash	79 Cuíca
56 Caneca	80 Triângulo abafado
57 Prato de ataque crash 2	81 Triângulo
58 Vibraslap	

Tabela 2.6: Instrumentos de percussão do canal V9.

(Fonte: o autor.)

```
TocarSom[“diretorio/do/meuarquivo.mid”]
```

Outros dois comandos:

```
TocarSom[true], que executa o som
```

ou

```
TocarSom[false] que interrompe o som
```

Assim, baseado nestes comandos pode-se construir ou inserir músicas:

```
TocarSom[“V0 Es+F#4s Es+F#4s Rs Es+F#4s Rs Cs+F#4s Es+F#4s Rs
Gs+B4s+G4s Rs Rs Rs G4s Rs Rs Rs Rs Cs+E4s Rs Rs G4s+C4s Rs Rs E4s+C3s Rs
Rs A4s+C4s Rs B4s+D4s Rs Bb4s+Db4s A4s+C4s Rs G4s+C4s Rs Es+G4s Gs+B4s
As+C4s Rs Fs+A4s Gs+B4s Rs Es+A4s Rs Cs+E4s Ds+F4s B4s+D4s Rs Rs Cs+E4s
Rs Rs G4s+C4s Rs Rs E4s+C3s Rs Rs A4s+C4s Rs B4s+D4s Rs Bb4s+Db4s A4s+C4s
Rs G4s+C4s Rs Es+G4s Gs+B4s As+C4s Rs Fs+A4s Gs+B4s Rs Es+A4s Rs Cs+E4s
Ds+F4s B4s+D4s Rs Rs Rs Rs Gs+Es Gbs+Ebs Fs+Ds D#s+B4s Rs Es+C4s Rs
G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s Rs Rs Gs+Es Gbs+Ebs
Fs+Ds D#s+B4s Rs Es+C4s Rs C6s+Fs+Gs Rs C6s+Fs+Gs C6s+Fs+Gs Rs Rs Rs Rs
Rs Gs+Es Gbs+Ebs Fs+Ds D#s+B4s Rs Es+C4s Rs G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs
A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s Rs Rs Ebs+Ab4s Rs Rs Ds+F4s Rs Rs Cs+E4s Rs Rs Rs Rs
```

Rs Rs Rs Rs Rs Gs+Es Gbs+Ebs Fs+Ds D#s+B4s Rs Es+Cs Rs G#4s+E4s A4s+F4s  
 Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s Ds+F4s Rs Rs Gs+Es Gbs+Ebs Fs+Ds D#s+B4s Rs  
 Es+Cs Rs C6s+Fs+Gs Rs C6s+Fs+Gs C6s+Fs+Gs Rs Rs Rs Rs Rs Gs+Es Gbs+Ebs  
 Fs+Ds D#s+B4s Rs Es+Cs Rs G#4s+E4s A4s+F4s Cs+G4s Rs A4s+C4s Cs+E4s  
 Ds+F4s Rs Rs Ebs+Ab4s Rs Rs Ds+F4s Rs Rs Ch+E4h Rs Rs Rs Rs Rs Rs Rs V1 D3s  
 D3s Rs D3s ”, 0]

Bastante interessante, também, é a criação de efeitos sonoros através das funções, tais como:

$$f(x) = 20.\text{sen}(16.x^2) \rightarrow \text{TocarSom}[g(x), 0, 8] \rightarrow \text{simula uma moto.}$$

ou

$$g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \text{TocarSom}[g(x), 0, 6.28] \rightarrow \text{simula um tiro.}$$

Pode-se da mesma forma, associando funções trigonométricas ter-se instrumentos inusitados, cada um com suas peculiaridades, como será visto no experimento de timbres.

# Capítulo 3

## Experimentos Sonoros

Todos os experimentos apresentados estão voltados para o estudo da trigonometria. Aqui, teve-se o cuidado de colocá-los em ordem crescente de dificuldade e de conteúdo, embora possam ser utilizados de forma independente, a critério do professor.

A necessidade de abordar os conteúdos através de experimentos é levar para o estudante o uso prático, uma vez que a teoria não consegue trazer a vivência que um experimento possibilita, e dessa forma facilitar o aprendizado.

[ ... ] Matemática não se aprende passivamente. [...] Não se lê um livro de Matemática como se fosse uma novela. Você deve ter lápis e papel na mão para reescrever, com suas próprias palavras, cada definição, o enunciado de cada teorema, verificar os detalhes às vezes omitidos nos exemplos e nas demonstrações e resolver os exercícios referentes a cada tópico estudado. É conveniente, também, desenhar figuras, (principalmente gráficos de funções) a fim de atribuir significado intuitivo aos raciocínios do texto (LIMA, Elon Lages, 1976).

As metodologias das aplicações variaram bastante, possibilitando desde aulas expositivas, passando por Laboratórios de Informática, até trabalhos em grupo, seminários ou feiras de ciências.

Outro fato que tais experimentos abrangem na vertente do GeoGebra, são as diversas possibilidades do seu uso, seja como Objeto de Aprendizagem, seja como elemento investigador, simulador, exemplificador ou criador. Já na execução prática utilizou-se de materiais simples, de forma que possam ser reproduzidos com facilidade.

Por serem experimentos voltados à matemática, estes não têm o caráter de ensinar música, mas sim, fazer a ligação entre realidade, ensino lúdico, curiosidade e produzir conhecimento matemático, utilizando sempre o conceito de aprender a aprender, sem contudo abandonar os ganhos que se tem ao uso da música.

Ao final de cada experimento foi acrescentada uma aplicação em sala. Baseado, portanto, nos roteiros, subsídios teóricos e exemplificações, o professor pode tomar as

atitudes, escolher suas opções e adaptá-los à sua prática docente. O objetivo, portanto, consiste em, nas variações, possibilitar adequações à necessidade e vivência de cada professor, sugerindo ou inserindo formas de aplicação dos experimentos.

Visando facilitar o manuseio do material didático, disponibilizam-se roteiros, sugestões e material dos experimentos. Os arquivos utilizados nos experimentos como apoio, aulas, roteiros, subsídios teóricos, exemplos ou Objetos de Aprendizagem podem ser obtidos no sítio <<http://www.ciadamatematica.com.br>> e encontram-se listados e classificados na Tabela 3.1.

<b>Ordem</b>	<b>Nome</b>	<b>Referência</b>
1	Teoria00_Ondas.ggb	Teoria
2	Teoria01_Ressonancia.ggb	Teoria
3	Teoria02_Fisiologia.ggb	Teoria
4	Teoria11_Teclado	GeoGebra
5	Teoria12_TecladoEfeitos	GeoGebra
6	Teoria13_CanalV9	GeoGebra
7	Teoria14_Funcao_Efeito	GeoGebra
8	Teoria15_Exemplos	GeoGebra
9	Experimento01_Notas .ggb	Experimento 1
10	Experimento02A_Tubos.ggb	Experimento 2
11	Experimento02B_Cordas.ggb	Experimento 2
12	Experimento03_Acordes.ggb	Experimento 3
13	Experimento04A_SFourier_Dente de Serra.ggb	Experimento 4
14	Experimento04B_SFourier_Quadrada.ggb	Experimento 4
15	Experimento04C_SHarmonica.ggb	Experimento 4
16	Experimento05_Batimento.ggb	Experimento 5
17	Experimento06_Tartini.ggb	Experimento 6
18	Experimento07_Timbre.ggb	Experimento 7
19	Experimento08_EfeitoDoppler.ggb	Experimento 8
20	Experimento09_Barreira Sonica.ggb	Experimento 9
21	Experimento10_Lissajous.ggb	Experimento 10
22	Linha1Seno.ggb	Conteúdo
23	Linha2Cosseno.ggb	Conteúdo
24	Linha3Tangente.ggb	Conteúdo
25	Linha4Cotangente.ggb	Conteúdo
26	Linha5Secante.ggb	Conteúdo
27	Linha6Cossecante.ggb	Conteúdo
28	Linha7Todas.ggb	Conteúdo
29	funcao1seno.ggb	Conteúdo
30	funcao2cosseno.ggb	Conteúdo
31	funcao3tangente.ggb	Conteúdo
32	funcao4cotangente.ggb	Conteúdo
33	funcao5secante.ggb	Conteúdo
34	funcao6cossecante.ggb	Conteúdo

Tabela 3.1: Arquivos do GeoGebra.

(Fonte: o autor.)



## 3.1 Experimento 1 - Produção de uma nota musical

### Objetivo

Executar uma nota musical.

### Conteúdo programático

Funções trigonométricas.

### Observação

Por ser o primeiro contato do estudante com as funções periódicas, este primeiro experimento está dividido em duas etapas:

1ª etapa: o GeoGebra utilizado como elemento investigador, com o título de Laboratório Gráfico, em que o estudante utiliza um computador com o programa GeoGebra para investigar as constantes de uma função trigonométrica.

2ª etapa: produção de uma nota musical.

#### 1ª etapa – Laboratório Gráfico no GeoGebra

Seja a função trigonométrica no formato  $f(x) = A + B \cdot \text{sen}(Kx + M)$ , comumente estudada no ensino básico. Em um primeiro momento, cabe ao estudante investigar graficamente as alterações gráficas causadas por  $A$ ,  $B$ ,  $K$  e  $M$ . Para isso, foi criado um roteiro de Laboratório Gráfico de Trigonometria.

A função senoide básica é representada pela Figura 3.1.

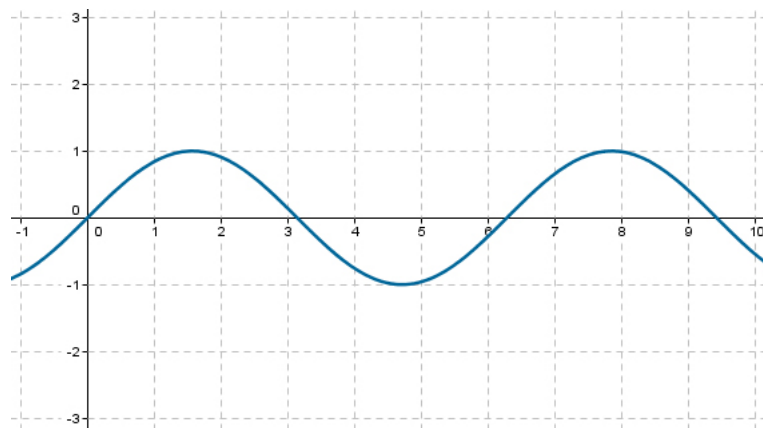


Figura 3.1: Função seno básica.

(Fonte: o autor.)

As modificações que ocorrerem ao serem alteradas as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $K$  e  $M$ , encontram-se nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 respectivamente.

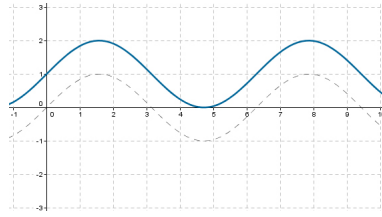


Figura 3.2: Alteração em  $A$ .

(Fonte: o autor.)

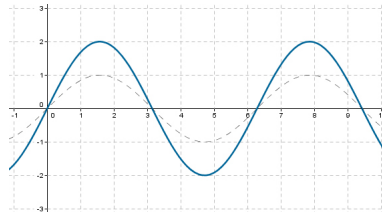


Figura 3.3: Alteração em  $B$ .

(Fonte: o autor.)

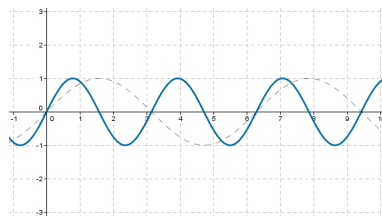


Figura 3.4: Alteração em  $K$ .

Fonte: o autor.

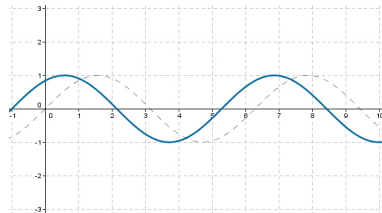


Figura 3.5: Alteração em  $M$ .

Fonte: o autor.

**Procedimento** .

ROTEIRO PARA LABORATÓRIO DE TRIGONOMETRIA  
**Funções Trigonométricas**

**1ª Parte** - Observação

Construa o gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ .

Construa o gráfico da função  $g(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$ .

Construa o gráfico da função  $h(x) = \text{sen}(2x)$ .

Observe-os.

Note que a função  $g$  tem uma amplitude maior que a função  $f$ , e a função  $h$  têm um período menor que a função  $f$ .

**2ª Parte** - Investigação

Faça algumas experiências com os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $K$  e  $M$  da função:

$$f(x) = A + B \cdot \text{sen}(Kx + M)$$

variando-os.

Sugestão: não varie todos os coeficientes ao mesmo tempo. Experimente diversas possibilidades, antes de começar uma nova investigação.

**3ª Parte** - Pesquisa

Para cada uma das questões a seguir, procure uma função trigonométrica que satisfaça à seguinte condição:

- 1) Possua amplitude 4.
- 2) Possua imagem  $[-1,3]$ .
- 3) Possua uma frequência maior que a função  $f(x) = \text{sen}(x)$  .
- 4) Possua amplitude 4 e período  $\pi/4 \text{ rad}$ .
- 5) Possua período de  $180^\circ$  e imagem  $[-3,1]$ .

**4ª Parte** - Criação

- 1) Desloque a função cosseno  $180^\circ$  para a direita.
- 2) Desloque a função cosseno até coincidir com a função seno.
- 3) Associe funções seno e cosseno com amplitudes e períodos diferentes, de forma a obter 3 picos distintos em cada período.

**5ª Parte** - Análise

Cabe ao estudante identificar não como receptor da informação, mas atuando para que tais movimentos de gráfico aconteçam, concluindo o roteiro utilizado.

## 2ª etapa - Executando uma nota

### Experimento Virtual

#### Produzindo uma nota no GeoGebra .

Utilizando a função investigada na 1ª parte, é o momento de fazer as alterações necessárias para a execução das notas. Para tanto, basta substituir  $K$  na função  $f(x) = A + B \cdot \text{sen}(Kx + M)$  por  $n * 2 * \pi$ , em que  $n$  é a frequência da nota que se deseja emitir e o  $2 * \pi$  representa o perímetro da circunferência de raio 1. Tem-se assim, para  $n=440$ , o número de ciclos a cada segundo, ou seja: 440 Hz.

$$f(x) = A + B \text{sen}(n * 2 * \pi * x + M)$$

Sugere-se, inicialmente,  $n = 440$ , pois representa a nota Lá central (diapásão 1), no GeoGebra A5 ou pelo código MIDI: 69. Mantendo  $A = 0$ ,  $B = 1$  e  $M = 0$ , fica-se com

$$f(x) = \text{sen}(440 \cdot 2\pi x).$$

Vale, portanto, a mesma investigação, alterando-se as constantes,  $A$ ,  $B$ ,  $n$  e  $M$ .

Conforme já visto de forma mais aprofundada, no Capítulo 3 – GeoGebra como Sintetizador, utilizamos o comando:

TocarSom[ <Função>, <Valor Mínimo>, <Valor Máximo>]

No exemplo acima, definido  $f(x)$  pode-se utilizar:

$$\text{TocarSom}(f(x), 0, 3)$$

ou

$$\text{TocarSom}(\text{sen}(440 * 2 * \pi * x), 0, 3)$$

onde TocarSom é o comando, 440 é a frequência desejada (nota Lá central),  $2\pi$  uma volta na circunferência expressa em radianos, 0 (zero) o ponto inicial (em segundos) e 3 o tempo final (no caso 3 segundos). Resumindo, temos nota Lá, tocada no intervalo de tempo de zero a três segundos.

#### Objetivo .

Consiste em emitir uma ou mais notas musicais utilizando o programa GeoGebra variando intensidade (amplitude) e altura (frequência).

#### Material .

Computador com o programa GeoGebra instalado.

#### Procedimento .

Executar notas no GeoGebra com intensidades e alturas diferentes.

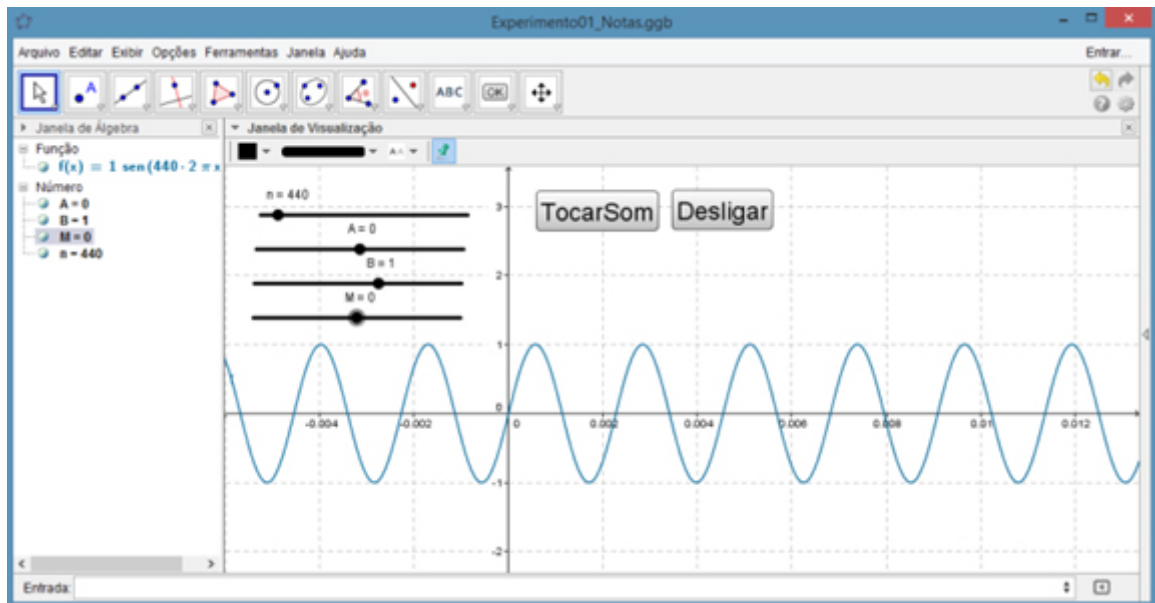


Figura 3.6: GeoGebra do experimento de nota musical.  
(Fonte: o autor.)

### Análise .

Observar como e quais constantes da função alteram as características do som.

### Experimento Real

#### Objetivo .

Consiste em emitir uma nota musical em um instrumento variando intensidade (amplitude) e altura (frequência).

#### Material .

Qualquer instrumento musical.

#### Procedimento .

Executar notas no instrumento com intensidades e alturas diferentes.

### Análise .

Observar amplitude, defasagem, frequência e as relações com a música como intensidade e altura. É sugerido que sejam averiguadas as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $n$  e  $M$  em que se deve concluir que  $B$  é responsável pela intensidade do som (volume) e  $n$  pela altura do som (mais grave ou mais agudo). Já  $A$  e  $M$  não alteram as características do som.

## 3.2 Experimento 2 - Tubos e Cordas

### Objetivo

Produzir sons harmônicos em tubos e cordas.

### Conteúdo programático

Trigonometria, séries, logaritmos, sequências, progressão.

### Subsídios teóricos

#### Cordas

Os seguintes fatores afetam o som em uma corda: material, espessura, comprimento e tensão nela aplicada. Seja uma corda de comprimento  $L$  cujas ondas possuem uma velocidade  $v$ . Valem as seguintes configurações de harmônicos em ondas estacionárias: para  $n = 1$ , primeiro harmônico; para  $n = 2$ , segundo harmônico e assim por diante.

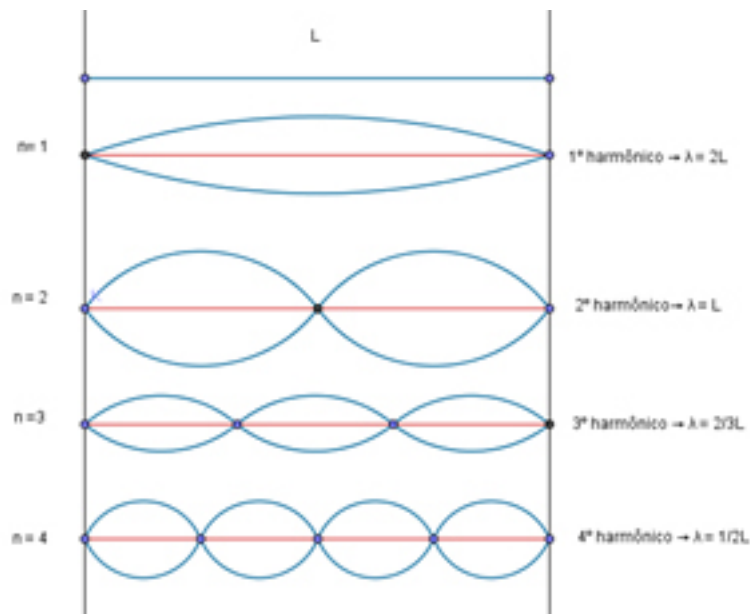


Figura 3.7: Os quatro primeiros harmônicos de uma corda fixa nos extremos.

Fonte: o autor.

$$n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = L \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Assim, a frequência  $f$  pode ser dada por:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_v}$$

$$f_n = \frac{v}{\frac{2L}{n}}$$

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L}$$

$$f_n = n \cdot f_1$$

Para realizarmos o experimento de busca dos harmônicos em uma corda, vamos alterar apenas uma das variáveis, mantendo as demais constantes. No caso, fazendo variar o tamanho da corda.

## Tubos

Assim como as cordas ou molas, o ar ou gás contido dentro de um tubo pode vibrar com frequências sonoras, este é o princípio que constitui os instrumentos musicais de sopro como a flauta, corneta, clarinete, etc. que são construídos basicamente por tubos sonoros.

Nesses instrumentos, uma coluna de ar é posta a vibrar ao soprar-se uma das extremidades do tubo, chamada embocadura, que possui os dispositivos vibrantes apropriados.

Alteram o som em um tubo aberto a espessura, o comprimento e a velocidade de propagação. Considerando um tubo sonoro de comprimento  $L$ , cujas ondas se propagam a uma velocidade  $v$ , tem-se diversas configurações de ondas estacionárias (Figura 3.8).

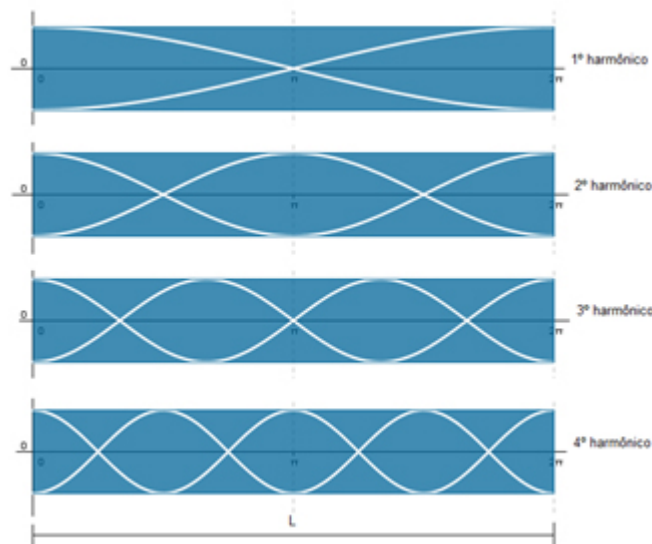


Figura 3.8: Os quatro primeiros harmônicos de um tubo aberto.

(Fonte: o autor.)

Idem às cordas, mas, neste caso, o número de nós coincide com o harmônico.

Como  $n$  não tem restrições, no tubo aberto, obtêm-se frequências naturais de todos os harmônicos.

## Experimento de tubos no GeoGebra

Neste experimento, o GeoGebra foi construído para servir como Objeto de Aprendizagem (OA). Cabe ao estudante, identificar os pontos dos harmônicos em tubos com diversas espessuras e comprimentos, anotando-os. A Figura 3.9 mostra o Objeto de Aprendizagem confeccionado no GeoGebra como elemento de apoio visual do experimento.

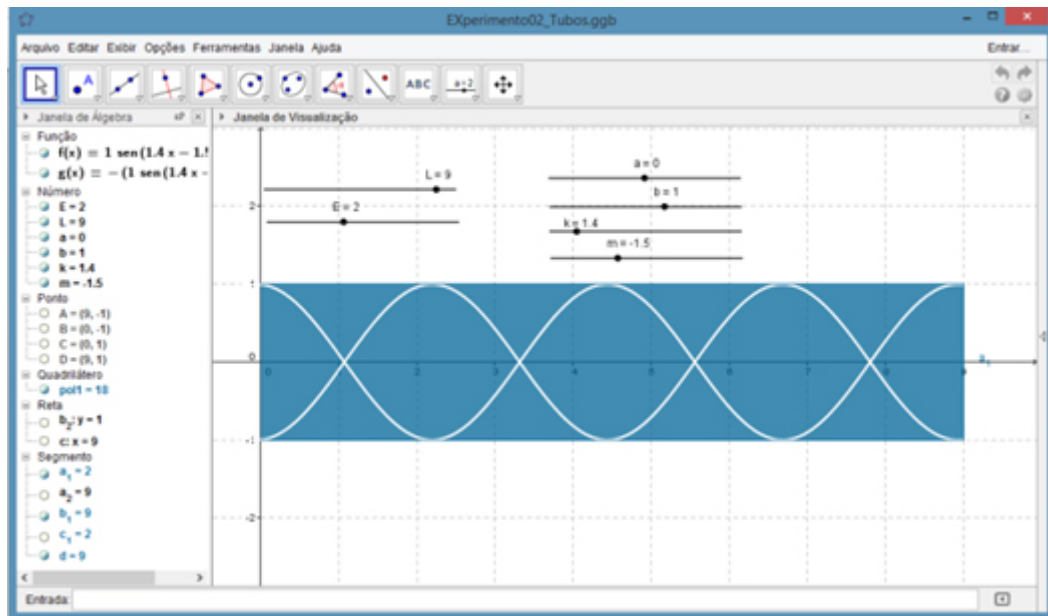


Figura 3.9: GeoGebra para o experimento de tubos.

(Fonte: o autor.)

### Objetivo

Dado um tubo de espessura e comprimento variáveis, encontrar os três primeiros harmônicos.

### Material

- Laboratório de Informática.
- Programa GeoGebra.
- Roteiro.

### Procedimento

- Defina a espessura do tubo. Anote.



Defina o comprimento do tubo. Anote.

Altere na função trigonométrica  $f(x) = B * \cos(n * 2 * \pi * x)$ ,  $B$  e  $n$  de forma a coincidir nos limites do tubo as amplitudes máximas. Anote  $B$  e  $n$ .

Continue o procedimento para achar os 3 primeiros harmônicos.

Escolha uma nova espessura, anote e identifique novamente os 3 primeiros harmônicos.

Faça isso para, pelo menos, três espessuras diferentes.

Recomece, então, mantendo uma mesma espessura e variando o comprimento do tubo, novamente encontrando os três primeiros harmônicos e novamente para três comprimentos diferentes.

Monte uma tabela com as espessuras, comprimentos e harmônicos encontrados.

Analise e discuta os resultados encontrados.

## Experimento real com cordas

### Objetivo

Obter os primeiros harmônicos de uma corda.

### Material

Um instrumento de corda com possibilidade de alteração do tamanho. Por exemplo: violão, bandolim, cavaquinho.

Trena ou fita métrica.

Tabela 3.2: frequências de cada nota.

Figura 3.11 contendo o nome das notas no instrumento violão ou aplicativo para leitura das frequências.

### Subsídios teóricos

Para a execução deste experimento é necessário a identificação das notas nos instrumentos e suas respectivas frequências.

### Procedimento

Para realizarmos o experimento de busca dos harmônicos em uma corda, vamos alterar apenas uma das variáveis, mantendo as demais constantes. No caso, iremos fazer variar o tamanho da corda.

Meça o comprimento de uma corda.

Emita o som da corda. Escute.

Octave — Note ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	16.352 (-48)	32.703 (-36)	65.406 (-24)	130.81 (-12)	261.63 (+0)	523.25 (+12)	1046.5 (+24)	2093.0 (+36)	4186.0 (+48)	8372.0 (+60)	16744.0 (+72)
C#/D♭	17.324 (-47)	34.648 (-35)	69.296 (-23)	138.59 (-11)	277.18 (+1)	554.37 (+13)	1108.7 (+25)	2217.5 (+37)	4434.9 (+49)	8869.8 (+61)	17739.7 (+73)
D	18.354 (-46)	36.708 (-34)	73.416 (-22)	146.83 (-10)	293.66 (+2)	587.33 (+14)	1174.7 (+26)	2349.3 (+38)	4698.6 (+50)	9397.3 (+62)	18794.5 (+74)
E♭/D♯	19.445 (-45)	38.891 (-33)	77.782 (-21)	155.56 (-9)	311.13 (+3)	622.25 (+15)	1244.5 (+27)	2489.0 (+39)	4978.0 (+51)	9956.1 (+63)	19912.1 (+75)
E	20.602 (-44)	41.203 (-32)	82.407 (-20)	164.81 (-8)	329.63 (+4)	659.26 (+16)	1318.5 (+28)	2637.0 (+40)	5274.0 (+52)	10548.1 (+64)	21096.2 (+76)
F	21.827 (-43)	43.654 (-31)	87.307 (-19)	174.61 (-7)	349.23 (+5)	698.46 (+17)	1396.9 (+29)	2793.8 (+41)	5587.7 (+53)	11175.3 (+65)	22350.6 (+77)
F#/G♭	23.125 (-42)	46.249 (-30)	92.499 (-18)	185.00 (-6)	369.99 (+6)	739.99 (+18)	1480.0 (+30)	2960.0 (+42)	5919.9 (+54)	11839.8 (+66)	23679.6 (+78)
G	24.500 (-41)	48.999 (-29)	97.999 (-17)	196.00 (-5)	392.00 (+7)	783.99 (+19)	1568.0 (+31)	3136.0 (+43)	6271.9 (+55)	12543.9 (+67)	25087.7 (+79)
A♭/G♯	25.957 (-40)	51.913 (-28)	103.83 (-16)	207.65 (-4)	415.30 (+8)	830.61 (+20)	1661.2 (+32)	3322.4 (+44)	6644.9 (+56)	13289.8 (+68)	26579.5 (+80)
A	27.500 (-39)	55.000 (-27)	110.00 (-15)	220.00 (-3)	440.00 (+9)	880.00 (+21)	1760.0 (+33)	3520.0 (+45)	7040.0 (+57)	14080.0 (+69)	28160.0 (+81)
B♭/A♯	29.135 (-38)	58.270 (-26)	116.54 (-14)	233.08 (-2)	466.16 (+10)	932.33 (+22)	1864.7 (+34)	3729.3 (+46)	7458.6 (+58)	14917.2 (+70)	29834.5 (+82)
B	30.868 (-37)	61.735 (-25)	123.47 (-13)	246.94 (-1)	493.88 (+11)	987.77 (+23)	1975.5 (+35)	3951.1 (+47)	7902.1 (+59)	15804.3 (+71)	31608.5 (+83)

Tabela 3.2: Notas MIDI.  
(Fonte: WIKIPEDIA, setembro de 2014.)

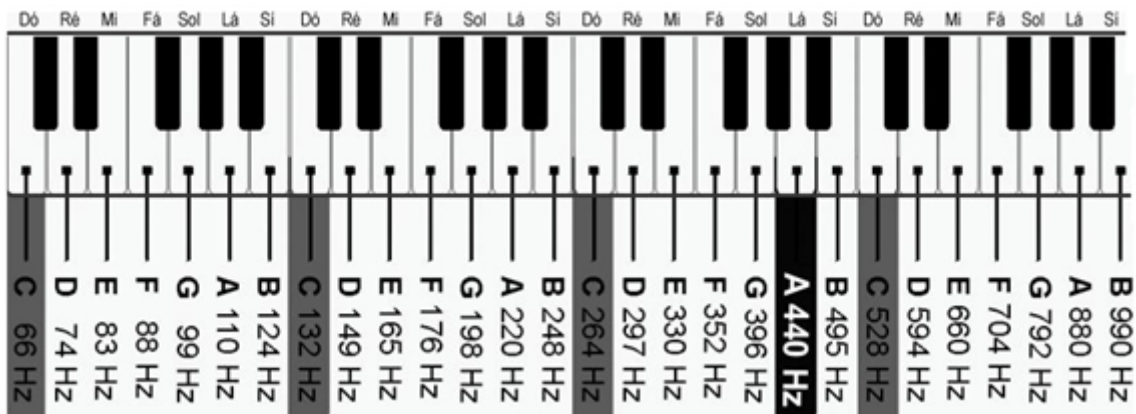


Figura 3.10: Posição das notas em um teclado.  
(Fonte: o autor.)

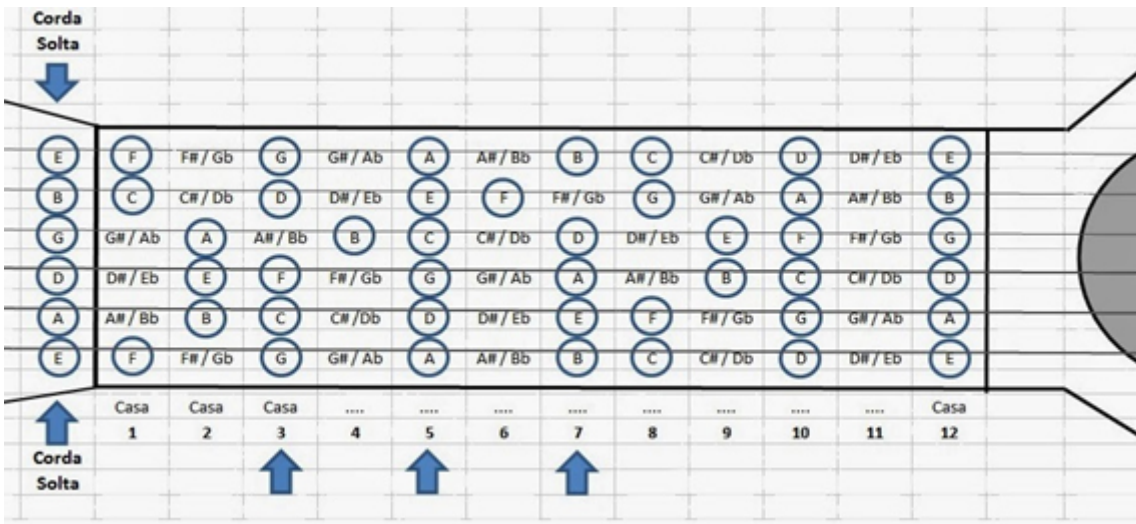


Figura 3.11: Posição das notas no braço do violão.  
(Fonte: <http://espalhandomusica.blogspot.com.br> em novembro de 2014)

Divida o comprimento da corda por 2, obtendo assim o 2º harmônico.  
Pressione o dedo nessa posição, a partir do extremo do braço do instrumento.  
Emita o novo som.  
Proceda da mesma forma, dividindo o tamanho original da corda por 3 e por 4.  
Pressione o dedo nessas novas posições e verifique o som dos novos harmônicos.  
Anote o nome das notas que foram emitidas, pesquisando pela posição do dedo no instrumento.  
Faça a leitura das notas ou das frequências onde aconteceram os harmônicos.  
Construa uma tabela identificando os harmônicos pelas frequências.  
Analise e discuta sobre as frequências obtidas.

## **Experimento real com tubos**

### **Objetivo**

Produzir sons a partir do sopro em tubos e verificar as possibilidades de som.

### **Material**

Tubos de PVC de comprimentos e espessuras diversas.

### **Procedimento**

Escolha um tubo.  
Sopre-o de forma a gerar um harmônico.  
Gere outros harmônicos. Anote quantos harmônicos foram gerados.  
Escute o som emitido.  
Faça uma tabela que relacione o tamanho do tubo, a espessura e a observação da altura (grave ou agudo) do som emitido.

### **Sugestão**

Havendo a possibilidade de efetuar as medições das frequências emitidas através de algum aplicativo (disponíveis gratuitamente para diversos sistemas operacionais), anotar as espessuras, comprimentos e frequências para fazer uma análise posterior.

### 3.3 Experimento 3 - Acorde

Segundo a lenda, um dia Pitágoras passou por uma loja de ferreiro e ouviu os sons de diferentes martelos batendo na bigorna. Ele foi para casa e trabalhou com as notas produzidas por diferentes comprimentos de onda.

#### Objetivo

Gerar um acorde.

#### Conteúdo programático

Séries, logaritmo, sequências, proporção.

#### Subsídios teóricos

Chama-se acorde a combinação de duas ou mais notas musicais. Muitas são as possibilidades de combinação de duas notas em uma oitava ( $13 \cdot 12 = 156$  possibilidades).

#### Metodologia

Aula expositiva com realização de experimento.

#### Material

Um teclado ou qualquer outro instrumento que possa emitir duas notas simultaneamente.

#### Procedimento

Emitir uma combinação de dois sons. Escolher ao acaso duas notas entre uma oitava, gerando possibilidades. Escolher dois pares de sons que se combinem e dois pares de sons que não se combinem. Anotar.

#### Experimento no GeoGebra

Fazer o GeoGebra emitir um acorde.

São algumas possibilidades:

$$\text{TocarSom}[\text{"C+E+G"}, 0]$$

onde as notas dó, mi e sol são tocadas simultaneamente por um piano (0).

TocarSom[“V0 C V1 E V3 G”, 0]

onde as notas dó, mi e sol tocadas simultaneamente mas separadas em 3 vozes, também executadas por um piano.

TocarSom[“Cmajw”,0]

onde é tocado o acorde de dó maior (Cmaj) pré-programado, também executado por um piano(0). As três formas utilizadas nos comandos executam o mesmo acorde. Vale à pena emitir um acorde dissonante para que seja percebida a diferença:

TocarSom[“C+ C#+D# ”,0]

Por curiosidade, fica a possibilidade de serem mostrados alguns tipos de acordes como o maior, o menor, ou mesmo, alguma combinação de teclas pretas de um teclado que sempre se harmonizam.

## 3.4 Experimento 4 - Séries

### Objetivo

Reproduzir a série harmônica e série de Fourier.

### Conteúdo programático

Séries, gráficos de funções, funções periódicas.

### Subsídios teóricos

#### Série harmônica

Série harmônica é o conjunto de ondas composto da frequência fundamental e de todos os múltiplos inteiros dessa frequência.

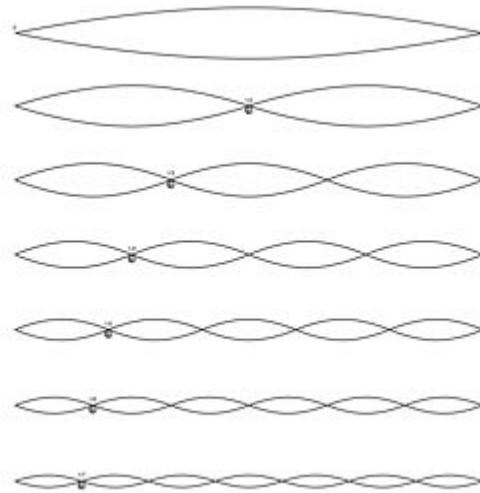


Figura 3.12: Harmônicos de uma corda fixa em duas extremidades.

(Fonte: <[www.jornallivre.com.br](http://www.jornallivre.com.br)> em outubro de 2014)

Dadas as frequências iniciais das notas Lá e da nota Dó, chamadas de fundamentais, tem-se a Tabela 3.3 dos múltiplos das frequências iniciais. Nota-se que se mantêm as proporções, as frequências diferem das notas das escalas temperadas. Observa-se claramente ao compararmos o Lá<sub>5</sub> da 16ª interação em que a nota fundamental foi o Lá com o mesmo Lá<sub>5</sub> da 13ª interação, quando a nota fundamental foi o Dó<sub>2</sub>.

#### Série de Fourier

Como o objetivo aqui é o Ensino Básico da matemática, o aprofundamento ao estudo de séries de Fourier, não cabe neste contexto. Adota-se, portanto, a postura do

	Lá1		Do2	
	Nota	Frequência(Hz)	Nota	Frequência(Hz)
1(F)	Lá1	110	Do2	131
2	Lá2	220	Do3	262
3	Mi3	330	Sol3	393
4	Lá3	440	Do4	524
5	Do#4	550	Mi4	655
6	Mi4	660	Sol4	786
7	Sol4	770	Sib4	917
8	Lá4	880	Do5	1048
9	Si4	990	Ré5	1179
10	Do#5	1100	Mi5	1310
11	Ré#5	1210	Fa#5	1441
12	Mi5	1320	Sol5	1572
13	Fá#5	1430	Lá5	1703
14	Sol5	1540	Sib5	1834
15	Sol#5	1650	Si5	1965
16	Lá5	1760	Do6	2096

Tabela 3.3: Cálculo dos harmônicos.

(Fonte: o autor.)

estudante conhecer as possibilidades, utilizações e entender uma utilidade prática, de maneira lúdica.

Uma série de Fourier, nomeada em honra de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), é a representação de uma função periódica (muitas vezes, nos casos mais simples, tidas como tendo período  $2\pi$ ) como uma soma de funções periódicas.

Qualquer função  $f(x)$  pode, segundo Fourier, ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno.

Uma função  $f$  é dita periódica se existe um número real positivo  $P$ , chamado período de  $f$ , tal que  $f(x) = f(x + P)$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ . O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento  $P$  necessário para a imagem da função se repetir.

A Transformada de Fourier decompõe um sinal em suas componentes elementares seno e cosseno. A análise de um som musical é determinar quais as notas musicais (frequências) que estão sendo executadas em um certo trecho.

## Série de Fourier

### Objetivo

Dados dois instrumentos musicais quaisquer, afiná-los de forma que independente do timbre, emitam a mesma nota.

## Metodologia

Aula expositiva experimental com a participação dos estudantes.

## Material

Mínimo: um instrumento musical. Outras variações: instrumentos musicais diversos, instrumentos com possibilidade de alterar a afinação, diapasão, afinador.

## Procedimento

Emitir uma nota qualquer no instrumento.

O estudante deve pesquisar e experimentar o som que mais se aproxime e emitir a mesma nota.

## Experimento no GeoGebra

Para uma explicação mais visual do funcionamento de uma série de Fourier, foi retirado e adaptado do banco de dados do sítio do GeoGebra, o arquivo que dá suporte a este experimento. Nele é possível partir-se de uma onda senoidal perfeita, no caso de haver apenas uma interação e inserir-se parcelas na série até se obter uma onda próxima à quadrada de acordo com o número de parcelas somadas. Da mesma forma, pode-se construir outra função periódica conhecida como dente de serra.

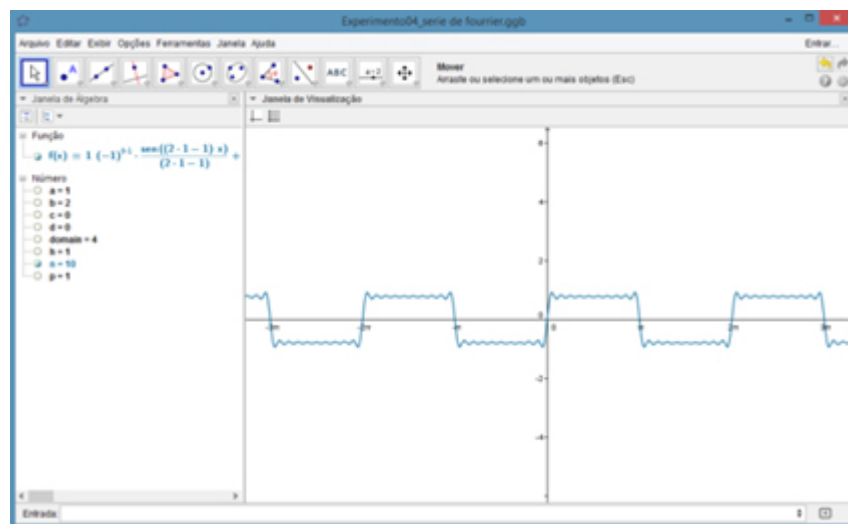


Figura 3.13: GeoGebra de apoio ao experimento série de Fourier.

(Fonte: o autor.)



### 3.5 Experimento 5 - Batimento

Este experimento é muito claro às pessoas, gerando uma curiosidade espontânea. O efeito batimento é causado pela interferência entre duas ondas sonoras puras (forma senoidal), fazendo com que nossa audição capte os pontos nulos da soma de dois senos.

#### Objetivo

Produzir o efeito de batimento.

#### Conteúdo programático

Transformações trigonométricas.

#### Subsídios teóricos

Uma das propriedades vistas da onda é a interferência entre elas. Os batimentos são considerados um fenômeno que acontece quando há uma superposição de duas ondas, uma interferindo na outra, com uma mesma natureza, mesma direção, mesma amplitude e com frequências próximas ( $f_1$  próxima a  $f_2$ ). Como os períodos estão próximos, a defasagem das ondas em um certo ponto P, varia periodicamente e lentamente, pelo fato de uma onda ir se atrasando cada vez mais em relação à outra. Como resultado da experimentação, sugere-se que o cérebro determina a altura do som complexo, procurando um padrão entre os seus componentes. Considera-se ainda que se a diferença entre as frequências dos sons for grande, a ponto do ouvido humano perceber tal diferença, as ondas não irão fundir-se e dois sons serão ouvidos separadamente como um acorde, mesmo que dissonantes.

Consideremos dois sons de mesma amplitude  $B$ :

$$s_1 = B \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot x)$$

$$s_2 = B \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot x)$$

Com  $\omega_1 > \omega_2$ . Pelo princípio da superposição, o som final  $s$  é dado por

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ &= B \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot x) + B \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot x) \\ &= B \cdot [\text{sen}(\omega_1 \cdot x) + \text{sen}(\omega_2 \cdot x)] \end{aligned}$$

Sabe-se da trigonometria sobre a soma dos senos de dois arcos que:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sena} \cdot \text{cos}b + \text{sen}b \cdot \text{cosa}$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sena} \cdot \text{cos}b - \text{sen}b \cdot \text{cosa}$$

Somando-se membro a membro as duas equações tem-se:

$$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2 \cdot \text{sena} \cdot \text{cos}b$$

Fazendo  $p = a + b$  e  $q = a - b$  chega-se a:  $a = \frac{p+q}{2}$  e  $b = \frac{p-q}{2}$ .

Concluindo:

$$\text{sen}p + \text{sen}q = 2 \cdot \text{sen} \left( \frac{p+q}{2} \right) \cdot \text{cos} \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

## Metodologia

Aula expositiva experimental participativa.

## Material

Duas fontes geradoras de frequências (sugestão: o próprio GeoGebra e um celular com um aplicativo gerador de frequências).

## Procedimento

Emita uma das fontes uma frequência “pura”, por exemplo, 8000 Hz.

Escute por 3 a 5 segundos e desligue.

Emita, a seguir, uma frequência, por exemplo, 8015 Hz.

Escute por 3 a 5 segundos e desligue.

Ligue ambos ao mesmo tempo e escute a interferência das ondas, gerando o que é chamado de batimento.

Varie as frequências e verifique frequências em que o batimento se torna mais evidente.

## Experimento no GeoGebra

Para o uso no GeoGebra, foi construído um Objeto de Aprendizagem, no qual é possível emitir as frequências e variá-las de forma a observar como ocorrem os batimentos e suas equações.

É possível também investigar as amplitudes, os períodos e as frequências. Nota-se também que fica definida pela envoltória uma nova função e sua forma negativa.

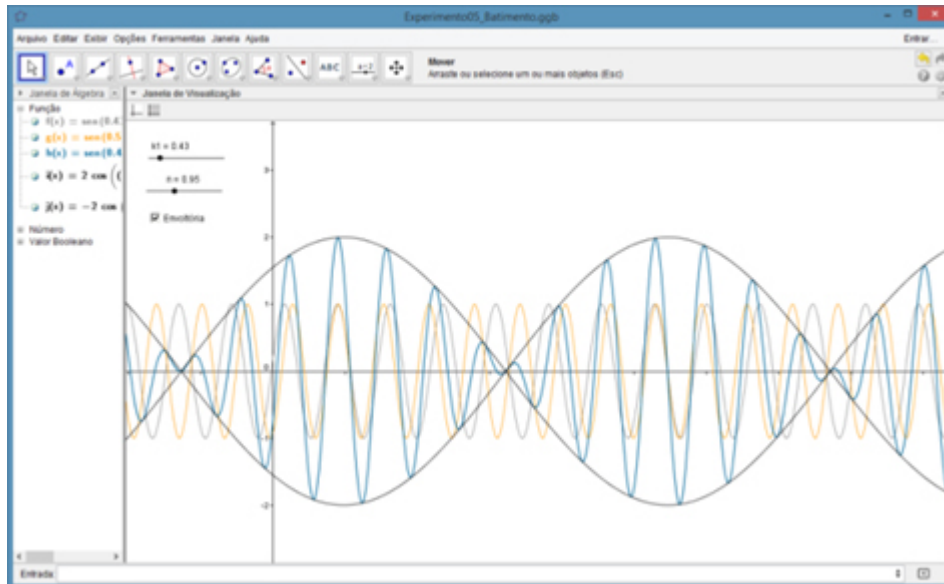


Figura 3.14: GeoGebra para o experimento de batimentos.  
(Fonte: o autor.)

## 3.6 Experimento 6 - Som de Tartini

O Som de Tartini, conhecido também como Terceiro Som ou som de combinação, aparece como um som “fantasma”, quando duas frequências altas próximas são executadas e pela diferença das frequências dos dois sons, ouve-se um terceiro.

Dentre os experimentos apresentados, este é o mais difícil de ser percebido. Normalmente, apenas músicos atentos à execução de notas de um acorde o notam.

### Objetivo

Produzir experimentalmente o som de Tartini.

### Conteúdo programático

Transformações trigonométricas.

### Subsídios teóricos

Giuseppe Tartini<sup>1</sup>, violinista italiano, que viveu no sec. XVIII, na cidade de Pirano, fez a descoberta do “terceiro som”, fenômeno acústico que, posteriormente, foi explicado cientificamente pelo físico Helmholtz<sup>2</sup>. O som de Tartini acontece quando duas notas são tocadas em uníssono<sup>3</sup>, ouve-se, assim, uma terceira nota. Quando a frequência dos batimentos atinge o limiar da audição, ouvimos o que o físico alemão Herman Helmholtz chamou de “som de combinação”. Uma das propriedades vistas da onda é a interferência entre elas. Neste experimento, há a subtração de duas ondas.

Sejam duas ondas definidas pelas funções  $f(x) = \text{sen}(a \cdot 2 \cdot \pi \cdot x)$  e  $g(x) = \text{sen}(b \cdot 2 \cdot \pi \cdot x)$  com  $a$  e  $b$  próximos. Se emitidos conjuntamente, vale a associação análoga ao Experimento 5:

$$\begin{aligned}\text{sen}(a + b) &= \text{sen}a \cdot \text{cos}b + \text{sen}b \cdot \text{cos}a \\ \text{sen}(a - b) &= \text{sen}a \cdot \text{cos}b - \text{sen}b \cdot \text{cos}a\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Giusep Tartine foi o primeiro a perceber o terceiro som, também conhecido como “som do inferno”. No entanto só veio a ser estudado e explicado pelo físico alemão Helmholtz.

<sup>2</sup>Helmholtz: Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (Potsdam, 31 de agosto de 1821 — Charlottenburg, 8 de setembro de 1894) foi um médico e físico alemão (WIKIPÉDIA, agosto de 2014).

<sup>3</sup>Uníssono: em música, um uníssono é um intervalo na razão de 1:1 ou 0. Dois tons em uníssono são considerados da mesma altura, mas ainda podem ser percebidos como se originando de fontes diferentes (WIKIPÉDIA, agosto de 2014).

Subtraindo-se membro a membro as duas equações tem-se:

$$\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b) = 2 \cdot \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{coseca}$$

Mas:  $a = \frac{p+q}{2}$  e  $b = \frac{q-p}{2}$ .

Donde conclui-se que:

$$\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

## Metodologia

Aula expositiva experimental.

## Material

Dois fontes geradoras de frequências (sugestão: o próprio GeoGebra e um celular com um aplicativo gerador de frequências). Alternativo: duas flautas ou dois instrumentos que gerem as frequências por um tempo mais longo.

## Procedimento

Execute uma frequência mais alta, por exemplo, 2300 Hz e uma segunda com valor de 2500 Hz.

Observe a formação de um terceiro som, resultado da diferença entre as frequências.

Procure duas frequências que atendam à possibilidade de ouvir um terceiro som.

Elabore para tais frequências a curva envoltória.

Gere o terceiro som mais uma vez usando as mesmas frequências e observe se o som da curva envoltória calculada coincide com o som percebido.

## Experimento no GeoGebra

Foi construído um Objeto de Aprendizagem no GeoGebra para que este experimento possa ser testado. Não é um acaso o arquivo coincidir com o da experiência de batimento. O som de Tartini começa a ser ouvido no momento em que as frequências se distanciam.

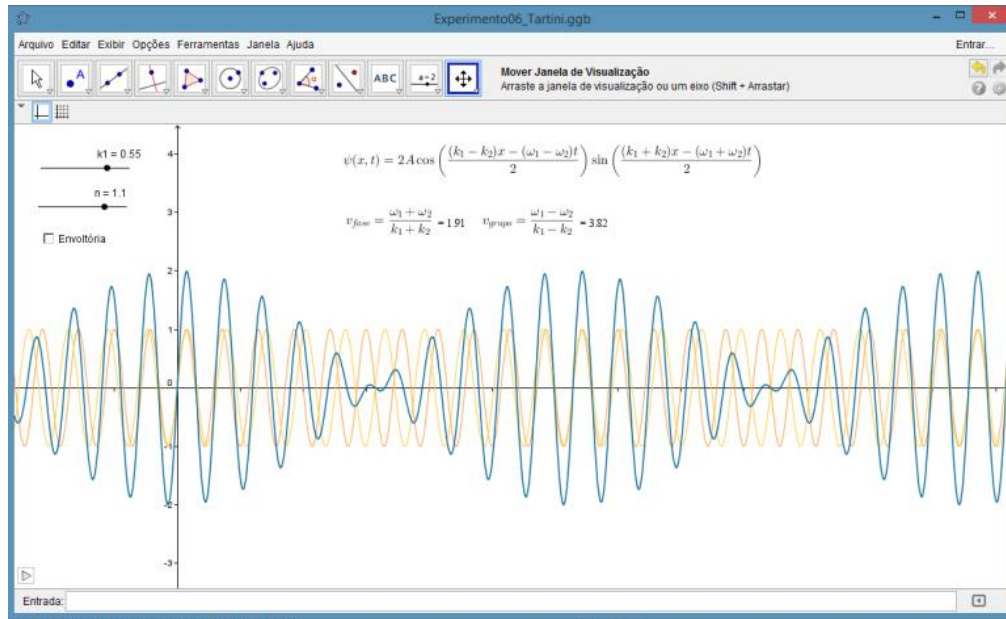


Figura 3.15: GeoGebra para o experimento de som de Tartini.  
(Fonte: o autor.)

## Curiosidade

Tartini compôs a Sonata em Sol menor para Violinos: “Devil’s Trill Sonata” (“Trilo do Diabo”), assim conhecida devido a possuir uma execução bastante complexa em seu terceiro movimento devido aos trilos (execução rápida de duas notas próximas à principal).

### 3.7 Experimento 7 - Timbre

Através do timbre, mesmo quando são mantidas as frequências, podemos identificar um determinado instrumento ou reconhecer a voz de uma pessoa.

#### Objetivo

Obter timbres diferentes. Gerar sons em instrumentos diferentes e identificar qual o instrumento tocado.

#### Conteúdo programático

Funções trigonométricas, gráficos, transformações.

#### Subsídios teóricos

Chama-se timbre a característica sonora que nos permite distinguir se sons da mesma frequência foram produzidos por fontes sonoras conhecidas e que nos permite diferenciá-las.

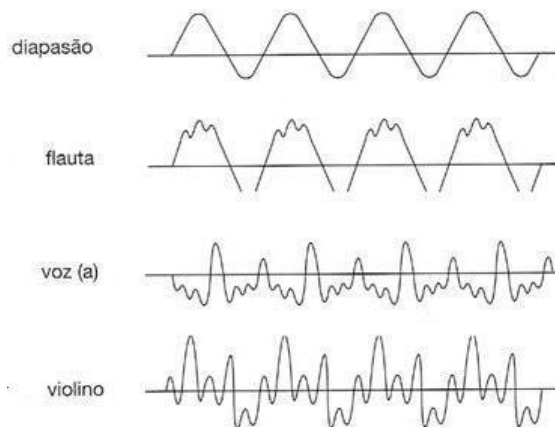


Figura 3.16: Gráficos de timbre.  
(Fonte: o autor.)

#### Metodologia

Laboratório gráfico com estudantes em duplas.

Jogo

## Material

Diversos instrumentos musicais ou um teclado com sons previamente definidos.

Recurso: voz humana.

## Procedimento

Execute notas de mesma frequência em instrumentos diferentes.

Identifique qual o instrumento que gerou a nota.

Uma opção interessante para provar a existência de diversos timbres é de tentar identificar a voz de um colega, visto que cada pessoa possui um timbre característico. Para tanto, se pode pedir que um estudante leia uma frase, enquanto os demais tentam identificar qual emitiu o som.

## Experimento no GeoGebra

Para este experimento foi criado no GeoGebra uma espécie de sintetizador a ser utilizado pós-laboratório gráfico com o objetivo de dinamizar as variações possíveis. Outra alternativa mais elaborada é criar sons diferentes através das funções objetivando simular um instrumento conhecido.

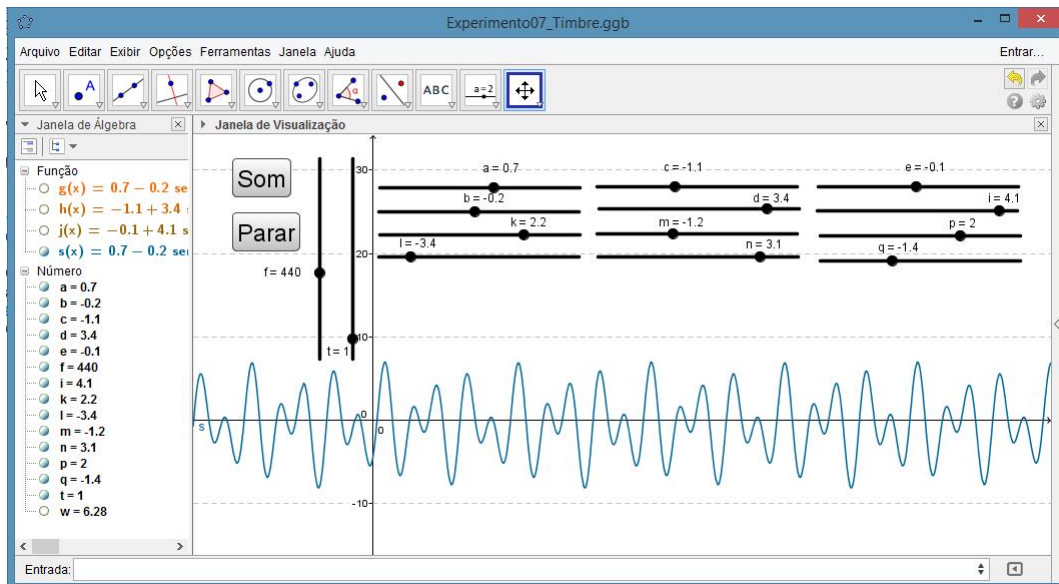


Figura 3.17: GeoGebra para o experimento de timbre.

(Fonte: o autor.)



## 3.8 Experimento 8 - Efeito Doppler

“Uma aparente mudança na frequência de uma onda causada pelo movimento relativo entre a fonte da onda e o observador”<sup>4</sup>

### Objetivo

Realizar em sala o efeito Doppler.

### Conteúdo programático

Trigonometria, ondas, funções trigonométricas, senoide, movimento de gráfico, cinemática, função afim.

### Subsídios teóricos

No efeito Doppler ocorre a percepção de uma frequência relativa, que é diferente da frequência de emissão da onda.

Quem o descreveu, teoricamente, pela primeira vez, foi Johann Christian Andreas Doppler, dando-se, portanto, seu nome ao efeito.

Este efeito é percebido claramente no som quando uma ambulância em alta velocidade passa por nós, percebemos que o tom, em relação ao emitido, fica mais agudo durante a sua aproximação, idêntico no momento da passagem, e grave, quando a ambulância começa a se afastar do observador. Graças, também, ao conhecimento desse efeito, podemos determinar a velocidade e a direção do movimento de muitas estrelas, uma vez que a luz também se propaga em ondas.

### Metodologia

Trabalho em grupo. Foi solicitado aos estudantes que elaborassem um texto escrito sobre o tema, efetuassem os cálculos das novas frequências geradas pelo deslocamento de uma fonte em movimento retilíneo uniforme e exemplificassem tal efeito com um experimento e uma construção no GeoGebra.

### Material

Livre

---

<sup>4</sup>Sheldon para Penny no seriado The Big Bang Theory, sobre efeito Doppler.

## Experimento no GeoGebra

Neste experimento é feita uma simulação no GeoGebra, em que é possível a interação do estudante com o Objeto de Aprendizagem no qual é possível alterar a velocidade da fonte emissora e a velocidade do som, possibilitando ainda uma variação de meios de propagação. Ao animarmos a fonte emissora, ela se desloca por 5 segundos, possibilitando que sejam observadas as ondas e suas respectivas velocidades.

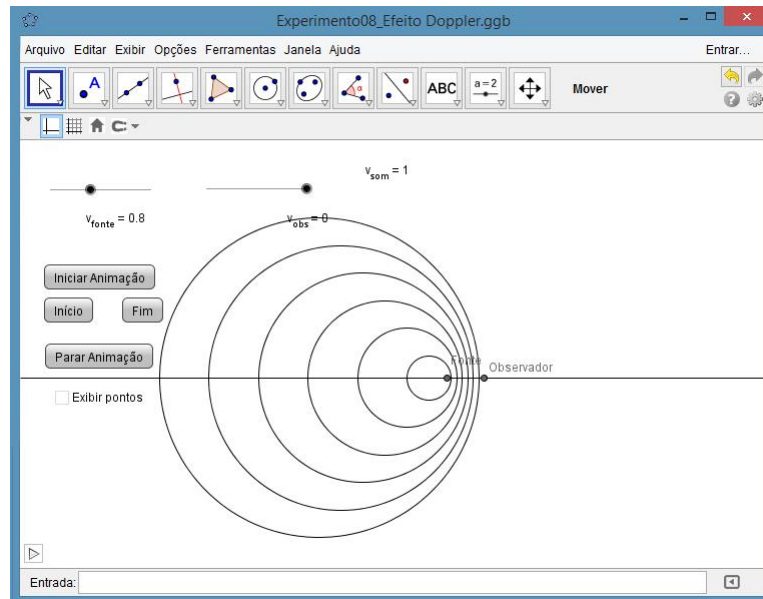


Figura 3.18: GeoGebra para o experimento de efeito Doppler.

(Fonte: o autor.)

## Experimentos realizados

O grupo 2A03 realizou o experimento utilizando uma fonte emissora de som, no caso, construída com um buzzer<sup>5</sup>, uma chave liga e desliga, uma bateria de 9v e fios. Com fita adesiva, juntaram o dispositivo a uma bola que foi arremessada de um lado para outro da sala, obtendo assim o efeito desejado.

O grupo 2A05 apresentou o mesmo efeito valendo-se de um brinquedo “vai-e-vem”, construído com garrafas PET, fitas e barbante, no qual colocou-se um celular emitindo uma frequência constante.

## Avaliação de aprendizagem

Encerrados os trabalhos, foi aplicada a seguinte avaliação de aprendizagem:

<sup>5</sup>dispositivo de sinalização elétrico, como uma campainha, que faz um zumbido.

Considere a velocidade do som no ar  $340 \text{ m/s}$  e:

- 1) escreva a função que descreve a velocidade do som no ar.
- 2) defina a função que descreve o deslocamento do som em determinado tempo.
- 3) se percebemos a claridade de um raio e ouvimos o trovão 3 segundos após, calcule a distância em que ocorreu o fenômeno.
- 4) considerando um observador parado e uma fonte sonora emitindo uma frequência de  $440 \text{ Hz}$ , se aproximando a uma velocidade de  $144 \text{ km/h}$ .
  - a) calcule a frequência ouvida pelo observador.
  - b) após a fonte ter passado pelo observador, calcule a nova frequência do afastamento.
- 5) sejam observador e fonte, ambos em movimento de aproximação com velocidades de  $20 \text{ m/s}$  e  $40 \text{ m/s}$ , respectivamente, em que a fonte emite uma frequência de  $500 \text{ Hz}$ . Calcule as frequências antes e depois da ultrapassagem.

### 3.9 Experimento 9 - Barreira Sônica

A percepção de barreira sônica pode ser verificada na tirinha a seguir.



Figura 3.19: Tirinha do Calvin e Haroldo. Por Bill Watterson.

#### Objetivo

Quebrar a barreira sônica em sala.

#### Conteúdo programático

Função afim.

#### Subsídios teóricos

A barreira sônica, título deste experimento, é um mito. O termo surgiu durante a Segunda Grande Guerra quando os aviões tornaram-se rápidos o suficiente para sofrer os efeitos da compressibilidade do ar. Dizia-se isso, pois se acreditava ser uma barreira com crescimento exponencial e que não se conseguiria ultrapassá-la. Mesmo depois de superado o conceito, a expressão ainda é usada até hoje e significa que algum objeto ultrapassou a velocidade do som. A esta velocidade chamamos Mach 1 (Ma), assim nomeada em homenagem a Ernest Mach, descobridor desse número. O Mach é uma unidade de medida de velocidade baseada na velocidade do som.

$$M = \frac{v_o}{v_{som}}$$

Onde  $M$  é o número Mach,  $v_o$  é a velocidade média relativa do objeto e  $v_{som}$  é a velocidade média do som. Em outras palavras, a velocidade Mach é quantas vezes o corpo atingiu a

velocidade do som. Em geral, usa-se a aproximação direta de condições como pressão ao nível do mar e temperatura ambiente (próxima dos  $27^{\circ}\text{C}$ ) para determinar uma velocidade do som igual a  $343,4\text{ m/s}$  ou  $1\,236,24\text{ km/h}$ .

## Metodologia

Seminário constando texto escrito, experimento prático e utilização do GeoGebra, sobre barreira sônica. Por ser um experimento bastante curioso, e de cálculos complicados, foi sugerida uma forma lúdica de apresentação da prática em um seminário de Matemática. Cabia aos estudantes apresentar, elaborando de forma livre, um experimento prático e uma construção no GeoGebra.

## Material

Livre

## Experimento no GeoGebra

Para um melhor entendimento, foi utilizado o GeoGebra com o arquivo Experimento08\_Barreira Sonica.ggb, onde é possível alterar a velocidade de um corpo em movimento, ao mesmo tempo em que pode-se observar a criação das ondas sonoras, conforme mostra a Figura 3.20.

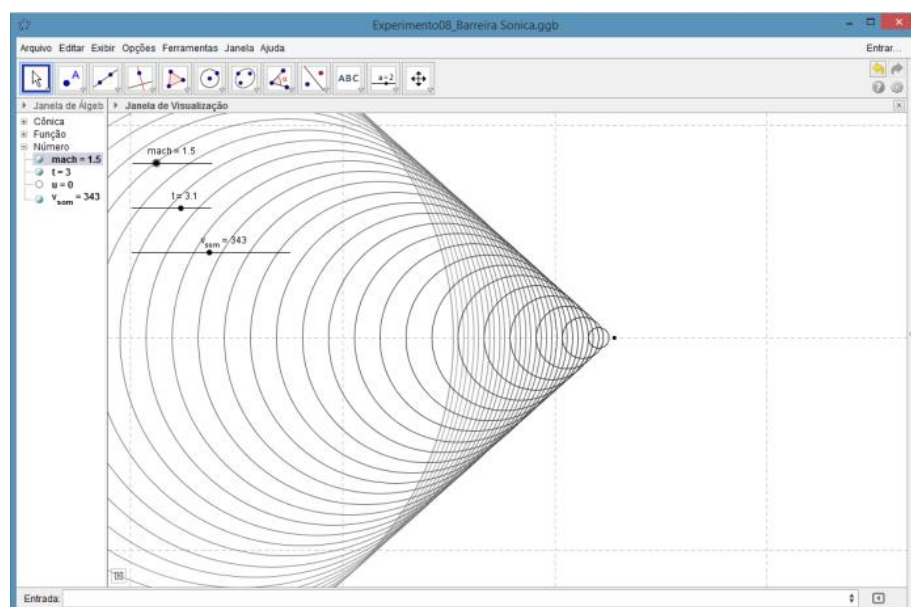


Figura 3.20: Geogebra referente ao experimento de barreira sônica.  
(Fonte: o autor.)

## Experimentos realizados

### Experimento do grupo 2AG08

#### Material .

Toalha.

Água

#### Procedimento .

Molhe a toalha na água sem encharcá-la para que esta adquira mais consistência.

Enrole a toalha longitudinalmente com se fosse torcê-la.

Enrole o torcido em torno dele mesmo.

Segurando firme com uma mão, lance-a no ar como se fosse um chicote.

Observe o estalo que acontece no momento da quebra da barreira do som.

### Experimento do grupo 2BG05

#### Material .

Chicote.

#### Procedimento .

Estale o chicote no ar.

Observe que o estalo é justamente o momento da ultrapassagem da barreira sônica pelo chicote

## 3.10 Experimento 10 - Placa de Chladni

O experimento de Chladni<sup>6</sup> mostra a onda como transmissora de energia e os nós que acontecem em uma placa devido às frequência das ondas. Este experimento pode atuar de forma marcante em quem o assiste e, como está apresentado de forma lúdica, pode ser utilizado desde o Ensino Fundamental II, 7º ano, no momento em que a disciplina ciências aborda a acústica, ou como elemento desencadeador da curiosidade para o Ensino Médio no assunto de trigonometria agindo em ondas.

### Objetivo

Fazer uma placa vibrar a partir da emissão de diversas frequências, formando desenhos geométricos com partículas polvilhadas sobre a placa.

### Conteúdo programático

Trigonometria, ondas, acústica.

### Subsídios teóricos

Uma das formas da onda se propagar é em duas dimensões, sendo neste caso, chamadas de ondas bidimensionais.

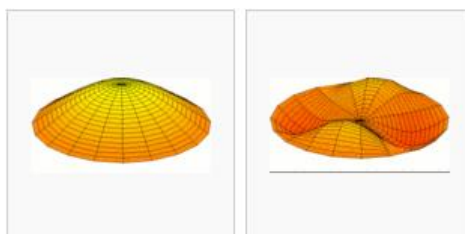


Figura 3.21: Onda bidimensional sobre um disco de maneira geral.

(Fonte: Wikipédia em agosto de 2014)

O experimento consiste em fazer uma placa vibrar quando submetida a frequências. Ao polvilhar partículas sobre a placa, estas tendem a acumular-se nos pontos nodais, produzindo assim desenhos simétricos. Percebe-se que quando maior a frequência, mais complexos são os desenhos obtidos.

<sup>6</sup>Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756 - 1827) foi um físico e músico alemão que investigou a vibração de placas e o cálculo da velocidade do som para diferentes gases. Atualmente é considerado o “pai da acústica”.

Nota-se também que uma boa execução do experimento demanda equipamentos mais potentes e de custos altos. No entanto, é possível perceber tais desenhos com facilidade utilizando-se frequências mais baixas. Ainda possibilita-se a discussão sobre o material da placa, formato, espessura e frequências a serem emitidas para cada uma das variações, visto que apenas nas frequências em que ocorre ressonância os desenhos são formados.

## Metodologia

Por ser um experimento bastante curioso, de cálculos complicados, acima do nível do Ensino Médio, foi sugerida uma forma lúdica de apresentação da prática em uma Feira de Matemática. Cabia aos estudantes construir livremente, uma placa de Chladni e, durante a feira, explicar, de maneira simples, o funcionamento, de forma que os visitantes entendessem o som como uma onda mecânica.

## Fragmentos da História

Em 1850 foi concedido um doutorado para uma tese baseada no método do teste padrão de areia de Chladni, que consiste em gerar padrões geométricos sobre uma placa que vibre sob frequências diferentes, formados por uma camada de areia. Os desenhos obtidos desta forma ficaram conhecidos como “Figuras Sonoras de Chladni”. Esse fenômeno é baseado nas ondas bidimensionais estacionárias das placas que formam nodos (regiões sem vibração). Entendido isso, se percebe como as figuras são formadas, concluindo que os grãos de areia se posicionam sobre as regiões nodais da placa.

Em 1855, Jules-Antoine Lissajous também pesquisando sobre ondas, desenvolveu um método óptico para estudar tais vibrações, baseado no trabalho de Nathaniel Bowditch de 1815. Lissajous solucionou o problema enfrentado por outros pesquisadores, associando reflexões em espelhos fixos a hastes posicionadas perpendicularmente e vibrando (Figura 3.22).

## Experimento no GeoGebra

Tratando-se de um experimento que mesmo posterior ao de Chladni possui um desenvolvimento matemático acessível aos estudantes do Ensino Médio, constrói-se um objeto de aprendizagem utilizando as figuras de Lissajous. Opta-se pelas seguintes equações para a obtenção das figuras de Lissajous:



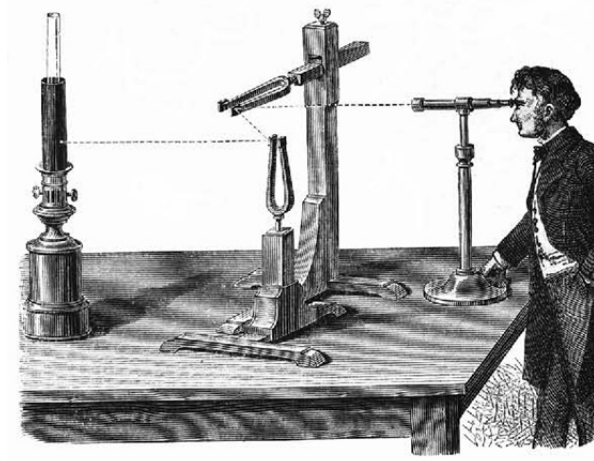


Figura 3.22: Experimento de Lissajous.  
(Fonte: Wikipédia em dezembro de 2014)

$$x = A_1 \cdot \text{sen}(f_1 t + \theta_1)$$

$$y = A_2 \cdot \text{sen}(f_2 t + \theta_2)$$

Onde  $A_1$  e  $A_2$  são as amplitudes,  $f_1$  e  $f_2$  as frequências e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  as fases iniciais.

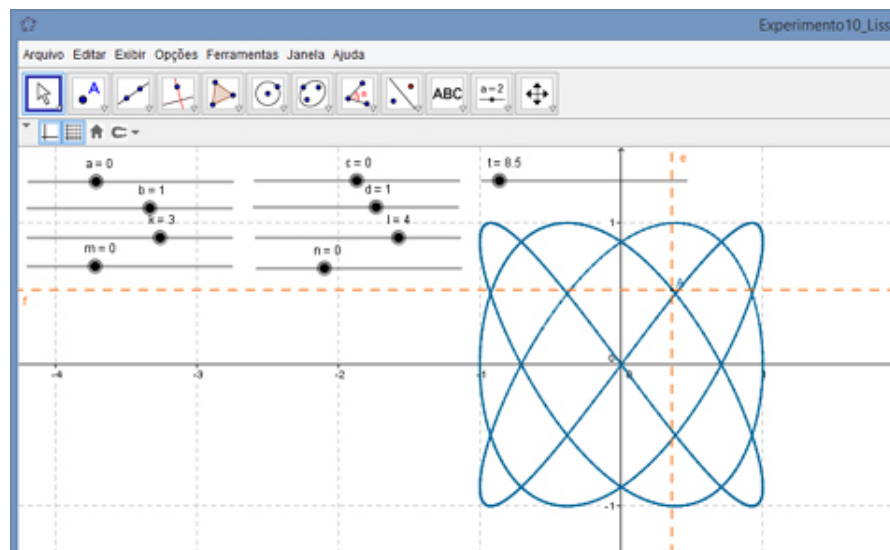


Figura 3.23: GeoGebra para o experimento de Lissajous.  
(Fonte: o autor)

# Capítulo 4

## Fechamento

Para Santana (2003), “[...] toda prática pedagógica traz embutida uma concepção do ensinar e aprender que fundamenta a ação do docente e o processo educativo”. **A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros** não foge a esta realidade, atendendo a diversas teorias da aprendizagem desde a educação vista como processo de melhoria da eficiência de *John Dewey*, passando pelos centros de interesse de *Ovide Decroly* ou *Jean Piaget* com a construção do conhecimento, dentre muitos outros educadores ou teorias.

**A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros** aplicada conjuntamente com a outras disciplinas atende ao conceito de transdisciplinaridade e demanda uma série de ações pedagógicas dada a vasta abrangência de ligações entre as matérias. Embora os experimentos possam ser realizados isoladamente, é incomparável o resultado quando há a interação entre as disciplinas. Durante o processo, muitas vezes ouviu-se dos estudantes a pergunta sobre qual disciplina um determinado palestrante estava abordando, dada a correlação entre os conteúdos.

Pode-se observar disciplina a disciplina, a utilização do tema com seus conteúdos no decorrer do processo. A título de exemplificar o ocorrido nas diversas escolas foi ponto marcante a disciplina de artes durante todo o projeto, colocando a música no seu contexto histórico e teórico; da disciplina filosofia abordou-se o homem em busca do conhecer a si e ao meio, transformando-o, com atenção especial ao filósofo e matemático Pitágoras; da disciplina português, utilizando a música como pano de fundo a interpretações de letras musicais ou muitas vezes na criação de letras musicais; nas disciplina de história, situando a música como elemento cultural e aglutinador; em física com o estudo de ondas; em língua estrangeira as músicas eram oferecidas na língua estudada; em química foram estudados os vernizes aplicados aos instrumentos e os polímeros sintéticos como o nylon utilizados nas cordas com uma variação interessante em uma das escolas para a oxidação-redução de cordas metálicas; em biologia estudou-se o aparelho auditivo e as peculiaridades necessárias ao entendimento dos experimentos. Chega-se finalmente à matemática como elemento de-

sencadeador que é, para calcular, justificar, demonstrar, construir gráficos e interpretá-los. Na utilização do raciocínio lógico dedutivo para se chegar às conclusões dos experimentos. Na compreensão dinâmica da ciência associada ao mundo da informação, produzindo o significado à aprendizagem.

Tal projeto, com a participação de professores e estudantes, vivenciando uma discussão aberta, leva à descoberta de novos conhecimentos.

Observou-se que tomar posse do conhecimento através dos experimentos levou os estudantes à participação ativa nas construções, tendo como fator comum de finalizarem os trabalhos tocando um instrumento. Ser competente no saber leva à felicidade, e aprender com felicidade significa aprender melhor.

O professor de português PP3B diz *“utilizei o repente por ser da nossa cultura e levar os alunos a uma postura crítica.”*, enquanto que um segundo professor também de português que utilizou a interpretação de letras de música, PP2S afirma que no projeto é possível *“aguçar nos alunos o gosto pela música, fazê-los manifestar os seus conhecimentos por meio da escrita e torná-los sabeis a interpretar um texto retratado em versos musicais.”* Ainda depoimento de professores:

PF2B - *“O estudo de ondas ficou mais próximo à realidade do aluno e o trabalho simultâneo com a matemática possibilitou um maior aprofundamento do conteúdo.”*

PM6V - *“Esse projeto nos trouxe mais conhecimentos de como a matemática e a música estão interligadas e podem ser trabalhadas juntas. Espero conseguirmos conscientizar a todos que as disciplinas podem trabalhar em harmonia.”*

PA1S - *“A arte é um conjunto de emoções. Resgatar a música no ensino de artes neste projeto foi gratificante.”*

Alguns depoimentos dos estudantes dizem claramente o sentimento sobre a realização dos experimentos como nas palavras de EC5A sobre o experimento de batimentos: *“... parece que tem um grilo na minha cabeça!”*. O grupo G43S ao realizar o Experimento 1 - Produção de uma nota musical foram questionados se trouxeram o arquivo do GeoGebra e responderam: *“o arquivo será construído à medida em que explicaremos o trabalho”* e assim foi feito, demonstrando uma desenvoltura na utilização do programa. Nem sempre os depoimentos atenderam ao esperado como aconteceu com ES3A que diz *“Não me senti muito confortável com o trabalho pois achei a série de Fourier complexa.”*. Editou-se alguns depoimentos de estudantes para um melhor entendimento:

ES3B - *“Com a série de Fourier, vi pela primeira vez um matemático que ao contrário de buscar métodos cada vez mais difíceis de estudar a matemática, simplificou-a, deixando uma parte bastante complicada dela, mais fácil de se visualizar, utilizando apenas operações com senóides. Fourier deixou um legado maravilhoso, que facilita a vida de leigos e de matemáticos.”*

ES3C - *“Eu gostei do trabalho, apesar da dificuldade pra compreender algumas coisas, foi produtivo e me fez entender melhor sobre o que são as cordas vibrantes, além de entender como funcionam instrumentos como o violão e a guitarra que são comuns aos nossos dias.”*

EB2A - *“Mesmo o trabalho sendo divertido e fácil de fazer, aprendi bastante pesquisando sobre o som nos tubos. Há uma relação entre o tamanho e a espessura de um tubo com a frequência.”*

ES2B - *“[...] até que foi fácil de entender. Com os professores trabalhando no mesmo tema, ficou interessante [...]”*

Elegeram-se as fotos de alguns momentos com os estudantes executando os experimentos em aulas, laboratórios, trabalhos em grupo, seminários, palestras, feiras de matemática e de ciências.

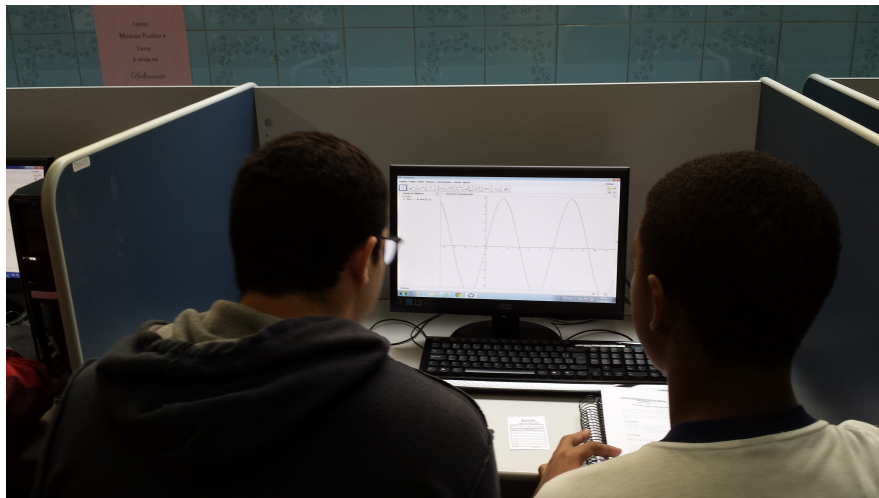


Figura 4.1: Estudantes no Laboratório de Informática.

(Fonte: o autor)



Figura 4.2: Demonstração dos limites de tempo do ouvido humano em uma feira de ciências. Experimento apresentado em um reco-reco robótico para gerar a continuidade do som.

(Fonte: o autor)



Figura 4.3: Utilização de um berimbau como monocórdio na procura das frações da corda.

(Fonte: o autor)



Figura 4.4: Três momentos dos experimentos com tubos.  
(Fonte: o autor)



Figura 4.5: Produção de um acorde no violão.  
(Fonte: o autor)



Figura 4.6: Cálculo dos harmônicos em uma feira de ciências.  
(Fonte: o autor)



Figura 4.7: Cálculo e produção dos harmônicos nas cordas do violão.  
(Fonte: o autor)



Figura 4.8: Produção do efeito Doppler através do brinquedo vai-e-vem confeccionado com barbante e garrafas PET.

(Fonte: o autor)



Figura 4.9: Tentativa de quebra da barreira sônica com uma toalha molhada.  
(Fonte: o autor)



Figura 4.10: Produção de figuras geométricas na placa de Chladni através da voz.  
(Fonte: o autor)

Nem sempre se buscou uma explicação racional, incrementada de fórmulas matemáticas, mas sim, aproveitar o fascínio e o mistério do som e a configuração das formas.

Diversas pesquisas foram realizadas pelos estudantes e diversas “engenhocas” construídas para realizar os experimentos. Algumas destas construções funcionaram relativamente bem, principalmente para as baixas frequências. No entanto há a necessidade de mais investimentos à medida em que se exige um maior controle.

Momento em que foi encerrado o último experimento no mesmo contexto em que o trabalho foi iniciado: aguçando a curiosidade, incentivando a pesquisa a fim de tornar o estudante dono do seu conhecimento, buscando-o quando se faz necessário.

Se a observação pura, como nesses experimentos, é deixada trabalhar, as leis dos fenômenos podem nascer do espírito inquiridor, uma vez que terá liberdade para tal. Deslumbrar e criar admiração em suas almas deve fazer parte do contexto educacional para que, mais tarde, possam descobrir por si mesmos a lógica que há por trás de tudo.

Fecha-se, então, este ciclo com um pouco de magia e deixa-se como alvo de pesquisa algo sutil como o som, ordenando e estruturando uma substância, uma hipótese real de trabalho que move o estudo de forças como a criadora da vida e do universo.



# Capítulo 5

## Conclusão

Chega-se ao fim. Não no que representa a palavra fim: encerrar, mas como um texto que acaba de ser escrito a fim de propor um ensino de matemática mais dinâmico, voltado à realidade do estudante, através da **Matemática de Alguns Experimentos Sonoros**.

Os experimentos apresentados atendem a diversos assuntos do estudo da matemática, com ênfase na trigonometria, além de possuírem tópicos desde noções de progressões até séries, como a de Fourier, passando por logaritmos, sem contudo se perder de vista que a proposta atende ao ensino da matemática do Ensino Médio.

Trazer para a vivência dos estudantes conceitos que, muitas vezes, não podem ser explicados por palavras, tornam-se um desafio pela dificuldade de descrição e mais difíceis ainda de serem compreendidos. Tais conceitos ficam incomparavelmente mais fáceis de serem entendidos quando vivenciados através de experimentos, fomentando uma participação com um espírito investigativo.

A dificuldade de elaborar os experimentos consistiu em torná-los agradáveis, interessantes e possíveis de serem reproduzidos por outros professores e estudantes. Daí, a procura constante de materiais simples e de fácil acesso. Toma-se o cuidado de em cada experimento se colocar um pequeno subsídio teórico, mas também de não limitar o professor, deixando-o livre para novas pesquisas e variações das metodologias. Assim, não foi apresentando um material fechado, mas sujeito às alterações na adequação às diversas propostas. Sabe-se que para mudar são necessários determinação e empenho, e alteração nas formas de educação para, finalmente, transformar o ser.

É relevante a parceria com outras disciplinas como artes, física ou biologia, não esquecendo das ligações com as matérias português, história ou geografia, muitas vezes como multidisciplinaridade, outras interdisciplinarmente ou ainda transdisciplinarmente. Este trabalho possui várias possibilidades, que apesar das diversas apresentadas, abre-se caminho para novos experimentos e novas abordagens a serem explorados.

A utilização do software GeoGebra, introduz um novo conceito à investigação, motivando e gerando curiosidade. Permite-se, então, através do GeoGebra um estudo mais atraente e interativo, muitas vezes com progressos próprios, proporcionando o desenvolvimento da autonomia e de diversas habilidades e competências.

Adquirir conhecimentos básicos de teoria musical deve fazer parte do processo educacional, pois, ao mesmo tempo em que a música tem a capacidade de sensibilizar, pode facilitar o aprendizado em outras áreas de conhecimento.

Tem-se consciência de que muitas fórmulas irão se perder na lembrança dos estudantes, ao passar dos anos, pelo desuso ou pela opção de área de estudo. Mas, com toda certeza, os experimentos marcantes, pesquisados por eles e utilizados no conceito de aprender a aprender, ficarão na memória.

O aprendizado é processual e é preciso gerenciar as etapas, respeitando o tempo do estudante, com consciência de que cada um tem sua própria maneira de aprender. Acreditar na capacidade, gerar oportunidades e subsidiar invenções é surpreendente quando se deixa o jovem livre para pesquisar.

Enfim, fica claro que educação não se faz apenas com conhecimentos e com livros, muito dela é feita com o coração.

# Referências Bibliográficas

ABDOUNUR, Oscar João. *Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados*. 2ª ed. Escritura Editora, 2002. Material em Meio Eletrônico disponível em [http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus\\_99.pdf](http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf). Acesso em janeiro/2014.

ALVES, Rubem. *Entre a ciência e a sapiência: o dilema da educação*. 17ª Edição. Edições Loyola, São Paulo, 2007. ISBN: 978-85-15-01900-7.

ASSIS, Cibelle de Fátima Castro de. *GeoGebra: Instrumento Pedagógico para o Desenvolvimento de Competências e Habilidades em Matemática*. Actos de la conferencia latino-americana de GeoGebra - UFPB - 2012

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6023: referências bibliográficas. Rio de Janeiro, 2002.

..... NBR 10520: informação e documentação: apresentação de citações em documentos. Rio de Janeiro 2002.

..... NBR 14724: informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, 2002.

..... NBR 6024: informação e documentação: apresentação numeração progressiva das seções de um documento escrito. Rio de Janeiro, 2003.

BARROS, Armando de Carvalho. *A Música*. CEA–Cia. Editora Americana. 1973.

BRASIL. 1996. Lei n.º 9.394/96 – *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*.

..... 2000. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio: Matemática*. Brasília: MEC/SEB.

..... 2002. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais– PCN+*; Brasília, MEC/SEB.

..... . BRASÍLIA. Lei nº 11769 de 18 de Agosto de 2008. Regula o ensino da música nas escolas de educação básica em todo o Brasil.

CAMARGOS, C. B. R. *Música e Matemática: A harmonia dos números revelada em uma estratégia de Modelagem*. 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG.

\_\_\_\_\_ et al. *Matemática e música*. In: III Encontro mineiro de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG: UFMG, Anais do III EMEM. 1 CD-ROM. 2003

CARCASSI, Mateo. *Método de Violão opus 59*. 41-M Irmãos Vitale Editores Brasil

CINTED/UFRGS. *Novas Tecnologias na Educação, V. 7, Nº 1*, Julho, 2009. Disponível em: <[www.cinted.ufrgs.br/renote/jul2009/artigos/5b.liane.pdf](http://www.cinted.ufrgs.br/renote/jul2009/artigos/5b.liane.pdf)>. Acesso em: em outubro de 2012.

DUVAL, R. *Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In MACHADO, S. D. A. (org) *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, 2003, p. 11- Campinas: Papirus, 2003, p. 11- 33.

FONTEERRADA, Maria Trench de Oliveira. *De tramas e Fios: um ensaio sobre música e educação*, 2ª ed.. São Paulo: Editora UNESP; Rio de Janeiro: FUNARTE, 2008.

GEOGEBRA ONLINE. 2014. Disponível em: <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)>.

GOOS, M. 2011. *Technology Integration in Secondary Mathematics: Enhancing the Professionalisation of Prospective Teachers*. In O. Zaslavsky e P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for Teaching Secondary Mathematics: Tasks to Enhance Prospective and Practicing Teacher Learning*.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth. 2013. *Física 2*. 5ª edição, Editora LTC.

LABORDE, C. 2008. *Multiple dimension involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry*. In: A. Canavarro, D. Moreira e M. Rocha (Orgs), *Tecnologias e Educação Matemática*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

LIMA, Elon Lages. 2011. *Curso de Análise vol. 1*, 13ª Ed. IMPA,

LOUREIRO, A. M. A. 2007. *O Ensino de Música na Escola Fundamental*. Ed.Papirus.

MORRISON, A. J. 2000. *Developing a global leadership model*. Human Resource Management,

NUSSENZVEIG, H. M.. *Curso de Física Básica, Volume 2*. São Paulo: Blucher, 2002. ISBN 978-85-212-0299-8

OLIVEIRA, Maria Marly. *Como Fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses*. 3ª edição, Ed. Elsevier.

PRIOLI, Maria Luíza de Mattos. 1968. *Princípios Básicos da Música para a Juventude*. 8ª ed. Rio de Janeiro Editora Casa Oliveira de Músicas S.A.

RATTON, Miguel. *A Relação Harmoniosa entre Sons e Números*. [2002]. Disponível em: <[www.tvebrasil.com.br](http://www.tvebrasil.com.br)>. Acesso em: setembro de 2014

SANTANA, Maria do Rosário P. 2003. *Em busca de novas possibilidades pedagógicas: a introdução da robótica no currículo escolar*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Bahia, Salvador - BA.

TAROUCO, L. M. R.; FABRE, M. C. J. M.;GRANDO, A. R.S.; KONRATH, M. L. P. 2004. *Objetos de Aprendizagem para M-Learning*. Florianópolis: SUCESU - Congresso Nacional de Tecnologia da Informação e Comunicação.

..... et al. *Gestão colaborativa de conteúdo educacional*. RENOTE.

THE BIGBANG THEORY, Chuck Lorre e Bill Prady, produção Warner Bros. Television, seriado 1ª temporada, episódio 6.

VYGOTSKY, L. S. *A Formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

..... *Problems of general psychology*. In: RIEBER, R. W.; CARTON, A. S. The Collected works of L. S. Vygotsky. New York: Plenum, 1987. v.1.

..... *Psicologia pedagógica*. Porto Alegre: Artmed, 2003

..... *Problems of general psychology*. In: RIEBER, R. W.; CARTON, A. S. The Collected works of L. S. Vygotsky. New York: Plenum, 1987. v.1.

WILEY, D. A. *Learning object design and sequencing theory*. Unpublished doctoral dissertation, Brigham Young University. 2000. Disponível em: <<http://www.reusability.org/read/chapters/wiley.doc>>. Acesso em setembro de 2014.

WISNIK, José Miguel. *O Som e o Sentido*. São Paulo. Cia das Letras, 1999. ISBN 85-7164-042-4

WIKIPÉDIA – Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico buscado em páginas diversas disponível em <<http://pt.wikipedia.org>>. Acesso de janeiro a novembro de 2014