Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

# O Ensino da Matemática Financeira Utilizando a Calculadora HP 12C

**por**

**Mayana Cybele Dantas de Oliveira**

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

# O Ensino da Matemática Financeira Utilizando a Calculadora HP 12C

**por**

**Mayana Cybele Dantas de Oliveira**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

**Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza** - UFPB (Orientador)

**Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas** - UFPB

**Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos** - UNIPÊ

**Agosto/2014**

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde para cumprir mais uma etapa na minha carreira profissional;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza, pela atenção e confiança neste momento tão importante da minha vida;

À minha mãe, Sônia, pelo incentivo e por ter sido meu porto seguro;

Ao meu marido, Marx, e minhas filhas, Maryêva e Maraya, os maiores presentes que Deus me deu;

À coordenação e professores do mestrado profissional, pela dedicação e sabedoria compartilhada;

À CAPES e a UFPB, pelos apoios financeiros, acadêmico e estudantil;

À todos os colegas da turma, PROFMAT 2012, pela amizade e companheirismo durante a realização do curso.

# Dedicatória

*A Deus e a minha família: meu esposo, Marx, minhas filhas, Maryêva e Maraya, meus pais, Sônia e Oscar e irmão, Danilo.*

# Resumo

Este trabalho de pesquisa tem como escopo o ensino da Matemática Financeira, com o auxílio de uma ferramenta: a calculadora financeira HP 12C, preparando cidadãos capazes de administrar suas próprias finanças e para o mercado de trabalho. Apresenta conceitos preliminares ao tema, seguido de exemplos contextualizados, apontando os principais fatores, que facilitam a compreensão em cada conteúdo. Sendo tratado através de aplicações práticas, que facilita a aprendizagem, motivação e interesse do aluno.

**Palavras-chaves:** Matemática Financeira; Calculadora Financeira HP 12C; Ensino Básico.

# Abstract

This research has as object of study the teaching of Financial Mathematics, with the aid of a tool: the Financial Calculator HP 12C, preparing citizens able to manage their own budgets and the labor market. Preliminary concepts concerning the theme are presented, followed by examples in context, pointing out the main factors that facilitate the understanding of each content. Being approached through practical applications, which makes learning easier, and increases motivation and students' interest.

**Keywords:** Financial Mathematics; HP 12C Financial Calculator; Basic teaching.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

Este trabalho trata do ensino da Matemática Financeira, utilizando a calculadora financeira **HP 12C**, onde vamos estudar a variação do valor do dinheiro no tempo, nas aplicações de dinheiro e nos pagamentos de empréstimos. Tal variação ocorre em função dos efeitos da inflação sobre o poder de compra da moeda ou pela incidência da taxa de juros sobre um determinado valor monetário. Fornecendo instrumentos para o estudo e a avaliação das formas de aplicação de dinheiro, bem como de pagamento de empréstimo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's, para matemática propõem investigar, compreender e contextualizar problemas, levantar hipóteses, relacionar a disciplina a fatos conhecidos, desenvolver e utilizar a matemática na interpretação e intervenção da realidade e aplicar em situações reais.

BRASIL (2006, p.71), quando fala da Matemática Financeira foca principalmente em:

> "O trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas as informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários."

O objetivo deste trabalho é produzir um material didático, que possa ser utilizado por professores e alunos do Ensino Básico, servindo para o estudo da Matemática Financeira com seus recursos tecnológicos.

As inovações tecnológicas servem para facilitar a vida do homem, e a calculadora financeira **HP 12C** permite uma entrada mais rápida de dados e a execução mais eficiente dos cálculos, trazendo comodidade ao utilizarmos funções pré-estabelecidas ao invés de fórmulas trabalhosas para resolver problemas financeiros.

Atualmente os professores de Matemática encontram grandes dificuldades com o desinteresse e as frequentes perguntas dos alunos: "Para que serve isso"?, "Onde vou utilizar isso na minha vida?". Segundo SANTOS (2012,p.4):

> "É sabido de todos que a Matemática originou e se desenvolveu em função das necessidades enfrentadas pelo homem nas suas relações sociais e no enfrentamento das dificuldades impostas pela natureza. Apesar disso, devido às diversas transformações ocorridas pelas políticas educacionais, o que se vê hoje em dia é um ensino da Matemática pouco contextualizada, contribuindo para a falta de estímulo dos nossos alunos."

A Matemática Financeira pode ser utilizada com mais frequência no Ensino Básico, às questões são contextualizadas, ajudando na formação de um indivíduo crítico e na tomada de decisões na sua vida. Vivemos num país onde as pessoas cada vez mais estão se endividando e com isso cresce a oferta de créditos.

A intenção desse trabalho é facilitar a decisão do indivíduo nas atividades financeiras. Em cada capítulo, mostramos os conteúdos do Ensino Básico trabalhados, como: Potenciação, Radiciação, Razão, Proporção, Porcentagem, Função do 1º grau, Exponencial, Logarítmica, Progressão Aritmética (P.A) e Geométrica (P.G), entre outros, podem ser aplicados. A seguir descrevemos como está dividido o trabalho.

No Capítulo 1, chamado de Capitalização Simples e Composta, apresentamos um breve conceito de Matemática Financeira, e dos elementos utilizados em juros simples e compostos. Realizando um estudo com conceitos e demonstrações das fórmulas de juros simples e composto, buscando o entendimento através de exemplos. Inclui uma breve história da calculadora financeira **HP 12C**, e como utilizá-la em juros compostos.

No Capítulo 2, intitulado de Séries de Pagamentos, trabalhamos com séries postecipadas, antecipadas e diferidas, onde são analisados dois processos de investimento, Valor Presente e Valor Futuro, de forma conceitual, mostrando exemplos também resolvidos na calculadora financeira **HP 12C**.

Já o Capítulo 3, Sistemas de Amortização, trataremos dos sistemas de amortização mais utilizados no mercado, como sistema francês, constante, misto e americano, falando dos conceitos e exemplos, construindo planilhas financeiras e utilizando a calculadora financeira **HP 12C**.

# Capítulo 1

# Capitalização Simples e Composta

Segundo JUER (2009, p.9), quando fazemos um empréstimo ou investimento no presente, o seu valor é aumentado no futuro. E quantias disponíveis no futuro, tem seu valor reduzido no presente.

Você prefere receber R$ 10.000,00 hoje ou R$15.000,00, daqui a dois anos? Provavelmente a sua resposta seria hoje, mas entre R$ 10.000,00 hoje e R$ 15.000,00 daqui a dois anos, a resposta mais coerente é: depende, pois vai **depender** das alternativas financeiras, no momento da decisão.

## 1.1 O Capital e os Juros

Capital, de acordo com HAZZAN e POMPEO (2007, p.1), é qualquer valor monetário que uma pessoa (física ou jurídica) empresta para outra durante certo tempo. Como o emprestador não tem mais posse do valor emprestado, e ainda em função do risco de não pagamento e da perda de poder aquisitivo do dinheiro pela inflação, surge o conceito de Juros, que é definido como o custo do empréstimo (para o tomador) ou a remuneração pelo uso do capital (emprestador).

Chamamos de taxa de juros o valor dos juros em certa unidade de tempo, expresso como uma porcentagem do capital.

**Exemplo 1.1.1** *Se um capital de R$ 1.000,00 é emprestado por um ano à taxa de 10% a.a.(10% ao ano) o juros será igual a 10% de R$ 1.000,00, e para resolver, multiplicamos 1.000 por 0,1, que é a forma decimal de 10% (10% = $\frac{10}{100}$ = 0,1), logo os juros cobrado é de R$ 100,00.*

Denotamos de **C** o capital, **M** o montante, **J** os juros, **i** é a taxa (do inglês, *interest*, que significa juros) e **n** o período de tempo. O montante é o valor do capital mais os juros. Então temos:

$$J = C \times i,$$

e

$$M = C + J.$$

## 1.2 Juros Simples

**Definição 1.2.1** *Juros simples é quando a taxa de juros incide sempre em cima do capital inicial.*

São raras as operações financeiras e comerciais que utilizam esse tipo de capitalização.

**Exemplo 1.2.2** *Um capital de R$ 10.000,00, foi aplicado durante três meses a uma taxa de 1% a.m.(ao mês), em regime de juros simples. Qual o montante?*

Primeiro vamos transformar a taxa percentual em decimal, ou seja:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$
$$J = C \times i.$$

Assim temos:

1º mês:

$$J_1 = 10.000 \times 0,01 = 100,00.$$

2º mês:

$$J_2 = 10.000 \times 0,01 = 100,00.$$

3º mês:

$$J_3 = 10.000 \times 0,01 = 100,00.$$

Como o regime de capitalização é simples o juros é aplicado sempre em relação ao capital, o juros referente a esse período de 3 meses será:

$$J_1 + J_2 + J_3 = 100,00 + 100,00 + 100,00 = 300,00.$$

Logo o montante, após três meses é:

$$M = C + J.$$

$$M = 10.000 + 300 = 10.300,00.$$

Usando o raciocínio acima deduzimos uma fórmula para o cálculo de juros simples:

- Juros após 1 período: $J_1 = C \times i$;
- Juros após 2 períodos: $J_2 = C \times i + C \times i = C \times i \times 2$;
- Juros após 3 períodos: $J_3 = C \times i + C \times i + C \times i = C \times i \times 3$;
  Utilizando um argumento de induçao, concluimos que:
- Juros após $n$ período: $J_n = C \times i + C \times i + C \times i + ... + C \times i$.

$$J_n = C \times i \times n. \tag{1.1}$$

**Observação 1** *A taxa **i** e o período **n** tem que está na mesma unidade de tempo, por exemplo, se a taxa **i** for ao ano, **n** deve está em ano.*

**Exemplo 1.2.3** *Um capital de R\$ 2.000,00, aplicado a uma taxa de juros simples de 6% a.m. (ao mês), por um período de 10 meses, vai render quanto de juros?*

Identificando os dados do problema:

O capital é $C = 2.000$.

A taxa de juros em porcentagem é $i = 6\%\ a.m.$

Na forma decimal fica $i = \frac{6}{100} = 0,06$, vamos trabalhar com a taxa de juros na forma decimal.

O período de tempo é $n = 10$ meses.

Então vamos encontrar os juros $J$.

Utilizando a Fórmula, 1.1 e substituindo os dados, obtemos:

$$J = 2.000 \times 0,06 \times 10 = 1.200.$$

Logo, vai render um juros de R$ 1.200,00.

Sabemos que $M = C + J$, assim temos $J =$ M - C, substituindo na Fórmula 1.1, temos:

$$M - C = C \times i \times n,$$

logo,

$$M = C + C \times i \times n.$$

Colocando o C em evidência, obtemos:

$$M = C(1 + in). \tag{1.2}$$

**Observação 2** *Destacamos que alguns conteúdos do Ensino Básico são frequentimente utilizados como:*

- *Porcentagem: para encontrar os juros, calculamos o percentual em cima do capital, a taxa de juros é dada em porcentagem, e temos que transformar em decimal;*

- *Progressão Aritmética (P.A): os juros são calculados sempre em cima do capital inicial, que são iguais em todos os períodos de tempo, formando assim uma P.A, onde a razão são os juros, o capital inicial é o primeiro termo e o período de tempo o número de termos da P.A;*

- *Fatoração (colocando o fator comum em evidência): para achar a fórmula do montante, colocamos o capital inicial em evidência;*

- *Equação do 1º grau: para resolver os problemas, resolvemos uma equação do 1º grau.*

**Definição 1.2.4** *Dizemos que duas taxas são equivalentes em juros simples quando, aplicadas em um mesmo capital e durante um mesmo prazo, derem juros iguais.*

**Exemplo 1.2.5** *Em juros simples, qual a taxa anual equivalente a 1% a.m?*

$i = 1\% \times 12 = 12\ \%\ a.a.$ (ao ano).

**Exemplo 1.2.6** *Em juros simples, qual a taxa mensal equivalente a 9% a.t. (ao trimestre)?*

$i = \frac{9}{3} = 3\ \% a.m.$

**Exemplo 1.2.7** *Em juros simples, qual a taxa mensal equivalente a 4% a.b. (ao bimestre) e 12% a.s. (ao semestre)?*

$i = \frac{4}{2} = 2\%\ a.m.$ e $i = \frac{12}{6} = 2\%\ a.m.$

**Observação 3** *A Matemática Financeira pode ser muito utilizada no Ensino Básico, pois envolve questões contextualizadas, aplicadas e vivenciadas pelo aluno, sendo muito importante para a formação do indivíduo, ajudando na tomada de decisão para a sua vida.*

**Exemplo 1.2.8** *Durante 5 meses um capital de R$ 4.500,00, foi aplicado a um taxa de juros simples de 4% a.m., determine o valor do montante resgatado?*

Identificando os dados do problema:

Queremos encontrar o montante $M$.

O período de tempo é $n = 5$ meses.

O capital é $C = 4.500$.

A taxa de juros percentual é $i = 4\%\ a.m.$

Na forma decimal os juros ficam $i = \frac{4}{100} = 0,04$.

Utilizando a Fórmula 1.2, e substituindo os dados, obtemos,

$$M = 4.500(1 + 0,04 \times 5);$$

resolvendo a equação do 1º grau;

$$M = 4.500(1 + 0,2)$$

$$M = 4.500 \times 1,2,$$

obtemos;

$$M = 5.400,00.$$

Logo, o montante resgatado foi de R$ 5.400,00.

**Exemplo 1.2.9** *Qual o valor do resgate de uma aplicação de R$ 40.000,00 pelo prazo de 2 anos e 6 meses a taxa de juros simples de 12% a.a.?*

Identificando os dados do problema:

Queremos encontrar o montante $M$.

O capital é $C = 40.000,00$.

O período de tempo é $n = 2\ anos\ e\ 6\ meses = 2,5\ anos$ (Como a taxa de juros está ao ano, deixamos o período também em anos).

A taxa de juros percentual $i = 12\%$ $a.a.$

Na forma decimal fica $i = \frac{12}{100} = 0,12$.

Utilizando a Fórmula 1.2, e substituindo os dados, obtemos:

$$M = 40.000(1 + 0,12 \times 2,5),$$

resolvendo a equação do 1º grau;

$$M = 40.000(1 + 0,3)$$

$$M = 40.000 \times 1,3 \quad ,$$

obtemos;

$$M = 52.000,00.$$

Logo, o valor do resgate foi de R$ 52.000,00.

**Exemplo 1.2.10** *Emprestei R$ 100.000,00 e recebi R$ 130.000,00 no final de 8 meses, determine a taxa de juros simples referente a esse empréstimo:*

Identificando os dados do problema:

O capital é $C = 100.000,00$.

O montante é $M = 130.000,00$.

O período de tempo é $n = 8$ meses.

Queremos encontrar a taxa de juros mensal $i$.

Utilizando a Fórmula 1.2, e substituindo os dados, obtemos:

$$130.000 = 100.000(1 + 8i),$$

resolvendo a equação do 1º grau;

$$\frac{130.000}{100.000} = 1 + 8i$$

$$1,3 = 1 + 8i$$

$$1,3 - 1 = 8i$$

$$8i = 0,3$$

$$i = \frac{0,3}{8}$$

$$i = 0,0375 \times 100 \quad ,$$

obtemos;

$$i = 3,65\% \; a.m.$$

Logo, a taxa de juros é de 3,65% a.m.

**Exemplo 1.2.11** *Um capital de R$ 7.500,00 foi aplicado a uma taxa de juros simples de 20% a.a., em quanto tempo será resgatado R$ 9.000,00?*

Identificando os dados do problema:

O montante é $M = 9.000$.

O capital é $C = 7.500$.

A taxa de juros percentual é $i = 20\% \; a.a.$

Na forma decimal fica $i = \frac{20}{100} = 0,2$.

Queremos encontrar o período de tempo $n$.

Utilizando a Fórmula 1.2, e substituindo os dados, obtemos:

$$9.000 \;\; = \;\; 7.500(1 + 0,2n),$$

resolvendo a equação do 1º grau;

$$\frac{9.000}{7.500} = 1 + 0,2n$$

$$1,2 = 1 + 0,2n$$

$$0,2n = 1,2 - 1$$

$$0,2n = 0,2$$

$$n = \frac{0,2}{0,2} \quad ,$$

obtemos;

$$n = 1\,ano.$$

Logo, em **um ano** o valor de R$ 9.000,00 é resgatado.

## 1.3 Juros Compostos

**Definição 1.3.1** *Juros Compostos é quando os juros incidem sobre o montante do período anterior, passando o novo montante a produzir juros no período seguinte.*

**Exemplo 1.3.2** *Um capital de R$ 10.000,00, foi aplicado durante três meses a uma taxa de 1% a.m., em regime de juros compostos.*

Identificando os dados do problema:
O capital é $C = 10.000$.
A taxa de juros percentual é $i = 1\%\ a.m.$
$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$.
Vimos que: $J = C \times i$, então:

$$J_1 = 10.000 \times 0,01 = 100,00 \quad ,$$

logo;

- No 1º mês o montante é:

  $M_1 = C + J = 10.000 + 100 = 10.100.$

- No 2º mês, o juros é calculado em cima do montante anterior:

  $M_2 = M_1 + M_1 \times i = 10.100 + 10.100 \times 0,01 = 10.100 + 101 = 10.201.$

- No 3º mês, o juros é calculado em cima do montante anterior:

  $M_3 = M_2 + M_2 \times i = 10.201 + 10.201 \times 0,01 = 10.201 + 102,01 = 10.303,01.$

Usando este argumento em combinação com o princípio de indução finita, concluimos que:

- Montante após o 1º período:

  $M_1 = C + Ci = C(1 + i).$

- Montante após o 2º período:

  $M_2 = M_1 + M_1 \times i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2.$

- Montante após o 3º período:

  $M_3 = M_2 + M_2 \times i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3.$

- Montante após $n$ períodos:

$$M = C(1 + i)^n.$$

Podemos concluir que para achar o montante em juros compostos, utilizamos a Fórmula:

$$M_n = C(1 + i)^n \tag{1.3}$$

**Observação 4** *Em Juros Compostos também utilizamos vários contéudos do Ensino Básico, para encontrarmos o período de tempo, utilizamos função logarítmica, para encontrar a taxa de juros, utilizamos radiciação e o processo de crescimento do capital inicial ao final de cada período de tempo, é uma Progressão Geométrica (P.G) de razão (1 + i).*

### 1.3.1 Utilizando a calculadora financeira HP 12C

A calculadora financeira **HP 12C** foi desenvolvida pelo matemático polonês Jan Lukasiewicz. É caracterizada por trabalhar com lógica **RPN** (do inglês *Reverse Polish Notation* , ou notação polonesa reversa), permitindo uma entrada mais rápida de dados e a execução mais eficiente dos cálculos. Esse método se adequou bem ao uso na calculadora, uma vez que dispensa a necessidade de parênteses. Possui mais de 120 funções específicas, que permitem trabalhar com 20 diferentes fluxos de caixa, juros compostos, amortização (que vamos estudar no Capítulo 3).

### 1.3.2 Apresentando a calculadora financeira HP 12C


Figura 1.1: Calculadora HP 12C

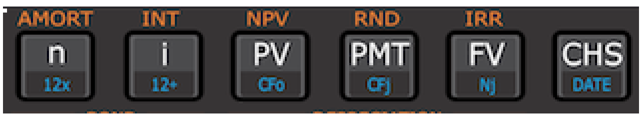



Figura 1.2: Funções Financeiras da Calculadora HP 12C

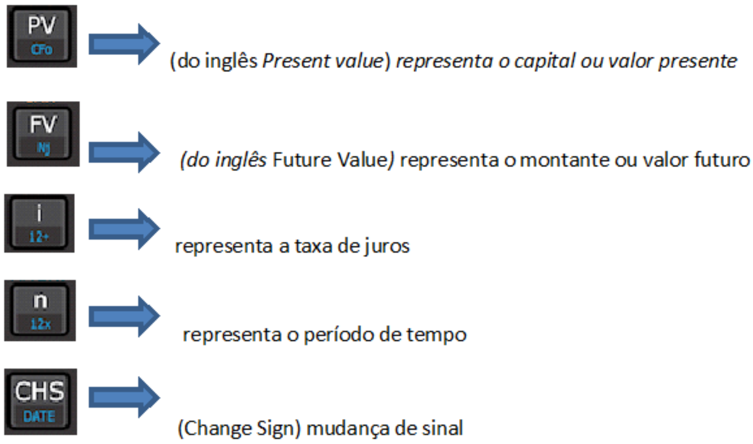



Figura 1.3: Identificação das Funções Financeiras na Calculadora HP 12C

Para apagar as funções financeiras acionamos as teclas:


Figura 1.4: Como Limpar o Visor da Calculadora

**Observação 5** *O fluxo de caixa é um objeto matemático, que pode ser usado em transações financeiras, mostrando graficamente em uma linha horizontal o tempo. As entradas ou recebimentos são representados por setas verticais para baixo e as saídas ou pagamentos são representados por setas para cima.*

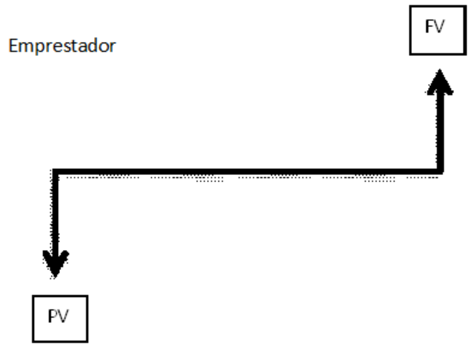



Figura 1.5: Fluxo de Caixa no Ponto de Vista do Emprestador

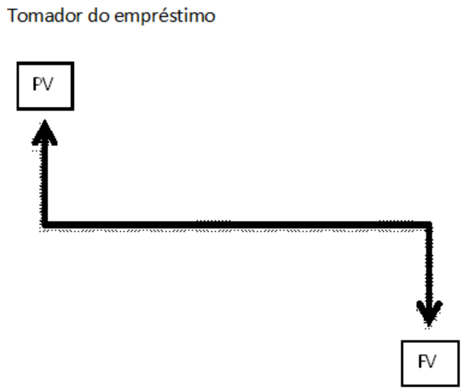



Figura 1.6: Fluxo de Caixa no Ponto de Vista do Tomador do Empréstimo

Como a Calculadora Financeira HP 12C trabalha com a ideia do fluxo de caixa, sempre quando inserimos o valor presente ou o valor futuro na calculadora tem que mudar o sinal, pois no fluxo de caixa quando a seta do valor presente está para baixo, a do valor futuro está para cima e vice versa, essas setas funcionam como o sinal negativo ou positivo. Se o sinal não for mudado, o resultado sairá no visor da calculadora negativo.

**Exemplo 1.3.3** *Um capital de R$ 5.000,00 foi aplicado a juros compostos durante 6 meses, à taxa de 2% a.m.. Qual o montante?*

Identificando os dados do problema:

O capital é $C = 5.000$.

O período de tempo é $n = 6$ meses.

A taxa de juros percentual $i = 2\%\ a.m.$

Na forma decimal $i = \frac{2}{100} = 0,02$.

O montante é $M$.

Utilizando a Fórmula 1.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$M \quad = \quad 5.000(1 + 0,02)^6 \quad ,$$

resolvendo a equação exponencial;

$$M = 5.000(1,02)^6 \quad ,$$

obtemos;

$$M = 5.630,81.$$

Vamos inserir primeiro os dados informados no problema e sempre colocamos por último o dado a ser encontrado.

Na calculadora financeira:

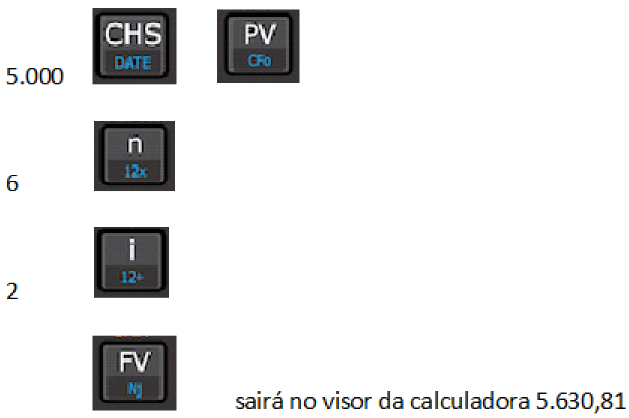



Figura 1.7: Na Calculadora Financeira 1

O montante foi de R$ 5.630,81.

**Exemplo 1.3.4** *Qual o capital, que aplicado a juros compostos à taxa de 3% a.m., produz um montante de R$ 30.000,00 após um ano?*

Identificando os dados do problema:

Queremos encontrar o capital $C$.

A taxa de juros percentual $i = 3\%$ $a.m.$

Na forma decimal $i = \frac{3}{100} = 0,03$.

O montante é $M = 30.000$.

O período de tempo $n = 1$ ano $= 12$ meses, pois a taxa de juros está ao mês, transformamos 1 ano em meses, obtendo 12 meses.

Utilizando a Fórmula 1.3, e substituindo os dados, obtemos;

$$30.000 = C(1 + 0,03)^{12} \quad ,$$

resolvendo a equação exponencial;

$$30.000 = C(1,03)^{12}$$

$$30.000 = C \times 1,4258$$

Assim,

$$C = \frac{30.000}{1,4258} \quad ,$$

obtemos;

$$C = 21.041,40.$$

Na calculadora financeira:

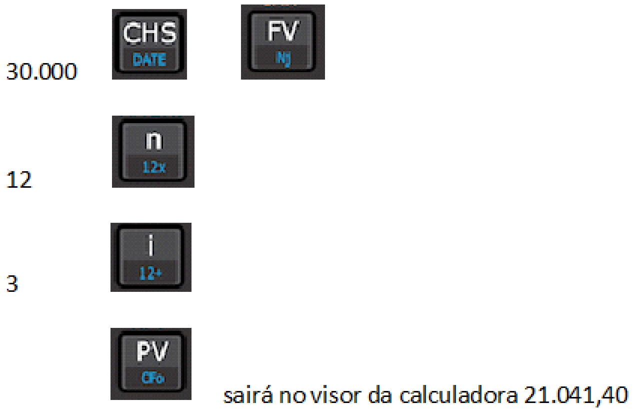



Figura 1.8: Na Calculadora Financeira 2

O capital é de R$ 21.041,40.

**Exemplo 1.3.5** *Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado a juros compostos durante quatro meses, produzindo um montante de R$ 12.000,00. Qual a taxa mensal de juros?*

Identificando os dados do problema:

O capital é $C = 10.000$.

O período de tempo é $n = 4$.

O montante é $M = 12.000$.

Queremos encontrar a taxa de juros $i$.

Utilizando a Fórmula 1.3, substituindo os dados, obtemos:

$$12.000 \quad = \quad 10.000(1+i)^4 \quad ,$$

resolvendo a equação exponencial;

$$\frac{12.000}{10.000} = (1+i)^4$$

$$1,2 = (1+i)^4$$

$$\sqrt[4]{1,2} = \sqrt[4]{(1+i)^4}$$

$$1,0466 = 1 + i$$

$$i = 1,0466 - 1$$

$$i = 0,0466 \times 100$$

$$i = 4,66\%\ a.m.$$

Na calculadora financeira:


Figura 1.9: Na Calculadora Financeira 3

A taxa de juros é 4,66% *a.m.*

**Exemplo 1.3.6** *Durante quanto tempo um capital de R\$ 3.500,00 deve ser aplicado a juros compostos à taxa de 12% a.a. para resultar em um montante de R\$ 7.000,00?*

Identificando os dados do problema:

Queremos encontrar o período de tempo $n$.

O capital é $C = 3.500$.

A taxa de juros percentual $i = 12\%\ a.a.$

Na forma decimal $i = \frac{12}{100} = 0,12$.

O montante é $M = 7.000,00$.

Utilizando a Fórmula 1.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$7.000 \quad = \quad 3.500(1+0,12)^n \quad ,$$

resolvendo a equação exponencial;

$$\frac{7.000}{3.500} = (1,12)^n$$

$$2 = (1,12)^n$$

$$log2 = log(1,12)^n \quad ,$$

utilizando a propriedade do logarítmo da potencia;

$$log2 = n \times log(1,12)$$

$$\frac{log2}{log1,12} = n \quad ,$$

obtemos:

$$n = 6,17\, anos.$$

Durante aproximadamente 6,17 anos.

Na calculadora financeira:

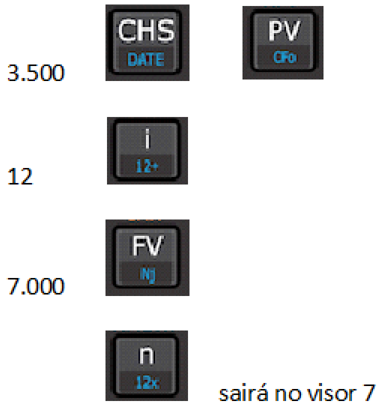



Figura 1.10: Na Calculadora Financeira 4

**Observação 6** *Na calculadora financeira HP 12C, a valor de* ***n*** *é arredondado para mais quando utilizamos as funções financeiras. Recomenda-se usar a fórmula, quando não se sabe se* ***n*** *é inferior ou não.*

## 1.4 Taxas Equivalentes

**Definição 1.4.1** *Taxas Equivalentes são taxas que quando aplicadas ao mesmo capital, num mesmo intervalo de tempo, produzem montantes iguais.*

Para converter a taxa de juros:

- Em Juros Compostos, como não é uma função linear, é um pouco mais complexo. Percebam que temos que achar uma taxa em outra unidade, mas o montante no mesmo intervalo de tempo tem que ser igual, logo:

$$C(1+i_1)^{n_1} = C(1+i_2)^{n_2},$$

assim,

$$(1+i_1)^{n_1} = (1+i_2)^{n_2},$$

donde obtemos,

$$\sqrt[n_1]{(1+i_1)^{n_1}} = \sqrt[n_1]{(1+i_2)^{n_2}},$$

ou seja,

$$(1+i_1) = (1+i_2)^{\frac{n_2}{n_1}},$$

Portanto,

$$i_1 = (1+i_2)^{\frac{n_2}{n_1}} - 1.$$

Para determinar a taxa anual, conhecida a taxa mensal.

$$i_a = (1+i_m)^{12} - 1.$$

**Exemplo 1.4.2** *Determinar a taxa anual equivalente a 2% a.m.:*

$i_a = (1+i_m)^{12}$ - 1 = $(1,02)^{12}$ - 1= $1,2682 - 1 = 0,2682$ ou 26,82%.

**Exemplo 1.4.3** *Determinar a taxa mensal equivalente a 60,103% a.a.:*

$i_m = (1+i_a)^{\frac{1}{12}}$ - 1 = $(1,60103)^{\frac{1}{12}}$ - 1 = $1,04$ - 1 ou 4% ao mês.

Como no dia-a-dia os períodos a que se referem às taxas que temos e as taxas que queremos são os mais variados, vamos apresentar uma fórmula genérica, que possa ser utilizada para qualquer caso, ou seja:

$$i_q = (1+i_t)^{\frac{q}{t}} - 1. \qquad (1.4)$$

Onde: $i_q$ =taxa para o prazo que eu quero; $i_t$ = taxa para o prazo que eu tenho; $q$ = prazo que eu quero em dias; $t$ = prazo que eu tenho em dias.

**Exemplo 1.4.4** *Qual a taxa mensal equivalente a uma taxa de juros de 15% a.a.?*

Identificando os dados do problema:

A taxa que eu tenho $i_t = 15\% = 0,15$.

O prazo que eu tenho $t = 1$ ano $= 360$ dias.

O prazo que eu quero $q = 30$ dias.

A taxa que eu quero $i_q$.

Utilizando a Fórmula1.4, e substituindo os dados, obtemos:

$$i_q \quad = \quad (1 + 0,15)^{\frac{30}{60}} - 1 \quad ,$$

resolvendo a equação exponencial;

$$i_q = (1,15)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_q = 1,0117 - 1$$

$$i_q = 0,0117 \times 100$$

$$i_q = 1,17\% \; a.m.$$

Na calculadora financeira:

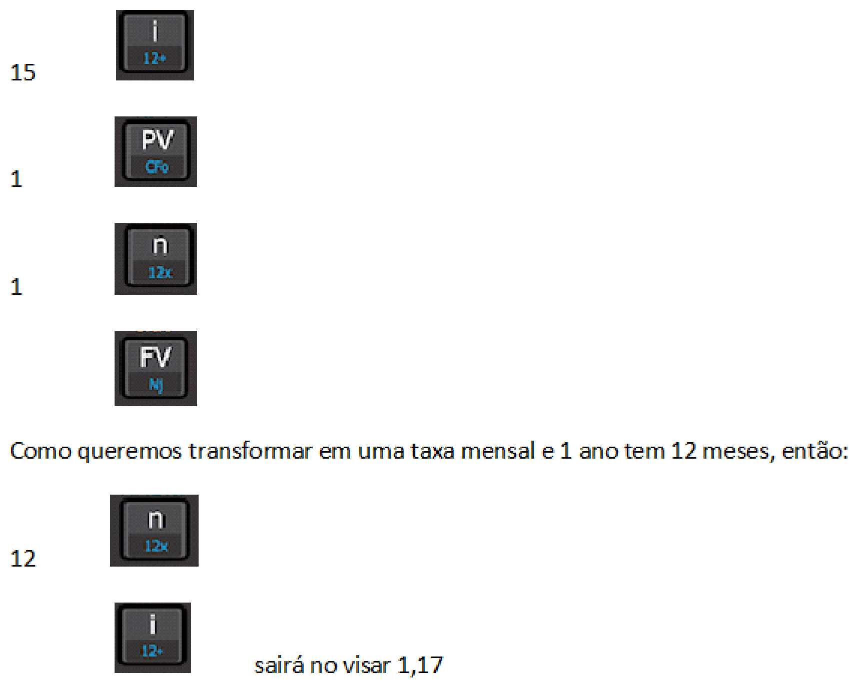



Figura 1.11: Na Calculadora Financeira 5

Logo a taxa mensal é 1,17% $a.m.$

**Exemplo 1.4.5** *Qual a taxa anual equivalente a uma taxa de juros de 4% a.m.?*

Identificando os dados do problema:

A taxa que eu quero $i_t = 4\% = 0,04$.

O prazo que eu tenho $t = 1$ mês $= 30$ dias.

O prazo que eu quero $q = 360$ dias.

A taxa que eu quero $i_q$.

Utilizando a fórmula 1.4, e substituindo os dados, obtemos:

$$i_q = (1 + 0,04)^{\frac{360}{30}} - 1 \quad ,$$

resolvendo a equação exponencial;

$$i_q = (1,04)^{12} - 1$$

$$i_q = 1,601 - 1$$

$$i_q = 0,601 \times 100$$

$$i_q = 60,1\% \; a.m.$$

Na calculadora financeira:

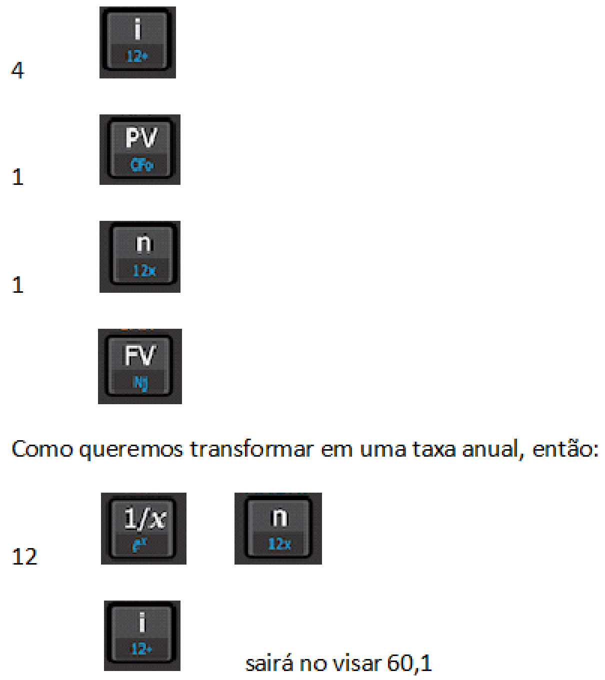



Figura 1.12: Na Calculadora Financeira 6

Logo a taxa mensal é 60,1% $a.a.$

# Capítulo 2

# Séries de Pagamentos

**Definição 2.0.6** *Séries de pagamentos, segundo SOBRINHO (1997, p.66), são vários pagamentos ou recebimentos, consequentes, para um período de tempo determinado.*

É muito utilizado em operações financeiras, como empréstimos e financiamentos de diferentes tipos. A série de pagamentos pode ser:

- Antecipada: quando o pagamento ou o recebimento é feito no ato da compra, como entrada;
- Postecipada: quando o pagamento ou o recebimento é feito um período de tempos após a compra.

## 2.1 Valor Presente ou Fator de Valor Atual

**Definição 2.1.1** *É o somatório dos pagamentos ou recebimentos das parcelas num período de tempo. Chamamos de **PMT** os vários pagamentos ou recebimentos.*

### 2.1.1 Série de Pagamentos Postecipada

Vamos verificar o fluxo de caixa de uma série de pagamentos postecipada.

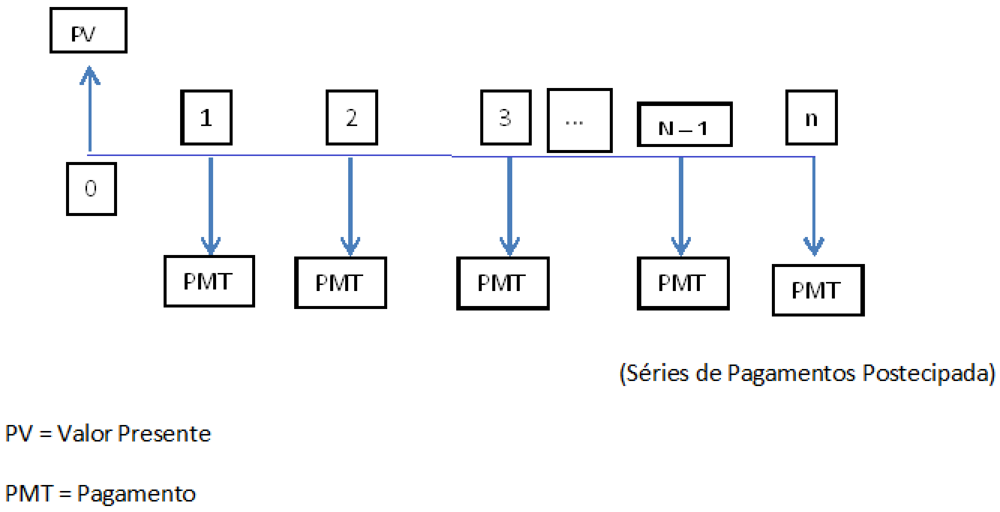



Figura 2.1: Fluxo de Caixa para Séries de Pag. Postecipada

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^n}.$$

Ou seja,

$$PV = PMT\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]. \tag{2.1}$$

Entre colchetes, temos uma Progressão Geométrica (P.G), de razão é $\frac{1}{(1+i)}$, primeiro termo da P.G é $\frac{1}{(1+i)}$. Utilizando a fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G finita,para os dados: $a_1 = \frac{1}{(1+i)}$, $q = \frac{1}{(1+i)}$, $S_n = PV$.

Usando a expressão,

$$S_n = a_1\frac{q^{n-1}}{q-1} \quad \text{(Fórmula da soma da PG finita.)} \tag{2.2}$$

Substituíndo os dados, obtemos;

$$PV = PMT\left\{\frac{\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^n}-1\right]}{\left(\frac{1}{1+i}\right)-1}\right\}$$

$$PV = PMT\left\{\frac{\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i^n)}\right]}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}}\right\}.$$

Ou seja,

$$PV \quad = \quad PMT\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n i}\right]. \tag{2.3}$$

O que está entre colchetes é chamado de **fator de valor atual.**

Na calculadora financeira:

O fator de valor atual pode ser calculado diretamente, utilizando as teclas:

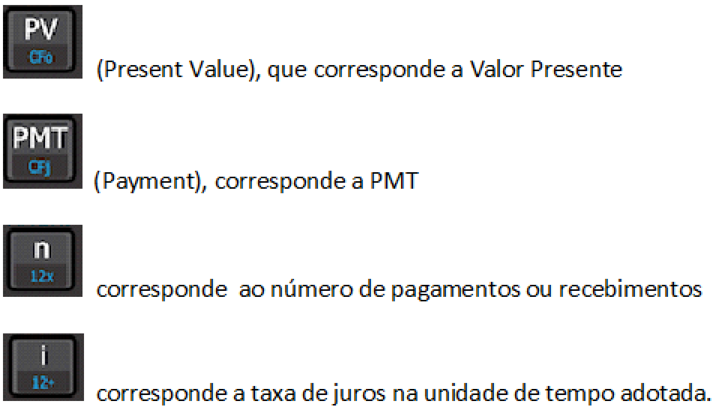



Figura 2.2: Botões Usados em Séries de Pagamentos

Vejamos algumas aplicações.

**Exemplo 2.1.2** *Um computador é vendido em 10 prestações mensais de R\$ 150,00, vencendo a primeira prestação um mês após a compra. Se a taxa de juros é de 4% a.m., qual o valor do computador à vista?*

Identificando os dados do problema:

$n = 10$ prestações mensais.

O valor das prestações é $PMT = 150,00$.

A taxa de juros é $i = 4\% = 0,04.\ a.m.$

Queremos encontrar o valor do computador $PV$.

Utilizando a Fórmula 2.3, e substituindo os dados, obtemos;

$$PV = 150\left[\frac{(1+0,04)^{10}-1}{(1+0,04)^{10}0,04}\right],$$

resolvendo a equação:

$$PV = 150\left[\frac{(1,04)^{10}-1}{(1,04)^{10}0,04}\right]$$

$$PV = 150\left(\frac{0,48024}{0,0592}\right)$$

$$PV = 150 \times 8,11086\ ,$$

obtemos:

$$PV = 1.216,63.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.3: Na Calculadora Financeira 7

O computador custa à vista R$ 1.216,63.

**Exemplo 2.1.3** *Um automóvel é vendido à vista por R$ 35.000,00, mais pode ser vendido em 48 prestações iguais e consecutivas, vencendo a primeira prestação um mês após a compra. Sabendo que a taxa de juros do financiamento é de 3% a.m., qual o valor de cada prestação?*

Identificando os dados do problema.

O valor do automóvel à vista é $PV = 35.000,00$.

$n = 48$ prestações mensais.

A taxa de juros é $i = 3\%\ a.m. = 0,03$.

Qual o valor das prestações $PMT$.

Utilizando a Fórmula 2.3, e substituindo os dados obtemos;

$$35.000 \quad = \quad PMT\left[\frac{(1+0,03)^{48}-1}{(1+0,03)^{48}0,03}\right],$$

resolvendo a equação:

$$35.000 = PMT\left[\frac{1,03^{48}-1}{1,03^{48}0,03}\right]$$

$$35.000 = PMT\left(\frac{3,13225}{0,123968}\right)$$

$$35.000 = PMT \times 25,2667 \quad ,$$

logo,

$$PMT = \frac{35.000}{25,2667},$$

obtemos:

$$PMT = 1.385,22.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.4: Na Calculadora Financeira 8

As prestações são de R$ 1.385,22.

### 2.1.2 Série de Pagamentos Antecipada

Vamos verificar o fluxo de caixa de uma série de pagamentos antecipada, quando a primeira prestação é dada como entrada, no ato da compra.

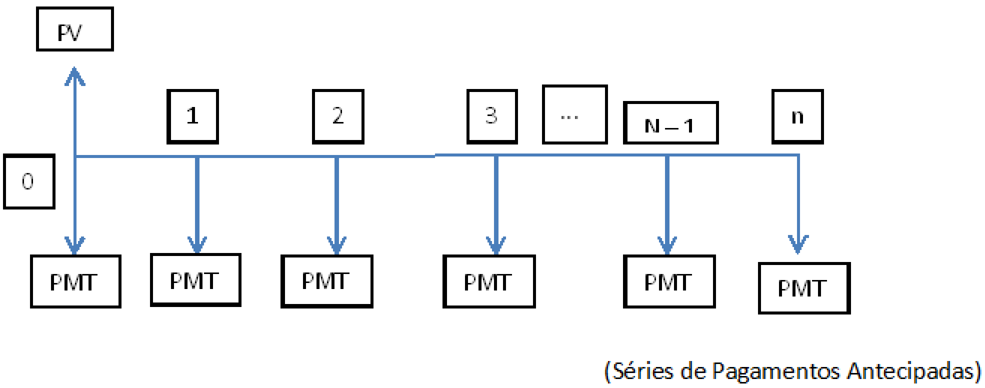



Figura 2.5: Fluxo de Caixa para Séries de Pag. Antecipada

$PV$ = Valor Presente;

$PMT$ = São as prestações iguais e consecutivas;

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{PMT}{(1+i)^n},$$

ou seja,

$$PV = PMT\left[1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]. \tag{2.4}$$

Entre colchetes, temos uma progressão geométrica (P.G), de razão $\frac{1}{(1+i)}$, primeiro termo da P.G $\frac{1}{(1+i)}$, utilizando a fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G finita 2.2, com os dados $a_1 = \frac{1}{(1+i)}$, $q = \frac{1}{(1+i)}$, $S_n = PV$, obtemos:

$$PV = PMT\left[\frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1}\right]$$

$$PV = PMT\left\{\frac{\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1-1-i}{(1+i)}}\right\}$$

$$PV = PMT\left[\left(\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right)\frac{(1+i)}{-i}\right]$$

$$PV = PMT\left\{\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]\frac{(1+i)}{-i}\right\},$$

assim,

$$PV \quad = \quad PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}\right](1+i). \tag{2.5}$$

Como a série de pagamentos é antecipada temos que ativar a função begin na calculadora, para indicar que o primeiro pagamento ou recebimento é feito no ato da compra, ou como entrada.

Na calculadora financeira:

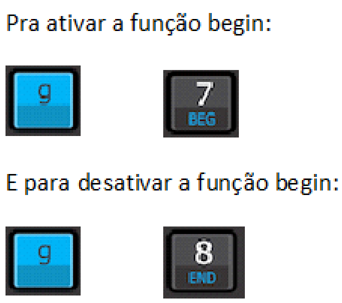



Figura 2.6: Ativar Função Begin

**Exemplo 2.1.4** *Uma televisão é vendida em 10 prestações mensais de R$ 150,00, vencendo a primeira prestação no ato da compra. Se a taxa de juros é de 4% a.m., qual o valor da televisão à vista?*

Identificando os dados do problema.

$n = 10$ prestações mensais.

O valor das prestações PMT$= 150,00$.

A taxa de juros $i = 4\%\ a.m. = 0,04$.

Qreremos encontrar o valor presente $PV$.

Utilizando a Fórmula 2.5, e substituindo os dados, obtemos;

$$PV = 150\left[\frac{(1+0,04)^{10}-1}{(1+0,04)^{10}0,04}\right](1+0,04),$$

resolvendo a equação:

$$PV = 150\left[\frac{(1,04)^{10}-1}{(1,04)^{10}0,04}\right](1,04)$$

$$PV = 150\left[\frac{0,48024}{0,0592}\right](1,04)$$

$$PV = 150(8,11086)(1,04),$$

obtemos:

$$PV = 1.265,30.$$

Na calculadora financeira:

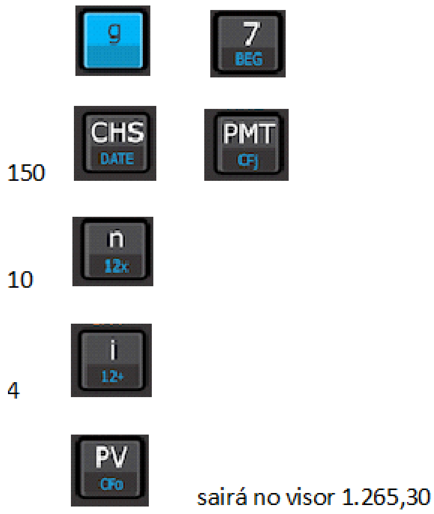



Figura 2.7: Na Calculadora Financeira 9

A televisão custa à vista R$ 1.265,30.

**Exemplo 2.1.5** *Um automóvel é vendido à vista por R$ 35.000,00, mais pode ser vendido em 48 prestações iguais e consecutivas, sendo a primeira prestação como entrada. Sabendo que a taxa de juros do financiamento é de 3% a.m., qual o valor de cada prestação?*

Identificando os dados do problema.

O valor presente é $PV = 35.000,00$.

$n = 48$ prestações mensais.

A taxa de juros é $i = 3\%\ a.m = 0,03$

Queremos encontrar o valor das prestações $PMT$.

Utilizando a Fórmula 2.5, e substituindo os dados, obtemos:

$$35.000 = PMT\left[\frac{(1+0,03)^{48}-1}{(1+0,03)^{48}0,03}\right](1+0,03),$$

resolvendo a equação:

$$35.000 = PMT\left[\frac{(1,03)^{48}-1}{(1,03)^{48}0,03}\right](0,03)$$

$$35.000 = PMT\left[\frac{3,13225}{0,123968}\right](1,03)$$

$$35.000 = PMT(25,2667)(1,03)$$

$$35.000 = 26,0247 \times PMT.$$

logo,

$$PMT = \frac{35.000}{26,0247}$$

$$PMT = 1.344,88.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.8: Na Calculadora Financeira 10

As prestações são de R$ 1.344,88.

## 2.2 Séries de Pagamentos Diferidas

**Definição 2.2.1** *É uma série de pagamento, que o primeiro pagamento só acontece depois de um período* $\boldsymbol{m}$ *de tempo, a que se refere à taxa de juros compostos considerada, com* $\boldsymbol{m} \geqslant 2$.

Situações como essa, ocorre em vendas a prazo, com carência, em que o comprador só começa a pagar um período de tempo após a compra.

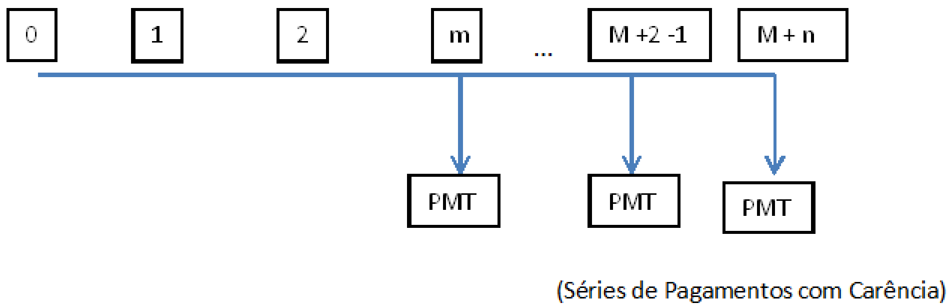



Figura 2.9: Fluxo de Caixa para Séries de Pag. com Carência

Na Calculadora Financeira HP 12C, não tem nunhuma função específica para resolução de problemas envolvendo carência.

**Exemplo 2.2.2** *A loja Profmat Eletrodomésticos anuncia: "Compre hoje e só comece a pagar daqui a 3 meses". Comprei uma geladeira em 10 prestações de R$ 100,00. Qual o valor da geladeira à vista, se a loja cobra uma taxa de juros de 5% a.m.?*

Primeiro vamos saber quanto custa esses dez pagamentos consecutivos no segundo mês.

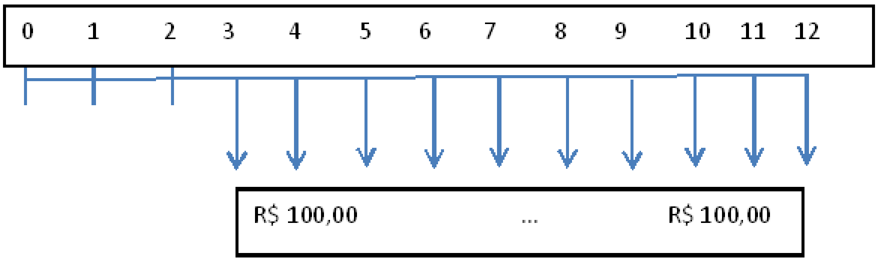



Figura 2.10: Fluxo de Caixa 1

Identificando os dados do problema:

As prestações são de $PMT = 100,00$.

$n = 10$ prestações mensais.

A taxa de juros é $i = 5\%\ a.m. = 0,05$.

Utilizando a Fórmula 2.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$PV = 100\left[\frac{(1+0,05)^{10}-1}{(1+0,05)^{10}0,05}\right],$$

resolvendo a equação:

$$PV = 100\left[\frac{(1,05)^{10}-1}{(1,05)^{10}0,05}\right]$$

$$PV = \left(\frac{0,628895}{0,081445}\right)$$

$$PV = 100 \times 7,7217$$

$$PV = 772,17.$$

Na calculadora financeira:

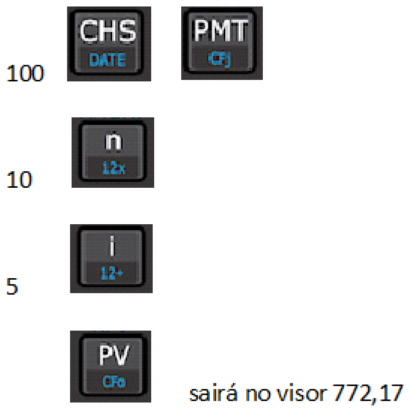



Figura 2.11: Na Calculadora Financeira 11

Encontramos o valor da geladeira no 2º mês, como mostra o fluxo de caixa.

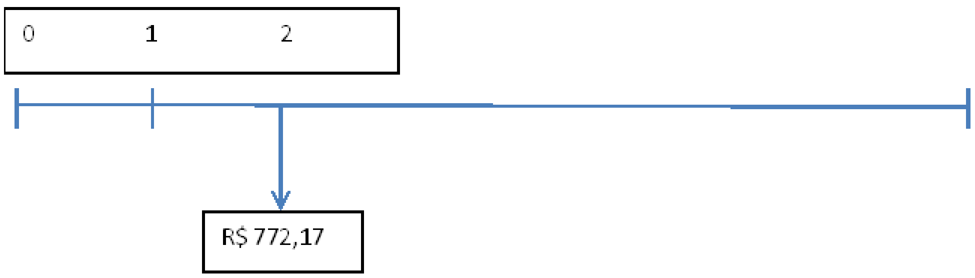



Figura 2.12: Fluxo de Caixa 2

Queremos saber o valor da geladeira hoje, no dia da compra.

O valor que encontramos no segundo mês, agora vai ser o valor futuro $FV = 772,17$.

O período de tempo é $n = 2$ meses.

A taxa de juros é $i = 5\% a.m. = 0,05$.

Vamos encontrar o valor presente $PV$.

Utilizando a Fórmula 1.3, e substituindo os dados acima, obtemos:

$$772,17 = PV(1 + 0,05)^2,$$

resolvendo a equação:

$$772,12 = PV \times 1,052$$
$$PV = \frac{772,17}{(1,05)^2},$$

obtemos:

$$PV = 700,38.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.13: Na Calculadora Financeira 12

O valor da geladeira à vista é R$ 700,38.

## 2.3 Valor Futuro ou Fator de Acumulação de Capital

**Definição 2.3.1** *É o somatório dos pagamentos ou recebimentos das parcelas acumuladas num período de tempo.*

### 2.3.1 Séries de Pagamentos Postecipados

Quando os depósitos ou recebimentos são feitos um período de tempo após a compra.

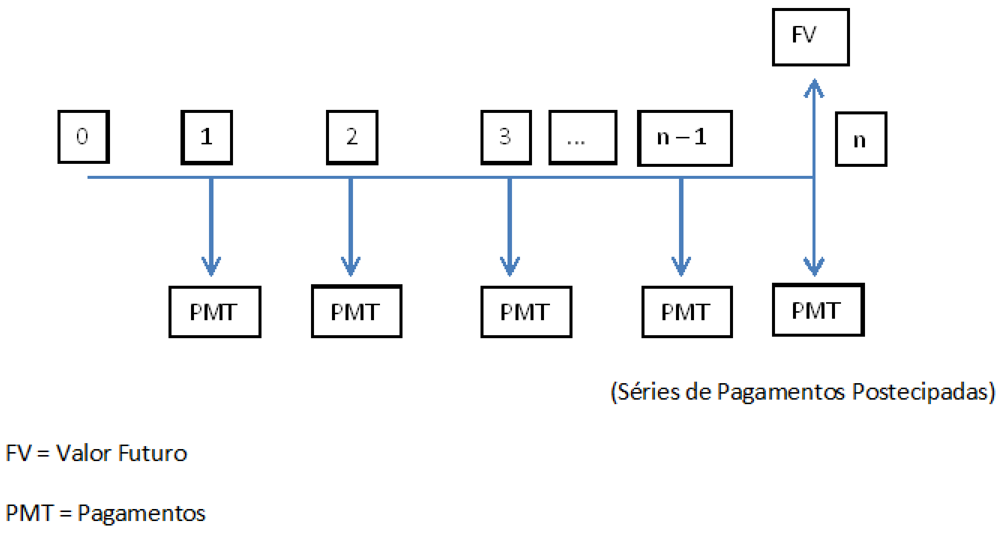



Figura 2.14: Fluxo de Caixa Valor Futuro

$$FV = PMT(1+i)^{n-1} + PMT(1+i)^{n-2} + \ldots + PMT,$$

assim,

$$FV = PMT[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1].$$

Entre colchetes temos uma Progressão Geométrica (P.G), de razão $\frac{1}{(1+i)}$, e o primeiro termo $(1+i)^{n-1}$, utilizando a Fórmula 2.2, com os dados $a_1 = \frac{1}{(1+i)}$, $q = \frac{1}{(1+i)}$, $S_n = PV$, obtemos:

$$FV = PMT\left\{(1+i)^{n-1}\frac{\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1}\right\}$$

$$FV = PMT\left\{(1+i)^{n-1}\left[\frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1}\right]\right\}$$

$$FV = \left\{\frac{(1+i)^n}{(1+i)}\left[\frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1-1-i}{(1+i)}}\right]\right\}$$

$$FV = PMT\left\{\frac{(1+i)^n}{(1+i)}\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\cdot\frac{(1+i)}{(-i)}\right]\right\}.$$

Portanto,

$$FV \quad = \quad PMT\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]. \qquad (2.6)$$

O termo que se encontra entre colchetes é chamado de **fator de acumulação de capital.**

Na calculadora financeira, o **o fator de acumulação de capital** pode ser calculado diretamente, utilizando os botões abaixo:

(*Future Value*), que corresponde ao Valor Futuro;

o número de pagamentos ou depósitos;

que corresponde a taxa de juros;

(*Pagament*), que corresponde ao valor das prestações (pagamentos).

Figura 2.15: Botões Utilizados

**Exemplo 2.3.2** *Márcia pensando em seu futuro, resolveu depositar mensalmente a quantia de R\$ 150,00, para se aposentar daqui a 30 anos, a uma taxa de juros de 1% a.m.. Quanto Márcia vai acumular num final desse período de tempo?*

Identificando os dados do problema:

As prestações mensais $PMT = 150,00$.

O período de tempo é $n = 30$ anos, mais como os depósitos são mensais temos que transformar 30 anos em meses, multiplicando 30 por 12, logo $n = 360$ meses.

A taxa de juros é $i = 1\% = 0,01$.

Queremos encontrar o valor futuro $FV$.

Utilizando a fórmula 2.6, e substituindo os dados, obtemos:

$$FV = 150\left[\frac{(1+0,01)^{360}-1}{0,01}\right],$$

resolvendo a equação:

$$FV = 150\left[\frac{(1,01)^{360}-1}{0,01}\right]$$

$$FV = 150\left[\frac{35,9496}{0,01}\right]$$

$$FV = 150\left(\frac{35,9496}{0,01}\right)$$

$$FV = 150 \times 3.594,96\ ,$$

obtemos:

$$FV = 539.244,62.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.16: Na Calculadora Financeira 13

Márcia vai acumular um total de R$ 539.244,62.

**Exemplo 2.3.3** *A mãe de Renato, pensando no futuro do seu filho que se encontro no 1º ano do ensino médio, gostaria de acumular uma quantia de R$ 20.000,00, em 3 anos para financiar os estudos do seu filho numa faculdade. Quanto a mãe de Renato tem que depositar mensalmente, numa financeira que cobra uma taxa de juros de 1% a.m.?*

Identificando os dados do problema:

O valor futuro é de $FV = 20.000,00$.

O período de tempo é $n = 3$ anos, mais como os depósitos são mensais, temos que transformar 3 anos em meses, multiplicando por 12, pois um ano tem 12 meses, logo $n = 3 \times 12 = 36$ meses

A taxa de juros é $i = 1\%$ $a.m.$

Queremos encontrar o valor dos depósitos mensais $PMT$.

Utilizando a Fórmula 2.6, e substituindo os dados, obtemos:

$$20.000 \quad = \quad PMT\left[\frac{(1+0,01)^{36}-1}{0,02}\right],$$

resolvendo a equação:

$$20.000 = PMT\left[\frac{(1,01)^{36}-1}{0,01}\right]$$
$$20.000 = PMT\left[\frac{(1,01)^{36}-1}{0,01}\right]$$
$$20.000 = PMT\left[\frac{0,43077}{0,01}\right]$$
$$20.000 = PMT \times 43,07688.$$

Portanto,

$$PMT = \frac{20.000}{43,07688}$$

obtendo:

$$PMT = 464,29.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.17: Na Calculadora Financeira 14

Ela terá que depositar mensalmente R$ 464,29.

### 2.3.2 Séries de Pagamentos Antecipadas

Quando os depósitos ou recebimentos são feitos no início de cada período de tempo.

Como mostra o fluxo de caixa abaixo.

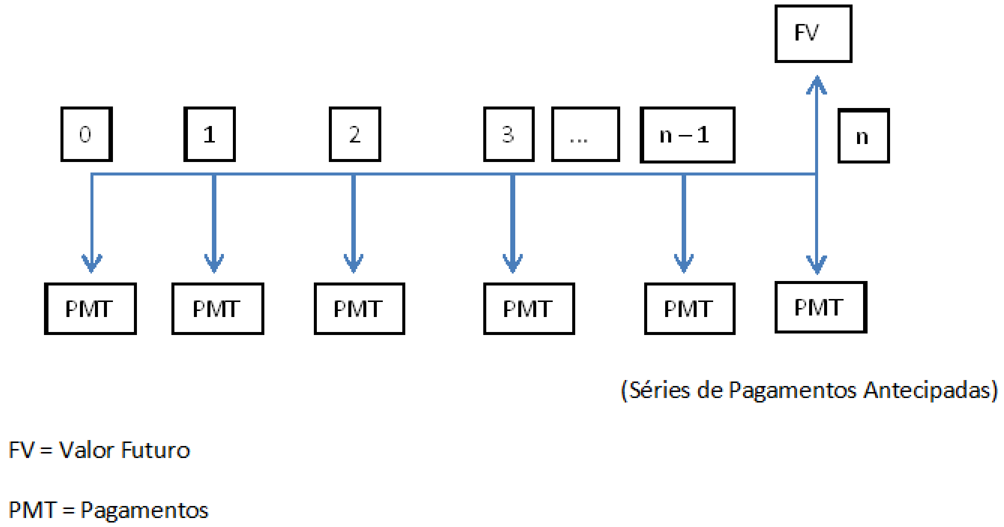



Figura 2.18: Fluxo de Caixa para Valor Futuro Antecipadas

$$FV = PMT(1+i)^n + PMT(1+i)^{n-1} + \ldots + PMT,$$

ou seja,

$$FV = PMT[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + 1].$$

Entre colchetes temos uma Progressão Geométrica (P.G), de razão $\frac{1}{1+i}$ e o primeiro termo é $(1+i)^n$, utilizando a Fórmula 2.2 da soma dos **n** primeiros termos da P.G finita, com os dados $a_1 = \frac{1}{(1+i)}$, $q = \frac{1}{(1+i)}$, $S_n = PV$, obtemos:

$$FV = PMT\left\{(1+i)^n\left[\frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)-1}}\right]\right\}$$

$$FV = PMT\left\{(1+i)^n\left[\frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1-1-i}{(1+i)}}\right]\right\}$$

$$FV = PMT\left\{(1+i)^n\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)}{(-i)}\right]\right\},$$

assim,

$$FV = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i). \tag{2.7}$$

Temos que lembrar, de ativar a função *begin*, pois a série de pagamentos é antecipada, e se essa função não tiver ativada, a calculadora vai fazer os cálculos como se a série de pagamentos fossem postecipados.

Na Calculdora Financeira:

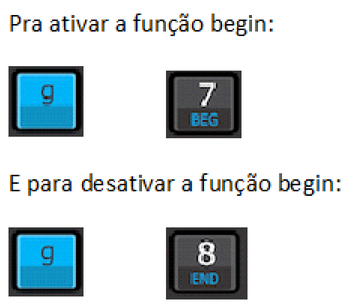



Figura 2.19: Ativar Função Begin

**Exemplo 2.3.4** *Seu João deseja fazer dez depósitos mensais de R$ 200,00, com o primeiro depósito sendo hoje, com a finalidade de viajar nas férias. Quanto seu João vai ter acumulado, se o banco cobra uma taxa de juros de 0,7% a.m.?*

Identificando os dados do problema:

Os depósitos são de $PMT = 200,00$.

O período de tempo é $n = 10$ meses.

A taxa de juros é $i = 0,7\%\ a.m. = 0,007$.

Qual o valor acumulado $FV$.

Utilizando a Fórmula 2.7 e substituindo os dados, obtemos:

$$FV \quad = \quad 200\left[\frac{(1+0,007)^{10}-1}{0,007}\right](1+0,007),$$

resolvendo a equação:

$$FV = FV200\left[\frac{(1,007)^{10}-1}{0,007}\right](1,007)$$

$$FV = 200\left[\frac{0,072247}{0,007}\right](1,007)$$

$$FV = 200\,[10,32095]\,(1,007)$$

$$FV = 2.604,19 \times 1,007\ ,$$

obtemos:

$$FV = 2.078,64.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.20: Na Calculadora Financeira 15

Portanto, seu João vai ter acumulado R$ 2.078,64.

**Exemplo 2.3.5** *Quero acumular uma quantia de R$ 10.000,00, em dois anos, em um financceira que cobra uma taxa de juros de 0,8% a.m.. Quanto tenho que depositar mensalmente, começando a fazer o primeiro depósito hoje?*

Idenficando os dados do problema:

O valor a ser acumulado é $FV = 10.000,00$.

O período de tempo é $n = 2\,anos$, mais como os depósitos são mensais, temos que transformar 2 anos em meses, multiplicando por 12, pois um ano tem 12 meses, logo $n = 2 \times 12 = 25$ meses.

A taxa de juros é $i = 0,8\%\ a.m = 0,008$.

Queremos encontrar o valor dos depósitos mensais $PMT$.

Utilizando a Fórmula 2.7 e substituindo os dados, obtemos:

$$10.000 = PMT\left[\frac{(1+0,008)^{24}-1}{0,008}\right](1+0,008),$$

resolvendo a equação:

$$10.000 = PMT\left[\frac{(1,008)^{24}-1}{0,008}\right](1,008)$$

$$10.000 = PMT\left[\frac{0,210745}{0,008}\right](1,008)$$

$$10.000 = PMT[26,34315](1,008)$$

$$10.000 = PMT \times (26,5539),$$

assim,

$$PMT = \frac{10.000}{26,5539},$$

obtemos:

$$PMT = 376,59.$$

Na calculadora financeira:


Figura 2.21: Na Calculadora Financeira 16

Tenho que depositar mensalmente R$ 376,59.

# Capítulo 3

# Sistemas de Amortizações

**Amortização**, segundo o Dicionário Aurélio é "extinguir a dívida aos poucos ou em prestações" ou "abates dívidas, efetuando o pagamento correspondente".

**Prestação**, é o valor da amortização mais os juros em um determinado período de tempo.

**Saldo Devedor**, é o valor atual da dívida em um determinado momento, após o pagamento de uma prestação a título de amortização. Resumindo é o valor da prestação menos os juros.

É muito utilizada, nas operações de médio e longo prazo.

Os sistemas de Amortizações mais utilizados são:

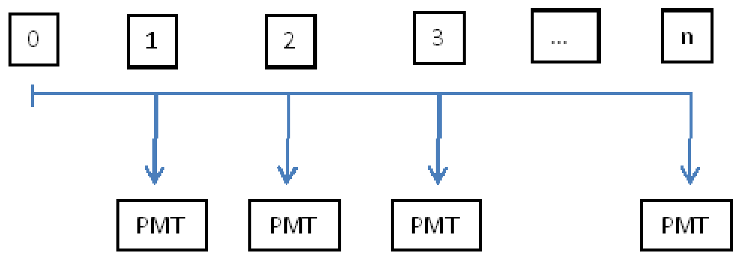
- Sistema de Amortização Francês (PRICE);
- Sistema de Amortização Constante (SAC);
- Sistema de Amortização Misto (SAM);
- Sistema de Amortização Americano (SAA).

Para cada sistema de Amortização é construída uma planilha financeira diferente. Nas próximas seções estudaremos a construção destas planilhas.

## 3.1 Sistema de Amortização Francês (PRICE)

**Definição 3.1.1** *De acordo com POITRAS, o sistema francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simon Stevin, no século XVI. Todavia, foi utilizado pelo economista e matemático inglês Richard Price, no século XVIII, no cálculo previdenciário inglês da época. Por isso ficou conhecido no Brasil como sistema PRICE.*

Nesse sistema o empréstimo é pago em prestações iguais e periódicas.




(Prestações do Sistema PRICE)

Figura 3.1: Fluxo de Caixa PRICE

Esses pagamentos (PMT), podem ser encontrados pela fórmula de séries de pagamentos.

- Séries de Pagamentos Postecipadas

$$PV = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}\right].$$

$$PMT = PV\left[\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}\right]. \tag{3.1}$$

- Séries de Pagamentos Antecipadas

$$PV = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}\right](1+i).$$

$$PMT = PV\left[\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}\right](\frac{1}{1+i}). \qquad (3.2)$$

É muito utilizado em:

- Crédito Direto ao Consumidor;
- Financiamento de Automóveis;
- Sistema Financeiro da Habitação.

**Observação 7** *No sistema PRICE, deve-se compatibilizar a taxa de juros em relação ao período, utiliza-se a taxa proporcional simples em vez de taxa equivalente composta, o que implica em uma taxa de juros efetivamente maior para todo o horizonte financeiro.*

**Exemplo 3.1.2** *Se a taxa de juros for de 12% a.a., e os pagamentos são mensais, a taxa correspondente mensal é 1% a.m., pois* $(\frac{12\%}{12})$ *é 1%.*

**Exemplo 3.1.3** *Uma escola faz um empréstimo de R\$ 300.000,00 pelo sistema Francês (PRICE) em cinco prestações anuais à uma taxa de 10% a.a.. Qual o valor das prestações e obtenha a planilha mostrando os juros, amortização, prestações e o saldo devedor.*

Identificando os dados do problema:

O valor do empréstimo é $PV = 300.000$.

A taxa de juros é $i = 10\% a.a. = 0,1$.

O número das prestações $n = 5$ anos.

Vamos encontrar o valor das prestações $PMT$.

Utilizando a fórmula 3.1, e substituindo os dados, obtemos:

$$PMT = 300.000\left[\frac{(1+0,1)^5 0,1}{(1+0,1)^5 - 1}\right],$$

resolvendo a equação:

$$PMT = 300.000\left[\frac{1,1^50,1}{1,1^5-1}\right]$$

$$PMT = 300.000\left[\frac{0,161051}{0,61051}\right]$$

$$PMT = 300.000 \times 0,2638\ ,$$

obtemos:

$$PMT = 79.139,24.$$

Na calculadora financeira:


Figura 3.2: Na Calculadora Financeira 17

Encontramos o valor das prestações, que são iguais, então vamos construir a planilha.

| $n$ | Saldo Devedor (SD) $SD_n = SD_{n-1} - A$ | Amortização $A = PMT - J$ | Juros $J_n = SD_{n-1} \times i$ | PMT |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 300.000 | - | - | - |
| 1 | 250.860,76 | 49.139,24 | 30.000 | 79.139,24 |
| 2 | 196.807,60 | 54.053,16 | 25.086,08 | 79.139,24 |
| 3 | 137.349,12 | 59.458,48 | 19.680,76 | 79.139,24 |
| 4 | 71.944,80 | 65.404,33 | 13.734,91 | 79.139,24 |
| 5 | 0 | 71.944,80 | 7.194,48 | 79.139,24 |

Percebam que a medida que o saldo devedor vai diminuindo, as parcelas de juros também diminuem, e as parcelas de amortização vão aumentando.

**Exemplo 3.1.4** *Em um empréstimo de R$ 100.000,00, a ser pago em quatro meses, à uma taxa de juros de 2% a m., pelo sistema francês, com a primeira prestação como entrada. Qual o valor das prestações e obtenha a planilha mostrando os juros e o saldo devedor, amortização e as prestações?*

Identificando os dados do problema:

O valor do empréstimo é $PV = 100.000,00$.

$n = 4$ prestações mensais.

A taxa de juros é $i = 2\ a.m. = 0,02$.

Queremos encontrar o valor das prestações, que são iguais $PMT$.

Utilizando a Fórmula 3.2, e substituindo os dados, obtemos:

$$PMT = 100.000 \left[\frac{(1+0,02)^4 0,02}{(1+0,02)^4 - 1}\right] \frac{1}{(1+0,02)},$$

resolvendo a equação:

$$PMT = 100.000 \left[\frac{(1,02)^4 0,02}{(1,02)^4 - 1}\right] \frac{1}{1,02}$$

$$PMT = 100.000 \left[\frac{0,021649}{0,082432}\right] \frac{1}{1,02}$$

$$PMT = 100.000 \times 0,2626286 \times \frac{1}{1,02},$$

obtemos:

$$PMT = 25.747,43.$$

Lembrar de ativar a função begin na calculadora, pois a primeira prestação é dada como entrada.

Na calculadora financeira:

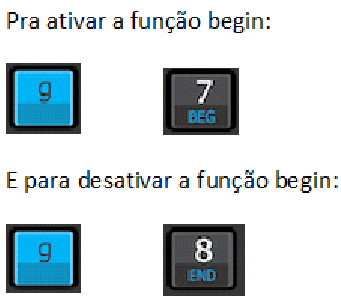



Figura 3.3: Ativar Função Begin


Figura 3.4: Na Calculadora Financeira 18

| $n$ | Saldo Devedor (SD) $SD_n = SD_{n-1} - A$ | Amortização $A = PMT - J$ | Juros $J_n = SD_{n-1} \times i$ | PMT |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 74.252,57 | 25.747,43 | - | 25.747,43 |
| 1 | 49.990,19 | 24.262,38 | 1.485,05 | 25.747,43 |
| 2 | 25.242,56 | 24.747,63 | 999,80 | 25.747,43 |
| 3 | 0 | 25.242,56 | 504,85 | 25.747,43 |

Para encontrarmos o saldo devedor em um determinado instante, no sistema de amortização Francês, basta calcularmos o valor presente (atual) das prestações a vencer, esse valor, corresponde ao saldo devedor naquele instante.

**Exemplo 3.1.5** *Qual o saldo devedor no 30º mês de um empréstimo de R$ 500.000,00 a ser pago em 60 meses, á uma taxa de juros de 3% a.m., pelo sistema Francês?*

Identificando os dados do problema:

O valor do empréstimo é $PV = 500.000$.

$n = 60$ prestações mensais.

A taxa de juros é $i = 3\%\ a.m. = 0,03$.

Como o sistema de amortização é o Francês, onde as prestações são constantes, então vamos encontrar o valor das prestações $PMT$.

Utilizando a Fórmula 3.1, e substituindo os dados, obtemos:

$$PMT = 500.000 \left[ \frac{(1+0,03)^{60} 0,03}{(1+0,03)^{60} - 1} \right],$$

resolvendo a equação:

$$PMT = 500.000 \left[ \frac{(1,03)^{60} 0,03}{(1,03)^{60} - 1} \right]$$

$$PMT = 500.000 \left[ \frac{0,176748}{4,8916} \right]$$

$$PMT = 500.000 \times 0,036133\ ,$$

obtemos:

$$PMT = 18.066,48.$$

Na calculadora financeira:


Figura 3.5: Na Calculadora Financeira 19

O valor das prestações é R$ 18.066,48.

Para saber o saldo devedor na 30ª prestação, basta encontrar o valor presente (atual), com o período de tempo sendo as prestações restantes, então:

Quantas prestações faltam?

$n = 60 - 30 = 30.$

O valor das prestações é $PMT = 18.066,48.$

A taxa de juros é $i = 3\%\ a.m. = 0,03.$

O saldo devedor no 30º mês $SD_{30} = PV.$

Utilizando a Fórmula 2.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$PV \quad = \quad 18.066,48\left[\frac{(1+0,03)^{30}-1}{(1+0,03)^{30}0,03}\right],$$

resolvendo a equação:

$$PV = 18.066,48\left[\frac{(1,03)^{30}-1}{(1,03)^{30}0,03}\right]$$

$$PV = 18.066,48 \left[\frac{1,42726247}{0,0728179}\right]$$
$$PV = 18.066,48 \times 19,6004\ ,$$

obtemos:

$$PV = 354.110,98.$$

Na calculadora financeira:

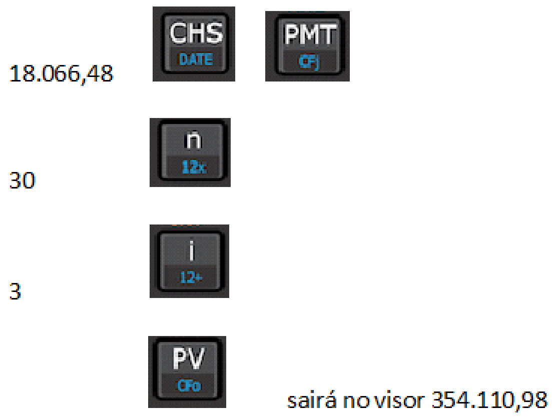



Figura 3.6: Na Calculadora Financeira 20

O saldo devedor na 30ª prestação é R$ 354.110,98.

Perceba que ainda falta pagar a metade das prestações, e o saldo devedor é maior do que se pegarmos o valor do empréstimo e dividir por dois, vejam:

$$\frac{500.000}{2} = 250.000.$$

Muitos poderiam pensar que o saldo devedor no 30º mês, fosse de R$ 250.000,00, mas vimos acima que esse saldo é de R$ 354.110,98, bem maior do que muitos imaginam, porque estamos pagando juros em cima desse empréstimo. O saldo devedor seria de R$ 250.000,00, se não tivesse juros.

**Exemplo 3.1.6** *Uma quantia de R$ 50.000,00 foi financiada para pagamento em 5 prestações mensais iguais, á uma taxa de juros d 12% a.a., no sistema de amortização Francês. Qual o valor das prestações e o saldo devedor na 3º prestação?*

Identificando os dados do problema:

O valor do financiamento é $PV = 50.000,00$.

$n = 5$ prestações mensais.

A taxa de juros mensal é $i = 12\%\ a.a. = \frac{12}{12} = 1\%\ a.m. = 0,01$.

Vamos encontrar o valor das prestações $PMT$.

Utilizando a Fórmula 3.1, e substituindo os dados, obtemos:

$$PMT = 50.000\left[\frac{(1+0,01)^5 0,01}{(1+0,01)^5 - 1}\right],$$

resolvendo a equação:

$$PMT = 50.000\left[\frac{(1,01)^5 0,01}{(1,01)^5 - 1}\right]$$

$$PMT = 50.000\left[\frac{0,0105101}{0,05101}\right]$$

$$PMT = 50.000 \times 0,20604$$

$$PMT = 10.301,99.$$

Na calculadora financeira:


Figura 3.7: Na Calculadora Financeira21

O valor das prestações é 10.301,99.

Para saber o saldo devedor na 3ª prestação, basta encontrar o valor presente (atual), com o período de tempo sendo as prestações restantes, então:

Quantas prestações faltam?

$n = 5 - 3 = 2.$

O valor das prestações é $PMT = 10.301,99.$

A taxa de juros é $i = 1\%\ a.m = 0,01.$

O saldo devedor no 3º mês $SD_3 = PV.$

Utilizando a Fórmula 2.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$PV \quad = \quad 10.301,99 \left[ \frac{(1+0,01)^2 - 1}{(1+0,01)^2 0,01} \right],$$

resolvendo a equação:

$$PV = 10.301,99 \left[ \frac{(1,01)^2 - 1}{(1,01)^2 0,01} \right]$$

$$PV = 10.301,99 \left[ \frac{0,0201}{0,010201} \right]$$

$$PV = 10.301,99 \times 1,970395 \ ,$$

obtemos:

$$PV = 20.298,99.$$

Na calculadora finnceira:


Figura 3.8: Na Calculadora Financeira 22

O saldo devedor na 3ª prestação é R$ 20.298,99.

**Exemplo 3.1.7** *Uma quantia de R$ 100.000,00, foi financiada pelo sistema de amortização francês em 5 prestações anuais, sendo o primeiro pagamento acontecendo daqui a 2 anos, a uma taxa de juros de 8% a.a.. Qual o valor das prestações e como fica a planilha do financiamento?*

Identificando os dados do propblema.

A quantia é $PV = 100.000$.

$n = 1$ ano.

a taxa de juros é $i = 8\%\ a.a. = 0,08$.

Primeiro vamos encontrar a dívida no 1º ano $FV$.

Vamos usar a fórmula 1.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$FV = 100.000(1 + 0,08)^1 \quad ,$$

resolvendo a equação:

$$FV = 100.000 \times 1,08 \quad ,$$

obtemos:

$$FV = 108.000,00.$$

Na calculadora financeira:

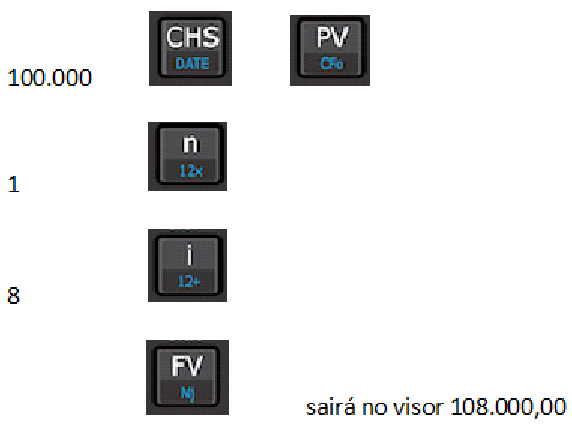



Figura 3.9: Na Calculadora Financeira 23

Agora vamos achar o valor das prestações.

O valor do empréstimo é $PV = 108.000,00$.

$n = 5$ prestações anuais.

A taxa de juros é de $i = 8\%\ a.a = 0,08$.

Vamos encontrar o valor das prestações $PMT$.

Utilizando a Fórmula 3.1, e substituindo os dados, obtemos:

$$PMT = 108.000 \left[ \frac{(1+0,08)^5 0,08}{(1+0,08)^5 - 1} \right],$$

resolvendo a equação:

$$PMT = 108.000 \left[ \frac{(1,08)^5 0,08}{(1,08)^5 - 1} \right]$$

$$PMT = 108.000 \left[ \frac{0,117546246}{0,469328077} \right]$$

$$PMT = 108.000 \times 0,250456454\ ,$$

obtemos:

$$PMT = 27.049,30.$$

Na calculadora financeira:


Figura 3.10: Na Calculadora Financeira 24

O valor das prestações é R$ 27.049,30.

Agora vamos construir a planilha.

| $n$ | Saldo Devedor (SD) $SD_n = SD_{n-1} - A$ | Amortização $A = PMT - J$ | Juros $J_n = SD_{n-1} \times i$ | PMT |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | - | - | - |
| 1 | 108.000,00 | - | 8.000,00 | - |
| 2 | 89.590,70 | 18.409,30 | 8.640,00 | 27.049,30 |
| 3 | 69.708,66 | 19.882,04 | 7.167,26 | 27.049,30 |
| 4 | 48.236,05 | 21.472,61 | 5.576,69 | 27.049,30 |
| 5 | 25.045,63 | 23.190,42 | 3.858,88 | 27.049,30 |
| 6 | 0 | 25.045,63 | 2.003,66 | 27.049,30 |

## 3.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

**Definição 3.2.1** *Este sistema de amortização é o mais utilizado na prática no Brasil. Neste sistema, como o nome já diz, as amortizações é que são constantes, ou seja, iguais.*

É muito utilizado em:

- Empréstimos de longo prazo do BNDES;
- Empréstimos do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID);
- Empréstimos do Banco Mundial.

Para encontrar as parcelas de amortização, basta dividir o valor presente, pelo número de parcelas.

- **A** corresponde a amortização constante;
- **n** o número de parcelas;
- **PV** o valor presente;

- **J** os Juros.

$$A = \frac{PV}{n}. \quad (3.3)$$

E as prestações são calculadas por:

$$PMT = A + J. \quad (3.4)$$

**Exemplo 3.2.2** *Uma escola faz um empréstimo de R$ 300.000,00 pelo sistema amortização constante (SAC) em cinco prestações anuais à taxa de 10% a.a.. determine o valor da amortização e obtenha a planilha mostrando os juros, amortização, prestações e o saldo devedor.*

Identificando os dados do problema:

O valor do empréstimo é $PV = 300.000$.

$n = 5$ prestações anuais.

A taxa de juros é $i = 10\% = 0,1$.

Vamos encontrar o valor da parcela de amortização $A$.

Utilizando a Fórmula 3.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$A = \frac{300.000}{5}$$
$$A = 60.000,00.$$

A amortização é R$ 60.000,00.

Vamos construir a planilha.

| $n$ | Saldo Devedor (SD) $SD_n = SD_{n-1} - A$ | Amortização $A = \frac{PV}{n}$ | Juros $J_n = SD_{n-1} \times i$ | Pagamento $PMT = A + J$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 300.000,00 | - | - | - |
| 1 | 240.000,00 | 60.000,00 | 30.000,00 | 90.000,00 |
| 2 | 180.000,00 | 60.000,00 | 24.000,00 | 84.000,00 |
| 3 | 120.000,00 | 60.000,00 | 18.000,00 | 78.000,00 |
| 4 | 60.000,00 | 60.000,00 | 12.000,00 | 72.000,00 |
| 5 | 0 | 60.000,00 | 6.000,00 | 66.000,00 |

Percebam que a planilha do sistema de amortização constante (SAC), os juros, o saldo devedor e as prestações são decrescentes e formam uma Progressão Aritmética (P.A), de razão 6.000, para os juros e as prestações, e de razão 60.000 para o saldo devedor.

**Exemplo 3.2.3** *Uma quantia de R\$ 150.000,00 deve ser paga pelo SAC em 60 prestações mensais, à uma taxa de juros de 1% a.m.. Obtenha a amortização, juros, prestação e saldo devedor correspondente ao 35º mês?*

Identificando os dados do problema:

A quantia é de $R\$150.000,00$.

$n = 60$ prestações mensais.

A taxa de juros é $i = 1\%\ a.m. = 0{,}01$.

O período pedido $n = 60 - 35 = 25$.

Utilizando a Fórmula 3.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{150.000}{60} \\ A &= 2.500. \end{aligned}$$

Para encontrar os juros pagos na 35ª prestação, precisamos encontrar o saldo devedor anterior, para isso basta pegar o valor presente e subtrair pelo produto do período de tempo anterior e a amortização, depois multiplicar pela taxa de juros.

$$\begin{aligned}
J_{35} &= [PV - (34 \times A)] \times i \\
J_{35} &= [150.000 - (34 \times 2.500)] \times 0,01 \\
J_{35} &= (150.000 - 85.000) \times 0,01 \\
J_{35} &= 65.000 \times 0,01 \\
J_{35} &= 650.
\end{aligned}$$

Os juros pagos no 35ª mês é de R$ 650,00.

A prestação no 35ª mês, é o valor da amortização mais os juros naquele mês.

Usando a Fórmula 3.4, e substituindo os dados, obtemos:

$$PMT = 2.500 + 650 = 3.150.$$

O valor da prestação no 35ª mês é R$ 3.150,00.

O saldo devedor no 35ª mês, é a quantia inicial menos o produto de 35ª pela amortização.

$$\begin{aligned}
SD_{35} &= PV - (35 \times A) \\
SD_{35} &= 150.000 - (35 \times 2.500) \\
SD_{35} &= 150.000 - 87.500 \\
SD_{35} &= 62.500.
\end{aligned}$$

O saldo devedor no 35ª mês é R$ 62.500,00.

**Exemplo 3.2.4** *Uma quantia de R$ 200.000,00 deve ser paga pelo SAC em cinco parcelas semestrais, com dois semestres de carência, à uma taxa de juros de 5% a.s.. Sabendo-se que não há carência para os juros, obtenha a planilha.*

Identificando os dados do problema:

A quantia é $PV = 200.000$.

$n = 5$ paecelas semestrais.

Com carência de $c = 2$ semestres.

A uma taxa de juros de $i = 5\%\ a.s. = 0,05$.

Vamos encontrar a parcela de amortização utilizando a Fórmula 3.3, e substituindo os dados, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{200.000}{5} \\ A &= 40.000. \end{aligned}$$

A parcela de amortização é de R$ 40.000,00.

Construindo a planilha.

| $n$ | Saldo Devedor | Amortização | Juros | Prestações |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 200.000,00 | - | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 2 | 200.000,00 | - | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 3 | 160.000,00 | 40.000,00 | 10.000,00 | 50.000,00 |
| 4 | 120.000,00 | 40.000,00 | 8.000,00 | 48.000,00 |
| 5 | 80.000,00 | 40.000,00 | 6.000,00 | 46.000,00 |
| 6 | 40.000,00 | 40.000,00 | 4.000,00 | 44.000,00 |
| 7 | 0 | 40.000,00 | 2.000,00 | 42.000,00 |

## 3.3 Sistema de Amortização Misto (SAM)

**Definição 3.3.1** *O sistema recebe este nome, pois ele utiliza o sistema de amortização francês (PRICE) e o sistema de amortização constante (SAC). Os valores do (SAM), são obtidos pela média aritmética dos valores das prestações do sistema PRICE e SAC.*

Para encontrar:

- o valor das prestções, basta usar essa fórmula:

$$PMT(SAM) = \frac{PMT(PRICE) + PMT(SAC)}{2}.$$

- o valor a amortização:

$$A(SAM) = \frac{A(PRICE) + A(SAC)}{2}.$$

- o valor do saldo devedor:

$$SD(SAM) = \frac{SD(PRICE) + SD(SAC)}{2}.$$

- o valor dos juros:

$$J(SAM) = \frac{J(PRICE) + J(SAC)}{2}.$$

**Exemplo 3.3.2** *Uma escola faz um empréstimo de R$ 300.000,00 pelo sistema SAM em cinco prestações anuais à taxa de 10% a.a.. Quais os valores das prestações e obtenha a planilha mostrando os juros, amortização, prestações e o saldo devedor.*

Percebam que já fizemos esse exemplo no sistema PRICE e SAC, então vamos pegar os valores encontrados anteriormente.

Identificando os dados do problema:

O valor do empréstimo é $PV = 300.000$

A taxa de juros é $i = 10\% \, a.a. = 0,1$.

O número das prestações $n = 5$ anos.

Construindo a planilha

| $n$ | Saldo Devedor | Amortização | Juros | Prestações |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 300.000 | - | - | - |
| 1 | $\frac{250.860{,}76+240.000}{2} = 245.430,38$ | $\frac{49.139{,}24+60.000}{2} = 54.569,62$ | 30.000 | $\frac{79.139{,}24+90.000}{2} = 84.569,62$ |
| 2 | $\frac{196.807{,}60+180.000}{2} = 188.403,80$ | $\frac{54.053{,}16+60.000}{2} = 57.026,58$ | $\frac{25.086{,}08+24.000}{2} = 24.543,04$ | $\frac{79.139{,}24+84.000}{2} = 81.569,62$ |
| 3 | $\frac{137.349{,}12+120.000}{2} = 128.674,56$ | $\frac{59.458{,}48+60.000}{2} = 59.729,24$ | $\frac{19.680{,}76+18.000}{2} = 18.840$ | $\frac{79.139{,}24+78.000}{2} = 78.569,62$ |
| 4 | $\frac{71944{,}80+60.000}{2} = 65.972,40$ | $\frac{65.404{,}33+60.000}{2} = 62.702,17$ | $\frac{13.734{,}91+12.000}{2} = 12.867,46$ | $\frac{79.139{,}24+72.000}{2} = 75.569,62$ |
| 5 | 0 | $\frac{71.944{,}8+60.000}{2} = 65.972,40$ | $\frac{7.194{,}48+6.000}{2} = 6.597,24$ | $\frac{79.139{,}24+66.000}{2} = 72.569,62$ |

## 3.4 Sistema de Amortização Americano (SAA)

**Definição 3.4.1** *Neste sistema o valor do empréstimo é feito de uma única vez, no final do período de tempo, e normalmente os juros são pagos periodicamente.*

**Exemplo 3.4.2** *Uma escola faz um empréstimo de R\$ 300.000,00 pelo sistema SAA em cinco prestações anuais à taxa de 10% a. a.. Qual o valor das prestações e obtenha a planilha mostrando os juros, amortização, prestações e o saldo devedor.*

Identificando os dados do problema:

O valor do empréstimo é $PV = 300.000$.

A taxa de juros é $i = 10\%\ a.a. = 0,1$.

O número das prestações $n = 5$ anos.

O juro a ser pago é

$$J = PV \times i$$

$$J = 300.000 \times 0,1.$$

Construindo a planilha.

| n | Saldo Devedor | Amortização | Juros | Prestações |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 300.000,00 | - | - | - |
| 1 | 300.000,00 | - | 30.000,00 | 30.000,00 |
| 2 | 300.000,00 | - | 30.000,00 | 30.000,00 |
| 3 | 300.000,00 | - | 30.000,00 | 30.000,00 |
| 4 | 300.000,00 | - | 30.000,00 | 30.000,00 |
| 5 | 0 | 300.000,00 | 30.000,00 | 330.000,00 |

# Referências Bibliográficas


[1] Assaf Neto, Alexandre, *Matemática Financeira e suas Aplicações.* 4ª edição, São paulo, atlas, (1998).

[2] Azevedo Filho, Ubirajara Gomes, *Matemática financeira: Juros Simples e Composto.* Disponível no site: www.trabalhosfeitos.com/topicos/matematica-financeira-criar-um-filho/0. Acesso em 28 de julho de 2014.

[3] Brasil, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível no site: www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencias.pdf. Visto em 21 de julho de 2014.

[4] Brasi, *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).* Bases Legais, 2000. Disponível no site: www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciasnatureza.pdf. Visto em 21 de julho de 2014.

[5] Bueno, Rodrigo de Losso da Silveira et all, *Matemática Financeira Moderna.* São Paulo: Cegage Learning, (2011).

[6] Céser Filho, Marcelo Salvador *Aprendizagem de Matemática financeira no Ensino Médio.* Porto alegre: UFRGS, (2008). Tese de Dissertação em Mestrado -

Programa de Pós-Graduação em Ensino de matemática, Instituto de matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, (2008).

[7] Farias, Rogério G. de, *Matemática Comercial e Financeira.* Makron Books, 5ª edição, São Paulo, (2000).

[8] Faro, Clóvis de e Lachtermacher, Gerson, *Introdução à Matemática Financeira.* Rio de Janeiro, editora FGV, (2012).

[9] Hazzan, Samuel e Pompeo, José Nicolau, *Matemática Financeira.* 6ª edição, São Paulo, (2007)

[10] Juer, Milton, *Praticando Matemática Financeira.* 1ª edição, (2003), 1ª reimpressão, (2009), Rio de Janeiro, editora Qualitymark.

[11] Matias, Washington F. e Gomes, José M. *Matemática Financeira.* São Paulo, atlas, (1990).

[12] Santos, Epaminondas alves dos, *Matemática Financeira: Uma abordagem contextual.* trabalho desenvolvido junto ao PDE. Disponível no site: www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/epaminondas-matfin.pdf. Visto em 28 de julho de 2014.

[13] Sobrinho, José Dutra Vieira, *Matemática Financeira: juros, capitalização, descontos e séries de pagamentos; empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras; utilização de calculadoras financeiras.* 6ª edição, São Paulo, atlas, (1997).