UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

LEVINDO FELÍCIO DE OLIVEIRA JÚNIOR

A CONTEXTUALIZAÇÃO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE TRABALHO

PALMAS
2014

LEVINDO FELICIO DE OLIVEIRA JUNIOR

A CONTEXTUALIZAÇÃO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO:
UMA PROPOSTA DE TRABALHO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Tocantins como exigência para obtenção do título de MESTRE em MATEMÁTICA, sob a orientação do Professor Doutor Pedro Alexandre da Cruz.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

O48c Oliveira Júnior, Levindo Felício de

A contextualização de matrizes no ensino médio: uma proposta de trabalho / Levindo Felício de Oliveira Júnior. - Palmas, 2014.
86f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2015.
Linha de pesquisa: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz

1. Contextualização. 2. Matrizes. 3. Transformação geométrica. I. Cruz, Pedro Alexandre da. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 512.9434

Bibliotecária: Atilena Oliveira
CRB² 932

LEVINDO FELÍCIO DE OLIVEIRA JÚNIOR

A CONTEXTUALIZAÇÃO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE TRABALHO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática

Local, ____ de _____________ de _____.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr Pedro Alexandre da Cruz (orientado)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS - UFT

____
Prof. Dr Chrystian de Assis Siqueira
UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS - UFT

____
Prof. Dra Lady Sakay
CENTRO UNIVERSITÁRIO DE GURUPI - UNIRG

Dedico este trabalho à minha mãe Tereza, fomentadora de minhas esperanças e responsável pela minha educação formal e informal.

Dedico também em memória de meu sobrinho Msc. Paulo Henrique Dias Júnior, cuja presença sempre será sentida em cada passo de minhas pesquisas.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial à minha mãe, que foram responsáveis pela minha educação e incentivo aos meus estudos.

Ao PROFMAT, pela oportunidade de realizar o Mestrado Profissional em Matemática.

Ao meu orientador Dr. Pedro Alexandre da Cruz, pelas competentes orientações e auxílios, sem os quais esse trabalho não se realizaria.

Aos amigos da escola E.T.I. Marcos Freire, em especial ao professor Edson, professoras Maria de Jesus e ao coordenador pedagógico Martinho Júnior, pela compreensão e paciência nesse período de nervosismo e dedicação dividida entre os estudos e o trabalho.

Agradeço também a CAPES pelo incentivo dado através da bolsa de estudo, para conclusão dessa pesquisa.

Aos amigos da segunda turma de Mestrado Profissional em Matemática da UFT, pelo companheirismo e cumplicidade, mesmo nas horas mais difíceis.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a concretização desse trabalho.

Procuro despir-me do que aprendi.

Procuro esquecer-me do modo de lembrar que me ensinaram,

E raspar a tinta com que pintaram os sentidos,

Desencaixotar as minhas emoções verdadeiras,

Desembrulhar-me e ser eu...

(Fernando Pessoa – Heterônimo Alberto Caieiro)

RESUMO

A presente pesquisa tem o objetivo de apresentar abordagens diferenciadas no ensino de matrizes, levando em consideração a contextualização do tema em assuntos pertinentes para os alunos do ensino médio. Essa preocupação, bem como a interdisciplinaridade, se faz presente nas atividades apresentadas, da mesma forma que as definições e o rigor matemático atribuído aos conceitos sobre matrizes e transformações geométricas. As isometrias no plano nortearam grande parte desta pesquisa pela sua intensa aplicabilidade, entretanto as transformações não isométricas e a abordagem dos grafos dirigidos também se protagonizaram nesse trabalho. O estudo também aborda um pequeno histórico sobre matrizes, ressaltando a importância de seu uso em sala de aula trazendo para isso, justificativas para os algoritmos da multiplicação entre matrizes. As situações didáticas apresentadas primam pelo aspecto contextualizado, tema que foi bastante discutido durante o texto, justificando a intensa preocupação com a fragmentação do currículo escolar. As inter-relações entre algumas disciplinas e mesmo dentro da própria matemática são apresentadas numa maneira de aproximar o aluno dos conceitos matemáticos. A metodologia sugerida é a teoria da problematização, que auxiliou no ciclo contextualizar/descontextualizar/recontextualizar procurando fazer com que o aluno se aproprie do saber, tornando o produto do aprendizado em algo significativo.

Palavras-chave: contextualização, matrizes, transformação geométrica, interdisciplinaridade.

ABSTRACT

This research aims to present different approaches to teaching matrices, taking into account the context of the topic in relevant subjects for high school students. This concern, as well as interdisciplinarity, is present in the activities presented in the same way that the definitions and mathematical rigor given to concepts of geometric transformations and matrices. The isometrics in the plane guided large part of this research in terms of its applicability, however the non-isometric transformations and the approach of directed graphs was also staged in this work. The study also discusses a brief history about matrices, emphasizing the importance of its use in the classroom, bringing for this, justifications for the algorithms of the multiplication of matrices. The didactic situations presented are conspicuous by contextualized aspect, a subject that was widely discussed in the text, which explains the intense concern with the fragmentation of the curriculum. The interrelationships between and even within some disciplines of mathematics itself are presented in a way that make the student closer of the mathematical concepts. The suggested methodology is the theory of questioning, which helped to contextualize cycle / decontextualise / recontextualize, seeking to have the student take ownership of knowledge, making the product of learning something meaningful.

Keywords: context, matrices, geometric transformation, interdisciplinarity

LISTA DE FIGURAS

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O presente trabalho versa sobre a contextualização de matrizes no ensino médio, tema surgido pela constante preocupação quanto à dificuldade dos alunos em significar esse conteúdo, não permitindo uma aplicação em sua vida cotidiana ou relacionada a alguma outra área do conhecimento, da mesma forma que se verifica a falta de materiais seguindo esse conceito, disponíveis ao professor.

Recentes pesquisas têm salientado a necessidade de contextualização no sistema educacional e a sua fundamental importância vem acrescidas de termos como descontextualização e recontextualização, indissociáveis no que diz respeito a dar significado ao que se aprende na escola. Em matemática essa preocupação é também notória e documentos oficiais apontam mudanças nos paradigmas atuais e especialmente em matrizes, tema que é tratado de forma a não dar aplicação real que justifique sua abordagem no ensino médio e muitas vezes tratada de forma mecânica e artificial.

É objetivo desse trabalho, a apresentação de atividades sobre matrizes, destinados ao ensino médio, com a finalidade de promover um aprendizado significativo sobre o tema. As atividades têm como função integrar o conceito de matriz e suas operações com outros campos do conhecimento, ou quando não possível, uma relação com outros tópicos da própria matemática.

O trabalho foi estruturado em cinco capítulos. No início será abordado o conceito de contextualização, embasado em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e também em autores como Brousseau (1996), D'Ambrósio (1997) e Freire (1987) que apontam a preocupação com os métodos de ensino empregados nas escolas e afirmam que sem contexto não há significação do aprendido. Afirmam também que não basta contextualizar os conteúdos, é necessário levar em consideração que o aluno precisa desvincular o tema do contexto introdutório, abstrair seu conteúdo e recontextualizar em uma nova situação, só assim seu aprendizado se efetivará. O capítulo ainda traz uma inquietação no que diz respeito à segmentação das disciplinas na educação básica, fragmentando o conhecimento e dificultando a relação que o aluno faz entre mundo e escola. A aproximação do mundo particular do aluno e a escola é tema recorrente nos escritos de Machado (2012) e Morin (2011) que certificam que a educação deve promover atitudes que promovam a construção da cidadania, envolvendo temas como meio ambiente, políticas sociais, sustentabilidade e outros temas de cunho transdisciplinar.

No capítulo seguinte, é dedicado à relação da matemática com outros campos e a interdisciplinaridade tem papel importante nesse elo, pois é através dela que podemos conectar a matemática ao mundo do aluno, dando sentido aos temas abordados em sala de aula. Entretanto, quando o assunto tratado não permite uma conexão com o mundo exterior ao da matemática, é possível uma conexão com temas internos à própria disciplina, o que Spinelli (2011) chama de contexto intramatemáticos e o define como sendo um cenário onde se organiza caminhos sobre uma rede conceitual, relacionando significados conceituais internos à própria disciplina.

O quarto capítulo é dedicado à história da matemática e suas relações com a aprendizagem significativa. A abordagem histórica nas aulas de matemática é um recurso considerado uma forma de contextualização, como certifica o Programa Nacional do Livro Didático, afirmando que ela pode fomentar elementos importantes na compreensão de matrizes, pois é através da história da matemática que se justifica o algoritmo peculiar na multiplicação de matrizes, assunto abordado por Eves (2011), que evidencia o fato dessa multiplicação ter origem nos estudos de Cayley através de transformações geométricas no plano.

Por fim, o capítulo cinco apresenta algumas atividades sobre matrizes, sempre com a preocupação da contextualização, mesmo que de forma intramatemática. Apresenta-se nesse capítulo atividades envolvendo grafos dirigidos com a finalidade de definir matriz e efetuar suas multiplicações. Abordam-se também as transformações geométricas no plano como motivador das operações com matrizes e relacionando-as com outros campos da matemática, como a trigonometria.

1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS

> *As palavras só têm sentido se nos ajudam a ver o mundo melhor. Aprendemos palavras para melhorar os olhos.*
>
> *H*á muitas pessoas de visão perfeita que nada veem... O ato de ver não é coisa natural. Precisa ser aprendido!
>
> *(Ruben Alves)*

A contextualização na aprendizagem escolar vem passando por um momento crucial na educação brasileira. Documentos oficiais já propõe o uso de atividades contextualizadas desde a década passada, como atestam os apresentados nessa pesquisa. Na matemática, o que se percebe é que seu ensino é profundamente teórico e sem significação para os alunos, acarretando como consequência, um baixo índice de aprendizagem por parte deles.

1.1 A contextualização do conhecimento escolar

O conteúdo de matrizes no ensino médio vem sendo carregado de conceitos e atividades descontextualizadas, sem significados, o que caracteriza uma práxis tradicional, tornando a aprendizagem um tanto tediosa e desinteressante para a maioria dos alunos. De acordo com Freire (1987), a educação deve ser fruto das experiências vividas pelos alunos, tendo o professor o papel de trazer para a sala de aula, temas pertinentes, que possibilitem a produção de conhecimentos, um fato contextualizado, de modo que o educando se aproprie do aprendido, o transforme e o use para melhorar o mundo em que vive. Esse mesmo autor também afirma que as escolas devem deixar de lado o ensino tradicional, chamado por ele de *educação bancária*; comentando que nessa prática, "*o saber é uma doação dos que se julgam sábios aos que julgam nada saber*." (FREIRE, 1987, p. 36).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira estabelece sobre a contextualização de modo incisivo, colocando que o educador deve "*adotar metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes*" (BRASIL, 2013, p. 4), e ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM, o conhecimento contextualizado tem o poder de tirar o educando da condição de passivo na relação ensino-aprendizagem, destituindo-o da práxis bancária, como colocado anteriormente nas citações de Freire. Essa contextualização provoca aprendizagens significativas que mobilizam o aluno e estabelecem entre ele e o objetivo do conhecimento uma relação de reciprocidade; coloca ainda, que:

> Contextualizar o conteúdo que se quer aprendido significa, em primeiro lugar, assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto [...]. O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. (BRASIL, 2000, p.78)

Nos dias atuais, os alunos processam informações com rapidez devido ao avanço tecnológico. O uso da internet em equipamentos eletrônicos faz com que o indivíduo obtenha instantaneamente notícias relevantes ao seu saber, e na contramão dessa situação, existe a possibilidade de o aluno ser atraído por cenários que nada contribuem para o seu aprendizado. Isso tudo nos leva a concluir que a educação da instituição escolar está cada vez mais aquém de sua realidade, pois na maioria das vezes, conta apenas com o livro didático, como material de apoio. O currículo de São Paulo (2010) aborda esse fato, quando diz que a capacidade de aprender é um fato para os alunos e a escola, e coloca a escola numa posição de igualdade em relação ao aluno. E com a democratização do ensino nas últimas décadas, as escolas se deparam com um problema pertinente: o acesso às informações; isso se deve ao fato de que quando um aluno está na escola, não significa que sua aprendizagem seja completa, é preciso ter um ensino-aprendizagem condizente com a presença desse aluno na instituição escolar. O mesmo currículo ainda informa que "*em um mundo no qual o conhecimento é usado de forma intensiva, o diferencial está na qualidade da educação recebida*" (SÃO PAULO, 2012, p. 8) e ainda afirma que:

> Isso muda radicalmente a concepção da escola: de instituição que ensina para instituição que também aprende a ensinar. Nessa escola, as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos tem caráter de ações formadoras, mesmo que os envolvidos não se deem conta disso. (p. 10).

Ações são necessárias para estabelecer uma relação fraterna entre aluno e conhecimento, e essas ações podem dar-se através de uma educação comprometida com os anseios dos jovens e adolescentes, compromisso esse que pode ocorrer por meio de um ensino contextualizado. Contextualizar significa trazer o conteúdo matemático escolar para mais próximo do aluno, para que o mesmo possa ver sua utilidade, beleza, ter sua criatividade aguçada, relacionar o conteúdo proposto com outras disciplinas ou com a própria matemática.

Lima (2005) conceitua contextualização como uma aplicação prática do conteúdo, ou seja, aplicar um conteúdo antes explanado de forma abstrata é uma forma de contextualização e diz que:

> [...] a estrutura da Matemática que se ensina deve ser montada em três pilares: conceituação, manipulação e aplicação. Contextualização é aplicação. Você só pode aplicar um instrumento matemático quando o entende (conceituação) e sabe operar com ele (manipulação). (LIMA, 2005, p. 28).

Essa visão sobre contextualização é coerente com os propósitos da disciplina, como nos traz um dos objetivos estabelecidos pelos PCNEM, afirmando que com o objetivo de resultar numa aprendizagem real e significativa para os alunos, eles devem "*aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas*" (BRASIL, 2006, p. 42).

Nos trabalhos de Berbel (2011, 2012) encontramos implicitamente o conceito de contextualização quando a autora cita Maguarez, que propõe um aprendizado através da metodologia da problematização, onde se observa algumas etapas a serem cumpridas: a observação da realidade, pontos chave ou observação do modelo, hipótese ou teorização, hipóteses de solução e aplicabilidade no cotidiano. Como se pode ver, a contextualização se faz presente em quase todos, ou todos os passos propostos por Maguarez. O primeiro item, a teoria da problematização focaliza o assunto problema, no qual o aluno deve trazer para a aula, numa forma de participação inicial no processo de aprendizagem, um tema gerador, caso contrário cabe ao professor iniciar o assunto com algum objeto de estudo inerente à vida do discente. No segundo passo é onde são colocados os pontos chave do processo, ou seja, é a hora das perguntas relevantes, que fazem com que o aprendiz possa ser conduzido em direção à curiosidade e investigação. Já no terceiro, o da hipótese, é o momento da discussão do modelo, à luz da teoria, visando soluções ou novos conhecimentos sobre o assunto; é a parte da abstração. No próximo passo, o da hipótese de soluções, que é derivado da teorização, o aluno propõe algumas soluções e suas possíveis consequências em torno do problema gerador. O último estágio do arco, que é a aplicação à realidade, tem como objetivo o propósito de servir-se das soluções, para transformar a realidade da qual se faz parte.

Como se observa, a contextualização é o elemento primordial para que todo o processo se concretize, pois desde o início é necessário contextualizar o objeto de estudo, como cita Berbel:

> Conduzir os alunos a problematizarem aspectos da realidade viva, relacionando-os com temas de estudo é um fato pedagógico inegavelmente mais rico, quando comparado às atividades de estudo de grande parte dos programas escolares, tradicionalmente tratados como temas abstratos e distantes da vida dos estudantes. (BERBEL, 2011, p. 33).

E isso é contextualização, fazer o aluno participar do processo com temas pertinentes ao seu mundo desde a etapa da teorização, que é uma etapa primordial nas etapas da teoria da problematização.

> A teorização sugere naturalmente certas hipóteses de solução das quais derivam aplicações práticas na forma de sugestões para o melhoramento dos métodos de ensino. (BERBEL, 2012, p. 53).

1.2 **Contextualização como produção de significado**

Nesse ponto da pesquisa o leitor se depara com uma dicotomia entre ensinar e aprender, de modo que nem sempre o que se ensina é aprendido e nem sempre o que se é aprendido é ensinado. É preciso refletir sobre o papel do educador no sistema educacional brasileiro. Refletir no sentido de tornar o professor/educador um pesquisador, e fazer com que sua práxis seja carregada de elementos que possibilitem ao aluno, motivação para o que aprende, e isso se concretiza com a contextualização do que é ensinado e dá um novo rumo para a resposta[1] do aluno, pois com essa aprendizagem, seu conhecimento se torna significativo.

A aprendizagem significativa é intrínseca à aprendizagem contextualizada, pois se há um contexto, deve haver um significado do aprendido por parte do aluno, caso contrário, se o contexto estiver fora de sua realidade, configura-se uma não contextualização. Santana e Carlos (2013), em seu artigo, comenta um aprendizado sem contextualização dizendo que "*Quando o novo material de aprendizagem é incorporado, armazenado à estrutura cognitiva do educando de forma literal, arbitrária e sem significado, a aprendizagem é dita mecânica ou automática.*" (SANTANA; CARLOS, 2013, p. 16).

---

[1] Resposta do aluno é colocada aqui como o retorno do que foi aprendido

A significação do aprendido faz com que o aluno obtenha para si a motivação para, de posse do novo conteúdo, ampliar seus conhecimentos de mundo, podendo transcender o que lhe é imediatamente sensível. Sensível, aqui proposto, seria o que lhe é particular, coisas do seu mundo, de sua realidade. Se o aluno não é capaz de transcender, por meio de um conhecimento contextualizado e cheio de significados, sua aprendizagem se torna sem sentido; um mero aglomerado de informações sem utilidade.

É preciso lembrar também que o jovem ou adolescente do Ensino Médio é imediatista, ou seja, não adianta ensinar Matrizes com o propósito de, num ensino superior, servir de ferramenta para Álgebra Linear. É necessário também levar em consideração àqueles que não vão seguir com seus estudos na área de Exatas, assim também como os que não vão prosseguir com seus estudos na Educação Superior. Essa abordagem de Matrizes é um fato preocupante com o qual nos deparamos na maioria dos livros didáticos de Ensino Médio, como os apresentados no Programa Nacional do Livro Didático, do governo federal. Doravante, vamos nos ater na produção de significados com o propósito de deixar os alunos motivados, como afirma Machado: "*os alunos precisam ser estimulados para estudar a matéria em função de seus interesses, de seus projetos*" (MACHADO, 2002, p. 146) e mais adiante, coloca que o professor de matemática não pode apenas justificar seu ensino na *"[...] sua matéria, argumentando, em termos de beleza intrínseca do tema, de sua exatidão, de seu rigor, da sofisticação de seus raciocínios [...]*" (MACHADO, 2002, p. 146).

Tendo em vista a contextualização do ensino, o educador precisa ter em mente que o aluno é o protagonista na relação entre compreender e saber, no sentido de que o saber acadêmico deve ser compreendido de maneira clara e objetiva, fazendo com que a construção do conhecimento seja possível mediante as ferramentas a ele oferecidas. Na questão de contexto significativo, Machado ainda diz que:

> [...] contextualizar é uma estratégia fundamental para a construção de significações. Na medida em que incorpora relações tacitamente percebidas, a contextualização enriquece os canais de comunicação entre a bagagem cultural, quase sempre essencialmente tácita, e as formas explícitas ou explicitáveis de manifestação do conhecimento. (MACHADO, 2002, p. 150).

Assim, contextualizar como produção de significados se torna primordial na elaboração de um plano didático para um aprendizado eficaz. O aluno aprende de maneira contextualizada e aplica o conteúdo em situações diversas, pois quando se torna significativo para ele, ocorre o aumento do interesse pelo objeto de estudo e, por conseguinte a utilização em outras situações que lhe sejam relevantes.

1.3 Descontextualização e recontextualização

Ao contextualizar um conteúdo, o professor apresenta ao aluno uma maneira diversificada e cheia de significados proporcionando um aprendizado eficaz. Mas após a contextualização, o aluno precisará de meios para poder aplicar os conteúdos estudados em outros campos do seu próprio conhecimento. Será o professor capaz de abranger todas as possíveis contextualizações de determinado tema? Obviamente não, mesmo por que elas podem ser inúmeras para o tempo proposto em cada assunto dentro do currículo, e também deverá se preocupar com a vivência de cada aluno, fornecendo-lhes situações dentro das expectativas de cada discente, dessa forma, nem todo tema pode ser contextualizado de maneira plena. Outro fator a ser levado em consideração pelo educador é que não se pode contextualizar de maneira prática, qualquer tema da matemática, veja como exemplo o caso dos números irracionais: é inviável esse tipo de contextualização, as aplicações desse tema levam a aproximações dos irracionais, transformando-os em decimais exatos na exploração e investigação de medidas. O tema se viabilizaria, então, num contexto histórico, abrangendo a continuidade da reta numérica real, onde pode ser trabalhado o valor exato de cada irracional, de forma geométrica e através de construções com régua e compasso. Um contraexemplo disso é encontrado na prova do sistema de avaliação educacional de palmas, numa tentativa de contextualizar números irracionais.

> Herculano vai fazer uma calçada em frente a sua casa. A medida do comprimento é representada em metros pela expressão: $(3\sqrt{10}+6)$m. Resolvendo a expressão encontramos o comprimento da calçada. Então, o comprimento da calçada de Herculano é igual a:
>
> 9,48 m (B) 11,47 m (C) 15,48 m (D) 69,48 m. (SAEP – 2012)

Nesse exemplo verificamos que a contextualização ocorreu ao citar a medida do comprimento de uma calçada efetuada por Herculano. Mas como Herculano chegou a essa medida? Utilizou quais instrumentos? O uso de $\sqrt{10}$ só será empregado na resolução se o aluno souber sua aproximação exata, ou seja, $\sqrt{10} = 3{,}16$. Ora, se usar 3,16, o objetivo da atividade é verificar a capacidade de o aluno operar com decimais exatos, e não se aprendeu sobre o conceito de irracionais.

É importante também não exagerar nas contextualizações, de modo a tornar a matemática como uma simples ferramenta auxiliar de outras áreas do conhecimento, sem um currículo específico, com seus objetivos e metas a serem cumpridas, pois como os PCNEM já abordam:

> [...] a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000, p. 40).

O fato é que, de posse de uma atividade contextualizada, o aluno possa descontextualizá-la, e recontextualizá-la em outra situação, sendo capaz assim de transcender o que lhe foi imediatamente sensível:

> É na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2000, p. 83).

Brousseau (1996) usa o termo descontextualização do saber no sentido de o aluno tomar para si um conhecimento contextualizado, descontextualizá-lo e recontextualizá-lo, ou seja, aprender algo com significado, abstrair o conteúdo e o usar em outras situações, concretas ou não, dando-lhe outro significado, agora particular em seu rol de conhecimentos cotidianos ou acadêmicos. Esse autor ainda afirma que:

> O matemático não comunica seus resultados tal como os obteve, mas os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível, realiza uma “didática prática” que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um contexto temporal. (BROUSSEAU, 1996, p. 48).

E mais adiante ainda:

> O professor realiza primeiro o trabalho inverso ao do cientista, uma recontextualização do saber: procura situações que deem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. Porém, se a fase de personalização funcionou bem, quando o aluno respondeu às situações propostas não sabia que o que “produziu” é um conhecimento que poderá utilizar em outras ocasiões. (BROUSSEAU, 1996, p. 48).

Essa descontextualização e recontextualização se faz importante no processo educativo do aluno, pois é aí que o aluno consegue se apropriar do saber e fazer dele uso oportuno ao seu mundo, pois como afirma Machado, um aluno é competente, quando consegue absorver um contexto e liberar-se dele, “*abstraindo suas peculiaridades, não para distanciar-se de qualquer contexto, mas sim para abrir as portas para novas contextualizações.*” (MACHADO, 2006, p.5). Nota-se então que um ensino eficaz é àquele que consegue que o aluno busque novas práticas naquilo que foi aprendido, ou ensinado, e consiga a cada nova situação, contextualizar e descontextualizar para recontextualizar, tornando-se um ciclo, um círculo vicioso, um processo contínuo, pois como afirma Machado:

> Quem sabe que três abacaxis mais quatro abacaxis são sete abacaxis, mas tem dúvidas sobre o resultado da adição de três bananas com quatro bananas, não aprendeu a somar três com quatro, e é certamente incompetente. [...] É incompetente tanto quem não é capaz de contextuar o que conhece, viabilizando uma ação plena de significações, quanto quem não consegue alçar-se por sobre as peculiaridades do contexto, abstraindo os elementos irrelevantes para o fim almejado e atendo-se ao que realmente se considera fundamental. (MACHADO, 2002, p. 4)

A abstração, como um dos pontos culminantes da matemática, faz parte então do processo contextualizar-descontextualizar, pois é nela que se alicerça a competência do saber pleno. Um cidadão competente na sua vida acadêmica, certamente é abastecido de toda uma base teórica, abstrata, que pode ter ocorrido antes ou depois da contextualização.

Assim, contextualizar, descontextualizar e recontextualizar são primordiais para o aprendizado do aluno, pois é essa práxis que faz o aprendido se tornar significativo, podendo os conceitos teorizados, serem aplicados em situações novas e sem relação com o primeiro contexto.

1.4 Os equívocos da contextualização

Ao sugerir um ensino contextualizado, deve-se ter atenção com os exemplos propostos aos alunos, bem como na escolha dos materiais pré-existentes. Uma atividade contextualizada não é meramente um texto bonito afrente de um exercício, se o mesmo não se relaciona com a resolução, de modo que uma leitura minuciosa seja imprescindível. Spinelli (2011) quando estudou questões do ENEM[2] quanto à contextualização, constatou que embora a proposta dessa avaliação fora de exercícios contextualizados, não foi o que encontrou em alguns exames. Como exemplo temos a prévia da avaliação fornecida pelo INEP[3]/MEC[4] proposto em 2009, e afirma que o "*[...] longo texto que forma o enunciado apresenta uma série de dados e informações completamente irrelevantes para a resolução que exige.*" (SPINELLI, 2011, p.36).

A questão referida anteriormente é composta de um texto sobre a tecnologia das lâmpadas de LED e informa sobre sua duração que é em média 100 mil horas, como pode ser visto na transcrição abaixo:

> A evolução da luz: lâmpadas LED já substituem com grandes vantagens a velha invenção de Thomas Edison.
>
> A tecnologia do LED é bem diferente das lâmpadas incandescentes e das fluorescentes. A lâmpada LED é fabricada com material semicondutor semelhante ao usado nos chips de computador. Quando percorrido por uma corrente elétrica, ele emite luz. O resultado é uma peça muito menor, que consome menos energia e tem uma durabilidade maior. Enquanto uma lâmpada comum tem vida útil de 1.000 horas e uma fluorescente de 10.000 horas, a LED rende entre 20.000 e 100.000 horas de uso ininterrupto.
>
> Há um problema, contudo: a lâmpada LED ainda custa mais caro, apesar de seu preço cair pela metade a cada dois anos. Essa tecnologia não está se tornando apenas mais barata. Está também mais eficiente, iluminando mais com a mesma quantidade de energia.
>
> Uma lâmpada incandescente converte em luz apenas 5% de energia elétrica que consome. As lâmpadas LED convertem até 40%. Essa diminuição no desperdício de energia traz benefícios evidentes ao meio ambiente.
>
> A evolução da luz. Veja, 19 dez. 2007. Disponível em http://veja.abril.com.br/191207/p_118.shtml. Acesso em: 18 out. 2008.
>
> Considerando que a lâmpada LED rende 100 mil horas, a escala de tempo que melhor reflete a duração dessa lâmpada é o:
>
> (A) dia (B) ano (C) decênio (D) século (E) milênio. (ENEM – 2009).

[2] Exame Nacional do Ensino Médio
[3] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
[4] Ministério da Educação e Cultura

Como observado por Spinelli (2011), o caput da questão não influencia na resolução do problema, que pode ser facilmente resolvida apenas com a informação do último parágrafo, não justificando, portanto, o uso do texto introdutório.

Outro exemplo de questão não contextualizada pode ser encontrado na prova oficial do ENEM de 2009, na qual a situação problema fala sobre um paciente caminhando sobre a rampa de um hospital e caminha 3,2 metros. Um paciente medindo a distância numa rampa? Que contexto é esse? Segue a transcrição dessa questão:

> A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é
>
> (A) 1,16 m. (B) 5,6 m. (C) 3,0 m. (D) 7,04 m. (E) 5,4 m. (ENEM, 2009)

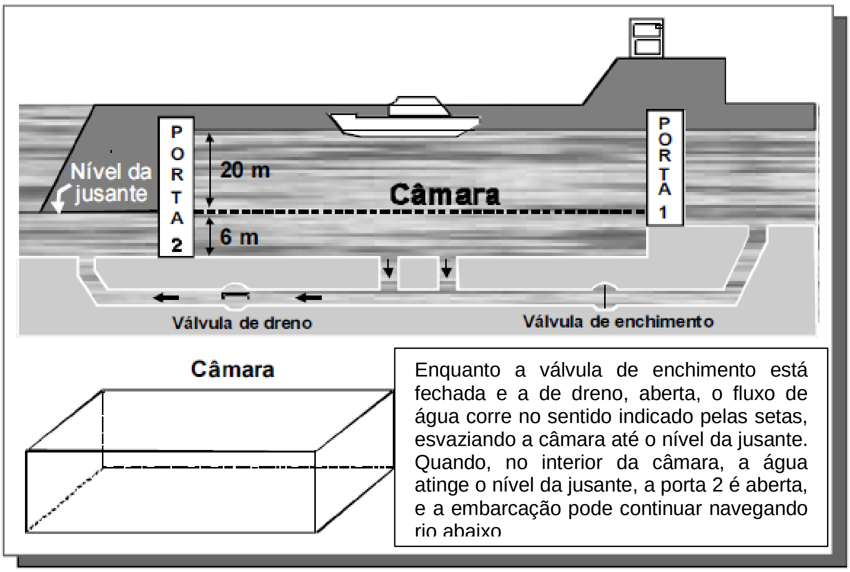
Pereira e Mello comentam essa questão dizendo que:

> [...]. Não é uma forma realista de se calcular comprimento de rampas e é difícil imaginar como um paciente poderia "perceber" as distâncias informadas. Essa "contextualização" um tanto artificial não chega a criar problemas desde que não seja levada demasiadamente a sério. O risco aqui é induzir o estudante a acreditar que se trata de uma aplicação real da Matemática o que é, no máximo, uma ilustração conveniente. (PEREIRA; MELO 2010, p. 15)

Esses, entre outros exemplos encontrados em avaliações, livros didáticos, vestibulares, mostram a maneira equivocada de se abordar a contextualização no ensino de matemática. É preciso conceituar contexto e contextualização, para depois, seguindo esse conceito, poder abordar um tema de forma realmente contextualizada. A definição de contextualização é importante para nortear o trabalho do professor na tarefa de tornar o conhecimento mais significativo, entretanto, o erro na contextualização, faz com que um tema não tenha significado para quem o aprende.

Um exemplo de questão contextualizada pode ser encontrado na prova do ENEM de 2006:

> Eclusa é um canal que, construído em aguas de um rio com grande desnível, possibilita à navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema abaixo, esta representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná ate o nível da jusante.



A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

A) 2 min B) 5 min C) 11 min D) 16 min E) 21 min (ENEM – 2006)

Como pode ser visto nessa questão, o contexto foi bem utilizado, pois para a resolução da mesma é necessário uma leitura atenta da questão e do desenho informativo com a finalidade de uma coleta de dados numéricos essenciais à resposta.

1.5 Contextualização na matemática

Atualmente encontra-se nos livros didáticos, um ensino de matrizes carregado de atividades fora da vivência dos alunos, tanto no que tange à aplicação no cotidiano quanto à relação com outros pontos da matemática. Num breve levantamento de algumas obras, podemos verificar como são abordados temas relacionados com matrizes, onde é colocada a teoria e depois a resolução de exercícios que nem sempre são aplicações, mas mero adestramento de formas de se resolver, tal qual um “siga o modelo”, privando os discentes de um comportamento ativo no seu aprender.

No trabalho de Spinelli (2011) encontramos uma passagem que mostra uma possível preocupação com a importância de uma nova abordagem para o Ensino Médio, pois sem contexto não há significação para o aluno, tornando-o um mero expectador de um conhecimento que às vezes se expressa inacessível à sua vivência.

> Conduta razoavelmente frequente nos cursos de Matemática no Ensino Médio, nas aulas ou no material didático, consiste na apresentação da definição sobre determinado tema, seguindo-se a aplicação dos conceitos em situações-problema. Assim, no Ensino Médio, o sentido parece inverter-se, partindo do abstrato em direção ao concreto, especialmente nas abordagens conceituais que apresentam aplicações (concreto) apenas quando as definições (abstrato) estão perfeitamente compreendidas. (SPINELLI, 2011, p. 23).

O que se percebe é que há uma disposição em organizar os conteúdos dos livros didáticos de forma única: teoria seguida de exemplos de aplicação e exercícios. O Guia de Livros didáticos constata que

> Essa é uma característica que dificulta as tentativas de o professor conduzir aulas nas quais os alunos pensem, discutam possíveis soluções e reconheçam a necessidade de ampliação dos conhecimentos. (BRASIL, 2011, pp. 39,40).

Isso faz com que nossos alunos se tornem repetidores de métodos de resolução e não seres pensantes, dinâmicos, construtores de seu próprio conhecimento. Machado (2012) diz que os professores colocam aos alunos problemas dos livros e que não são nossos, nem dos alunos, são de outros. E esse fato contribui para a ideia de que os materiais disponíveis para trabalhar o conteúdo proposto são carregados de recursos não muito eficazes, trazendo atividades de um cotidiano fora da realidade da maioria dos alunos, e não fomentando a criatividade e busca de novas soluções. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) e no Caderno do Professor (2009) do material didático do governo do Estado de São Paulo, encontramos discussões oportunas que afirmam que contexto não é apenas dar exemplos com situações vividas pelos alunos, é preciso ir mais além, precisamos comprometer o aluno na construção e produção de significados transcendentes ao seu conhecimento; esses documentos afirmam ainda que os temas abordados nos livros didáticos priorizam aspectos meramente algébricos, que pode dar uma base teórica importante, a ser usada nos prosseguimentos dos estudos em matemática ou áreas afins, e isso não é suficiente, pois o professor deve apresentar dois aspectos importantes na aprendizagem: aplicabilidade e formação conceitual. E isso nos faz enxergar o ensino de matemática com outros olhos, os olhos da contextualização.

Essa preocupação quanto à contextualização se torna incontestável no momento em que o aluno chega a esse grau de ensino, provindo do ensino fundamental e basicamente depara-se com toda uma abstração laboriosa, seguida de algumas aplicações aquém de seu interesse pessoal. Isso tudo dificulta o processo ensino-aprendizagem. Veja por exemplo no caso de funções exponenciais, onde podemos justapor os escritos de Lima (2005) e Berbel (2011, 2012) nos quais o exemplo apontado pelo primeiro autor se amolda ao Arco de Maguarez, estudado pelo segundo autor. A gênese do problema trazido como exemplo consiste na observação do crescimento populacional de certo tipo de bactéria, o que seria o primeiro passo do arco, onde os aprendizes podem indagar como pode ocorrer esse tal crescimento e o professor pode propor uma tabela com valores relacionados a tal crescimento:

Tabela 1 – Relação entre tempo e número de bactérias

Tempo em horas	0	1	2	3	4
Número de bactérias	30	60	120	240	480

A partir dessa tabela, os alunos podem verificar que a cada hora, o número de bactérias dobra, e logo em seguida vem a teorização, onde o papel do professor é fundamental na medida em que pode averiguar o conhecimento do aluno, até chegar a um modelo matemático capaz de se adequar á situação, que no caso, é o da função exponencial do tipo $y = k \cdot a^{nx}$, com k e n constantes e a positivo e diferente da unidade. Essa teorização, apesar de se propor gradativa, não se supõe menos importante, como afirma Lima "*o papel da conceituação é fundamental, pois sem ela você não saberia qual instrumento matemático iria usar para resolver o seu problema*" (Lima, 2005, p. 28). Feita a teorização, é hora de usar o modelo na resolução do problema, onde pode ser verificado que a população inicial é de 30 bactérias e só a partir daí dobra a cada hora, e associando esses valores aos do modelo, concluímos que a função que descreve esse crescimento é: $y = 30 \cdot 2^{x}$. De posse dessa ferramenta, os alunos podem verificar a facilidade de calcular o número de bactérias em determinado momento, sem a necessidade da tabela, construir o gráfico e verificar seu crescimento. Concluída a fase de aplicação do modelo para resolução do problema, é importante que o aluno perceba que é capaz de usar esse conceito aplica-lo em outra situação, que não a do problema proposto.

Esse exemplo sobre função exponencial pode ser facilmente encontrado em livros didáticos disponíveis no mercado, já quanto ao conteúdo de matrizes não é o que acontece, seu desenvolvimento é carregado de teoria, conceitos abstratos e sem aplicabilidade. O Guia de Livros Didáticos do Governo Federal afirma que apesar de ser de grande relevância a abordagem de Matrizes nas obras é um tratamento com muitas subdivisões sem conexões umas com as outras e cheias de listas de exercícios sem vínculo com a realidade do aluno, fato este que não deveria acontecer, já que o estudo de matrizes está ligado a diversos ramos do conhecimento humano, mas mesmo assim se torna sucessivo o uso de *"situações em que o contexto serve apenas como acessório à informação e não como ponto de partida para o aprendizado"* (BRASIL, 2006, p. 36).

O professor, na maioria das vezes, possui como ferramenta, apenas o livro didático para trabalhar os conteúdos em sala de aula e se vê deparado com esse material pouco inovador. No Guia de Livros didáticos foram analisadas algumas obras e, no que se refere ao conteúdo de matrizes, constata que ele é feito regularmente na segunda série desse segmento de ensino, que é anterior ao de sistemas lineares, na maioria das obras; o contexto se dá através de tabelas de dupla entrada e em alguns poucos livros evidencia-se uma associação às transformações geométricas no plano, o que pode ser inovador no processo de aprendizagem sem comprometer o conteúdo.

O PCNEM (2000) também orienta sobre contextualização, entretanto atenta ao fato de não se deixar levar a uma banalização, correndo o risco de perder o caráter sistemático da aprendizagem, "*[...] contextualizar os conteúdos escolares não é liberá-los do plano abstrato da transposição didática para aprisioná-los no espontaneísmo e na cotidianidade.*" (BRASIL, 2000, p. 81), a abstração se faz necessária no que se refere à descontextualização do objeto estudado a fim de se contextualizar em outra vivência. Dessa forma não se justifica um conteúdo ser ensinado sem significado aparente, como coloca Machado (2002) afirmando que a matemática não é um fim em si mesmo e nem pode ser vista como uma barreira para o desenvolvimento pessoal do aluno, assim sendo, através dela, o aluno deve ter em vista um horizonte de realizações de projetos pessoais. .

Assim não tem sentido que na escola média, o aluno deva aprender Matriz sem um significado contextualizado como corriqueiramente está proposto nos livros didáticos. O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo esclarece que sem contexto, o conteúdo objetiva-se apenas para fins docentes, e chama esse fato de fenômeno da mediocrização do ensino.

Uma das justificativas do o ensino de matrizes na escola de educação básica é a utilidade para cursos de exatas no ensino superior, como se todo estudante tivesse um objetivo propedêutico, mas a LDB aponta o que chama de perfil de saída do educando no seu artigo 35, e diz que ao concluir o ensino médio, o aluno não apenas tenha a possibilidade de prosseguimento de estudos, mas também que prepare o educando para o trabalho, transformando-o num cidadão crítico e consciente, capaz de transformar o meio em que vive.

Cerqueira (2005), ainda sobre esse fato, sustenta a ideia de que o Ensino Médio, sendo uma prorrogação do Ensino Fundamental, traz de lá a aproximação de alguns campos do conhecimento matemático onde o objetivo é de construir seu próprio conhecimento e "*agora estão em condições de utilizá-los, ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes, como as de abstração e raciocínio em todas as suas vertentes*" (CERQUEIRA, 2005, p. 28), dessa forma, o ensino de Matrizes pode ser considerado uma ampliação de toda a álgebra construida no nível precedente de ensino, seja no estudo de sistemas de equações, análises de tabelas, construção de gráficos ou isometrias no plano, conteúdos esses que serão abordados como justificativa no estudo dessa pesquisa.

Assim, a contextualização do ensino de Matrizes deve ser tratada com relevância, pois é através dela que o educando consegue relacionar o tema estudado com seu cotidiano, com outras áreas do conhecimento ou até mesmo com outros temas da matemática, proporcionando um aprendizado consistente e cheio de significados.

O Programa Nacional do Livro Didático, do governo federal, já vem tratando desse aspecto de modo categórico, pois esclarece que na contextualização é que se afere a maneira "*como são atribuídos significados aos conteúdos matemáticos por meio de ligações com práticas sociais atuais e com outros campos do saber*." (BRASIL, 2011, p. 11) o que pode ser considerado uma preocupação extrema com a contextualização no ensino básico no Brasil.

2 A MATEMÁTICA E OS OUTROS CAMPOS DO SABER

Há escolas que são gaiolas e há escolas que são asas.
Escolas que são gaiolas existem para que os pássaros desaprendam a arte do voo. Pássaros engaiolados são pássaros sob controle. Engaiolados, o seu dono pode levá-los para onde quiser. Pássaros engaiolados sempre têm um dono. Deixaram de ser pássaros. Porque a essência dos pássaros é o voo.
Escolas que são asas não amam pássaros engaiolados. O que elas amam são pássaros em voo. Existem para dar aos pássaros coragem para voar. Ensinar o voo, isso elas não podem fazer, porque o voo já nasce dentro dos pássaros. O voo não pode ser ensinado. Só pode ser encorajado.

Rubem Alves

Quando não se estabelece uma relação entre o que é aprendido na escola com o universo do aluno, ou quando não se relaciona as disciplinas do currículo escolar, o ensino acaba sendo fragmentado em porções heterogêneas. A interdisciplinaridade faz com que se relacionem conteúdos que aparentemente não se conectam, fazendo com que o uso da Matemática e demais disciplinas sejam significativos ao aprendizado do aluno.

2.1 Interdisciplinaridade

O currículo de matemática proposto por órgãos governamentais sugere uma contextualização e também uma relação entre a matemática e outros campos do saber, a essa relação se dá o nome de interdisciplinaridade.

A definição de interdisciplinaridade, de acordo com Wikipédia[5] é "*a integração de dois ou mais componentes curriculares na construção do conhecimento*"; já conforme o dicionário MICHAELIS[6] o significado é: "*comum a diversas disciplinas*" e o dicionário Priberam da Língua Portuguesa[7] acorda com os anteriores definindo

[5] Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Interdisciplinaridade>, acesso em setembro, 2014.
[6] Disponível em <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=interdisciplinar>, acesso em setembro, 2014.
[7] Disponível em <http://www.priberam.pt/DLPO/interdisciplinar> acesso em setembro, 2014.

como "*o que implica relações entre várias disciplinas ou áreas do conhecimento*", e ainda, "*que é comum a várias disciplinas*".

O conceito de aprendizagem interdisciplinar vem de encontro a um problema estrutural dos currículos escolares que é o fato das disciplinas serem truncadas e divididas em áreas de conhecimento que de acordo com os PCNEM (2000) são Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Essas áreas por sua vez são divididas em disciplinas, as quais lhe são pertinentes e cada uma com suas cargas horárias e seus conteúdos mínimos. Essa organização curricular composta desse sistema educacional segmentado é chamada por Spinelli (2011) de estrutura multidisciplinar. Segundo esse autor

> [...] *o conhecimento é construído a partir da justaposição de pequenos lotes de significados conceituais, de limites muito bem demarcados*. [...] A fragmentação dos conteúdos, expressa em organizações multidisciplinares, é tributária de uma concepção epistemológica segundo a qual o conhecimento é construído a partir da justaposição de pequenos lotes de significados conceituais, de limites muito bem demarcados, compondo uma grande área sobre a qual se distribuem todos os conhecimentos adquiridos. (SPINELLI, 2011, p. 90).

Paulo Freire, entrevistado por Shor (1986) comenta que entramos na escola para aprender a ler, não apenas palavras e textos, mas para ler o mundo. Essa colocação vem afirmar a importância da interdisciplinaridade entre os diversos conhecimentos, pois o mundo não é compartimentado em biologia, física, artes ou matemática, mas vemos nele, todas as ciências integradas e, como ser capaz de ler o mundo, se a escola se distancia da realidade.

Em matemática quando se usa o artifício da interdisciplinaridade, relacionando-a com as outras disciplinas do currículo faz com que o aluno sinta sua importância na construção de um saber plurificado e coberto de significados. Essa interdisciplinaridade consagra a ininterrupção do que foi aprendido, a não segmentação do assunto, e como afirmam as Diretrizes Curriculares do Ensino Médio, o professor não tem o papel de apenas transformar o aluno num especialista em sua disciplina, mas sim "*de estimular, nesse aluno, uma postura de busca do conhecimento, de continuidade do aprendizado mesmo fora da escola*" (BRASIL, 2006, p. 36).

A interdisciplinaridade, como comunhão de disciplinas num objetivo único deve ser trabalhada no projeto pedagógico da escola, abrangendo um número considerável de disciplinas envolvidas no processo, não sendo encarada como uma nova ciência, mas sim como um modo de interagir disciplinas distintas sem lhes tirar a personalidade.

> [...] a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sobre diferentes pontos de vista. Em suma, a interdisciplinaridade tem uma função instrumental. Trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos. (BRASIL, 2000, p. 21).

Entretanto, a interdisciplinaridade vem acumulando ao currículo novas disciplinas não intencionais, como ocaso da biomedicina, a biomatemática, a ecologia, segmentando mais ainda o sistema educacional. Não que isso acarrete um impasse sobre as práticas transdisciplinares, mas não se pode correr o risco de se criar novas ciências, aumentando o leque de matérias a serem estudadas no currículo escolar como podemos ver em alguns casos a dissociação da matemática financeira da disciplina de matemática, ou no caso da ecologia às vezes disjunta da biologia.

É comum vermos professores de matemática resistentes ao uso da interdisciplinaridade, alegando não poderem corroborar com os objetivos, pois seus conteúdos não se encaixam no tema proposto. Por outro lado, docentes de outras disciplinas se alicerçam apenas na estatística, juros ou regras de três como suporte matemático para os projetos interdisciplinares, minimizando a importância de outros tópicos matemáticos para o mundo em que vivemos. Contudo, algumas iniciativas particulares, envolvendo duas ou três disciplinas afins, como matemática, física, biologia ou química, podem auxiliar no aprendizado do aluno sem maiores frustrações na interdisciplinaridade, mesmo não sendo muito efetivas.

A derrubada da fragmentação do ensino médio está a encargo da interdisciplinaridade, e é nesse momento que nos deparamos com uma infinidade de projetos propostos por professores, alunos e demais atores do universo escolar no propósito de uma melhor aquisição de conhecimento, contudo, deve-se pensar no tempo disposto a realizar o projeto interdisciplinar, pois uma demanda de tempo curto não contempla todos os objetivos de todas as ciências envolvidas, necessitando de um projeto bem elaborado, prevendo as disciplinas envolvidas, o tempo necessário e o espaço físico necessário a sua realização.

> A interdisciplinaridade só é possível em um ambiente de colaboração entre os professores, o que exige conhecimento, confiança e entrosamento da equipe, e, ainda, tempo disponível para que isso aconteça. [...] Não se deve, também, esperar que a interdisciplinaridade aflore por si só, sem que haja um movimento para isso e independentemente do contexto das disciplinas. Cada disciplina possui características e assuntos que lhe permitirão conexões com outras disciplinas com maior ou menor facilidade. (BRASIL, 2006, p. 37)

A questão da interdisciplinaridade em matemática é preocupante devido ao fato de eventualmente ela não se relacionar com outras áreas do conhecimento, ficando isolada das demais disciplinas e refém de situações artificiais, como colocam as Orientações Curriculares para o Ensino médio, esse fato pode acarretar uma desconstrução dos objetivos da disciplina em detrimento de uma interdisciplinaridade pouco eficiente.

> Deve-se evitar que a interdisciplinaridade se resuma a um discurso generalista que pouco ou nada significa. A interdisciplinaridade só é possível a partir da existência de disciplinas e do estabelecimento de um conjunto sólido de conhecimentos que elas propiciam. O que deve ser buscado é o diálogo entre esses conhecimentos para que sejam possibilitadas novas aprendizagens. (BRASIL, 2006, p. 38).

Fica evidente que o sentido denotativo de interdisciplinaridade concebe uma dialética entre conhecimentos, uma aproximação entre os objetivos distintos. Distintos, mas com uma equidade plural de contribuir para uma compreensão consistente do mundo e fazer valer o papel da educação com intenção de inserir o aluno numa realidade onde não haverá bifurcação de saída entre ciências, a bifurcação é de entrada, o conhecimento real não diverge, e sim converge a um único propósito: a compreensão dos fatos para uma vida melhor, um trabalho melhor, um conhecimento melhor.

Santaló (1996) relaciona alguns tópicos matemáticos com outras áreas do saber, enaltecendo a importância da interdisciplinaridade no efetivo aprendizado escolar. Um desses exemplos é o uso dos conjuntos nebulosos em ciências sociais,

> Em múltiplas áreas das ciências sociais e da biologia, medicina (diagnóstico por computadores) engenharia (segurança nas estruturas) e outros cursos, têm resultado de interesse os chamados conjuntos nebulosos, os conjuntos para os quais a pertinência ou não de um elemento está definida com certa probabilidade. Trata-se em geral de chegar a resultados com algum grau de confiabilidade a partir de resultados imprecisos. (p. 21).

Outro modelo de atividade pode ser visto na grande relação entre biologia e matemática, "*a biologia é a ciência que mais tem assimilado parte da matemática*" (SANTALÓ, 1996, p. 22) partindo da matemática a explicação de muitos fenômenos biológicos, mas essa aproximação entre biologia e matemática se torna perigosa para o conceito de interdisciplinaridade, pois se corre o risco de uma nova segmentação no ensino, uma bifurcação em que nem sempre será promissora para a educação do futuro.

A teoria dos grafos também é citada por esse mesmo autor quando expõe sua vasta utilidade em diversas áreas da ciência, comentando também sobre a teoria dos fractais utilizados em artes, física, biologia, astronomia e computação gráfica e ainda coloca que no campo da matemática existem diversos modelos a espera de aplicabilidade.

> Como os fractais, seguramente existem na matemática atual muitos conhecimentos prontos para serem aplicados nas maneiras mais diversas, e só esperam ser identificados e colocados à disposição dos cientistas não matemáticos para que possam ser aplicados com êxito. (SANTALÓ, 1996, p. 23).

As transformações geométricas no plano, um assunto pouco abordado no ensino médio, também podem ser apresentadas de forma interdisciplinar e relacionadas à computação gráfica, robótica, engenharia aeroespacial ou biologia. No caso da biologia, podemos observar a teoria da transformação de D'Arcy Thompson que foi o criador da morfogênese[8]. Witkowski (2004) escreveu sobre esse trabalho constatando uma possível transformação no formato de uma espécie de peixe como na figura 1 onde o peixe cofre, através da evolução genética, se transforma em um peixe-lua, e as deformações ocorridas, que alteram as proporções estruturais anatômicas desses peixes, podem ser associadas à matemática através de matrizes, pois a mesma aborda as transformações geométricas no plano já que os peixes analisados foram inseridos num sistema de coordenadas cartesianas, campo de estudo matemático. Esse é um exemplo de uma interdisciplinaridade envolvendo essas duas ciências, a matemática e a biologia.

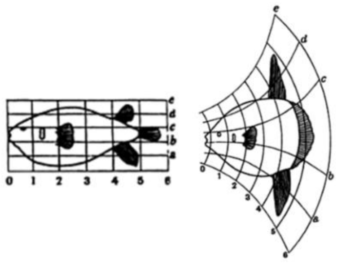


Figura 1 – Transformações de D'arcy Thompson

[8] Morfogênese é a ciência das formas, como define Witkowisk (2004)

D'Ambrósio (2013) compara as disciplinas escolares às gaiolas. Cada gaiola abriga uma especialidade, cada qual som seus objetivos havendo uma comunicação codificada e dominada apenas pelos ocupantes dessas gaiolas. Estando sob as grades dessas gaiolas não se pode ver além do que as elas permitem, não participando de uma novidade distinta às suas origens e não podendo exercer sua criatividade para transcender o que o espaço limitado lhes permite. O caso é que as gaiolas estão inseridas num espaço maior, o mundo real e o que se aprende dentro dessa gaiola são particulares a ela, não se relacionando com o exterior, nem com outras gaiolas. Em contrapartida, quando se mantém uma relação entre duas ou mais gaiolas com o objetivo de se aproximar da realidade exterior, ocorre o que se chama de multidisciplinaridade[9], onde uma gaiola pode se auxiliar na cognição de outra, mas sem ferir seus métodos e conteúdos disciplinares. É o caso, por exemplo, de um professor de artes que quando propõe a análise da litografia *Drawing Hands* de M. C. Escher[10] (figura 2) se apoia na matemática para o estudo das simetrias ou perspectivas. É como se as portas dessas gaiolas se abrissem apenas para alcançar algum objetivo que é intrínseco em cada disciplina.

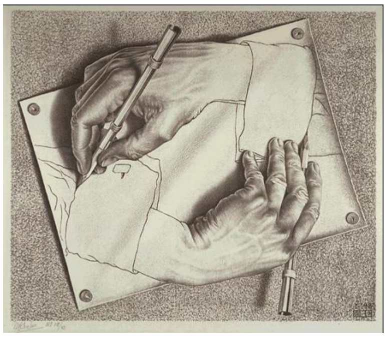


Figura 2 – Drawing Hands 1948

Em busca de uma maior abrangência e harmonia entre essas gaiolas, dispensam-se as grades e o que se verifica é um movimento livre e constante entre esses espaços. É quando ocorre a interdisciplinaridade, um acesso sem limites entre as disciplinas do currículo, uma interação constante entra vários campos do saber em busca de um objetivo. Assim, quando as gaiolas perdem as grades, transformam-se em grandes viveiros.

[9] Ressalva-se aqui que Spinelli diverge desse termo.
[10] Mauritus Cornelis Escher (1898 – 1970), pintor holandês.

Ao estudar o fenômeno das marés, podemos constatar no trabalho de Spinelli (2011) a quebra de grades de algumas dessas gaiolas, tornando-as possuidoras de um espaço mais amplo e com conhecimentos diversos que se complementam. Esse exemplo de interdisciplinaridade propõe a observação do fenômeno das marés, cujo tema não pertence a nenhuma disciplina, mas as indagações provenientes dela podem percorrer por alguns campos do saber como, por exemplo, em matemática estudando funções periódicas, em física através das leis da mecânica clássica, Em geografia, no estudo das atitudes comportamentais que regulam a economia dos caiçaras, podendo também aproximar as disciplinas de biologia e química dessa rede de significados conceituais.

> Quanto mais rico for o contexto em sua capacidade de relacionar significados de diferentes áreas do conhecimento, mais profícua poderá ser a construção conceitual, respeitada a condição anterior, referente à proximidade entre a cultura dos sujeitos e os elementos contextuais. Nesse sentido, o Fenômeno das marés, sendo tema que não se caracteriza por pertencer a alguma disciplina por excelência, permite aglutinar amplo espectro de significados com várias disciplinas em particular. (SPINELLI, 2011, p. 92)

A interdisciplinaridade vem colaborando com o sistema educacional na medida em que traz significados aos conteúdos e uma inter-relação entre as partes do currículo, desfragmentando uma epistemologia específica, cuja preocupação é a especialização em uma determinada área, fazendo com que se saiba muito sobre pouco.

2.2 **Transdisciplinaridade**

A atividade interdisciplinar, em seu âmago, remete os professores a atuar na preparação dos alunos com a finalidade de uma visão de mundo de forma real e absoluta, propondo atividades carregadas de significados e aplicáveis em sua realidade. Mas a interdisciplinaridade não contempla plenamente um aprendizado para o mundo de complexidades no que se refere aos dilemas culturais e sociológicos. Morin (2011) comenta em seus escritos que se deve ensinar a compreensão, e ela deve ser o meio e o fim dos ensinamentos, é preciso dizimar incompreensão entre as disciplinas e a interdisciplinaridade busca esse caminho, mas o planeta precisa de mais compreensão também sob o risco do fim da espécie humana, é preciso uma consciência ecológica ou mesmo uma consciência que reconheça a unidade na diversidade, pois apesar de todos os seres humanos serem semelhantes, são diferentes quanto à sua cultura.

> Por isso, é necessário aprender a estar aqui no planeta [...] aprender a ser, a viver, a dividir e a comunicar como humanos do planeta Terra, não mais somente pertencer a uma cultura, mas também ser terrenos. Devemos dedicar-nos não só a dominar, mas condicionar, a melhorar, a compreender. Devemos inscrever em nós: a consciência antropológica [...]; a consciência ecológica [...]; a consciência cívica terrena [...]; a consciência espiritual terrena. (MORIN, 2011, p.66)

O caminho que nos leva a uma educação plena, abrangente no sentido das preocupações com o futuro, nosso, das ciências e do planeta é o da transdisciplinaridade que aparece como uma alternativa a essas necessidades atuais e ela define-se como uma intercomunicação entre os campos do saber e onde não existindo linhas divisórias entre as disciplinas. É mais amplo que a interdisciplinaridade, pois as gaiolas deixam de existir, não havendo limites entre uma disciplina e outra, o mundo real do aluno e no meio que o cerca.

> O enfoque transdisciplinar permite não apenas reconhecer e descrever fatos e fenômenos, os naturais e também os criados pelo homem, alguns não antes reconhecidos, mas também analisa-los criticamente, recorrendo e indo além dos sistemas de conhecimento dominantes (disciplinas). Permite, assim, refletir sobre efeitos globais e locais e suas consequências para o estado da civilização. (D'AMBRÓSIO, 2013, p. 38)

A carta da transdisciplinaridade[11], em seu terceiro artigo nos remete a observar que a transdisciplinaridade não procura o domínio sobre as várias outras disciplinas, mas a abertura de todas elas àquilo que as atravessa e as ultrapassa. Num próximo artigo, questiona as disciplinas confrontando eficácia e desejo, nesse artigo podemos colocar a matemática em questão questionando se ela é eficaz na particularidade de sua gaiola e se ela contempla o desejo de conhecer o mundo na sua complexidade, pois *a vida está fortemente ameaçada por uma tecnociência triunfante, que só obedece à lógica apavorante da eficácia pela eficácia*[12].

O conceito de transdisciplinar se relaciona não só nos espaços entre as disciplinas, mas além delas, como afirma Japiassu (2006).

> Se nossos espíritos permanecem dominados por um modo mutilado e abstrato de conhecer, pela incapacidade de aprender as realidades em sua complexidade e em sua globalidade; e se o pensamento filosófico continuar se desviando do mundo em vez de enfrenta-lo para compreendê-lo, então,

[11] Carta da Transdisciplinaridade (Adotada no Primeiro Congresso Mundial de. Transdisciplinaridade - Convento de Arrábida, Portugal, 2-6 novembro, 1994).
[12] Preâmbulo da carta da Transdisciplinaridade.

> nossa inteligência passa a viver na miopia ou na cegueira. (JAPIASSU, 2006, p. 2)

A declaração de Veneza[13], importante documento do mundo das ciências, aborda o tema exaltando que o conhecimento científico alcançou um patamar em que inicia um diálogo com outras formas de conhecimento, a fim de quebrar a barreira entre um novo conhecer de mundo proveniente da análise de sistemas naturais e valores da sociedade moderna. Podemos verificar que a transdisciplinaridade, como é proposta, tem muito que avançar no mundo científico, quebrando barreiras, assim como proposto pela interdisciplinaridade, objetivando um conhecimento pleno do mundo atual e futuro. Japiassu (2006) comenta que essa transdisciplinaridade não se encontra em lugar algum do campo científico, seu lugar é uma incessante busca, nos desejos de aprendizagem, na filosofia de cada disciplina, nas complexidades do mundo atual, na perspectiva de uma realidade melhor.

> [...] sonho transdisciplinar não somente nos ajuda a desmontar metodicamente o velho edifício da razão fechada, fonte de verdades acabadas e absolutas, de visões dogmáticas e moralistas do mundo que alimentam os remanescentes integrismos e fundamentalismos, mas a nos libertamos do medo, inclusive do medo de nossos próprios desejos. Claro que o verdadeiro topos (lugar) do transdisciplinar ainda não existe em nenhum mapa-múndi do saber. È um lugar inteiramente utópico: transcende nossos conhecimentos. (JAPIASSU, 2006, p. 11)

No cotidiano escolar, tudo que puder ser feito com a finalidade de se aprimorar o conhecimento e torna-lo íntegro e transformador, seja numa atitude contextualizadora, numa prática interdisciplinar ou alcançando a transdisciplinaridade mantendo nos alunos uma atitude plena de convicção de que a vida só melhora se pudermos aplicar nossos conhecimentos provenientes do mundo escolar de forma prática e efetiva, almejando a transformação do nosso mundo.

2.3 Conhecimento intramatemático

Numa busca de integração entre as disciplinas nos deparamos com conteúdos científicos que não conversam entre si, ou seja, não conseguem estabelecer uma relação entre suas partes, como é o caso de números complexos que dificilmente ser relacionam com outros campos do saber dentro de uma

---

[13] DECLARAÇÃO DE VENEZA. Comunicado final do Colóquio "A Ciência diante das Fronteiras do Conhecimento". Veneza, 7 de março de 1986.

perspectiva de Ensino Médio. Spinelli (2011) afirma isso quando diz que é difícil essa relação usando números complexos por não fazerem parte da vida dos alunos e indica a alternativa de abordar o tema usando-se de conteúdos da própria matemática, chamando essa abordagem de contexto intramatemáticos.

> Vastas e férteis são as relações entre significados conceituais internamente à própria Matemática. Qualquer elemento de conteúdo matemático em que pensamos poderá ser facilmente relacionado a outro, e a outro, e a outro etc. [...] A quantidade dessas relações, que se configura em uma das características dos conhecimentos matemático, estimula a composição de contextos de ensino, contextos estes que denominamos contextos intramatemáticos. (SPINELLI, 2011, p. 16, 17).

Para o professor de matemática, a ramificação de exemplos intramatemáticos e extensa e pode se tornar uma rica postura utilizá-los em suas aulas no sentido de retomada de um tema ou mesmo na introdução de um assunto novo.

Nesse contexto, a matemática na escola pode ser ensinada como ferramenta para outras disciplinas do currículo através de conteúdos indispensáveis na construção de um conhecimento mais abrangente, ou mesmo como auxílio para a própria matemática, interagindo com outros blocos do conhecimento matemático estabelecendo assim várias conexões entre significados.

3 BREVE HISTÓRICO SOBRE MATRIZES

> *A história é êmula do tempo, repositório dos fatos, testemunha do passado, exemplo do presente, advertência do futuro.*
>
> *(Miguel de Cervantes)*

3.1 História da matemática como justificativa didática

A história da matemática tem um papel importante na construção do conhecimento, no momento em que dá sentido aos fatos matemáticos ocorridos através dos tempos, levando em consideração a morosidade e os obstáculos enfrentados pelos matemáticos, o PNLD afirma que:

> "O recurso à História da Matemática é outra forma de contextualização considerada. Analisa-se, também, em que medida a obra propõe temas e atividades que ajudem a promover posturas e valores importantes para o exercício da cidadania." (BRASIL, 2011, p. 11)

Acordando com essa ideia, os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio afirma ser de grande relevância o ensino de história da matemática, pois pode ser considerada "*um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos*" (BRASIL, 2000, p. 86) e confirmam o que diz os PCNEM quanto a reconhecer os fatos históricos e seu papel através das décadas de conhecimento matemático percebendo sua conduta na vida humana. Em decorrência disso, livros didáticos e a postura do professor em sala de aula persistem em relacionar história da matemática com a vida dos matemáticos, o que não leva a uma consolidação do conhecimento, apenas traz curiosidades sobre alguns temas, quanto a isso, e com isso pactua os PCNEM afirmando que o aluno deve associar e pontos da história da matemática com a evolução da humanidade.

> É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático. (BRASIL, 2000, p. 86)

A utilização da história da matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.

A história da matemática se justifica pela importância histórica do conteúdo abordado como afirma D’Ambrósio (2001) dizendo que o contexto em matemática é primordial, e ainda constata que a não relação entre os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga não pode deixar de contribuir para o aprendizado escolar, ou mesmo a “*adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV*” (D'AMBROSIO, 1997, p. 51).

3.2 **História das matrizes.**

Cerca de 1200 a.C. nos deparamos com as primeiras representações de matrizes através de uma tabela de números dispostos em linhas e colunas como encontrado na obra *nove capítulos sobre a arte matemática*, um livro chinês composto de problemas diversos e inclusive sobre soluções de equações lineares e que pode ser considerado, como afirma Boyer (1974), o livro de matemática mais importante da China.

Outra obra chinesa, também de relevante importância, é o *Livro das Permutações*, citado por EVES (2011) e que conta sobre uma lenda na qual um imperador chinês à cerca de 2200 a.C. avistou uma tartaruga às margens do rio Amarelo com a carapaça ostentando numerais em forma de cordas e nós como visto na figura 3.

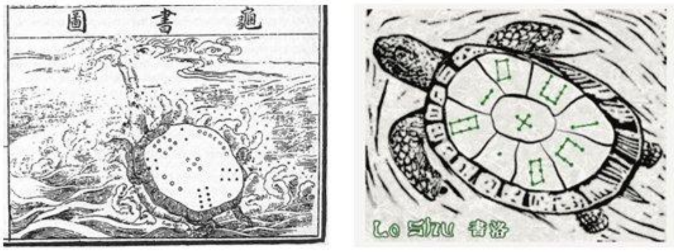


Figura 3 – Tartaruga no rio Amarelo

Esse pode ser um dos primeiros apontamentos sobre matrizes referindo-se ao quadrado mágico[14] conhecido também como Lo-shu (figura 4) nos escritos antigos chineses, que consistia em numerais representados por nós em cordas, onde os nós escuros referiam-se a numerais pares e os brancos, aos ímpares.

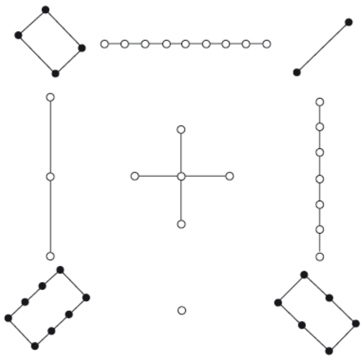


Figura 4 – Quadrado de Lo-shu

A matriz que se associa a esse quadrado é composta de três linhas e três colunas totalizando nove elementos, os nove números do quadrado de Lo-shu:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Um dos problemas sobre sistemas lineares encontrados em tais livros chineses versava sobre feixes de colheitas de boa qualidade, má e regular. O texto do problema é o seguinte:

Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dinheiros. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34

[14] Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo de n^2 inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm a mesma soma. (EVES, 2011)

dinheiros. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dinheiros. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?

Esse problema pode ser escrito por um sistema de três equações com três incógnitas, sendo x, y e z representando os feixes de boa qualidade, má ou regular, respectivamente:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Os chineses associavam esse sistema a uma matriz formada pelos coeficientes das equações, mas diferencia-se do nosso sistema usual de representação matricial de sistemas pelo modo de escrita chinesa, de cima para baixo e da direita para a esquerda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Como observou Sanches (2002) a obra sugere que se multiplique a coluna do meio por 3 e subtraia da coluna da direita quantas vezes necessária, e o mesmo com a primeira coluna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 78 & 102 & 39 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-3 & 6-3-3 & 3 \\ 6-2 & 9-2-2 & 2 \\ 9-1 & 3-1-1 & 1 \\ 78-39 & 102-39-39 & 39 \end{pmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

A seguir a coluna da esquerda é multiplicada por 5 e subtraída da coluna da direita quantas vezes necessária

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20-4\times 5 & 5 & 2 \\ 40-4\times 1 & 1 & 1 \\ 195-4\times 24 & 24 & 39 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

E, nessa última matriz, substituímos novamente as incógnitas e resolvemos as equações por substituição encontrando os valores que são vendidos cada tipo de feixes. "*Esse método agora é conhecido como método de eliminação de Gauss, que só passou a ser conhecido no começo do século dezenove*." (Sanches, 2002, p. 10)

Mais tarde, no início do século XIX, houve contraposição na álgebra no que se refere à propriedade comutativa da multiplicação, assim como na geometria, quando Lobachevsky e Bolyai, em 1829 e 1832, desconstruíram a geometria euclidiana em seu segundo postulado que diz que por um ponto fora da reta passa apenas uma única paralela à primeira, uma vez que no plano de Lobachevsky ou de Bolyai, seguindo esse postulado, passariam mais de uma reta paralela à primeira, "*com esse trabalho destruiu-se a antiga convicção de que só poderia haver uma única geometria, abrindo-se o caminho para a criação de muitas outras*" (Eves, 2011, p. 548). Com a álgebra o caminho é análogo, a propriedade comutativa foi contestada por William Rowan Hamilton, em 1843, quando inventou uma álgebra em que a lei comutativa da multiplicação não se aplicava, assim como nos seus estudos sobre *quatérnions*, causando desconforto na comunidade matemática, já que era inacreditável admitir uma álgebra em que $a \times b \neq b \times a$.

> Assim como Lobachevsky criara uma nova geometria consistente em si mesma, abandonando o postulado das paralelas, Hamilton criou uma nova álgebra, também consistente em si, abandonando o postulado da comutatividade para a multiplicação. (Boyer, 1974, p. 422)

Essa álgebra não comutativa pode ser verificada no estudo das matrizes, vista inicialmente, de maneira formal, por inglês Arthur Cayley (1821-1895), que se preocupava com a forma e a estrutura em álgebra. Seus estudos sobre matrizes são provenientes da teoria das transformações lineares do tipo

$$T = \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

onde os coeficientes a, b, c e d são números reais que levam o ponto (x, y) ao ponto (x', y') e podem ser associados à matriz quadrada de ordem 2, chamada de matriz da transformação linear proposta.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ao se aplicar duas transformações T_1 e T_2, simultaneamente ao ponto (x, y) o resultado é a transformação composta T_1T_2.

$$T_1 = \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \text{ e } T_2 = \begin{cases} x" = Ax' + By' \\ y" = Cx' + Dy' \end{cases}$$

$$T_1T_2 = \begin{cases} x" = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y" = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

Essa sequência de transformações pode ser associada à multiplicação de matrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cd + Dd \end{pmatrix}$$

Já se for invertidas as ordens das transformações tem-se então

$$T_1 = \begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases} \text{ e } T_2 = \begin{cases} x" = ax' + by' \\ y" = cx' + dy' \end{cases}$$

$$T_1T_2 = \begin{cases} x" = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y" = (cA + dC)x + (cB + dD)y \end{cases}$$

que associa-se à multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

Como duas matrizes só são iguais se seus elementos correspondentes são iguais, e considerando que $a \neq A, b \neq B, c \neq C$ e $d \neq D$ temos, portanto, um caso de multiplicação não comutativa.

O primeiro a utilizar o termo matriz foi Joseph Sylvester, amigo de Cayley, em 1850, definindo-a como um arranjo de termos num quadrilátero. Cayley, em 1858, estudou e publicou sobre matriz inversa e definição de matriz em sua obra *Autobiografia da teoria das matrizes*.

4 AS MATRIZES E OS OUTROS CAMPOS DO SABER

Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

(Nicolai Lobachevsky)

O objeto de estudo dessa pesquisa é a abordagem de matrizes no Ensino Médio de uma maneira contextualizada, interdisciplinar e que seja capaz de produzir significados para os alunos, de modo a expor de forma evidente a aplicabilidade e a formação conceitual de maneira que os alunos tenham a capacidade de construir diferentes significados de cada conteúdo estudado. Alguns exemplos dessas atividades foram encontrados em materiais didáticos disponíveis e outros adaptados, mas sempre com a preocupação de integrar disciplinas ou aplicar contextos intramatemáticos.

4.1 Matrizes e teoria dos grafos dirigidos

Um contexto para a apresentação de matrizes aos alunos do ensino médio é àquela relacionada com a teoria dos grafos dirigidos, que podem ser usados para modelar matematicamente situações com a finalidade de se resolver problemas diversos que envolvem conjuntos com números finitos de elementos onde existe alguma relação entre esses eles, principalmente na representação de circuitos e redes de comunicação.

Como o conceito de matriz nos remete a uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas e sua definição diz que a entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna de uma matriz A é denotada por a_{ij}, assim, uma matriz arbitrária m x n de uma forma mais compacta pode ser escrita como $A_{ij} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Dessa forma, podem-se escrever as coordenadas dos vértices do polígono ABCDE da figura 5 dispostos numa matriz M que pode ser de cinco linhas e duas colunas, ou duas linhas e cinco colunas de maneira que as abscissas das coordenadas dos pontos fiquem sempre na mesma fila e o mesmo deve ocorrer com as ordenadas.

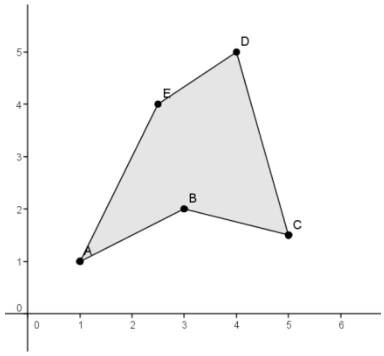


Figura 5 – Polígono no plano cartesiano

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2,5 \\ 4 & 5 \\ 2,5 & 4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 2,5 \\ 1 & 2 & 2,5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

A escrita de matrizes como coordenadas dos vértices de um polígono funciona como uma aproximação entre álgebra e geometria, e sua importância se justifica no estudo de transformações geométricas, que será visto mais adiante.

Conceituada a matriz, fazer uso perene de sua definição é apreciável no fato de que se tem um processo de descontextualização da situação dos vértices de um polígono para uma nova contextualização na teoria dos grafos, cuja definição apresentada em Anton e Rorres (2001) é ser um conjunto finito de elementos {P_1, P_2, ..., P_n} junto com uma coleção finita de pares ordenados (P_i, P_j) de elementos distintos desse conjunto, sem repetição de pares ordenados. Os elementos do conjunto são chamados vértices e os pares ordenados, arestas dirigidas. *Usa-se a notação $P_i \rightarrow P_j$ para indicar que a aresta dirigida (P_i, P_j) pertence ao grafo dirigido.*

Um exemplo de visualização geométrica dos grafos dirigidos pode ser vista na figura 6 e pode ser associado à uma matriz $M = [m_{ij}]_{4\times4}$, chamada matriz de vértices cujos elementos são definidos por: $m_{ij} = \begin{cases} 1, se\ P_i \rightarrow P_j \\ 0,\ caso\ contrário \end{cases}$.

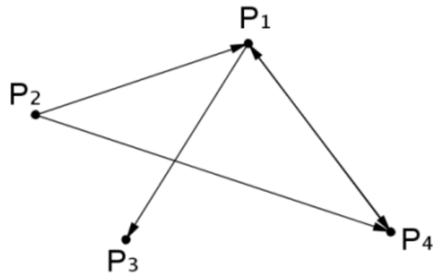


Figura 6 – Representação geométrica do grafo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Podemos observar uma aplicação dessa definição na situação onde se observa o itinerário dos ônibus entre 5 cidades A, B, C, D e E conforme o grafo a seguir:

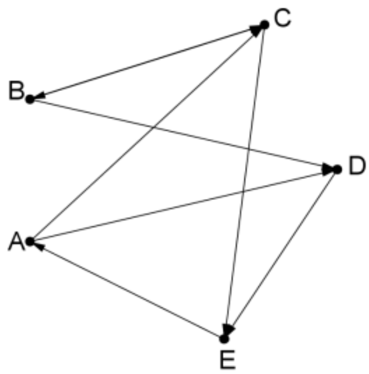


Figura 7 – Grafo dos ônibus

Observando o grafo da figura 7 podemos verificar que da cidade A partem ônibus para as cidades C e D, da cidade B para C e D também, da cidade C para B e E, de D para E e de E para a cidade A. Assim a matriz de vértices desse gráfico pode ser representada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

De acordo com a matriz em (4), da cidade A não partem ônibus para cidade B, mas a viagem também pode ocorrer por intermédio da cidade C, ou seja, A → C → B, que é chamada de conexão de dois passos de A para B. Dessa mesma forma, da cidade A para a cidade E a conexão pode se dar por A → C → B → D → E configurando uma conexão de quatro passos.

Com a finalidade de determinar o número de todas as conexões de r passos de um vértice P_i para um vértice P_j o teorema analisado em Anton e Rorres (2001): seja M a matriz de vértices de um grafo dirigido e seja m_{ij}^r o (i, j)-ésimo elemento de M^r; então m_{ij}^r é igual ao número de conexões de r passos de P_i para P_j, ou seja, para uma conexão de dois passos, devemos observar o quadrado da matriz, de três passos, o cubo, e assim sucessivamente.

Para calcular a potência de uma matriz, devemos definir a multiplicação de matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. O produto AB de A por B, denotado por AB, como a matriz $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Considerando agora o grafo da figura 7 e a matriz de vértices em (4) o número de passos de duas conexões de A para E é verificado no quadrado da matriz como visto em (5)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Observando os elementos de M^2 em (5) podemos notar que $m_{14} = 2$, dessa forma existem 2 conexões de dois passos de A par E que são A → C → E e A → D → E.

Se obtivermos agora M^3, descobriremos quantas conexões de três passos existem entre as cidades? Faremos para isso, $M^3 = M^2M$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Observando o resultado de (6) verificamos que se $m_{34} = 1$ é por que há uma conexão de três passos de C para D (C → E → A → D), da mesma forma que se $m_{25} = 0$ é por que não existem conexões de três passos nessas condições.

Outra verificação desse teorema é que pode existir conexões entre E e E, pois se $m_{55} = 2$ significa que saindo de E pode-se percorrer mais duas cidades até chegar em E novamente, e essas conexões são E → A → C → E e E → A → D → E.

Exemplos contextualizados de matrizes associadas a grafos dirigidos são inúmeros, como a situação onde numa família, composta de um pai (P), uma mãe (M), uma filha (Fa) e um filho (Fo). Os membros exercem influência uns sobre os outros da seguinte maneira: a mãe influencia o pai, a filha e o filho, o pai influencia o filho, o filho influencia a filha, a filha influencia o pai e a mãe.

A modelagem matemática para essa influência familiar do problema pode ser feita com um grafo dirigido cujos vértices são os membros da família. Se a mãe influencia o pai, escreve-se M → P. Na figura 8 representa o grafo dirigido dessa situação.

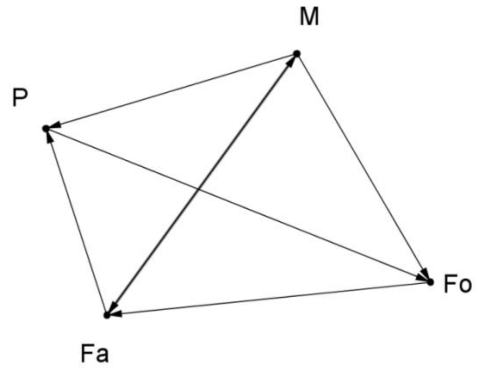


Figura 8 – Grafo da influência familiar

A construção da matriz de vértices A associada a essa situação pode ser construída com auxílio da tabela 2 onde o elemento de cada célula corresponde a influência que o familiar da linha exerce sobre o da coluna correspondente.

Tabela 2 – Influência familiar

	P	M	Fo	Fa
P	0	0	1	0
M	1	0	1	1
Fo	0	0	0	1
Fa	1	1	0	0

A matriz associada à tabela 2 é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

E da mesma forma como na atividade dos ônibus referente ao grafo da figura 7, podemos estabelecer conexões de mais de um passo, como no caso de que o pai não pode influenciar diretamente a mãe, mas pode fazê-lo por intermédio de terceiros, como podemos analisar nas matrizes A^2 e A^3 em (8).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Com a análise de A^2 e A^3 (8) podemos concluir que o pai não tem influência sobre a mãe através de uma conexão de dois passos, no entanto tem influência sobre ela por uma conexão de três passos pois em A^3 o valor de a_{12} é um, o que significa uma conexão de três passos de P para M (P → Fo → Fa → M).

Nesses exemplos é evidente a intenção de abordar matrizes aplicadas a uma situação mais próxima do aluno. A abordagem informal desperta o interesse do discente objetivando uma aproximação do conteúdo sobre matrizes de uma contextualização já que a multiplicação de matrizes requer certo cuidado em sua conceituação por não ser um assunto muito familiar na escola de ensino médio como afirma o Caderno do Professor da Secretaria de Educação do estado de São Paulo:

> Em relação às operações com matrizes, sabemos da pouca dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere às adições e também ao produto de um número real por uma matriz. No entanto, o mesmo não ocorre com o cálculo do produto entre duas matrizes, uma vez que o procedimento adequado pra a obtenção correta de resultados contraria, inicialmente, o senso comum dos alunos quanto à sequência de passos a ser obedecida. (São Paulo, 2009, p. 12).

Outro fator importante a ser levado em consideração é o tempo disponível para se trabalhar os tópicos propostos nos currículos oficiais. Espera-se que esse tempo não seja apenas usado para manipulação e cálculos onerosos em relação às matrizes. Pode-se ganhar tempo permitindo o uso de planilhas eletrônicas ou aplicativos que operam com matrizes.

4.2 Multiplicação de matrizes e o braço robótico

Uma aplicação da multiplicação de matrizes contextualizada é observada em robótica, trazendo uma abordagem nova e atraente para o jovem atual. A robótica causa grande admiração por parte dos estudantes e torna-se um assunto conveniente na escola de nível médio. Essa tecnologia lida com estes propósitos ao interagir-se com matemática utilizando conceitos de trigonometria e álgebra linear dando significado à esse conteúdo.

A atividade consiste em considerar um braço de robô com movimentos limitados em duas dimensões, como na figura 9. O braço do robô tem como tarefa a transferência de objetos de um ponto para outro, instruído por um controlador. Na extremidade A existe um atuador usado pelo robô na execução de suas tarefas, e a outra extremidade C é fixa. A peça em questão é composta de dois vínculos e três juntas, representados na figura por B e C respectivamente.

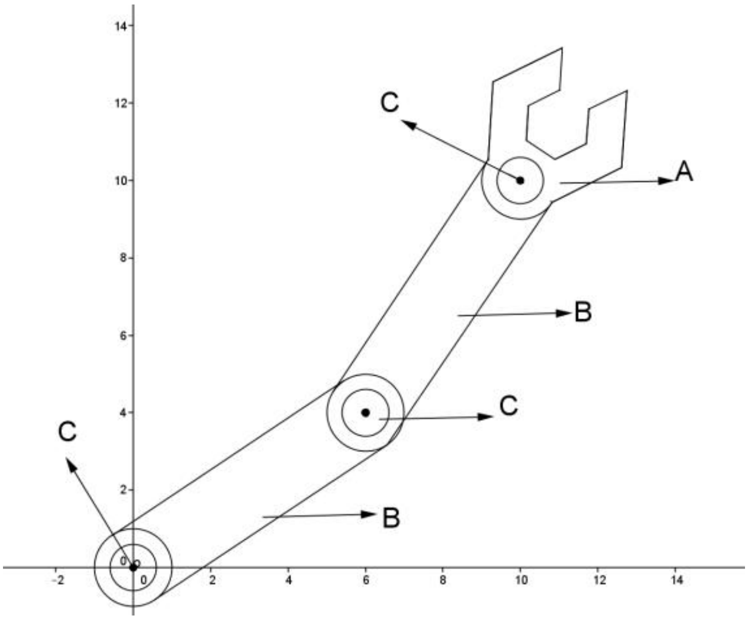


Figura 9 – Braço robótico

Uma modelagem matemática (figura 10) mostra o esquema onde são considerados os comprimentos a e b dos vínculos e os ângulos α e β que cada vínculo faz com a horizontal. Obtêm-se as coordenadas do ponto Q dessa figura pelas projeções de a e b sobre os eixos $0x$ e $0y$ respectivamente, como pode ser visto no sistema de equações (9).

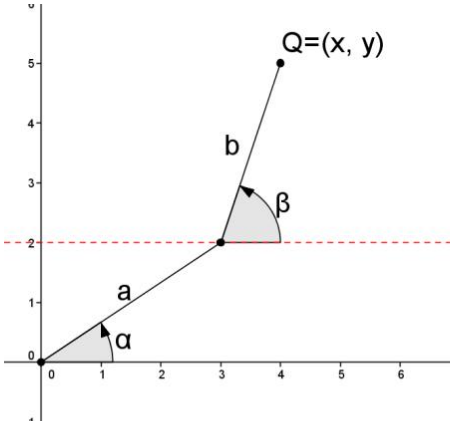


Figura 10 – Modelo matemático do braço robótico

$$\begin{cases} x = acos\alpha + bcos\beta \\ y = asen\alpha + bsen\beta \end{cases} \tag{9}$$

Considerando a equação anterior e a definição de multiplicação de matrizes, podem-se representar essas coordenadas através da multiplicação matricial determinando a posição do atuador em função do comprimento a e b e dos ângulos α e β.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & cos\beta \\ sen\alpha & sen\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{10}$$

4.3 **Isometrias no plano**

A utilização das transformações geométricas no plano consiste em um rico instrumento de aprendizagem de matrizes no Ensino Médio na medida em que trata de outros assuntos da matemática numa perspectiva intradisciplinar justapondo álgebra e geometria.

Mesmo que o aluno não tenha obtido um contato com as transformações no plano, não impede a sua utilização, pois lhes é de fácil compreensão nesse nível de ensino.

As transformações que nesse momento serão apresentadas definem-se como isometrias no plano e podem ser classificadas como translação, simetria ou rotação.

As isometrias são transformações geométricas no plano que não alteram o formato da figura inicial mantendo sempre a mesma distância entre todos seus pontos.

Lima (2002) define transformação geométrica no plano denotando-a por T e contida no plano π e afirma ser uma função $T: \pi \rightarrow \pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P1 = T(P)$ do mesmo plano, chamado sua imagem por T; e na mesma obra apresenta uma definição para isometria considerada no plano π como uma transformação $T: \pi \rightarrow \pi$ que preserva distâncias. Mais precisamente, T é uma isometria quando se tem $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$ para quaisquer pontos P, Q no plano π.

Aplicação das isometrias no plano é muito comum em artes, tais quais as que aparecem nas obras de M.C. Escher, pintor holandês do século XX que usou vários conceitos matemáticos em seus quadros, onde a presença de simetria translação é amplamente verificada. Nas obras desse artista, a arte e a matemática se relacionam de maneira intrínseca, pois numa grande série de suas obras ele se dedicou à divisão regular do plano e como ele mesmo considera:

> Esta é a fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados, mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respectivamente, preenchida com elas. As figuras devem configurar umas com as outras sem que resultem áreas livres. (ESCHER, 2002, p. 7)

Ele também comenta sobre a simetria em suas obras, afirmando quem quiser representar simetria numa superfície plana, deve levar em consideração a translação, a rotação e a reflexão. Tais elementos podem ser vistos em obras como *Swans* e *Horsemen* na figura 11.

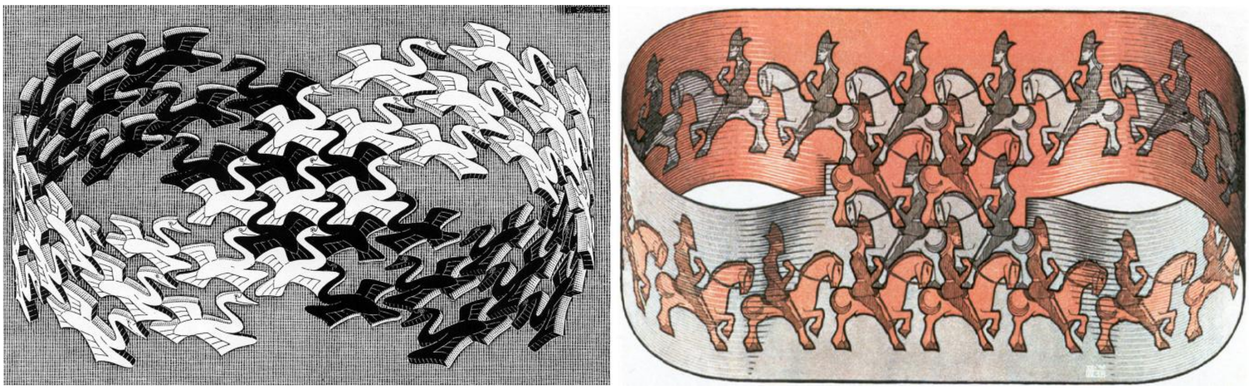


Figura 11 – Swans e Horsemem.

Essa relação interdisciplinar entre arte e matemática pode ser o estopim de uma abordagem diferenciada de matrizes, uma vez que não se pode negar o grande fascínio do homem pelas artes, desde os tempos primórdios.

4.3.1 *Translação*

Uma aplicação das isometrias no plano pode ser notada na observação de polígonos construídos no plano cartesiano, como proposto na figura 12. Os vértices desses polígonos podem ser representados por matrizes, onde as coordenadas de cada vértice compõem uma linha da matriz obedecendo a ordem de na primeira coluna estarem dispostos as abscissas dos pontos, e na segunda, as ordenadas.

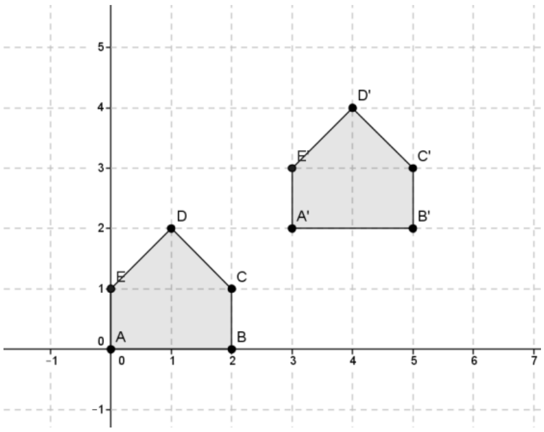


Figura 12 – Pentágonos no plano

As matrizes M_1 e M_2 constituídas a seguir, são as representações dos pentágonos ABCDE e A'B'C'D'E', respectivamente.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

É notória a presença do conceito de adição de matrizes na análise de M_1 e M_2 uma vez que os elementos da primeira coluna de M_1 foram somados em 3 unidades na obtenção de M_2 e, os elementos da segunda coluna, somados em 2 unidades.

Esta operação matricial percebida na análise dessa situação é definida por Anton e Rorres (2001) como adição de A e B, duas matrizes de mesmo tamanho, e denotando por A + B, cujo procedimento e a soma das entradas de B às entradas correspondentes de A. No caso da subtração A – B, basta considerar a soma de A com a oposta de B.

Verifica-se através da figura 13 que o ocorrido pode ser considerado como uma translação, transformando ABCDE em A'B'C'D'E'. Essa translação foi orientada por um vetor[15] v comandando que cada ponto da figura e desloquem-se três unidades para frente e duas para cima.

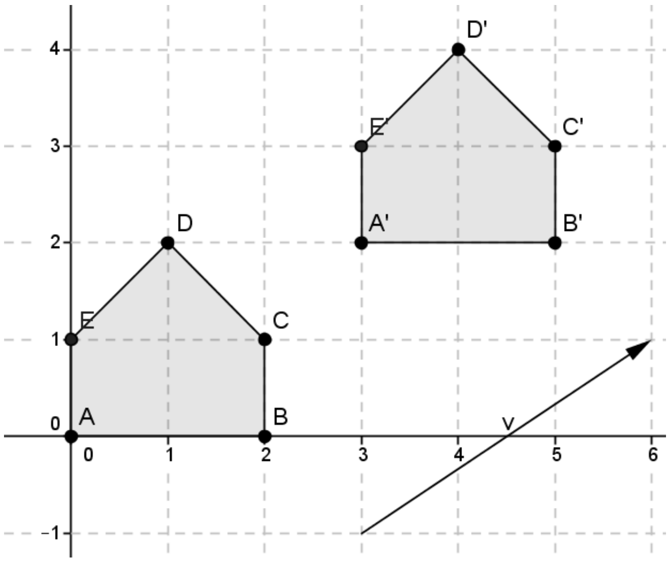


Figura 13 – Translação do Pentágono.

Dessa forma a matriz T (12) pode ser considerada a que define a transformação do pentágono original no A'B'C'D'E'. Essa matriz é obtida na resolução da equação matricial $M_1 + T = M_2$, sendo M_1 a matriz do primeiro pentágono, M_2 a do pentágono transformado e T a matriz da transformação.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

A definição para a translação encontrada em Lima (2002) é: a translação $T_v: \pi \to \pi$, determinada pelo vetor v (figura 14) é a transformação que leva cada ponto P do Plano π no ponto $T_u(P) = P + v$. Como sabemos se $u = \overrightarrow{AB}$ então $P + u = Q$ é o ponto tal que o segmento orientado PQ é equipolente a AB.

[15] Conceitua-se vetor como o ente matemático que representa o conjunto dos segmentos orientados de reta que têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

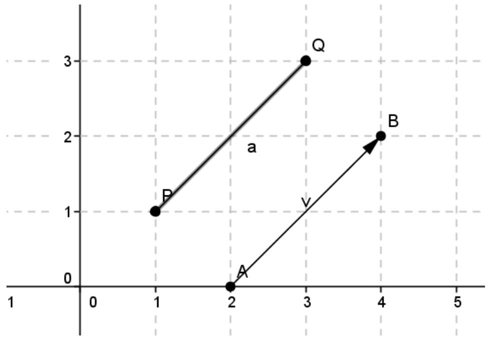


Figura 14 – Translação

Constatando que no sistema cartesiano, se as coordenadas de v são $(\alpha,\ \beta)$ então, para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T_v(P) = Q = (x + \alpha, y + \beta)$ e, ao considerar $x' = x + \alpha$ e $y' = y + \beta$ podemos escrever essa relação na notação matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{13}$$

Na figura 15 a seguir, a imagem F foi transladada de acordo com uma matriz T que a levou em F', desse modo pode-se associar á essa transformação à equação matricial em (14), sendo M_1 a matriz dos vértices de F e M_2, a de F'.

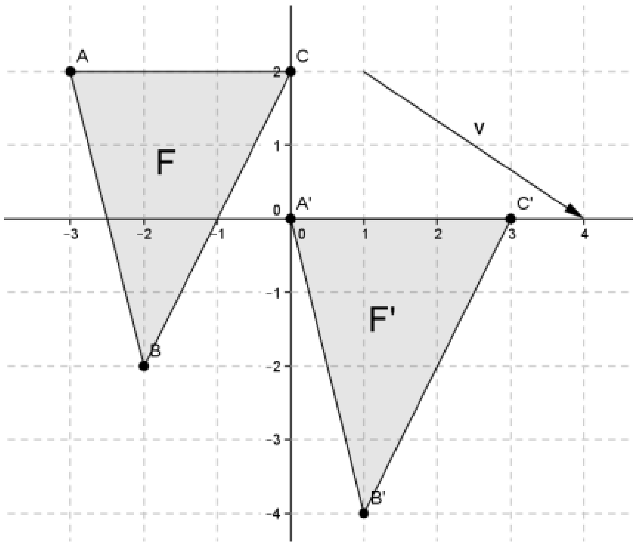


Figura 15 – Translação de F.

$$M_2 = \mathrm{T} + M_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

4.3.2 *Simetria*

Outra transformação conhecida é a simetria, que causa curiosidade e admiração por parte dos alunos por estar presente em diversos objetos, obras de arte, natureza e sempre causou fascínio na humanidade por ser considerada como perfeitas e harmoniosas a suas proporções.

A simetria como transformação geométrica consiste também em uma isometria, e sua característica é a correspondência das partes de uma figura em lados opostos de uma reta ou ponto. Nas simetrias as figuras ficam invertidas assim como num espelho ou uma reflexão na água (figura 16), e cada parte de um lado tem sua correspondente invertida no outro lado.

Figura 16 – Reflexo da flor

As simetrias ocorrem de duas formas: a axial e a pontual, sendo que a primeira refere-se à situação análoga a de um espelho, onde cada ponto de uma figura se corresponde com um ponto da outra figura invertida em relação a uma reta, e a reta que passa pelo ponto médio dos segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes e lhes são perpendiculares determinam o eixo de simetria da figura (figura 17). Nesse caso, eixo de simetria é mediatriz desses segmentos, já a simetria pontual pode ser considerada como uma simetria de rotação de 180^o, caso que será estudado mais adiante.

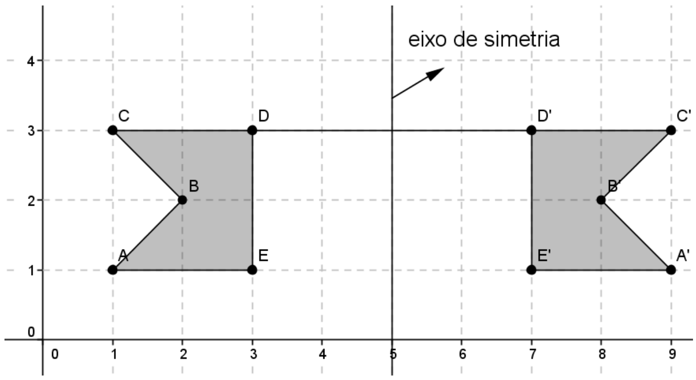


Figura 17 – Figuras simétricas e eixo de simetria

Optaremos por adotar os eixos de simetria coincidindo com o eixo das abscissas ou das ordenadas e essa restrição objetiva-se na melhor compreensão dos alunos ao conceituar a matriz da transformação que resulta uma figura em sua simétrica.

Na figura 18 aparecem dois triângulos simétricos onde se pode observar que na matriz construída a partir dos vértices de cada polígono, M_1 correspondendo ao triângulo ABC e M_2 ao triângulo A'B'C', as abscissas contêm números opostos por tratar-se de uma simétrica em relação ao eixo das ordenadas.

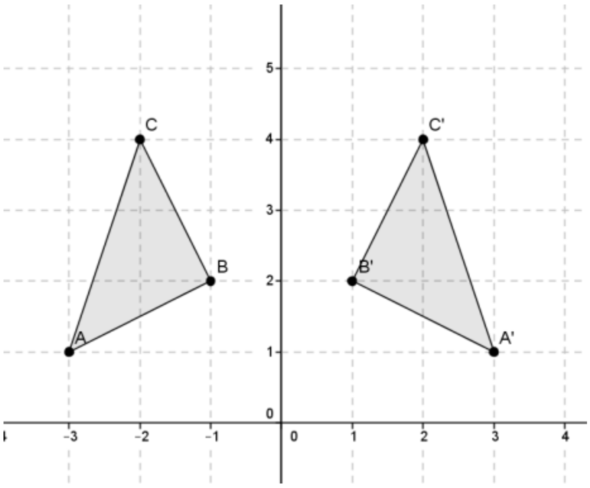


Figura 18 – Simetria em relação a $0y$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Já no caso da simetria em relação ao eixo das abscissas como na figura 19 observamos que as ordenadas da figura transformada são simétricas, sendo assim a matriz M_1 tem a segunda coluna simétrica em relação à matriz M_2.

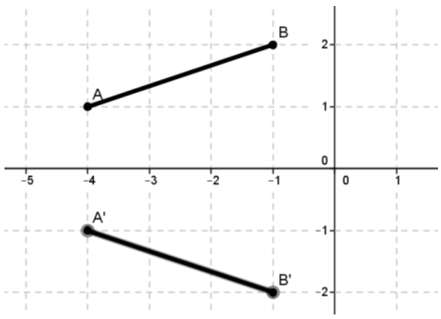


Figura 19 – Simetria em relação a $0x$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Lima (2002) considera simetria como reflexão e a define no caso do eixo das abscissas ser a reta simétrica como uma troca da coordenada y da figura original pela sua oposta, ou seja, para cada ponto P = (x, y) tem-se T(P) = P' = (x, –y), e caso o eixo simétrico for o das ordenadas, tem-se que se P = (x, y), então T(P) = = P' = (–x, y).

A matriz transformação nesse caso é uma matriz quadrada de ordem 2, ou seja $T = \left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$, que opera em M_1 afim de resultar em M_2, por multiplicação de matrizes, propõe-se a resolução da equação matricial $M_1T = M_2$. Que no caso da simetria for o eixo $0y$ como na figura 18 temos

$$M_1T = M_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{17}$$

A equação (15), através da multiplicação de matrizes, leva a um sistema de equações, assunto recorrente desde o ensino fundamental e que nesse momento pode ser revisado sem prejuízo às conceituações aqui pretendidas.

$$\begin{pmatrix} -3a + c & -3b + d \\ -a + 2c & -b + 2d \\ -2a + 4c & -2b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Resolvido o sistema (16) obtém-se $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 1$, assim a matriz da transformação da simetria em relação ao eixo $0y$ é dada por T em (17)

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Analogamente podemos verificar que a matriz T que transforma o segmento AB da figura 13 no segmento A'B' é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

A situação aqui proposta ao aluno é com o objetivo de dar um significado à multiplicação de matrizes e uma possível justificativa para o seu método nada habitual para um estudante dessa fase de ensino. A preocupação aqui não é com as formalidades das transformações geométricas no plano, ou seja, não é com a teoria envolvendo a matriz de uma transformação geométrica e sim com sua aplicabilidade. Cabe ao professor simplificar essa teoria sem perda de sua significação, fazendo com que o aluno perceba a relação entre a matriz da transformada e sua consequência na figura original através da multiplicação de matrizes.

4.3.3 *Rotação.*

As rotações no plano compõem um assunto de contexto amplo a ser trabalhado na educação básica, pois envolve elementos diversos quanto ao conhecimento interdisciplinar ou intradisciplinar. Além da bela e ampla aplicação na área artística ainda podemos relacionar o tema à trigonometria, base fundamental nas rotações.

As rotações, diferentemente das translações, não alteram a distância da figura em relação a um ponto fixo, que aqui chamaremos de centro, ela apenas gira em torno desse centro obedecendo a um ângulo, aqui chamado ângulo de giro. Na figura 20 podemos observar que o triângulo ABC em destaque sofreu rotações de 45^{o} e a partir daí, cada novo triângulo sofre outra rotação de mesmo ângulo de giro cujo centro é a origem do sistema de coordenadas.

Vamos adotar aqui as rotações cujo centro é sempre a origem do sistema cartesiano. Casos particulares de centro fora dessa convenção podem ser obtidos por uma composição de transformações, caso tratado no capítulo sobre esse tema.

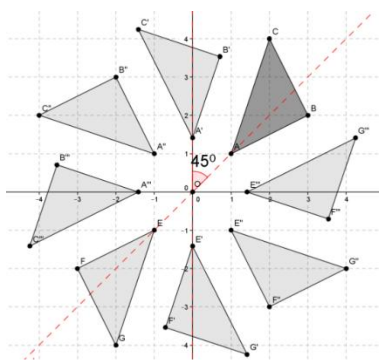


Figura 20 – Rotação de 45^{o}

Por se tratar de uma isometria no plano, além de não alterar a distância entre os pontos da figura, a rotação pode ser associada a uma matriz de transformação de forma que a condição $M_1T = M_2$ se estabeleça. Essa matriz pode ser descrita em (19) onde α é o ângulo de giro.

$$T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \tag{21}$$

Considerando que essa matriz T é um operador que gira cada ponto da figura em torno do centro por um ângulo de giro α admite-se nesse trabalho apenas com giros no sentido anti-horário.

Para chegar a essa matriz T, vamos considerar os pontos P e P' em coordenadas polares e escrever as coordenadas de P' em função das coordenadas de P.

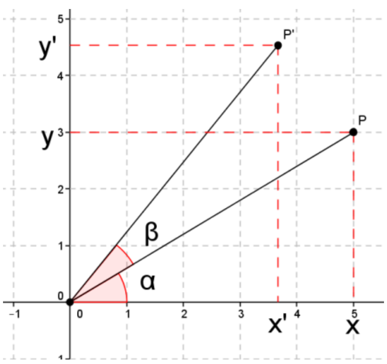


Figura 21 – Pontos P e P'

Sendo P(x, y) e P'(x', y') e observando a figura 21 vemos que suas coordenadas na forma polar são:

$$x = r \cdot cos\alpha;\ y = r \cdot sen\alpha\ , \tag{22}$$

$$x' = r \cdot cos(\alpha + \beta) = r \cdot cos\alpha \cdot cos\beta - r \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \tag{23}$$

$$y' = r \cdot sen(\alpha + \beta) = r \cdot sen\alpha \cdot cos\beta + r \cdot senb \cdot cos\beta \tag{24}$$

E substituindo (22) em (23) e (24) temos

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot cos\alpha \cdot cos\beta - r \cdot sen\alpha \cdot sen\beta = x \cdot cos\alpha - y \cdot sen\alpha \\ y' &= r \cdot sen\alpha \cdot cos\beta + r \cdot sen\alpha \cdot cos\beta = x \cdot sen\alpha + y \cdot cos\alpha \end{aligned} \tag{25}$$

Para mostrar que as coordenadas do ponto P’ podem ser determinadas usando a multiplicação de matrizes $P_1T=P_2$, vamos considerar as coordenadas de P e P’ como matrizes colunas cujos elementos são suas coordenadas e efetuar as multiplicações em (25)

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\mathrm{T}M_1 = M_2 = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (27)$$

Na figura 22 a seguir temos um quadrado ABCD e pretende-se aplicar-lhe uma rotação de 60^o.

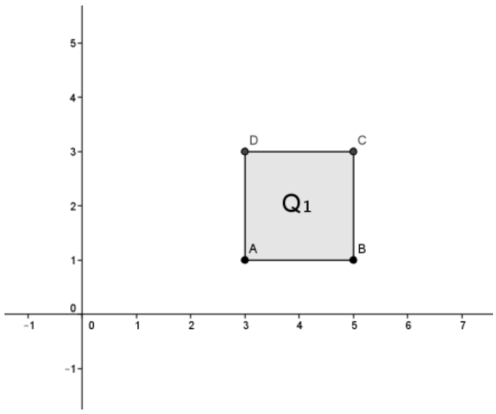


Figura 22 – Quadrado no plano cartesiano

Sendo M_1 a matriz dos vértices do quadrado Q_1 e T a matriz da transformação de rotação, multiplica-se M_1 por T e obtém-se M_2, que é a matriz dos vértices do quadrado após a rotação.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos60^o & -sen60^o \\ sen60^o & cos60^o \end{pmatrix} \quad (28)$$

Dessa forma, obtém-se em (29) as coordenadas do vértice de Q_2 e o quadrado rotacionado na figura 23.

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2} & \frac{3-5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+3\sqrt{3}}{2} & \frac{3-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

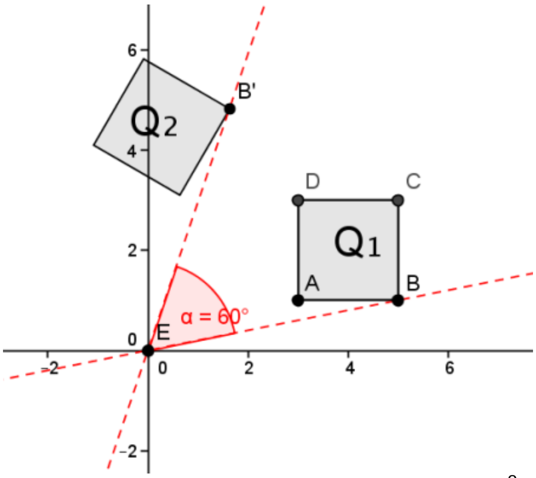


Figura 23 – Quadrado rotacionado em 60^o

As transformações de simetria pontual podem ser tratadas como rotação de 180^o como se pode observar na figura 24 onde cada ponto do triângulo ABC sofre uma rotação obtendo-se seu simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.

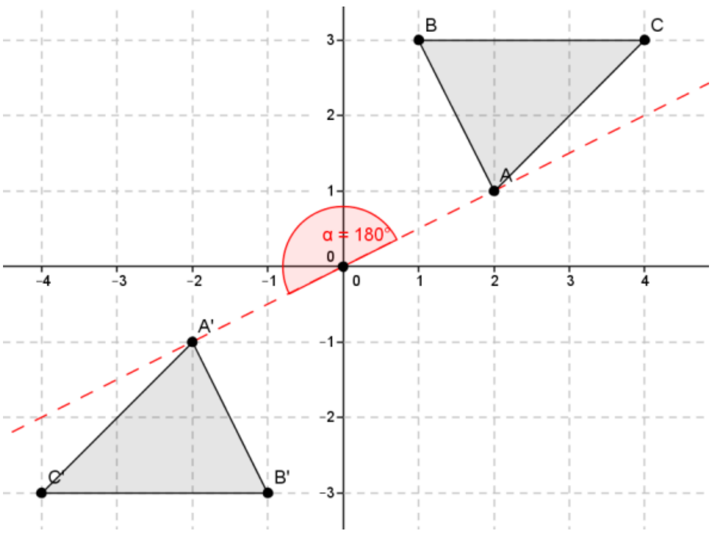


Figura 24 – Simetria pontual

Considerando M_1 como a matriz dos vértices do polígono original e M_2 como a matriz dos vértices do seu simétrico, podemos observar que M_2 é obtida através da equação matricial em (29), onde T é a matriz dessa transformação pelo giro de 180^0.

$$T = \begin{pmatrix} cos180^o & -sen180^o \\ sen180^o & cos180^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$M_2 = M_1\mathrm{T} \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Podem-se consolidar as rotações e simetrias no plano em uma tabela com a finalidade de facilitar sua aplicação em situações diversas, levando o foco das atividades em direção às nas operações matriciais. A tabela 3 mostra, então, a transformação desejada e a matriz dessa transformação que será multiplicada à matriz dos vértices da figura.

Tabela 3 – Relação de transformações

Transformação	Matriz da transformação
Simetria em relação às ordenadas.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Simetria em relação às abscissas.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Simetria em relação à origem.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotação[16]	$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$

Além dessas transformações isométricas estudadas até aqui, existem outras que alteram o formato das figuras que são aquelas usadas na ampliação, redução ou deformação de figuras como as que seguem no próximo capítulo.

4.4 Transformações não isométricas

Chamam-se transformações não isométricas àquelas que contrariam alguns ou todas as condições para que uma transformação seja isométrica, ou seja, se a transformada de uma figura é a ampliação da original, e ela não é isométrica, assim como não são isométricas se as figuras estão deformadas umas em relação às outras.

[16] Lembrando que as rotações trabalhadas aqui são sempre no sentido anti-horário e com (0, 0) sendo o centro dessa rotação com ângulo de giro α.

Na figura 25 que retrata a obra de M. C. Escher, intitulada *Balcony,* pode-se verificar a deformação da figura na forma de um relevo aparente, através de um abaulado no centro. Nota-se a transformação geométrica nessa obra que não se classifica como isometria.

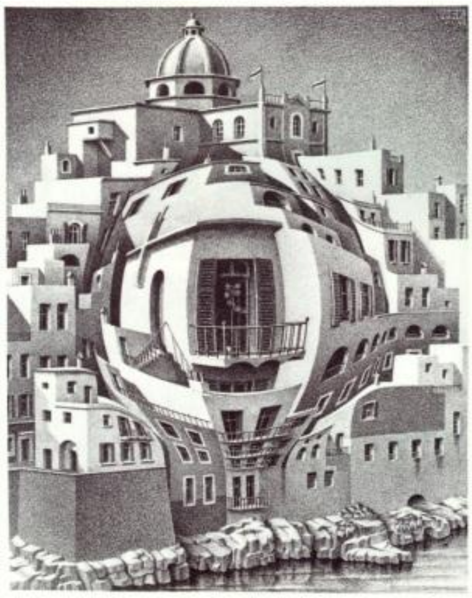


Figura 25 – Balcony

4.4.1 *Homotetia.*

Na figura 26 o quadrado ABCD sofreu uma transformação em escala, ou seja, suas dimensões foram ampliadas de acordo com um parâmetro k seguindo como referência a origem do sistema cartesiano, ou seja, cada ponto do quadrado original foi multiplicado pelo fator k.

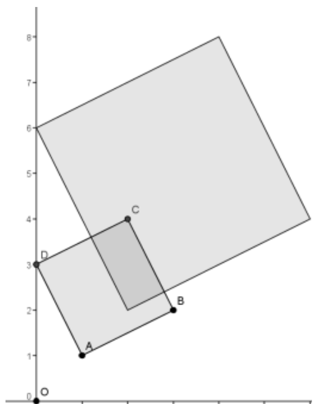


Figura 26 – Ampliação do quadrado.

Numa breve análise das figuras transformadas na figura 26 podemos notar que o quadrado ampliado é semelhante ao original e, para que elas sejam semelhantes é necessário que mantenham o mesmo formato, mas as distâncias entre seus pontos podem sofrer variações não se caracterizando assim como uma isometria no plano.

Lima (2002) considera semelhança de razão k no plano π como uma transformação $\sigma: \Pi \to \Pi$ que multiplica por k a distância entre dois pontos P e Q em Π, resumindo: $d\big(\sigma(P), \sigma(Q)\big) = k \cdot d(P, Q)$. A razão de semelhança k é obtida pela razão entre os lados correspondentes das figuras e pode determinar uma ampliação, no caso de $k > 1$, ou uma redução, para $0 < k < 1$.

Uma ferramenta matemática que auxilia na obtenção de figuras semelhantes é a homotetia (figura 27) que de acordo com o dicionátio é uma transformação pontual em que uma série de pontos se encontra na reta que a une a um centro fixo, ampliando-se ou reduzindo-se a distância dentro de uma relação constante. Diante disso, a homotetia se apresenta como uma singularidade de semelhanças.

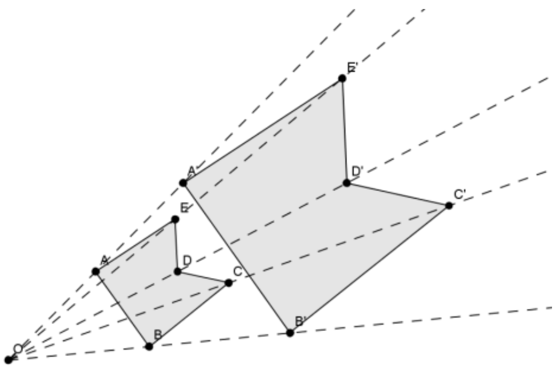


Figura 27 – Homotetia

Na figura 27, o ponto O que une os vértices dos pentágonos é chamado de centro da homotetia, os lados correspondentes, ou homotéticos, são paralelos e proporcionais e a razão de semelhança é dada por $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$.

De acordo com uma definição categórica, a homotetia de centro O e razão k no plano Π é a transformação $H: \Pi \to \Pi$ que associa a cada ponto P em Π o ponto $P_1 = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP_1} = k\overrightarrow{OP}$.

A figura 28 a seguir representa a ampliação do segmento PQ por homotetia na razão k e cento O na origem[17].

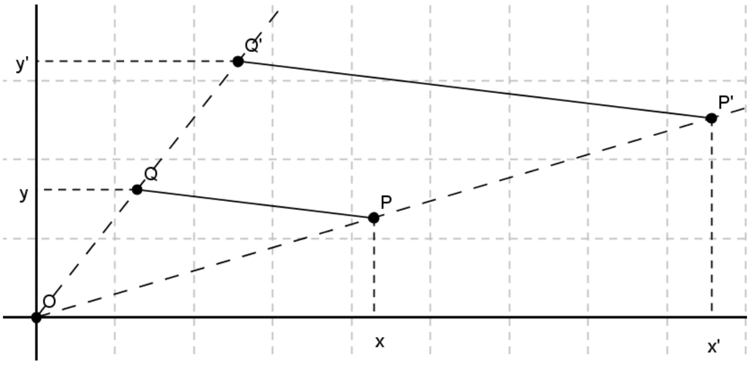


Figura 28 – Homotetia do segmento PQ

Como $\frac{PQ}{P'Q'} = k$, a obtenção de x' e y' se dá pela resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \tag{32}$$

que pode ser representado pela seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{33}$$

caracterizando assim a matriz dessa transformação como sendo a matriz identidade multiplicada pelo fator k.

Dessa forma, adquire sentido para o aluno a definição de multiplicação de uma matriz por um escalar, que de acordo com Anton e Rorres (2001) quando diz que se k é um escalar, então o produto kA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por k.

Na figura 29 temos um triângulo ABC sendo representado algebricamente pela matriz M_1 e sua ampliação por M_2 na homotetia de razão $\frac{5}{2}$. Na busca pela determinação dos vértices do novo triângulo A'B'C', homotético ao primeiro, basta multiplicar M_1 pela matriz da transformação T em (32)

[17] Em casos onde o centro não for a origem a transformação pode ser obtida por composição de transformações.

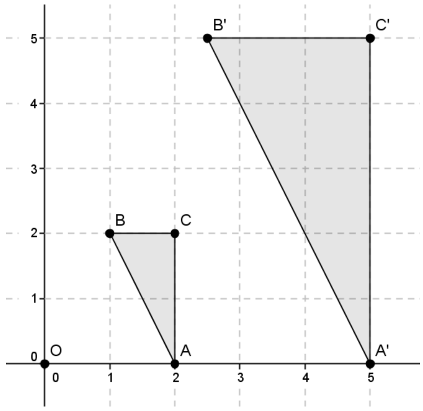


Figura 29 – Triângulos homotéticos.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{5}{2} & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad (34)$$

O caso de reduções é análogo ao da ampliação e o de inversão, com razão negativa, podem ser tratados como composição de transformações**.**

4.4.2 *Expansões e Compressões*

Algumas figuras precisam ser ampliadas ou reduzidas em apenas uma direção, deformando-a e causando efeitos artísticos. Na figura 29 o peixe da esquerda está em escala normal, o do centro foi expandido na direção horizontal e o da direita, comprimido na vertical. É como se fosse aplicado a ampliação ou redução em apenas um sentido, vertical ou horizontal, ou nos dois sentidos, mas com razões diferentes.

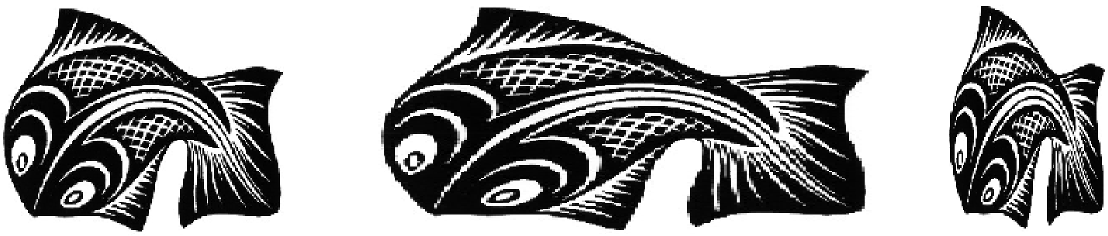


Figura 30 – Dilatação e contração

O termo expansão e compressão são usados por Anton e Rorres (2001) que os define como se a coordenada x de cada ponto do plano é multiplicada por uma constante positiva k[18], então o efeito é expandir ou comprimir cada figura plana na direção x sendo que se $0 < k < 1$, o resultado é a compressão e se $k > 1$, uma expansão. Da mesma forma ocorre pelo fator k na direção das ordenadas.

A figura 31(a) mostra o efeito de expansão em relação ao eixo x com razão $k = 2$ e a figura 31(b), o de compressão em relação ao eixo y na razão $k = \frac{1}{2}$.

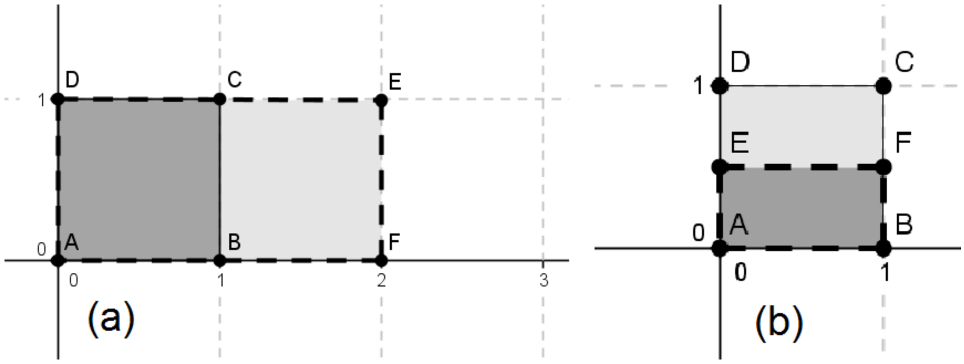


Figura 31 – Expansão e compressão do quadrado

Como se observa, no caso da expansão em relação às abscissas, a ordenada de cada ponto se mantém constante, e as abscissas são multiplicadas pelo valor k, sendo assim, o sistema de equações que nos dá as coordenadas de cada ponto transformado da figura é:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = \ \ y \end{cases} \tag{35}$$

De (35) pode-se obter a equação matricial a seguir.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{36}$$

E a matriz da transformação nesse caso fica determinada por:

$$T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

[18] No caso de k<0 o efeito é de compressão ou expansão seguido de inversão.

Analogamente determinamos que a matriz da expansão em relação ao eixo y, e as contrações são determinadas verificando a tabela 4 a seguir:

Tabela 4 – Compressão e Expansão

Transformação	Matriz da transformação
Expansão ou compressão em relação ao eixo x	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Expansão ou compressão em relação ao eixo y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

4.4.3 *Cisalhamento*

Técnicas de computação gráfica faz uso persistente de transformações geométricas para dar movimentos a objetos numa cena criada e ocasionalmente é preciso deformá-los e esses movimentos e mudança de tamanho ou formato estão ligados diretamente às transformações geométricas.

As transformações vistas até agora não alteraram o formato da figura original, mas porventura isso é necessário, como no caso da figura 32 onde o efeito gráfico de cisalhamentos sucessivos de partes da figura invertida deu o efeito de reflexo d’água.

Figura 32 – Efeito reflexo na água

O cisalhamento desloca os pontos do plano na horizontal ou vertical deformando as figuras, no primeiro caso ela preserva as ordenadas e move os pontos na direção horizontal de acordo com o valor de y, caso contrário, preserva as abscissas e move na direção vertical de acordo com um valor de x

O cisalhamento leva um ponto $P(x,y)$ do plano ao ponto $P'(x',y')$, Na figura 33 verifica-se um cisalhamento do quadrado unitário em relação à horizontal e vertical de fator $k = 2$.

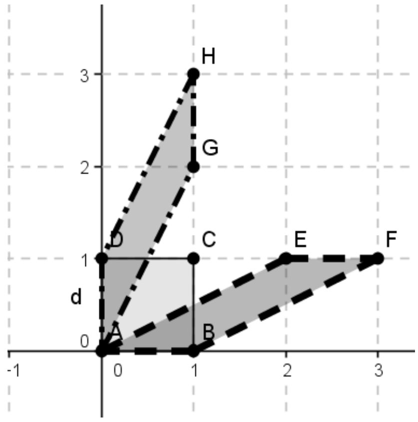


Figura 33 – Cisalhamento do quadrado

Na figura 33, se levarmos em consideração o cisalhamento em relação ao eixo x, Anton e Rorres (2001) o define como uma transformação que move cada ponto (x,y) paralelamente ao eixo x por um valor ky para a nova posição $(x+ky,y)$, ou seja, quanto mais nos afastamos do eixo x, aumenta a amplitude de y, de modo que os pontos mais afastados do eixo x são movidos por uma distância maior do que os pontos mais perto do eixo.

O sistema de equações que nos fornece as coordenadas de $P'(x',y')$ dos pontos transformados de $P(x,y)$ da figura é dada por

$$\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases} \quad (38)$$

A equação (33) pode ser escrita na forma matricial, obtendo a matriz do cisalhamento horizontal.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (39)$$

De forma análoga podemos obter as matrizes da transformação por cisalhamento vertical e resumi-las na tabela a seguir.

Tabela 5 – Cisalhamento

Transformação	Matriz da transformação
Cisalhamento horizontal.	$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Cisalhamento vertical.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
Cisalhamento horizontal e vertical	$\begin{pmatrix} 1 & k_2 \\ k_1 & 1 \end{pmatrix}$

4.5 Composição de transformações

Em certas ocasiões é necessária uma combinação de transformações para atingir um objetivo como, por exemplo, na teoria D'arcy Thompsom visto no capítulo 2. Na figura 34 pode-se imaginar como uma espécie de peixe pode sofrer alterações no seu formato, o peixe que em (a) mostra o seu formato hoje, em (b) traz uma possível transformação no decorrer de algum tempo, e em (c) outra transformação passados mais algumas milhares de anos. As transformações consecutivas observadas nessa evolução foram a expansão horizontal e cisalhamento, obrigatoriamente nessa ordem.

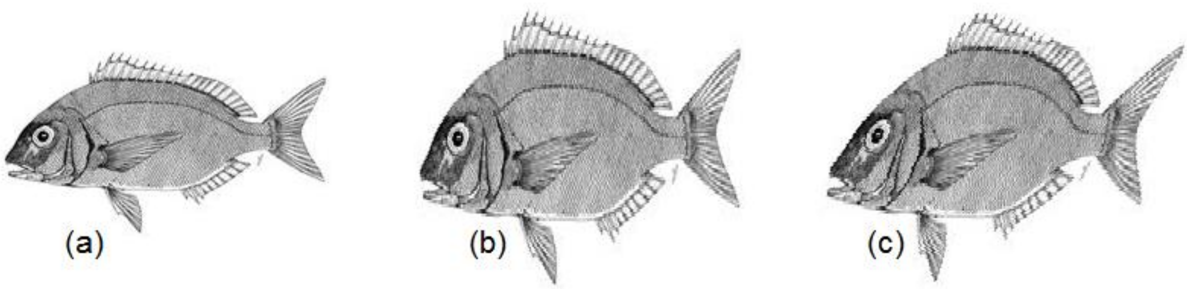


Figura 34 – Transformação do peixe

Hefez e Vernandes (2012) expõem que a composição de duas transformações $T: V \to W$ e $S: W \to U$ é a composição $(S \circ T) = S\big(T(v)\big)$ com $v \epsilon V$, que é a usual em funções. Convém ressaltar que o produto de matrizes não é comutativo assim como as transformações geométricas, e isso se verifica na figura 4.29 onde em (a) o ponto P sofre uma rotação de 90^{o} e a seguir uma reflexão em relação ao eixo x e, em (b), uma reflexão seguida da rotação de 90^{o}, não obtendo assim o mesmo ponto transformado.

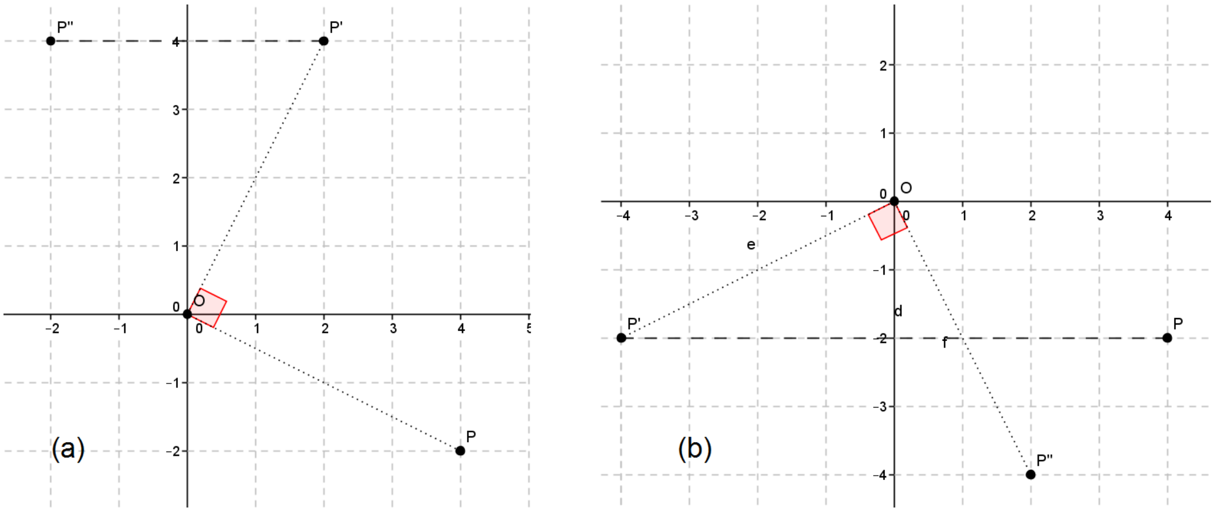


Figura 35 – Composição de transformações no ponto P

Outro exemplo, pode ser verificado na aplicação de duas transformações no segmento PQ de coordenadas P(1, –2) e Q(4, –3) de modo que T_1 seja uma rotação de 30^0 e T_2 uma simetria em relação ao eixo das abscissas.

$$T_1 = \begin{pmatrix} cos30^o & -sen30^0 \\ sen30^0 & cos30^0 \end{pmatrix} \text{ e } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Deve-se então aplicar a composição de transformações $T_1 \circ T_2$, devendo começar a aplicação por T_2 e a seguir por T_1. A equação matricial fica assim:

$$M_2 = T_2 T_1 M_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos30^o & -sen30^0 \\ sen30^0 & cos30^0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$M_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} cos30^o & -sen30^0 \\ -sen30^o & -cos30^0 \end{pmatrix}}_{T\prime} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Em (42) nota-se que aplicar T_1 e T_2, respectivamente, é o mesmo que multiplicar a matriz dos vértices de PQ pela matriz T'. Caso fosse a composição $T_2 \circ T_1$, a matriz T' seria:

$$T' = \begin{pmatrix} cos30^o & sen30^o \\ sen30^0 & -cos30^o \end{pmatrix} \tag{43}$$

O que comprova as verificações de Cayley sobre a não comutatividade da multiplicação de matrizes, como verificado no capítulo 3.2.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa foram analisados documentos oficiais e autores como Berbel (2012), Brousseau (1996), D'Ambrósio (1997), Machado (2002), Morin (2011), onde foi percebida uma preocupação com a contextualização do ensino e que ela não é inédita na educação brasileira. Através dos escritos sobre contextualização ficou clara a perspectiva desses autores quanto à preocupação com um ensino consistente e que trouxesse uma produção de significados para o aluno de forma que possa contribuir para seu aprendizado de forma evidente. Com a leitura sobre contextualização foi verificado outros termos que puderam contribuir na elaboração de atividades sobre matrizes de forma diferenciada, o que não é encontrado em materiais disponíveis aos professores, salvo o caderno do aluno do Estado de São Paulo, elaborado como auxílio de Spinelli (2011), que inova na maneira de apresentar o conteúdo apostando numa sequência didática interdisciplinar e intradisciplinar.

Na análise sobre contextualização, a preocupação é com a não segmentação das disciplinas, que hoje em dia se apresentam dividida e sem conexões umas com as outras e verificou-se que é papel do professor a preocupação com suas integrações sempre tomando cuidado de não perder a particularidade de cada uma, mantendo seus objetivos e metas a serem cumpridas. Ficou claro também que muito se tem discutido sobre o futuro da educação no que se refere à essa abordagem como se pode ver nos escritos de Brousseau (1996) que constatou a importância da contextualização, descontextualização e recontextualização no ensino com o objetivo de tornar o aprendizado coerente com as expectativas do jovem contemporâneo.

No estudo de matrizes, que foi o foco principal do trabalho, foi priorizada a metodologia da problematização discutida por Berbel (2012) fazendo com que as atividades tomassem um rumo diferenciado. Verificou-se também que muitos trabalhos já tiveram essa preocupação, mas os professores ainda estão desprovidos de materiais inovadores sobre o assunto.

Na bibliografia consultada sobre as atividades com matrizes, conceituando-a e aplicando esses conceitos em atividades contextualizadas obteve-se êxito como consta nesse trabalho, e foi verificado que as aplicabilidades de matrizes são inúmeras e a abordagem sobre isometrias no plano foi fundamental para a obtenção desse objetivo. Foram apresentadas também atividades que envolvem o conceito de grafos dirigidos, fundamental na conceituação de matriz.

Acredita-se que o trabalho possa servir de apoio ao professor, que ao consultar, verificará a viabilização de sua aplicação enriquecendo seu rol de materiais e metodologias.

6 BIBLIOGRAFIA.

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Contemporary Linear Algebra**. New Jersey, John Wiley & Sons, 2002.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações** (8 ed.). Porto Alegre: Bookman, 2001.

BERBEL, N. A. **As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes,** disponível em http://www.proiac.uff.br/sites/default/files/documentos/berbel_2011.pdf. Acesso em 05 de novembro de 2013

______. **A metodologia da problematização com o Arco de Maguarez: uma reflexão teórico-epistemológica**. Londrina: EDUEL, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática** (3 ed.). São Paulo, SP: Blucher, 1974

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio**. Brasília, 2000.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006.

______ **Guia de Livros Didáticos - PNLD 2012: Matemática**. Bralília, 2011.

______. **LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional** (8. ed.). Brasília: Câmara dos deputados. 2013

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: C. Parra (org.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 48-72.

CERQUEIRA, A. P. **Isometrias: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situação de aprendizagem para o ensino médio**. São Paulo, PUC, 2005. 114 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus. 1997

______. **A Interdisciplinaridade e a Transdisciplinaridade na Formação do Professor**. Disponível: http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br/. Acesso em 13 de Novembro de 2013

ESCHER, M. C. **M. C. Escher - Gravuras e Desenhos**. Hamburgo: Taschen. 2002.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática** (5 ed.). Campinas: UNICAMP. 2011

Freire, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 1987

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S.. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IRA, S.; FREIRE, P. **Medo e Ousadia** - O Cotidiano do Professor. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 1986.

JAPIASSU, H. **O sonho transdisciplinar e as razões da Filosofia**. Rio de Janeiro: Imago. 2006.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios**. Rio de Janeiro: SBM. 2002.

_____. **A propósito da contextualização**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, v. 1, n. 58, p. 28-51, 2005.

MACHADO, N. J. Sobre a ideia de competência. In: PERRENOUD, P et al. **As competências para ensinar no século XXI: a formação de professores e o desafio da avaliação**. São Paulo: Artmed. 2002

______. (2006). **Sobre a ideia de competência**. Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/20060804.pdf. . Acesso em 12 de Dezembro de 2013.

______. (2012). **Tópicos de Epístemologia e Didática** - Introdução. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=NjxdcTmXquA. Acesso em 2014

MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. Brasília: Cortez. 2011.

PEREIRA, A. L.; MELO, S. T. ENEM 2009: ENEM, Vazamentos, erros e contextualização. **Revista do Porfessor de Matemática**, Rio de Janeiro: SBM, v. 1, n. 71, p. 9-18. 2010.

SANCHES, M. H. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes**. Campinas, UNICAMP, 2010. 142 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2002

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. In: C. PARRA, **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 11-25

SANTANA, M. F.; Carlos, E. J. **Regularidades e dispersões no discurso da aprendizagem significativa em David Ausubel e Paulo Freire**. Aprendizagem Significativa em Revista 3, n. 1 p. 12-22. Disponível em: www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID40/v3_n1_a2013.pdf. Acesso em abril de 2013.

SÃO PAULO. (2009). **Caderno do Professor: matemática, ensino médio - 2a série**. São Paulo: SEE, 2009.

______. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: Secretaria da Educação, 2012.
SPINELLI, W. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da matemática**. São Paulo, USP, 2010. 138 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

WITKOWSKI, N. D'Arcy Thompsom: um espaço de espécies. In: ______. **Uma história sentimental das ciências**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004. p. 165-174.

ANEXO A – Carta da transdisciplinaridade

Preâmbulo

Considerando que a proliferação atual das disciplinas acadêmicas conduz a um crescimento exponencial do saber que torna impossível qualquer olhar global do ser humano;

Considerando que somente uma inteligência que se dá conta da dimensão planetária dos conflitos atuais poderá fazer frente à complexidade de nosso mundo e ao desafio contemporâneo de autodestruição material e espiritual de nossa espécie;

Considerando que a vida está fortemente ameaçada por uma tecnociência triunfante que obedece apenas à lógica assustadora da eficácia pela eficácia;

Considerando que a ruptura contemporânea entre um saber cada vez mais acumulativo e um ser interior cada vez mais empobrecido leva à ascensão de um novo obscurantismo, cujas consequências sobre o plano individual e social são incalculáveis;

Considerando que o crescimento do saber, sem precedentes na história, aumenta a desigualdade entre seus detentores e os que são desprovidos dele, engendrando assim desigualdades crescentes no seio dos povos e entre as nações do planeta;

Considerando simultaneamente que todos os desafios enunciados possuem sua contrapartida de esperança e que o crescimento extraordinário do saber pode conduzir a uma mutação comparável à evolução dos humanóides à espécie humana;

Considerando o que precede, os participantes do Primeiro Congresso Mundial de Transdisciplinaridade (Convento de Arrábida, Portugal 2 - 7 de novembro de 1994) adotaram o PRESENTE Protocolo entendido como um conjunto de princípios fundamentais da comunidade de espíritos transdisciplinares, constituindo um contrato moral que todo signatário deste Protocolo faz consigo mesmo, sem qualquer pressão jurídica e institucional.

Artigo 1

Qualquer tentativa de reduzir o ser humano a uma mera definição e de dissolvê-lo nas estruturas formais, sejam elas quais forem, é incompatível com a visão transdisciplinar.

Artigo 2

O reconhecimento da existência de diferentes níveis de realidade, regidos por lógicas diferentes é inerente à atitude transdisciplinar. Qualquer tentativa de reduzir a realidade a um único nível regido por uma única lógica não se situa no campo da transdisciplinaridade.

Artigo 3

A transdisciplinaridade é complementar à aproximação disciplinar: faz emergir da confrontação das disciplinas dados novos que as articulam entre si; oferece-nos uma nova visão da natureza e da realidade. A transdisciplinaridade não procura o domínio sobre as várias outras disciplinas, mas a abertura de todas elas àquilo que as atravessa e as ultrapassa.

Artigo 4

O ponto de sustentação da transdisciplinaridade reside na unificação semântica e operativa das acepções através e além das disciplinas. Ela pressupõe uma racionalidade aberta por um novo olhar, sobre a relatividade definição e das noções de ""definição" e "objetividade". O formalismo excessivo, a rigidez das definições e o absolutismo da objetividade comportando a exclusão do sujeito levam ao empobrecimento".

Artigo 5

A visão transdisciplinar está resolutamente aberta na medida em que ela ultrapassa o domínio das ciências exatas por seu diálogo e sua reconciliação não somente com as ciências humanas, mas também com a arte, a literatura, a poesia e a experiência espiritual.

Artigo 6

Com a relação à interdisciplinaridade e à multidisciplinaridade, a transdisciplinaridade é multidimensional. Levando em conta as concepções do tempo e da história, a transdisciplinaridade não exclui a existência de um horizonte trans-histórico.

Artigo 7

A transdisciplinaridade não constitui uma nova religião, uma nova filosofia, uma nova metafísica ou uma ciência das ciências.

Artigo 8

A dignidade do ser humano é também de ordem cósmica e planetária. O surgimento do ser humano sobre a Terra é uma das etapas da história do Universo.

O reconhecimento da Terra como pátria é um dos imperativos da transdisciplinaridade. Todo ser humano tem direito a uma nacionalidade, mas, a título de habitante da Terra, é ao mesmo tempo um ser transnacional. O reconhecimento pelo direito internacional de um pertencer duplo - a uma nação e à Terra - constitui uma das metas da pesquisa transdisciplinar.

Artigo 9

A transdisciplinaridade conduz a uma atitude aberta com respeito aos mitos, às religiões e àqueles que os respeitam em um espírito transdisciplinar.

Artigo 10

Não existe um lugar cultural privilegiado de onde se possam julgar as outras culturas. O movimento transdisciplinar é em si transcultural.

Artigo 11

Uma educação autêntica não pode privilegiar a abstração no conhecimento. Deve ensinar a contextualizar, concretizar e globalizar. A educação transdisciplinar reavalia o papel da intuição, da imaginação, da sensibilidade e do corpo na transmissão dos conhecimentos.

Artigo 12

A elaboração de uma economia transdisciplinar é fundada sobre o postulado de que a economia deve estar a serviço do ser humano e não o inverso.

Artigo 13

A ética transdisciplinar recusa toda atitude que recusa o diálogo e a discussão, seja qual for sua origem - de ordem ideológica, científica, religiosa, econômica, política ou filosófica. O saber compartilhado deverá conduzir a uma compreensão compartilhada baseada no respeito absoluto das diferenças entre os seres, unidos pela vida comum sobre uma única e mesma Terra.

Artigo 14

Rigor, abertura e tolerância são características fundamentais da atitude e da visão transdisciplinar. O rigor na argumentação, que leva em conta todos os dados, é a barreira às possíveis distorções. A abertura comporta a aceitação do desconhecido, do inesperado e do imprevisível. A tolerância é o reconhecimento do direito às ideias e verdades contrárias às nossas.

Artigo final

A Presente Carta Transdisciplinar foi adotada pelos participantes do Primeiro Congresso Mundial de Transdisciplinaridade, que visam apenas à autoridade de seu trabalho e de sua atividade.

Segundo os processos a serem definidos de acordo com os espíritos transdisciplinares de todos os países, o Protocolo permanecerá aberto à assinatura de todo ser humano interessado em medidas progressistas de ordem nacional, internacional para aplicação de seus artigos na vida.

Adotada no Primeiro Congresso Mundial da Transdisciplinaridade, Convento de Arrábida, Portugal, de 2 a 6 de novembro de 1994. Comitê de Redação: Lima de Freitas, Edgar Morin e Basarab Nicolescu.

ANEXO B – A DECLARAÇÃO DE VENEZA

I FORUM DA UNESCO SOBRE CIÊNCIA E CULTURA
Ciência e as Fronteiras do Conhecimento: Prólogo do Nosso Passado Cultural.
Veneza, Itália, 3 a 7 de Março de 1986.

Em cooperação com a Fondazione Giorge Cini, a UNESCO promoveu em Veneza, Itália, de 3 a 7 de Março de 1986, um simpósio sobre ‘ciência e as fronteiras do conhecimento: prólogo do nosso passado cultural’. O simpósio, que reuniu 19 participantes de todas as partes do mundo e de distintas especialidades, culminou com um documento que sintetiza as discussões havidas e que passou a ser conhecido com a

DECLARAÇÃO DE VENEZA

1. Estamos testemunhando uma importante evolução no campo das ciências, resultante das reflexões sobre ciência básica (em particular pelos desenvolvimentos recentes em física e em biologia), pelas mudanças rápidas que elas ocasionaram na lógica, na epistemologia e na vida diária, mediante suas aplicações tecnológicas. Contudo, notamos ao mesmo tempo um grande abismo entre uma nova visão do mundo que emerge do estudo de sistemas naturais e os valores que continuam a prevalecer em filosofia, nas ciências sociais e humanas e na vida da sociedade moderna, valores amplamente baseados num determinismo mecanicista, positivismo ou niilismo. Acreditamos que essa discrepância é danosa e, na verdade, perigosa para a sobrevivência da nossa espécie.
2. O conhecimento científico, no seu próprio ímpeto, atingiu o ponto em que ele pode começar um diálogo com outras formas de conhecimento. Nesse sentido, e mesmo admitindo as diferenças fundamentais entre Ciência e Tradição, reconhecemos ambas em complementaridade, e não em contradição. Esse novo e enriquecedor intercâmbio entre ciência e as diferentes tradições do mundo abre as portas para uma nova visão da humanidade, e até para um novo racionalismo, o que poderia induzir a uma nova perspectiva metafísica.

3. Mesmo não desejando tentar um enfoque global, nem estabelecer um sistema fechado de pensamento, nem inventar uma nova utopia, reconhecemos a necessidade premente de pesquisa autenticamente transdisciplinar mediante uma dinâmica de intercâmbio entre as ciências naturais, sociais, arte e tradição. Poderia ser dito que esse modo transdisciplinar é inerente ao nosso cérebro pela dinâmica de interação entre os seus dois hemisférios. Pesquisas conjuntas da natureza e da imaginação, do universo e do homem, poderiam conduzir-nos mais próximos à realidade e permitir-nos um melhor enfrentamento dos desafios do nosso tempo.
4. A maneira convencional de ensinar ciência, mediante uma apresentação linear do conhecimento, não permite que se aperceba o divórcio entre a ciência moderna e visões do mundo que são hoje superadas. Enfatizamos a necessidade de novos métodos educacionais que tomem em consideração oprogresso científico atual, que agora entra em harmonia com as grandes tradições culturais, cuja preservação e estudo profundo são essenciais. A UNESCO deve ser a organização apropriada para procurar essas ideias.
5. Os desafios de nosso tempo (o risco de destruição de nossa espécie, o impacto do processamento de dados, as implicações da genética, etc.) jogam uma nova luza nas responsabilidades sociais da comunidade científica, tanto na iniciação quanto na aplicação de pesquisa. Embora os cientistas possam não ter controle sobre as aplicações das suas próprias descobertas, eles não poderão permanecer passivos quando confrontados com os usos impensados daquilo que eles descobriram. É nosso ponto de vista que a magnitude dos desafios de hoje exige, por um lado, um fluxo de informações para o público que seja confiável e contínuo, e, por outro lado, o estabelecimento de mecanismos multi e transdisciplinares para conduzirem e mesmo executarem os processos decisórios.
6. Esperamos que a UNESCO considere este encontro como um ponto de partida e encoraje mais reflexões do gênero num clima de transdisciplinaridade e universalidade.

Signatórios:

Professor D.A. Akyeampong (Gana), físico-matemático, Universidade de Gana. Professor Ubiratan D'Ambrosio (Brasil), matemático, coordenador geral dos Institutos, Universidade Estadual de Campinas. Professor René

Berger (Suiça), professor honorário, Universidade de Lausanne. Professor Nicolo Dallaporta (Itália), professor honorário da Escola Internacional dos Altos Estudos em Trieste. Professor Jean Dausset (França), Prêmio Nobel de Fisiologia e de Medicina (1980), Presidente do Movimento Universal da Responsabilidade Científica (MURS França). Senhora Maîtraye Devi (Índia), poeta-escritora. Professor Gilbert Durand (França), filósofo, fundador do Centro de pesquisa sobre o imaginário. Dr. Santiago Genovès (México), pesquisador no Instituto de pesquisa antropológica, Acadêmico titutlar da Academia nacional de medicina. Dr. Susantha Goonatilake (Sri Lanka), pesquisador, antropologia cultural. Prof. Avishai Margalit (Israel), filósofo, Universidade hebráica de Jerusalém. Prof. Yujiro Nakamura (Japão), filósofo-escritor, professor na Universidade de Meiji. Dr. Basarab Nicolescu (França), físico, C.N.R.S. Prof. David Ottoson (Suécia), Presidente do Comitê Nobel pela fisiologia ou medicina, Professor e Diretor, Departamento de Fisiologia, Instituto Karolinska. Sr. Michel Random (França), filósofo, escritor. Sr. Facques G. Richardson (França- Estados Unidos), escritor científico. Prof. Abdus Salam (Paquistão), Prêmio Nobel de Física (1979), Diretor do Centro internacional de física teórica, Trieste, Itália, representado pelo Dr. L.K. Shayo (Nigéria), professor de matemáticas. Dr. Rupert Sheldrake (Reino Unido), Ph.D. em bioquímica, Universidade de Cambridge. Prof. Henry Stapp (Estados Unidos da América), físico, Laboratório Lawrence Berkeley, Universidade da Califórnia Berkeley. Dr. David Suzuki (Canadá), geneticista, Universidade de British Columbia.