



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma introdução à Geometria Esférica

Welder Dan Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP

2015

516.9 Silva, Welder Dan
S586u Uma introdução à Geometria Esférica/ Welder Dan Silva- Rio
Claro: [s.n.], 2015.
47 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP

1. Geometria Não-Euclidiana. 2. Geometria Esférica. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Welder Dan Silva

UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP
Orientadora

Prof. Dr. João Peres Vieira
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
Departamento de Matemática - UFSCar/São Carlos

Rio Claro, 26 de Fevereiro de 2015

Dedico este trabalho aos nossos queridos professores, independente do gênero, idade, grau de ensino ou experiência. Todos aqueles que batalham dia a dia para formar uma sociedade mais crítica; aqueles que enfrentam várias jornadas de trabalho e mesmo assim mantêm um sorriso no rosto na última aula do último período; aqueles que sabem dividir seu tempo com as famílias, pois escola também é família; aqueles que desenvolvem seu trabalho com amor e dedicação sem pensar no retorno pessoal; e por fim a esta profissão que, apesar de não ter o prestígio que merece, sempre abraçou a causa de um mundo melhor para todos.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à minha orientadora Alice, que teve a incrível paciência e dedicação para que este trabalho fosse concluído com êxito.

Agradeço aos meus colegas de pós-graduação que estiveram comigo nestes 2 anos e nunca desistiram apesar dos desafios de se trabalhar em sala de aula e a busca da formação profissional.

Agradeço também aos meus pais e família que sempre me apoiaram nas decisões, independente dos desafios.

Por fim, agradeço a todos que, de certa forma, participaram desta conquista.

*Uma geometria não pode ser
mais verdadeira do que outra.
Poderá ser apenas mais cômoda.*

Poincaré

Resumo

Um dos objetivos deste trabalho, baseado em alguns axiomas escolhidos de tal forma que se pudesse obter uma pequena introdução ao estudo da Geometria Esférica, é apresentar a trigonometria esférica. Apresentamos também a demonstração da fórmula da área de um polígono, caso convexo e caso não convexo, na esfera.

Palavras-chave: Geometria Não-Euclidiana, Geometria Esférica.

Abstract

One of the main goal of this work, based in some axioms which were chosen such that we could obtain an introduction to the study of Spherical Geometry, is to present the spherical trigonometry. We also present a proof of a formula for the area of a convex and also for non convex polygon on the sphere.

Keywords: Non-Euclidean Geometry, Spherical Geometry.

Lista de Figuras

2.1	Segmento \overline{AB}	20
2.2	$\overline{CD} \cong \overline{BE}$	21
2.3	Círculo de centro em O e raio \overline{OA}	21
2.4	Semirreta \overrightarrow{AB}	21
2.5	Semirretas opostas \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AB}	22
2.6	Ângulo BAC	22
2.7	Ângulos suplementares	22
2.8	Ângulo reto	23
2.9	Reta m por P paralela a l	24
2.10	Reta t transversal a l e m	24
2.11	Carl Friedrich Gauss	25
2.12	Triângulo com soma dos ângulos maior que 180°	26
2.13	Georg Friedrich Bernhard Riemann	27
3.1	Círculos máximos na esfera	29
3.2	Pontos A e B separam C e D	31
3.3	Perspectiva de l para m com centro em O	31
3.4	Dois "triângulos" diferentes com os mesmos vértices.	32
3.5	Pontos antípodas A e A'	32
3.6	Faixa de Möbius.	33
3.7	Superfície da Terra	34
4.1	Esfera de raio R com centro na origem	36
4.2	Triângulo esférico	37
4.3	Triângulo esférico $A_1B_1C_1$	40
4.4	Triangulação em S	42

Sumário

1	Introdução	17
2	O Axioma das Paralelas	19
2.1	Os quatro primeiros postulados de Euclides	20
2.2	O Postulado das Paralelas	23
3	A Geometria Esférica	29
3.1	Axiomas da Geometria Esférica	29
4	Aplicações da Geometria Esférica	35
4.1	Distância Esférica	35
4.2	Trigonometria Esférica	37
4.3	Área na esfera	40
4.4	A Fórmula de Euler	42
	Referências	47

1 Introdução

O texto abaixo foi baseado na obra de Greenberg(1993) "*Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*".

A palavra geometria vem do grego *geometrein* (onde *geo* significa **terra** e *metrein*, **medir**) e, como a própria palavra diz, é a ciência da medição de terras. Há indícios de que os agrimensores gregos foram os primeiros a mencioná-la, pelo o que pode ser constatado nas anotações do historiador grego *Heródoto*(quinto século a.C.), porém outras civilizações antigas, como os babilônicos, hindus e chineses, também possuíam conhecimentos geométricos.

A Geometria daquela época era baseada num conjunto de procedimentos: anotações de experimentos, observações, adivinhações. Para fins práticos eram utilizadas para intuição e respostas aproximadas.

Para se ter ideia, os babilônicos dos anos 1600 a 2000 a.C. consideravam a medida da circunferência como sendo 3 vezes seu diâmetro. O mesmo valor foi adotado pelo arquiteto romano *Vitrúvius* em seus projetos e também encontrado na literatura chinesa. Era um valor considerado sagrado pelos judeus e sancionado em escritura (I Reis 07:23). Houve até tentativa (rejeitada) de adotar o resultado 3 para o que hoje conhecemos como o valor de π . Os egípcios de 1800 a.C. chegaram a uma aproximação, pelo que consta no papiro de *Rhind*. Atualmente, podemos encontrar aproximações com uma quantidade muito grande de casas decimais graças aos computadores, mas por exemplo, no caso de 5 casas decimais, 3,14159. Em 1789, *Johann Lambert* provou que π não era igual a qualquer fração (número racional) e em 1882 foi a vez de *F. Lindemann* provar que tal valor era um número transcendental.

Os egípcios chegaram a muitos cálculos corretos, como exemplo, a fórmula do volume do tronco de uma pirâmide de base quadrada, porém, pecaram adotando a fórmula da área de um retângulo como válida para qualquer quadrilátero. Os gregos encaravam a geometria como um conjunto de regras para calcular e não como uma ciência em si, pois não apresentavam justificativas. Os babilônicos eram mais avançados em aritmética e álgebra e já utilizavam a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, onde o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, conhecido como o *Teorema de Pitágoras*, porém usado antes mesmo do nascimento de *Pitágoras*.

Os gregos insistiram que as demonstrações geométricas deveriam ser estabelecidas por raciocínio dedutivo, e não por tentativa e erro. *Tales de Mileto* obteve os primeiros resultados, através de seus cálculos herdados da matemática egípcia e babilônica, e iniciou o método de demonstrações através de raciocínios lógicos. Pitágoras e seus discípulos deram continuidade ao trabalho. Ele era considerado um profeta religioso, pois acreditava na imortalidade da alma e na reencarnação. Organizou uma irmandade que possuía seus próprios ritos de purificação e acreditava no estudo da música e matemática para alcançar a união com Deus.

Quando os pitagóricos descobriram comprimentos irracionais, como $\sqrt{2}$, ficaram surpresos e para não considerar a existência de um número desses, resolveram representá-lo na forma geométrica, ou seja, $\sqrt{2}$ era considerado a diagonal do quadrado unitário. O quarto século a.C. foi marcado pela Academia de Ciência e Filosofia de Platão, fundada cerca de 387 a.C. Platão acreditava que o universo de ideias era mais importante do que o mundo material dos sentidos, sendo este último apenas uma sombra do primeiro, e também que os erros dos sentidos deveriam ser corrigidos pelo pensamento, o que é melhor aprendido através do estudo de matemática. Em suas demonstrações, adotava o método de prova indireta, do qual uma afirmação é inválida se ela leva a uma contradição.

Euclides era um discípulo da escola platônica. Por volta de 300 a.C. produziu o tratamento definitivo da geometria grega e teoria dos números em seus 13 volumes do *Elementos*. Tal obra prima foi elaborada através da experiência e resultados apresentados por seus antecessores: os pitagóricos nos livros I, IV, VII e IX; *Archytas* no livro VIII; *Eudoxus* no livro V, VI e XII; *Theaetetus* nos livros X e XIII. Sua abordagem à geometria tem dominado o ensino do assunto por mais de dois mil anos.

Ao analisar os conteúdos obrigatórios para o ensino médio no currículo de matemática, observamos que a geometria espacial é pouco desenvolvida e não se fala sobre as geometrias não-euclidianas. Logo vimos a necessidade de apresentar uma proposta de material que pudesse ser utilizado em sala de aula.

Este trabalho apresenta de uma forma simples a geometria esférica. No primeiro capítulo apresentamos os requisitos necessários para iniciar o estudo da geometria euclidiana e o quinto postulado de Euclides que foi fortemente discutido e dá base para refletir sobre outras geometrias.

No segundo capítulo apresentamos a base para construção da geometria esférica e o terceiro capítulo apresentamos a trigonometria esférica e como aplicação demonstramos a fórmula da área de um polígono convexo e não convexo.

2 O Axioma das Paralelas

A Geometria Euclidiana tem sido estudada através dos Axiomas de Euclides. Para utilizar o método axiomático, deve-se partir do seguinte fato: pode-se provar uma afirmação A_1 mostrando por raciocínio lógico que ela segue de uma afirmação A_2 , considerada aceita. Caso A_2 não seja aceita, poderia ser provada através de outra afirmação A_3 considerada aceita. Esse processo não pode ser repetido indefinidamente. Assim, chega-se a uma afirmação que não seja necessário justificar. Tal afirmação é chamada de *axioma* ou *postulado*. Em seguida, define-se regras de raciocínio lógico para que uma afirmação decorra de outra.

Em uma demonstração deve-se estabelecer alguns princípios, como exemplo, a compreensão do significado das palavras e símbolos utilizados. Tal compreensão se refere tanto a quem escreve, quanto a quem lê. Não há problema em utilizar uma linguagem nova, contanto que se tenha conhecimento de sua definição. Porém, tal definição está sujeita às regras de raciocínio.

Além disso, não podemos definir todos os termos pois, para definir um termo utilizamos outros termos, e para definir estes utilizamos mais outros termos, caindo numa regressão infinita. Torna-se necessário deixar alguns termos indefinidos. Considera-se como indefinidos os seguintes termos geométricos:

- **Ponto, reta, estar sobre, estar entre** (como em "ponto C está entre os pontos A e B ") e **congruente**.

Alguns sinônimos de "estar sobre" são frequentemente utilizados. Como exemplo, ao invés de dizer "o ponto P está sobre a reta l " poderia ser " l passa por P " ou ainda " l incide em P ".

Outros termos indefinidos, que não são específicos da geometria, serão utilizados. É o caso da palavra "conjunto", fundamental em toda a matemática, muito utilizada no ensino fundamental como "coleção de objetos", e o conceito "pertencer a" dando sentido de "ser um elemento de", como no exemplo em que todos os pontos e retas pertencem ao plano. Se cada elemento de um conjunto S pertence a outro conjunto T será dito que S está "contido em" ou "é subconjunto de" T .

Um conjunto é dito *igual* ao outro quando todos os elementos de um são elementos do outro, e vice-versa. Essa identificação transmite a ideia de que igual seja "idêntico".

Na geometria, geralmente, usamos o termo "congruente". Assim, em vez de dizer "se AB e AC são iguais, então $\triangle ABC$ é isósceles" será dito "se AB e AC são congruentes, então $\triangle ABC$ é isósceles". Observe que congruentes, neste caso, significa que têm a mesma medida.

Os termos geométricos indefinidos apresentados anteriormente fazem parte de uma lista elaborada por *David Hilbert* (1862-1943). Seu tratado "*Os Fundamentos da Geometria*" (1899), não só esclareceu definições de Euclides, mas também preencheu as lacunas em algumas das provas de Euclides.

2.1 Os quatro primeiros postulados de Euclides

Euclides iniciou sua geometria com cinco axiomas ou postulados:

Postulado I: Para cada ponto P e cada ponto Q , diferente de P , existe uma única reta passando por P e Q .

Outra forma conhecida para expressar este postulado é "dois pontos determinam uma única reta". Para denotar tal reta única que passa por P e Q usa-se \overleftrightarrow{PQ} .

Para enunciar o segundo postulado, deve-se ter em mente a seguinte definição:

Definição 2.1. Dados dois pontos A e B , o segmento AB é o conjunto cujos elementos são os pontos A e B , e todos os pontos que se encontram na reta \overleftrightarrow{AB} e que estão entre A e B . Os pontos dados A e B são chamados extremidades do segmento \overline{AB} .

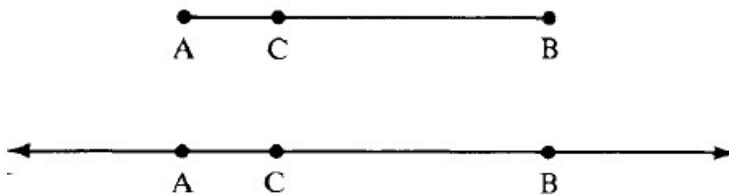
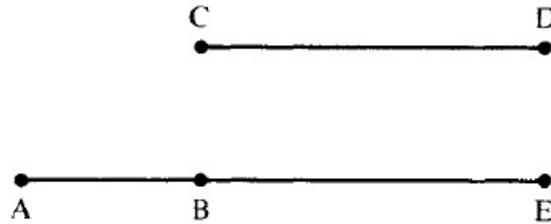


Figura 2.1: Segmento \overline{AB}

Em muitos textos de geometria, principalmente aqueles voltados para o ensino médio, usa-se a notação \overline{AB} , para denotar o segmento de extremidades nos pontos A e B , que será utilizada também.

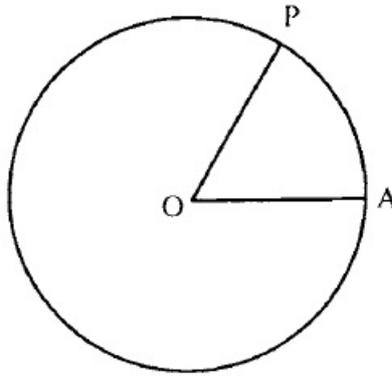
Postulado II: Para cada segmento \overline{AB} e cada segmento \overline{CD} , existe um único ponto E tal que, B está entre A e E e o segmento \overline{CD} é congruente ao segmento \overline{BE} .

Observe que neste postulado aparece o termo indefinido congruente e a notação $\overline{CD} \cong \overline{BE}$ será utilizada para indicar que \overline{CD} é congruente a \overline{BE} .

Figura 2.2: $\overline{CD} \cong \overline{BE}$

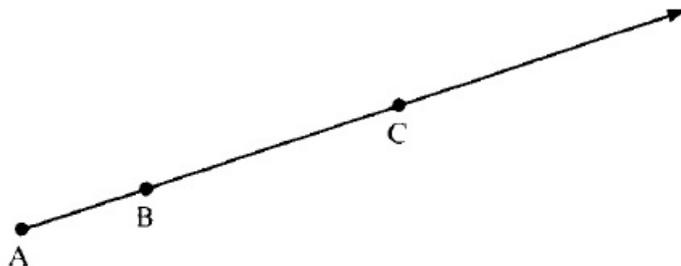
Para enunciar o terceiro postulado, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.2. Dados dois pontos A e O , o conjunto dos pontos P tal que $\overline{OP} \cong \overline{OA}$ é chamado círculo com centro em O , e cada um dos segmentos \overline{OP} é chamado de raio do círculo.

Figura 2.3: Círculo de centro em O e raio \overline{OA}

Postulado III: Para cada ponto O e cada ponto A , diferente de O , existe um único círculo com centro em O e raio \overline{OA} .

Definição 2.3. A semirreta \overrightarrow{AB} é definida como o conjunto de pontos que estão na reta \overleftrightarrow{AB} , dentre eles, os pontos que pertencem ao segmento \overline{AB} e todos os pontos C em \overleftrightarrow{AB} de tal forma que B está entre A e C .

Figura 2.4: Semirreta \overrightarrow{AB}

Definição 2.4. As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são ditas opostas se elas são distintas, provêm do mesmo ponto A , e se elas são parte da mesma reta $\overleftarrow{AB} = \overleftarrow{AC}$.



Figura 2.5: Semirretas opostas \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AB}

Definição 2.5. Um ângulo com vértice A é definido como sendo um ponto A juntamente com as duas semirretas distintas não opostas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , chamadas de lados do ângulo, proveniente de A .

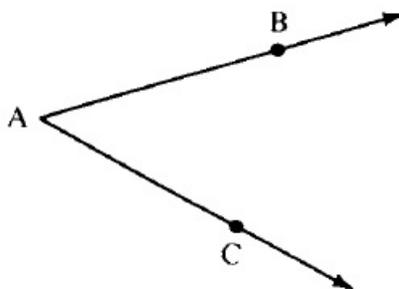


Figura 2.6: Ângulo BAC

Para denotar tal ângulo utiliza-se $\sphericalangle A$, $\sphericalangle BAC$ ou $\sphericalangle CAB$. Observe que por esta definição não existe ângulo zero e nem raso, o que não será de muita importância pois a maioria das afirmações sobre ângulos não se aplica a ângulos rasos.

Definição 2.6. Se dois ângulos $\sphericalangle BAD$ e $\sphericalangle CAD$ têm um lado comum \overrightarrow{AD} e os outros dois lados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} formam semirretas opostas, os ângulos são ditos suplementos um do outro, ou ângulos suplementares.

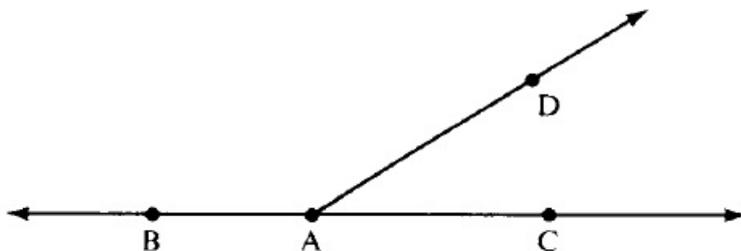


Figura 2.7: Ângulos suplementares

Definição 2.7. Um ângulo $\sphericalangle BAD$ é um ângulo reto, se tiver um ângulo suplementar a que é congruente.

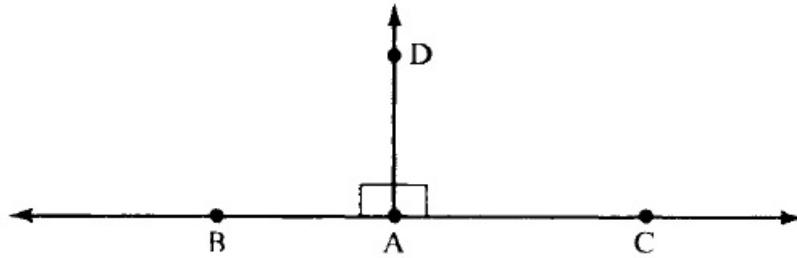


Figura 2.8: Ângulo reto

Observe que dessa forma um ângulo reto pode ser definido sem se referir a graus, utilizando apenas a noção indefinida de congruência de ângulos.

Postulado IV: Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

Este postulado expressa uma espécie de homogeneidade, embora dois ângulos retos possam estar "muito longe" uns dos outros, no entanto, eles "têm o mesmo tamanho". O postulado, portanto, fornece um padrão natural de medição de ângulos. Porém, na geometria euclidiana não há um padrão natural de medição pois, unidades de comprimento (um pé, um metro, etc), devem ser escolhidas de forma arbitrária.

2.2 O Postulado das Paralelas

Os quatro primeiros postulados de Euclides sempre foram aceitos pelos matemáticos. Já o quinto postulado, das paralelas, causou controvérsias, o que resultou no desenvolvimento de geometrias não-euclidianas. Neste trabalho, não será indicado o quinto postulado em sua forma original, como ele apareceu nos Elementos. Em seu lugar será apresentado um postulado logicamente equivalente ao original. Esta versão é conhecida como "*O postulado de Playfair*", pois apareceu na apresentação da geometria euclidiana de *John Playfair*, publicado em 1795, embora tenha sido referido muito mais cedo por *Proclus* (410-485 a.C.). Aqui será chamado "*O postulado das paralelas de Euclides*", porque distingue a geometria euclidiana a partir de outras geometrias com base no postulados das paralelas.

Definição 2.8. *Duas retas l e m são ditas paralelas se elas não se cruzam, ou seja, se nenhum ponto está sobre ambas. Denotamos por $l \parallel m$.*

Observe que as retas são consideradas no mesmo plano pois, há possibilidade de retas não se cruzarem sendo não coplanares (neste caso são chamadas *retas reversas*). Também não foi utilizado o conceito de distância para se definir retas paralelas.

O Postulado das Paralelas: Para cada reta l e cada ponto P que não se encontra em l existe uma única reta m por P que é paralela a l .

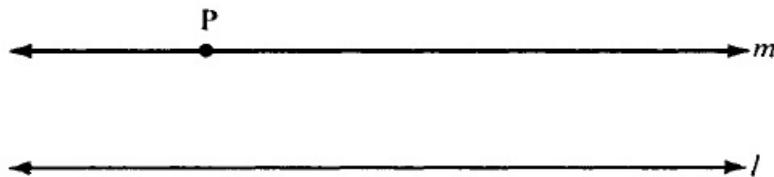


Figura 2.9: Reta m por P paralela a l

Este postulado causa controversa pois, apesar de parecer óbvio para quem já está condicionado a pensar em termos euclidianos, se considerar os axiomas da geometria como abstrações da experiência, existe uma diferença entre este postulado e os outros quatro. Os dois primeiros postulados são abstrações de experiências de desenho com uma régua, o terceiro postulado deriva das experiências de desenho com um compasso; o quarto postulado é talvez menos óbvio como uma abstração, no entanto, deriva de experiências medindo ângulos com um transferidor (onde a soma dos ângulos suplementares é 180 graus e se ângulos suplementares são congruentes um com o outro, eles devem medir 90 graus cada).

O quinto postulado diferencia no sentido em que não se verifica empiricamente se duas retas se encontram, já que é possível desenhar apenas os segmentos, não retas. É possível estender os segmentos mais e mais para ver se eles se encontram, mas não continuar a estendê-los para sempre. O único recurso é verificar o paralelismo indiretamente, usando outros critérios.

Um critério para l ser paralela a m , sugerido por Euclides, é traçar uma transversal, ou seja, uma reta t que intersecta l e m , em pontos distintos, e medir os ângulos internos α e β de um lado de t . Euclides previu que, se a soma dos ângulos α e β for inferior a 180 graus, as retas se encontram neste mesmo lado de t .

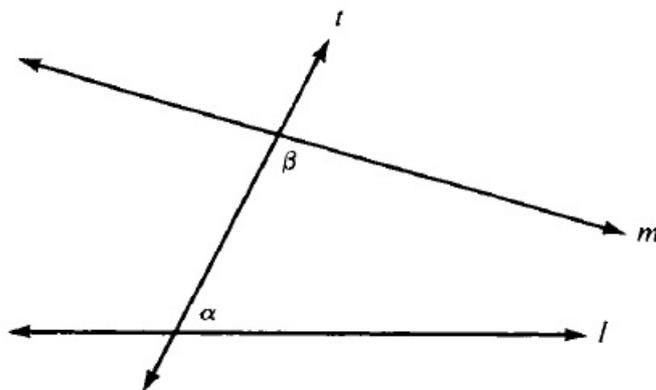


Figura 2.10: Reta t transversal a l e m

Porém esse critério acaba por ser equivalente ao postulado das paralelas. Portanto, não se pode usá-lo para provar o postulado das paralelas, o que seria um raciocínio circular. O próprio Euclides reconheceu a natureza questionável do postulado das paralelas, pois ele adiou seu uso durante o tempo que pode.

As imagens aqui apresentadas foram retiradas de Greenberg(1993), como também a parte histórica deste capítulo.

Desde o início, o postulado das paralelas foi atacado como insuficientemente plausível para se qualificar como uma hipótese não comprovada. Por dois mil anos os matemáticos tentaram fazê-lo derivar dos outros quatro postulados ou substituí-lo por um outro postulado. Todas as tentativas de fazê-lo derivar dos quatro primeiros postulados acabou por ser um fracasso porque as chamadas provas sempre implicaram uma premissa oculta que era injustificável. Os postulados supostamente mais evidentes, acabaram sendo logicamente equivalentes ao original, de modo que nada foi obtido pela substituição.

O francês *Adrien Marie Legendre*(1752 - 1833), um dos melhores matemáticos do seu tempo, contribuiu com descobertas importantes para diversos ramos da matemática. No entanto, ele estava tão obcecado em provar o postulado das paralelas que, durante um período de 29 anos, publicou uma tentativa atrás da outra em diferentes edições de seus *Elementos de Geometria*.

Há indícios de que um dos primeiros a trabalhar com geometria não euclidiana foi *Gauss*. Gauss foi chamado de "o príncipe dos matemáticos" por causa da variedade e profundidade de suas obras. Há evidências de que estava trabalhando com geometria não-euclidiana desde a idade de 15 anos, ou seja, desde 1792.



Figura 2.11: Carl Friedrich Gauss

A suposição de que a soma dos três ângulos é inferior a 180° o levou a uma geometria curiosa, muito diferente da Euclidiana, mas bem consistente, onde dizia conseguir resolver todos os problemas nela com a exceção da determinação de uma constante. Segundo Gauss, quanto maior tomava esta constante, mais próximo estava da geometria euclidiana, e quando ela era escolhida infinitamente grande, as duas coincidiam; acreditava que se esta geometria não-euclidiana fosse verdade, e se fosse possível comparar essa constante com tais magnitudes como nós encontramos em nossas medições na terra e nos céus, essa constante poderia então ser determinada. Os teoremas desta geometria pareciam paradoxais e, para os não iniciados, um absurdo. Por exemplo, tomados três ângulos de um triângulo tão pequenos quanto se queira, a área do triângulo nunca poderia exceder um limite definido, independentemente de quão grande os lados fossem tomados.

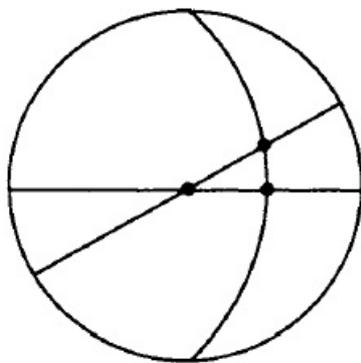


Figura 2.12: Triângulo com soma dos ângulos maior que 180° .

Ele achava que seus esforços para descobrir uma contradição nesta geometria não-euclidiana foram sem sucesso, e a única coisa em que ela se opõe às concepções é que, se fosse verdade, não deveria existir no espaço uma magnitude linear, determinada por si, pois apesar da sabedoria dos metafísicos, muito pouco se sabia sobre a verdadeira natureza do espaço. Tais metafísicos referidos por Gauss eram seguidores de Immanuel Kant, o filósofo europeu supremo no final do século XVIII e grande parte do século XIX. A descoberta da geometria não-euclidiana de Gauss refutou a posição de Kant que o espaço euclidiano é inerente à estrutura de nossa mente.

O motivo de Gauss ter retido suas descobertas foi a de que ele era um perfeccionista e publicou apenas obras concluídas de fato, talvez seja porque estava tão preocupado com a obra original, em muitos ramos da matemática, bem como em astronomia e física (ele reinventou um telégrafo melhor que W. Weber), que ele não teve a oportunidade de colocar seus resultados em geometria não-euclidiana. Os poucos resultados que ele anotou foram encontrados entre seus papéis privados após sua morte.

Alguns dos melhores matemáticos como *Beltrami*, *Klein*, *Poincaré* e *Riemann* retomaram o assunto, estendendo-o, esclarecendo-o e aplicando-o para outros ramos da matemática.

Em 1868, o matemático italiano Beltrami resolveu de uma vez por todas a questão de uma prova para o postulado das paralelas. Ele provou que nenhuma prova foi possível: fez isso com a exibição de um modelo de Euclides da geometria não-euclidiana. Bernhard Riemann, em 1854, baseado nas descobertas de Gauss, inventou o conceito de uma superfície geométrica abstrata que não precisa ser nivelada no espaço euclidiano tridimensional, mas em que as retas podem ser interpretadas como geodésicas e a curvatura intrínseca da superfície pode ser definida com precisão, a geometria Riemanniana.



Figura 2.13: Georg Friedrich Bernhard Riemann

A Geometria Elíptica (e, é claro, esférica) se aplica em tais superfícies que têm curvatura positiva constante, enquanto a geometria hiperbólica de Bolyai e Lobachevsky sobre uma tal superfície de curvatura constante negativa. Essa é a visão de geômetras hoje sobre a realidade daqueles planos não euclidianos. Uma generalização da ideia de Gauss e Riemann é que tal geometria provem da teoria geral da relatividade de Einstein. Curiosamente, uma relação direta entre a teoria da relatividade e da geometria hiperbólica foi descoberto pelo físico Arnold Sommerfeld em 1909, e elucidado pelo geômetra Vladimir Varicak em 1912.

A geometria neutra é por definição, todos aqueles teoremas geométricos que podem ser provadas, utilizando apenas os axiomas de incidência, intermediação, congruência e continuidade e sem usar o axioma do paralelismo. Para conhecer mais sobre esta e outras geometrias, consulte Greenberg(1993). A seguir apresentamos a base para a geometria esférica.

3 A Geometria Esférica

3.1 Axiomas da Geometria Esférica

Definição 3.1. *Seja S a superfície de uma esfera no espaço. Assumimos que o raio de S é igual a 1. Um **círculo máximo** é um círculo que é a interseção de S com um plano através do seu centro. Se T e U são pontos quaisquer de S , então o menor caminho na superfície entre T e U é um arco de um círculo máximo.*

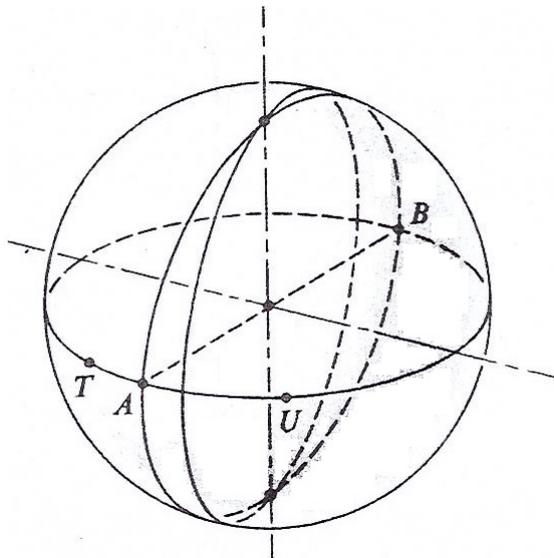


Figura 3.1: Círculos máximos na esfera

Observe que dado qualquer par de pontos não antípodas na esfera, existe um único círculo máximo ligando este par de pontos ; para construí-lo, tome a interseção da esfera e o plano que contem o par de pontos passando pelo centro da esfera. De acordo com Arquimedes (287-212 a.C.) podemos definir uma reta como sendo uma curva que é o menor caminho ligando dois pontos que estão sobre ele. Interpretando círculos máximos como retas, podemos definir o ângulo entre dois círculos máximos que se interceptam, como o ângulo formado pela interseção dos planos que os definem. Com esta definição de ângulos podemos definir triângulos na esfera cuja soma dos ângulos internos é maior que 180° .

O sistema resultante tem algumas das propriedades que esperamos em geometria. Por exemplo, cada reta separa seu plano em dois semiplanos, cada um dos quais é convexo. Mas o postulado das paralelas de Euclides falha, pois cada duas retas se interceptam. Nossa geometria tem outras propriedades peculiares:

1. Dois pontos não determinam necessariamente uma única reta. Por exemplo, o polo norte e o polo sul estão sobre uma quantidade infinita de círculos máximos. O mesmo acontece para os pontos do final de quaisquer diâmetros da esfera S . Tais pontos são chamados *antípodas*. (Mais precisamente, dois pontos A e B de S são antípodas se o segmento \overline{AB} passa pelo centro de S .)
2. Desde que o raio de S é igual a 1, a maior distância possível entre quaisquer dois pontos é π . Assim, não se pode considerar o postulado da régua.
3. A intermediação (ordem) não funciona na forma em que estamos acostumados. De fato, dados três pontos de uma reta, não é necessariamente verdade que um deles está entre os outros dois. Podemos ter $AB = BC = AC$.
4. A perpendicular à uma reta, de um ponto externo, sempre existe, mas não é necessariamente única. Por exemplo, qualquer reta que une o Polo Norte a um ponto do equador é perpendicular ao equador.
5. Alguns triângulos tem dois ângulos retos.
6. O teorema do ângulo externo falha.

Na geometria euclidiana existe exatamente uma paralela a uma reta l através de um ponto P não em l . Na geometria hiperbólica existe mais do que uma paralela. Já na geometria esférica, não há paralela a l por P , ou seja, é uma geometria em que não existem retas paralelas.

Se substituir o quinto postulado por um novo postulado das paralelas, o sistema se torna inconsistente e para evitar isso, deve-se modificar alguns dos axiomas. No entanto, para ver quais modificações precisam ser feitas, deve-se pensar na geometria da superfície de uma esfera e interpretar reta como círculo máximo.

É contraditório falar de um ponto B "estar entre" dois outros pontos A e C em uma circunferência. Assim, todos os axiomas de intermediação são substituídos por sete axiomas de separação. Na figura, A e B separam C e D no círculo, já que não se pode partir de A para B sem cruzar C ou D .

A notação utilizada será $(A, B|C, D)$ para designar a relação indefinida A e B separam C e D .

Axioma de separação 1. Se $(A, B|C, D)$, então os pontos A , B , C e D são colineares e distintos.

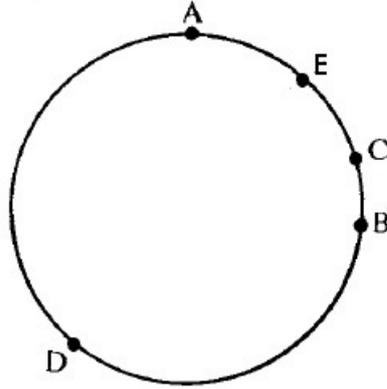


Figura 3.2: Pontos A e B separam C e D

Axioma de separação 2. Se $(A, B|C, D)$, então $(C, D|A, B)$ e $(B, A|C, D)$.

Axioma de separação 3. Se $(A, B|C, D)$, então não é verdade que $(A, C|B, D)$.

Axioma de separação 4. Se os pontos A, B, C e D são colineares e distintos, então $(A, B|C, D)$ ou $(A, C|B, D)$ ou $(A, D|B, C)$.

Axioma de separação 5. Se os pontos A, B e C são colineares e distintos, então existe um ponto D tal que $(A, B|C, D)$.

Axioma de separação 6. Para cada cinco pontos A, B, C, D e E , colineares e distintos, se $(A, B|D, E)$, então $(A, B|C, D)$ ou $(A, B|C, E)$.

Para estabelecer o último axioma, recorremos a noção de *perspectiva* de uma reta para outra.

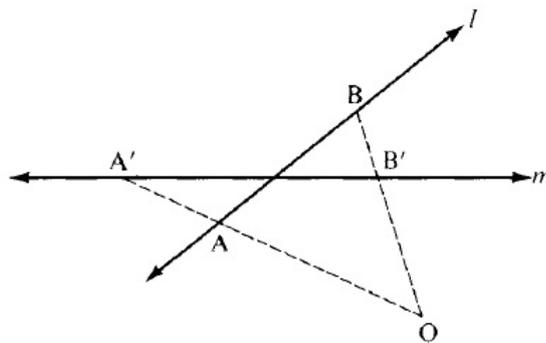


Figura 3.3: Perspectiva de l para m com centro em O .

Definição 3.2. Sejam l e m duas retas quaisquer e O um ponto não pertencente a elas. Para cada ponto A em l , a reta \overleftrightarrow{OA} intercepta m em um único ponto A' . A correspondência um-a-um que associa A' a partir de A , para todo A em l , é chamada de perspectiva de l para m com centro O .

Axioma de separação 7. A perspectiva preserva a separação, ou seja, se $(A, B|C, D)$ com l a reta passando por A, B, C e D , e se A', B', C' e D' são os pontos correspondentes em m sob uma perspectiva, então $(A', B'|C', D')$.

Sem a noção de intermediação, temos que reformular toda a geometria usando esta relação. Por exemplo, o segmento \overline{AB} consiste nos pontos A, B e todos os pontos entre eles. No entanto, isso não faz sentido em um círculo. Só podemos falar sobre o segmento ABC determinado por tres pontos colineares", que consiste dos pontos A, B, C e todos os pontos não separados de B por A e C .

Da mesma forma, temos que redefinir a noção de um triângulo, uma vez que seus lados não são mais determinados pelos três vértices.

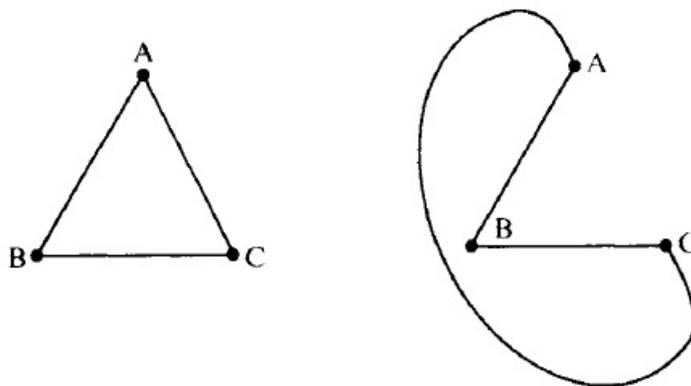


Figura 3.4: Dois "triângulos" diferentes com os mesmos vértices.

Desde que estas noções sejam redefinidas, todos os axiomas de congruência e continuidade fazem sentido quando reformulados, e podem ser deixados intactos. Há ainda uma dificuldade com um axioma de incidência que afirma que dois pontos não definem mais que uma reta. Isto é falso para círculos máximos na esfera, desde que os pontos antípodas (tais como os pólos) estão sobre uma infinidade de retas.

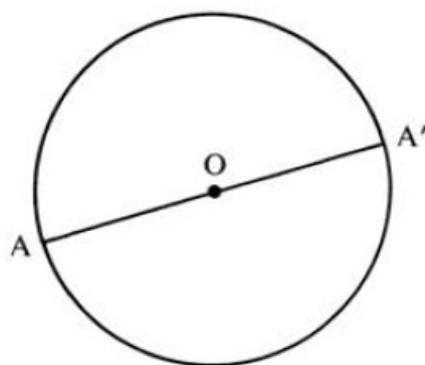


Figura 3.5: Pontos antípodas A e A' .

Klein percebeu que a forma para contornar isto era identificar pontos antípodas, isto é, da mesma forma que se relacionou reta aos círculos máximos nesta geometria, interpretasse ponto ao par de pontos antípodas. Isto significa que tais pontos estariam identificados como se correspondessem a um único ponto; fato que não pode ser considerado na geometria euclidiana, porém, podemos imaginar ser possível essa identificação, de forma que, ao se deslocar de um ponto antípoda para o outro, estaria voltando ao ponto original.

Ao fazer tal identificação, é possível obter uma propriedade interessante: a "reta" já não divide mais o plano em dois lados e para atravessar um círculo máximo a partir de um dado ponto até seu antípoda é como se voltasse para o mesmo lado. Se cortar uma faixa desse plano, dá a ideia de uma *Faixa de Möbius*, com apenas um lado. O nome técnico para esta propriedade é *não-orientabilidade*.



Figura 3.6: Faixa de Möbius.

Resumindo, os axiomas da geometria plana esférica consistem nos mesmos axiomas de incidência, congruência e continuidade como uma geometria neutra (com as novas definições de segmento, triângulo, entre outros). Os axiomas de intermediação são substituído pelos axiomas de separação e o postulada das paralelas é substituído por um axioma dizendo que duas retas não são paralelas.

É de se esperar que, nesta geometria, há um teorema que diz que "retas" têm comprimento finito. Todas as retas perpendiculares a uma reta l não são paralelas entre si, mas sim concorrentes, ou seja, todas as perpendiculares a l tem um ponto em comum chamado de "polo de l ". Por exemplo, o polo do Equador é o polo norte (ou seu antípoda, polo sul).



Figura 3.7: Superfície da Terra

4 Aplicações da Geometria Esférica

4.1 Distância Esférica

Vamos considerar a geometria na superfície da esfera $S = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$, e que um círculo máximo, de comprimento $2\pi R$, é a interseção de S e um plano que passa pela origem. Qualquer outro círculo em S é uma seção plana de S de comprimento menor que $2\pi R$.

Dados quaisquer dois pontos a e b em S existe um círculo máximo, digamos C , que os contém (e C está no plano que passa por a , b e pelo centro 0). Ainda, a e b dividem C em dois arcos que têm comprimentos diferentes, a menos que $b = -a$, isto é, que sejam antípodas. Se α é um arco de um círculo máximo, então o comprimento de α é um ângulo (em radianos) formado por a , b com origem em 0 .

Definição 4.1. *Sejam a e b dois pontos em S . Então a **distância esférica** $\delta(a, b)$ entre a e b é o menor comprimento dos dois arcos do círculo máximo que passa por a e b . Então,*

$$\delta(a, b) = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{R^2}\right), \quad (4.1)$$

onde $\cos^{-1}(a \cdot b)$ é tomado no intervalo $[0, \pi]$ e $a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cos \alpha$, onde α é o ângulo entre a e b .

Como a e b pertencem a S , possuem norma R . Logo $\|a\| \cdot \|b\| = R^2$. Por aplicação, considere a Terra sendo uma esfera perfeita de raio R cujo centro encontra-se na origem 0 em \mathbb{R}^3 . Podemos supor que o eixo i encontra a superfície da Terra no ponto com latitude e longitude zero, e que o eixo positivo k passa através do polo norte.

Assim, o ponto na superfície da Terra com latitude α (positivo no hemisfério norte e negativo no hemisfério sul), e longitude β é dado pelo vetor

$$R(\cos \alpha \cos \beta i + \cos \alpha \sin \beta j + \sin \alpha k)$$

Suponha agora que x_1 e x_2 são dois pontos na superfície da Terra, e escreva estes como

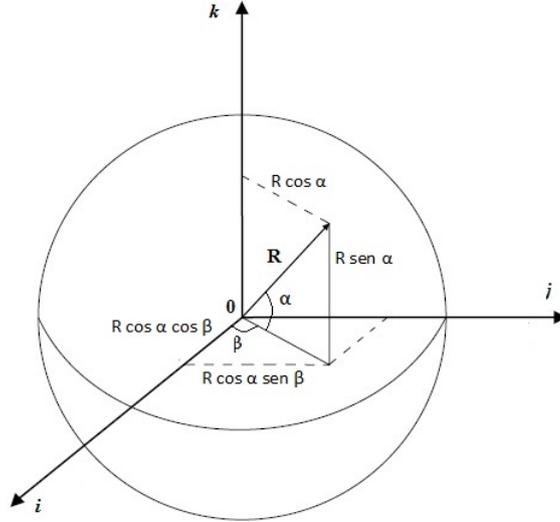


Figura 4.1: Esfera de raio R com centro na origem

$$x_1 = R(\cos \alpha_1 \cos \beta_1 i + \cos \alpha_1 \sin \beta_1 j + \sin \alpha_1 k),$$

$$x_2 = R(\cos \alpha_2 \cos \beta_2 i + \cos \alpha_2 \sin \beta_2 j + \sin \alpha_2 k).$$

Então de (4.1),

$$\frac{x_1 \cdot x_2}{R^2} = \frac{R^2}{R^2} [\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2) + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2]$$

Portanto,

$$\delta(x_1, x_2) = \cos^{-1} [\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2] \quad (4.2)$$

Esta fórmula nos fornece a distância (medida na superfície da Terra) entre os dois pontos com latitude α_i e longitude β_i com $i = 1, 2$.

Exemplo 4.1. Seja x um ponto qualquer com latitude α . A latitude do polo norte N é $\frac{\pi}{2}$. Observando que a distância é calculada sob o menor arco de círculo máximo, podemos tomar a mesma longitude β . Segue de 4.2 que:

$$\delta(x, N) = \cos^{-1} [\cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} \cos(\beta - \beta) + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2}]$$

e como $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e no intervalo $[0, \pi]$ temos $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$,

$$\delta(x, N) = \cos^{-1} [\sin \alpha] = \cos^{-1} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = (\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

Então a distância esférica de um ponto x de latitude α ao polo norte é $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

4.2 Trigonometria Esférica

Iniciamos nossa discussão da trigonometria esférica com a versão esférica do Teorema de Pitágoras. Considere um triângulo em S , do qual queremos dizer três pontos a, b e c de S que não estão sobre um mesmo círculo máximo, onde os lados do triângulo são os arcos dos círculos máximos que ligam estes pontos em pares. Assumimos que o ângulo no triângulo em c é $\frac{\pi}{2}$, e podemos posicionar este triângulo tal que c esta no eixo k , a está no plano (i, k) e b no plano (j, k) , (se necessário podemos trocar as posições entre a e b).

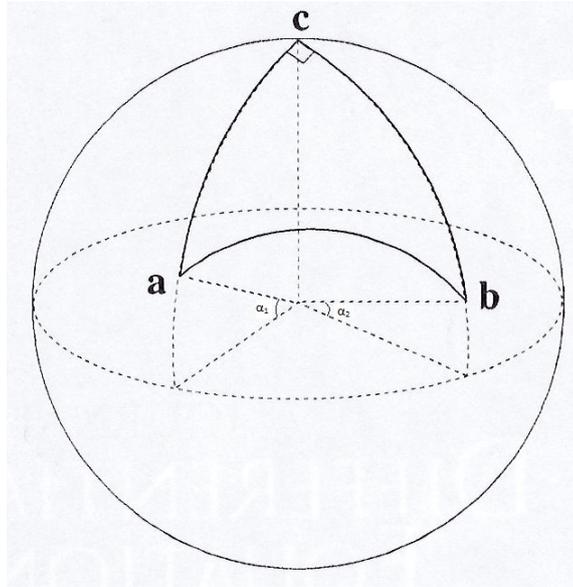


Figura 4.2: Triângulo esférico

Com isto, temos:

$$c = k, a = \cos \alpha_1 i + \sin \alpha_1 k, b = \cos \alpha_2 j + \sin \alpha_2 k \quad (4.3)$$

para alguns α_1 e α_2 . Temos que $a \cdot b = (\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2)$, $a \cdot c = \sin \alpha_1$ e $b \cdot c = \sin \alpha_2$. Logo $(a \cdot b) = (a \cdot c)(b \cdot c)$. Se aplicamos agora (4.1) obtemos imediatamente o resultado seguinte.

Teorema de Pitágoras: Sejam a, b e c os vértices de um triângulo esférico em S , com os lados formando um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em c . Então:

$$\cos \delta(a, b) = \cos \delta(a, c) \cos \delta(b, c). \quad (4.4)$$

Consideramos um triângulo esférico com vértices a, b e c . Como é habitual na geometria euclidiana, tomamos os ângulos em a, b e c sendo α, β e γ , respectivamente, e denotamos os comprimentos dos lados por \bar{a}, \bar{b} e \bar{c} ; então $\bar{a} = \delta(b, c)$, $\bar{b} = \delta(c, a)$ e $\bar{c} = \delta(a, b)$.

Na realidade, podemos enunciar o teorema de Pitágoras da seguinte forma: Para um triângulo retângulo abc em uma esfera de raio R com ângulo reto em c e lados de comprimentos \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} , tem-se:

$$\cos \bar{c}/R = \cos \bar{a}/R \cdot \cos \bar{b}/R$$

A demonstração deste teorema pode ser feita, rotacionando a esfera de modo que a tenha coordenadas $(R, 0, 0)$ e o ponto c está no plano ij . O ponto b tem então coordenadas esféricas $(\beta, \pi/2 - \alpha)$, onde α e β são os ângulos centrais determinados pelos lados bc e ac , respectivamente. Então $b = (R \cos \beta \cos \alpha, R \sin \beta \cos \alpha, R \sin \alpha)$ e $c = (R \cos \beta, R \sin \beta, 0)$. Se γ é o ângulo central subtendido por ab , então usando propriedade do produto escalar do \mathbb{R}^3 , temos:

$$\cos \gamma = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|} = \frac{R^2 \cos \alpha \cos \beta}{R^2} = \cos \alpha \cos \beta$$

Expressando α , β e γ em radianos, obtemos $\alpha = \bar{a}/R$, $\beta = \bar{b}/R$ e $\gamma = \bar{c}/R$.

□

Para ver a conexão entre este teorema e o teorema clássico de Pitágoras, consideremos a série de Taylor do cosseno:

$$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - \dots$$

Do teorema de Pitágoras esférico, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \bar{c}^2/2R^2 + \dots &= (1 - \bar{a}^2/2R^2 + \dots) (1 - \bar{b}^2/2R^2 + \dots) \\ &= 1 - \bar{a}^2/2R^2 - \bar{b}^2/2R^2 + \bar{a}^2\bar{b}^2/4R^4 + \dots \end{aligned}$$

Subtraindo 1 de ambos os lados da igualdade e multiplicando por $-2R^2$ obtemos:

$$\bar{c}^2 + \frac{\text{expressão}}{R^2} = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \frac{\text{outra expressão}}{R^2}$$

Quando R vai para ∞ , obtemos o clássico teorema de Pitágoras.

Provamos agora a identidade seguinte notando que o lado direito da igualdade envolve dois lados e um ângulo.

Teorema 4.1. *Em qualquer triângulo esférico com vértices a , b e c temos:*

$$[a, b, c] = \text{sen } \bar{a} \text{ sen } \bar{b} \text{ sen } \gamma. \quad (4.5)$$

Demonstração. Podemos escolher nossos eixos tal que c esteja no eixo k , ou seja, $c = k$, e que a esteja sobre o plano (i, k) , ou seja, $a = \cos \alpha_1 i + \sin \alpha_1 k$. Como $\bar{b} = \delta(a, c)$, e $\delta(a, c) = \cos^{-1}(a \cdot c)$ temos

$$\begin{aligned} \cos \bar{b} &= a \cdot c = \sin \alpha_1 \Rightarrow \cos^2 \bar{b} = \sin^2 \alpha_1 \Rightarrow 1 - \cos^2 \bar{b} = 1 - \sin^2 \alpha_1 \\ &\Rightarrow \cos^2 \alpha_1 = \sin^2 \bar{b} \Rightarrow \cos \alpha_1 = \sin \bar{b}. \end{aligned}$$

Logo, vemos que $a = (\cos \alpha_1, 0, \sin \alpha_1) = (\sin \bar{b}, 0, \cos \bar{b})$. Similarmente, b tem latitude $\frac{\pi}{2} - \bar{a}$ e longitude γ ; então $b = (\sin \bar{a} \cos \gamma, \sin \bar{a} \sin \gamma, \cos \bar{a})$. Portanto

$$[a, b, c] = \det \begin{vmatrix} \sin \bar{b} & 0 & \cos \bar{b} \\ \sin \bar{a} \cos \gamma & \sin \bar{a} \sin \gamma & \cos \bar{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \bar{a} \sin \bar{b} \sin \gamma.$$

□

Terminamos esta seção com as regras do seno e do cosseno para geometria esférica.

Teorema 4.2. *Regras do seno e cosseno: Em qualquer triângulo esférico com vértices a , b e c , temos a regra do seno:*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \bar{a}} = \frac{\sin \beta}{\sin \bar{b}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \bar{c}},$$

e a regra do cosseno:

$$\cos \bar{c} = \cos \bar{a} \cos \bar{b} + \sin \bar{a} \sin \bar{b} \cos \gamma.$$

Demonstração. A regra do seno segue imediatamente do teorema anterior e o fato que $[a, b, c] = [c, a, b] = [b, c, a]$. Para provar a regra do cosseno, podemos escolher a , b e c da mesma forma que no teorema. Como $a = (\sin \bar{b}, 0, \cos \bar{b})$ e $b = (\sin \bar{a} \cos \gamma, \sin \bar{a} \sin \gamma, \cos \bar{a})$, segue que

$$\cos \bar{c} = \cos \delta(a, b) = a \cdot b = \cos \bar{a} \cos \bar{b} + \sin \bar{a} \sin \bar{b} \cos \gamma.$$

□

Exemplo 4.2. Podemos derivar o Teorema de Pitágoras da regra do cosseno, observando que $\bar{c} = \delta(a, b)$, $\bar{a} = \delta(b, c)$, $\bar{b} = \delta(a, c)$ e para um triângulo com $\gamma = \frac{\pi}{2}$ temos $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Portanto:

$$\cos \bar{c} = \cos \bar{a} \cos \bar{b} + \sin \bar{a} \sin \bar{b} \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \delta(a, b) = \cos \delta(a, c) \cos \delta(b, c).$$

4.3 Área na esfera

Utilizaremos a trigonometria esférica para obter a fórmula de Euler para superfícies poliédricas. Vamos encontrar a fórmula para a área de um triângulo esférico em S . Denotamos a área esférica (isto é, a área em S) de um conjunto E por $\mu(E)$, e como a área da superfície da esfera de raio r é $4\pi r^2$, vemos que $\mu(S) = 4\pi$. Dois (distintos) círculos máximos encontram-se em pontos diametralmente opostos, e eles dividem a esfera em quatro regiões, chamadas *luas*. O ângulo de uma lua é o ângulo (na lua) em que os círculos se encontram, e a área de uma lua de ângulo α é 2α , pois é proporcional a α e igual a 4π quando $\alpha = 2\pi$.

Ao contrário da geometria euclidiana, a área de um triângulo esférico é completamente determinado pelos ângulos e a fórmula seguinte foi encontrada primeiro por A. Girard em 1625.

Teorema 4.3. *Seja T um triângulo esférico com ângulos α , β e γ . Então $\mu(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.*

Demonstração. : O triângulo T é formado por lados que estão sobre três círculos máximos o qual denotamos por A , B e C . O círculo máximo A subdivide a esfera em dois hemisférios o qual denotamos por A_1 e A_2 . Definimos B_1 , B_2 , C_1 e C_2 similarmente, e estes podem ser escolhidos tal que $T = A_1 \cap B_1 \cap C_1$, com T tendo ângulos α , β e γ em seus vértices em $B \cap C$, $A \cap C$ e $A \cap B$, respectivamente. Agora, A , B e C dividem a esfera em oito triângulos $A_i \cap B_j \cap C_k$, onde $i, j, k = 1, 2$, e que, para abreviar, escrevemos como $A_i B_j C_k$.

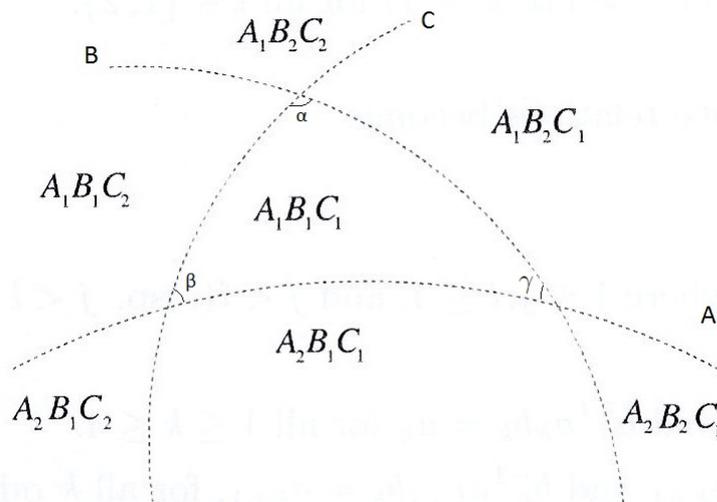


Figura 4.3: Triângulo esférico $A_1 B_1 C_1$

Agora, por exemplo, $A_1 B_1 C_1$ e $A_2 B_1 C_1$ juntos formam uma lua de ângulo α determinada pelos círculos máximos B e C . Então constatamos que:

$$\mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_2B_1C_1) = 2\alpha;$$

$$\mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_1B_2C_1) = 2\beta;$$

$$\mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_1B_1C_2) = 2\gamma;$$

$$\mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_1B_2C_2) = 2\alpha;$$

$$\mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_2B_1C_2) = 2\beta;$$

$$\mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_2B_2C_1) = 2\gamma.$$

Então

$$\begin{aligned} & \mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_1B_1C_2) + \mu(A_1B_2C_1) + \mu(A_1B_2C_2) + \mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_2B_1C_1) + \\ & \mu(A_2B_1C_2) + \mu(A_2B_2C_1) + \mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_2B_2C_2) = 4(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Observando que

$$\mu(A_1B_1C_1) = \mu(A_2B_2C_2), \quad \sum_{i,j,k=1}^2 \mu(A_iB_jC_k) = 4\pi,$$

tem-se:

$$4\mu(A_1B_1C_1) + 4\pi = 4(\alpha + \beta + \gamma) \Rightarrow \mu(A_1B_1C_1) + \pi = \alpha + \beta + \gamma.$$

Portanto $\mu(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ como requerido.

□

Uma importante conclusão que temos é que como todo triângulo tem área ($\mu(T) \geq 0$), então todo triângulo tem soma dos ângulos internos maior que π .

A fórmula para a área de um triângulo estende-se para a área de um polígono esférico.

Definição 4.2. Um **polígono esférico** é uma região limitada por um número finito de arcos de círculos máximos de tal maneira que os arcos formam uma curva fechada em S que divide S em exatamente duas regiões. Um polígono esférico P é **convexo** se quaisquer dois pontos de P podem ser ligados por um arco (de um círculo máximo) que está inteiramente contido em P .

Teorema 4.4. Seja P um polígono de n lados em uma esfera (com cada um dos seus n lados sendo um arco de um círculo máximo), e sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ os ângulos interiores do polígono. Então a área $\mu(P)$ do polígono é dada por

$$\mu(P) = \theta_1 + \dots + \theta_n - (n - 2)\pi. \quad (4.6)$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração no caso de um polígono convexo P na esfera. A prova para um polígono não convexo será dada na próxima seção. Seja $x \in P$ algum ponto que é ligado a cada vértice v_j por um arco de um círculo máximo, com estes arcos não se interceptando (exceto em x) e estando em P . Então estes arcos dividem P em n triângulos. Assim,

$$\begin{aligned}\mu(P) &= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) - \pi + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) - \pi + \dots + (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) - \pi \\ &= \sum_{i=1}^n (\beta_i + \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i - n\pi = \theta_1 + \dots + \theta_n + 2\pi - n\pi \Rightarrow \\ \mu(P) &= \theta_1 + \dots + \theta_n - (n-2)\pi.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.3. Para calcular a área de um triângulo esférico T_1 cujos ângulos são todos $\frac{\pi}{2}$, basta usar a fórmula $\mu(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, para $\pi/2$ e então $\mu(T_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$. A área de um triângulo esférico T_2 cujos ângulos são todos $\frac{3\pi}{2}$ é obtida analogamente: $\mu(T_2) = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{7\pi}{2}$.

Observe que para um triângulo equilátero de ângulo igual a θ temos $\mu(T) = 3\theta - \pi$, o que nos dá uma fórmula para obter os valores de θ possíveis para construir um triângulo esférico equilátero com cada ângulo igual a θ .

4.4 A Fórmula de Euler

Um triângulo esférico T é uma região de S limitada por três arcos σ_1 , σ_2 e σ_3 de círculos máximos. Os arcos σ_j são as *arestas* de T e os três pontos $\sigma_i \cap \sigma_j$ são os vértices de T . Uma *triangulação* de uma esfera S é uma partição de S em um número finito de triângulos esféricos T_j que não se sobrepõem e tal que a interseção de quaisquer dois dos T_j é ou vazio, ou uma aresta comum, ou um vértice comum de dois triângulos. As arestas da triangulação são as arestas de todos os T_j , os vértices da triangulação são todos os vértices dos T_j .

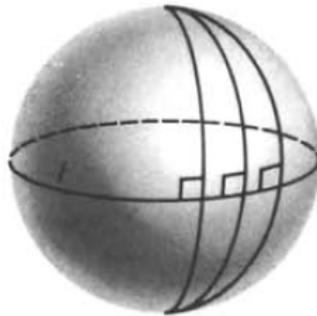


Figura 4.4: Triangulação em S

O exemplo mais simples de uma triangulação na esfera é traçar o equador e n linhas longitudinais. Neste caso a triangulação contém $2n$ triângulos, $n + 2$ vértices (n no equador e um em cada polo) e $3n$ arestas. Se denotamos o número de triângulos (o qual agora chamamos de faces) arestas e vértices por F , A e V , respectivamente, encontramos que $F - A + V = 2n - 3n + n + 2 = 2$. Assim a expressão $F - A + V$ não depende da escolha de n . Mais ainda, a fórmula não depende da triangulação. Este famoso resultado é devido ao matemático suíço Leonard Euler (1707-1783).

Teorema 4.5. (*Teorema de Euler*) *Suponha que uma triangulação de S tenha F triângulos, A arestas e V vértices. Então $F - A + V = 2$.*

Demonstração. Apresentaremos a demonstração dada por Legendre. Pelo teorema anterior, área de um triângulo esférico T com ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 é dada por $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$. Suponha que existam F triângulos, A arestas e V vértices em uma triangulação da esfera. Então, somando todos os ângulos de todos os triângulos, a soma total é $2\pi V$ (para todos os ângulos que ocorrerem num vértice, sem sobreposição, e a soma dos ângulos em qualquer um desses V vértices é exatamente 2π). Ainda, a soma das áreas dos triângulos é a área da esfera, então $2\pi V - F\pi = 4\pi$, ou seja, $2V = F + 4$. Logo (contando as arestas de cada triângulo, e observando que cada aresta é contada duas vezes) obtemos $3F = 2A$. Portanto

$$F - A + V = F - \frac{3F}{2} + \frac{(F + 4)}{2} = 2.$$

□

Agora, particione S em um número finito de polígonos esféricos convexos não sobrepostos (do qual não precisam ser triângulos esféricos) e suponha que existam F polígonos (ou faces), A arestas (cada aresta contada apenas uma vez) e V vértices (cada vértice contado apenas uma vez); então, novamente, $F - A + V = 2$. Para provar, considere uma face da triangulação, e suponha que esta é limitada por uma curva poligonal fechada que compreende m arestas e m vértices, digamos v_j . Tomando-se qualquer ponto x na face e ligando-o a cada v_j por um segmento de um círculo máximo, produzimos uma triangulação desta face que inclui, entre suas arestas e vértices, todas as arestas e vértices da face na partição original. A contribuição desta face (sem a fronteira) para a contagem $F - A + V$ da nova triangulação é 1, pois contribui com m triângulos, m arestas e um vértice (em x). Como esta contribuição para $F - A + V$ na partição original de S é também 1 (contribui um para F e zero para A e V), não faz diferença para a conta $F - A + V$ se a face é subdividida em triângulos ou não. Se realizarmos esta subdivisão para todas as faces, e então usar o Teorema de Euler, encontraremos que $F - A + V = 2$.

Suponha que particionamos a esfera em polígonos convexos e que então deformamos a partição continuamente de tal maneira que os números F , A e V não mudem durante a deformação, então após a deformação ainda temos $F - A + V = 2$. Em particular, ainda será verdadeiro quando as arestas não forem necessariamente arcos de círculos máximos (ou mesmo arcos de quaisquer círculos). Na realidade o cuidado que temos que tomar é sobre as deformações. Em Topologia, diríamos que as deformações devem ser homeomorfismos e que a fórmula de Euler é um invariante topológico.

Vamos considerar a formula de Euler para um polígono plano. Suponha que uma curva poligonal fechada C (no plano) divida o plano em duas regiões. Exatamente uma destas regiões é limitada, e será denotada por P . Vamos deformar o polígono P até que ele fique no "hemisfério sul" de S e tal que o bordo de P (que é uma curva) esteja no equador. Então haverá, digamos, m vértices e m arestas sobre o equador (cada aresta termina em um vértice que é o ponto inicial da próxima aresta). Vamos agora incluir o "hemisfério norte" N , e considerar como um polígono com m arestas e m vértices sendo as arestas e os vértices de N . Então construímos uma partição de S e, para esta partição, $F - A + V = 2$. Como adicionamos simplesmente uma face à figura original, segue que, para a triangulação do polígono P , devemos ter $F - A + V = 1$.

Estamos agora em condições de provar o teorema 4.5. para polígonos não convexos.

Demonstração: Seja P um polígono em uma esfera. Estendemos cada lado de P a um círculo máximo que o contém, e desta forma, subdividimos a esfera em um número finito de polígonos convexos. Como cada um destes polígonos ou está dentro de P ou fora de P , isso mostra que podemos subdividir qualquer polígono esférico em um número finito de polígonos convexos e, portanto, também em um número finito de triângulos esféricos.

Tome qualquer polígono P em S e divida-o em triângulos T_j como descrito anteriormente. Suponha que a triangulação de P tenha F triângulos, A arestas e V vértices. Então a formula de Euler é dada por $F - A + V = 1$. Vamos denotar a curva poligonal original de C e seu interior (que acabamos dividido em triângulos) por P_0 . Suponha agora que A_0 das arestas desta nova triangulação esteja em algum lado de C , tal que $A - A_0$ arestas estejam em P_0 . Como cada um dos F triângulos T_j têm três lados, vemos que $3F = A_0 + 2(A - A_0)$; então $3F + A_0 = 2A$.

Vamos agora calcular as áreas. Suponhamos que o polígono original tenha n vértices com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$. Esses vértices estão em C . Agora, A_0 dos V vértices na nova triangulação estão em C , e destes, n são vértices originais de P (em C), enquanto que os restantes $A_0 - n$ ocorrem como "novos" vértices estando em C (e interior a um lado original de P). A soma dos ângulos em cada um desses $A_0 - n$ vértices é π e os restantes $V - A_0$ vértices estão em P_0 , e a soma dos ângulos em cada um desses vértices é 2π . Como $3F + A_0 = 2A$ e $F - A + V = 1$ (e então $2V - 2A + 3F - F = 2V - 2A$),

segue que

$$\begin{aligned}
 \mu(P) &= \sum_{j=1}^F \mu(T_j) = (\theta_1 + \dots + \theta_n) + (A_0 - n)\pi + (V - A_0)2\pi - \pi F \\
 &= (\theta_1 + \dots + \theta_n) + A_0\pi - n\pi + V2\pi - A_02\pi - \pi F \\
 &= (\theta_1 + \dots + \theta_n) + 2V\pi - A_0\pi - F\pi - n\pi \\
 &= (\theta_1 + \dots + \theta_n) + 2V\pi - (2A - 3F)\pi - F\pi - n\pi \\
 &= (\theta_1 + \dots + \theta_n) + 2\pi(V - A + F) - n\pi \\
 &= (\theta_1 + \dots + \theta_n) + 2\pi - n\pi = \theta_1 + \dots + \theta_n - (n - 2)\pi.
 \end{aligned}$$

□

Exercícios

1. Assumindo que a Terra é uma esfera de raio igual a 4000 milhas, mostre que a distância esférica entre Londres (latitude 51° norte, longitude 0°) e Sydney (latitude 34° sul, longitude 151° leste) é de aproximadamente 10500 milhas.
2. Suponha que uma aeronave voe na rota mais curta de Londres (latitude 51° norte, longitude 0°) para Los Angeles (latitude 34° norte, longitude 118° oeste). Qual menor proximidade a aeronave chega do polo norte?
3. Mostre que se um triângulo esférico equilátero tem lados de medida a e ângulo interno α , então $\cos(\frac{a}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}$. Deduza que $\alpha > \frac{\pi}{3}$ (de modo que a soma dos ângulos do triângulo excede π).
4. Calcule o perímetro de um triângulo esférico cujos ângulos são todos $\frac{\pi}{2}$.
5. Prove o famoso resultado de Arquimedes que a área da parte de S que está entre os dois planos paralelos dados, digo, $x_3 = a$ e $x_3 = b$, é a mesma que a área da parte do cilindro que circunscreve (dado por $x_1^2 + x_2^2 = 1$) que está entre estes dois planos. Disto, encontre a área da calota polar $\{x \in S : \delta(x, k) < r\}$.

Referências

- [1] BEARDON, A. F.. **Algebra and Geometry**. Cambridge University Press, 2005.
- [2] GREENBERG, M.J.. **Euclidean and non-Euclidean Geometries**. N.Y.: W.H.Freeman, 1993.
- [3] MCCLEARY, J.. **Geometry from a Differentiable Viewpoint**. Cambridge University Press, 1997.
- [4] MOISE, E. E.. **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. 2nd Edition. New York, N.Y.: Addison-Wesley, 1974. 119-120 p.