

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Jorge Nicodemos

*Utilizando Conexões para o Estudo de Polinômios*

Rio de Janeiro

2013

José Jorge Nicodemos

*Utilizando Conexões para o Estudo de Polinômios*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

**Orientador: Ronaldo da Silva Busse**

**Doutor em Matemática - UFRJ**

Rio de Janeiro

2013

Nicodemos, José Jorge

Utilizando Conexões para o Estudo de Polinômios / José Jorge

Nicodemos - 2013

25.p

1. Matemática 2. Álgebra. I. Título.

CDU 536.21

José Jorge Nicodemos

*Utilizando Conexões para o Estudo de Polinômios*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 05 de abril de 2013

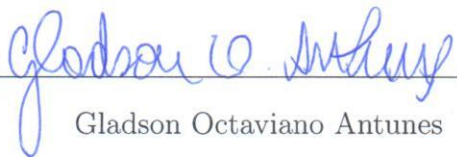
**BANCA EXAMINADORA**



---

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ



---

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ



---

Orlando dos Santos Pereira

Doutor em Matemática - UFRJ

*A minha querida esposa Mara Lúcia e meus  
amados filhos Tatiana e Diego, pela paciência  
e apoio durante todos esses anos.*

*Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.*

## **Agradecimentos**

A todo o grupo de professores da UNIRIO que em momento algum nos deixaram sem um bom atendimento, procurando sempre nos direcionar de forma adequada para que fosse possível atingir nossos objetivos.

Em especial a todos aqueles que nos atenderam de forma direta em sala de aula: Adriano Maurício de Almeida Côrtes, Fábio Luiz B. Simas, Gladson Octaviano Antunes, José Teixeira Cal Neto, Leonardo Tadeu Silvares Martins, Luiz Amâncio Machado de Sousa Júnior, Ronaldo da Silva Busse e Silas Fantin

## Resumo

Neste trabalho, é apresentado um método de obtenção das raízes dos polinômios da forma  $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ , baseado na utilização de conexões com assuntos já conhecidos, como Progressão Geométrica, Funções Racionais e Números Complexos, em especial, as raízes da unidade. Por intermédio dessa técnica, mostramos que o aluno consegue resolver algumas equações polinomiais que antes pareciam ser de improváveis soluções.

**Palavras-chaves:** polinômios, progressão geométrica, raízes da unidade

## Abstract

In this work, we present a method for obtaining the roots of polynomials of the form  $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ , based on the use of connections to subjects already known, as Geometric Progression, Rational Functions and Complex Numbers, in particular, the roots of unity. Through this technique, we show that the student can solve some polynomial equations that once seemed unlikely to be solutions.

**Keywords:** polynomials, geometric progression, roots of unity



# Sumário

<b>1</b>	<b>Apresentação e Motivações</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Uma proposta de aula</b>	<b>9</b>
2.1	Preliminares . . . . .	10
2.2	Plano de aula . . . . .	13
2.2.1	Introdução . . . . .	13
2.2.2	Resultado Principal . . . . .	13
2.2.3	Exemplos e Exercícios . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Anexo</b>	<b>22</b>
4.1	Demonstração da identidade ( $I$ ) pelo Princípio da Indução Finita . . . . .	22
4.2	Demonstração do Teorema 2.2.2 . . . . .	23
4.3	Gabarito dos exercícios Propostos . . . . .	24
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>25</b>

# 1 Apresentação e Motivações

Certamente todos percebem a grande importância das conexões matemáticas como um dos elementos básicos e facilitadores da aprendizagem dos alunos, ao longo de sua vida escolar. Segundo a professora Tamara Leuca, da Universidade de Lisboa,

*este tema poderá ser trabalhado em qualquer tópico do Programa de Matemática do Ensino Básico e Secundário, uma vez que se trata de uma capacidade transversal a desenvolver ao longo de toda a escolaridade.*

LEUCA, T., 2010

O significado de conexões matemáticas torna-se vasto diante da riqueza de detalhes que devem ser incorporados aos elementos que propiciem a efetiva aprendizagem da Matemática.

As conexões podem e devem ser estudadas, interpretadas e realizadas de várias maneiras distintas, por exemplo:

- a) Como **pré-requisitos**: são conexões fundamentadas em unir, ligar, conectar o que já é do conhecimento dos educandos com os conteúdos programáticos a serem estudados no momento atual de suas vidas acadêmicas. Estas conexões são consideradas verticais, pois são chamados momentos passados para o presente do aluno.
- b) Sendo **interdisciplinares**: são conexões fundamentadas em relacionar as várias disciplinas, estudadas no momento acadêmico em que se encontra o educando, de forma a contribuir significativamente para o despertar de interesses múltiplos para os conteúdos programáticos a serem estudados no momento atual de suas vidas acadêmicas. Estas conexões são consideradas horizontais, pois são utilizados momentos concomitantes ao atual do aluno.
- c) Com **conteúdos contextualizados**: são conexões fundamentadas em tornar agradável a aprendizagem utilizando, de forma inteligente, textos, histórias, quadrinhos, gráficos, tabelas, jogos e quaisquer outros artifícios que propiciem despertar interesses variados. São consideradas simultaneamente conexões horizontais e verticais,

pois neste caso podemos utilizar tanto momentos passados como momentos atuais da vida do educando.

- d) **Modeladoras:** são conexões que propiciem vincular atitudes matemáticas necessárias às resoluções de problemas concretos envolvidos nos conteúdos programáticos a serem estudados no momento atual de suas vidas acadêmicas. Estas conexões são consideradas transversais, verticais, horizontais e bilaterais. O interesse fundamental é adaptar condições matemáticas para a resolução dos problemas apresentados no conteúdo programático apresentado no momento atual.

Independente de quais sejam as nomenclaturas, interpretações e realizações dadas às conexões, em alguns momentos estas “*conexões matemáticas tornam-se o próprio currículo a ser estudado*” (CARREIRA, S., 2010)

Na resolução de um problema, podemos utilizar pelo menos dois tipos de soluções: **semânticas** ou **sintáticas**. Porém, nunca devemos nos esquecer de explorar sistematicamente as conexões envolvidas por trás destas soluções.

*A produção de uma demonstração sintática remete a tendência em manipular frequentemente símbolos, enquanto que a produção semântica predomina-se por uma manipulação de sentidos e conceitos. Um tipo de produção não é mais nem menos formal, ou correta que a outra, ter ou não ter rigor não está, necessariamente, relacionado a um ou a outro tipo de produção. Quando tratamos da produção de demonstrações sintáticas ou semânticas o processo usado para obtê-las ou o resultado é o mais importante? Desta forma é de se esperar que o resultado final, em ambas as escolhas, seja minimamente formalizado.*

(NICODEMOS, D.S., 2010)

Nas resoluções semânticas destacam-se notadamente as conexões com assuntos antes estudados para atingir objetivos presentes.

A utilização de conexões no ensino de Matemática propicia, ainda, despertar o interesse do educando em novas concepções e conceitos relacionados com seu cotidiano, indo de encontro com a Lei de Diretrizes e Base.

*A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.*

LDB, 1996, Art. 22°

Neste trabalho pretendemos trabalhar com conexões modeladoras, envolvendo alguns conteúdos programáticos da Educação Básica, como: Equações Algébricas, Progressões Geométricas, Polinômios, Números Complexos e Trigonometria.

Mostraremos aos alunos que um problema, aparentemente delicado e complexo, pode ser resolvido com os conceitos já estabelecidos, sendo necessário apenas conectar assuntos já abordados com os que estão em pleno processo de aprendizagem.

A proposta do trabalho/aula será determinar as raízes da equação

$$1 + x^2 + \dots + x^n = 0,$$

por intermédio de conteúdos que envolvem as teorias de Progressões Geométricas e de Números Complexos.

Acreditamos que a contribuição deste trabalho para o ensino da Matemática na Educação Básica é a maneira inovadora de apresentação de Polinômios, Progressões Geométricas e Equações Algébricas no Conjunto dos Números Complexos.

As conexões podem ser realizadas independentemente da ordem em que os conteúdos forem abordados. Paralelamente estamos revelando uma maneira de determinar algebricamente, e trigonometricamente, as raízes n-ésimas do polinômio mônico em que todos os coeficientes sejam iguais a unidade.

## 2 Uma proposta de aula

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de aula para a utilização de conexões modeladoras.

O foco principal consiste em obter as raízes da equação

$$1 + x^2 + \dots + x^n = 0.$$

Para isso iniciaremos observando que as parcelas da soma formam uma progressão geométrica de razão  $x$ . No entanto, chamaremos a atenção para o fato de que a variável  $x$  pode assumir valores complexos e, por esse motivo, será necessário verificar a validade da soma da PG, dada por,

$$1 + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Essa verificação será feita no trabalho por intermédio do Princípio de Indução Finita e, em sala de aula, de forma intuitiva, utilizando o produto de polinômios. Após esta verificação, trataremos, finalmente, das raízes da equação

$$1 + x^2 + \dots + x^n = 0.$$

Tais raízes serão as raízes  $(n + 1)$ -ésimas da unidade, exceto  $x = 1$  que não é solução do problema. Daremos também um tratamento geométrico para esta questão, a partir de um polígono regular de  $n + 1$  lados, circunscrito pela circunferência unitária.

Sugerimos que o conteúdo seja dividido em duas aulas de 1 hora e 40 minutos: a primeira para apresentação da teoria e de alguns exemplos e a segunda para trabalhar os exercícios de fixação propostos. É indicado que essas aulas sejam ministradas para turmas do terceiro ano do Ensino Médio, visto que, para resolver os problemas apresentados, o aluno deverá estabelecer conexões com outros assuntos da Matemática e, para tal, serão exigidos alguns conhecimentos prévios, destacados na seção a seguir.

## 2.1 Preliminares

### Polinômios

Além de ser o objeto de estudo da aula, o aluno deverá saber realizar as operações básicas entre polinômios, bem como conhecer o Teorema Fundamental da Álgebra e o Algoritmo da Divisão.

**Teorema 2.1.1** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio  $p(x)$  com coeficientes complexos, de grau  $n \geq 1$ , possui pelo menos uma raiz complexa.*

Uma consequência desse teorema é que todo polinômio  $p(x)$  com coeficientes complexos, de grau  $n \geq 1$ , possui exatamente  $n$  raízes complexas, não necessariamente todas distintas.

**Teorema 2.1.2** (Algoritmo da Divisão). *Dados dois polinômios  $p(x)$  e  $q(x)$ , tais que  $\text{grau}(p(x)) \geq \text{grau}(q(x))$ , existem polinômios  $g(x)$  e  $r(x)$  tais que  $0 \leq \text{grau}(r(x)) < \text{grau}(q(x))$  e*

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

### Progressões Geométricas

O aluno precisará reconhecer que uma progressão geométrica é uma sequência definida recursivamente por  $a_n = a_{n-1}q$ , com  $q$  fixo. Além disso, deverá saber utilizar corretamente a fórmula da soma finita dos seus termos, dada abaixo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

### Funções Racionais

O aluno precisará saber a definição de domínio de função, em particular de funções racionais, a saber, formada pela razão entre dois polinômios. Por exemplo, deverá reconhecer que a função

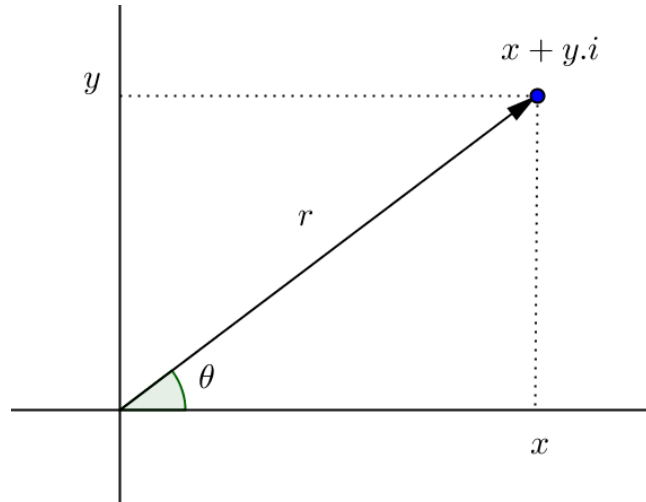
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

possui domínio dado por  $\mathbb{R} - \{1\}$  e, por esse motivo,

$$f(x) = x + 1, \forall x \neq 1.$$

Números Complexos

No que tange aos números complexos, o aluno deverá, inicialmente, conhecer suas representações algébrica ( $z = x + yi$ ) e trigonométrica ( $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ), bem como sua representação geométrica no plano complexo.



O aluno deverá, ainda, dominar as operações de potenciação e radiciação de números complexos, dadas, respectivamente, pela Primeira e Segunda Fórmulas de De Moivre:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

e

$$\sqrt[n]{z} = z_k,$$

onde

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

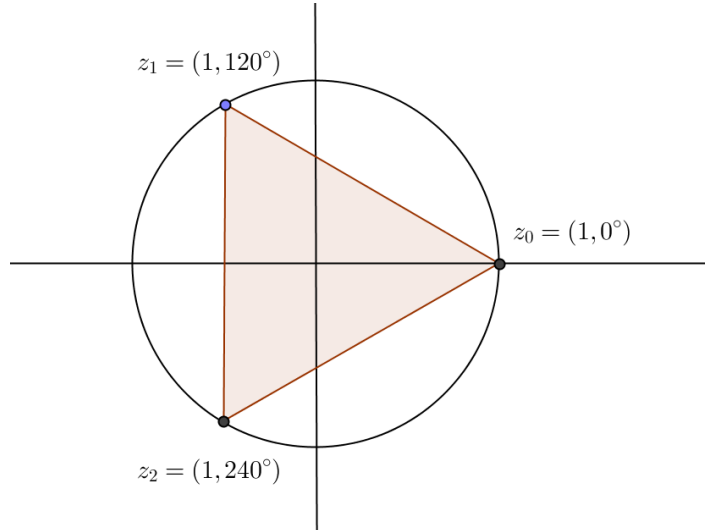
Finalmente, o aluno precisará saber determinar as raízes  $n$ -ésimas da unidade  $z = 1$ , dadas por,

$$z_k = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{n} \right) = \operatorname{cis} \left( \frac{2k\pi}{n} \right),$$

com  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , bem como reconhecer que cada um dos afijos dessas  $n$  raízes  $n$ -ésimas da unidade são vértices de um polígono regular de  $n$  lados pertencentes à circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1, sendo um desses vértices o ponto  $(1, 0)$ .

Vamos ilustrar a situação descrita acima, tomando como exemplo as raízes cúbicas da unidade, dadas por

- $z_0 = \cos(0) + i\text{sen}(0) = 1$
- $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



Uma etapa da aula é a verificação da validade da soma de uma PG com razão complexa. Para tanto, serão utilizados o produto de dois polinômios e um pouco de intuição. No entanto, para o trabalho escrito, essa verificação se dará de maneira mais rigorosa, por intermédio do Princípio da Indução Finita, descrito a seguir.

**Teorema 2.1.3** (Princípio da Indução Finita). *Seja  $P(n)$  uma propriedade associada a um número natural  $n$ . Suponha que*

- $P(1)$  seja válida;
- para todo natural  $n$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n + 1)$ .

*Então  $P(n)$  é válida qualquer que seja o número natural  $n$ .*

Cabe ressaltar que, embora não estejamos propondo a sua utilização em sala de aula, é interessante que o aluno do Ensino Médio conheça e saiba utilizar o Princípio da Indução Finita para demonstrar identidades e propriedades importantes, porém simples, dos números naturais. Observa-se, ainda, que esse resultado pode ser utilizado para a demonstração de propriedades de subconjuntos dos números inteiros do tipo

$$X = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq n_0\},$$

com  $n_0 \in \mathbb{Z}$  fixo.



## 2.2 Plano de aula

### 2.2.1 Introdução

Segundo a nossa proposta de aula, o professor deverá iniciar propondo que os alunos resolvam a equação

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

por intermédio da fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e observem que as raízes encontradas  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  correspondem às raízes cúbicas da unidade, exceto o próprio 1.

Em seguida, o professor considerará a equação

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

e observará que esta possui exatamente 3 raízes complexas, de acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra. Fazendo uma comparação com o caso anterior, o professor deverá propor que os alunos verifiquem se as raízes quartas da unidade 1,  $i$ ,  $-1$  e  $-i$ , exceto a própria unidade, são exatamente essas 3 raízes procuradas. Essa verificação se dará por uma simples substituição das raízes na equação:

- $i^3 + i^2 + i + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0$
- $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
- $(-i)^3 + (-i)^2 + (-i) + 1 = i - 1 - i + 1 = 0$

e os alunos confirmarão a validade do resultado.

### 2.2.2 Resultado Principal

Os passos discutidos até então, levarão ao seguinte questionamento:

**será que essa ideia é válida qualquer que seja o grau do polinômio**

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1?$$

O primeiro passo para responder a essa questão é observar que será necessário estudar as raízes  $(n + 1)$ -ésimas da unidade e que essas são as raízes do polinômio  $g(x) = x^{n+1} - 1$ . Dessa forma, o aluno será induzido a tentar relacionar o polinômio  $p(x)$  com o polinômio  $g(x)$ .

No caso de nenhum aluno observar, o professor deverá chamar a atenção para o fato de que as parcelas do polinômio  $p(x)$ ,  $(1, x, x^2, x^3, \dots, x^n)$ , formam uma PG de razão  $x$  cuja soma é dada por

$$S_{n+1} = \frac{1(x^{n+1} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Nesse caso, tem-se que

$$p(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad \forall x \neq 1, \quad (I)$$

visto que  $x = 1$  não pertence ao domínio da função racional do lado direito da igualdade.

Aqui, o professor deverá chamar a atenção para o fato de que a razão  $x$  da PG pode assumir valores complexos e que o conceito de PG, **a priori**, é definido para números reais. Embora não haja restrição a definir-se PG com razão complexa, a igualdade acima pode ser demonstrada pelo Princípio da Indução Finita sobre o grau  $n$  de  $p(x)$ , conforme fazemos no anexo. Para a sala de aula, essa verificação pode ser feita pela multiplicação:

$$(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)(x - 1) = (x^{n+1} - x^n) + (x^n - x^{n-1}) + \dots + (x^2 - x) + (x - 1).$$

De forma bastante intuitiva, o aluno consegue perceber que, na soma do lado direito, o segundo termo de cada fator se cancela com o primeiro termo do fator seguinte e, dessa forma, segue-se que

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)(x - 1) = x^{n+1} - 1,$$

isto é,

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

A igualdade  $p(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$  indica intuitivamente que as raízes do polinômio  $p(x)$  são, a menos da unidade (que anularia seu denominador), as raízes  $(n + 1)$ -ésimas da unidade. Isto ocorre porque para ser raiz de  $p(x)$  um número deve zerar a fração  $\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$  e, portanto, deve zerar seu numerador.

Temos, então, o seguinte resultado principal do trabalho/aula:

**Teorema 2.2.1.** *As  $n$  raízes do polinômio*

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$

*são as raízes  $(n+1)$ -ésimas da unidade, exceto a própria unidade.*

A fim de facilitar a visualização das raízes do polinômio  $p(x)$ , o professor deverá relembrar e ilustrar que as raízes  $(n+1)$ -ésimas da unidade são os vértices de um polígono regular de  $n+1$  lados pertencentes à circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 1, sendo um desses vértices o ponto  $(1,0)$ .

Dessa forma, fica claro que, no caso em que o número de vértices  $n+1$  é par (e apenas nesse caso), o ponto  $(-1,0)$  também será um vértice do polígono e, portanto, segue-se, imediatamente, que

**Corolário 2.2.1.** *O polinômio  $p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$  possui  $-1$  como raiz se, e somente se,  $n$  é ímpar.*

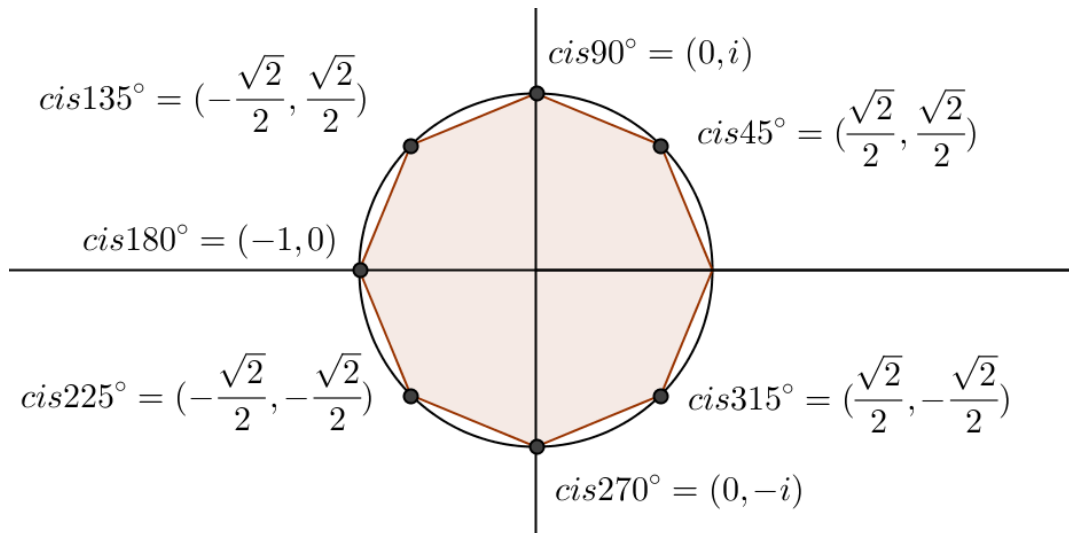
### 2.2.3 Exemplos e Exercícios

Nesta seção, apresentamos propostas de exemplos e exercícios que objetivam a fixação e a exploração do resultado apresentado na seção anterior. O primeiro exemplo, consiste de uma aplicação direta do resultado, e deve ser proposto como exercício para ser realizado em sala de aula.

**Exemplo 1:** Encontre as raízes da equação

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

**Solução:** Pelo Teorema 2.2.1, as raízes da equação são as raízes oitavas da unidade, exceto a própria unidade. Portanto, as raízes são os vértices do octógono regular inscrito na circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 1, exceto o vértice  $(1,0)$ , conforme figura abaixo.



Dessa forma, dividimos  $360^0$  por 8, obtendo  $45^0$  e as raízes são:

- $cis(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $cis(90^0) = i$
- $cis(135^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $cis(180^0) = -1$
- $cis(225^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $cis(270^0) = -i$
- $cis(315^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

*Observação 2.2.1.* Este problema foi proposto a uma turma do IFRJ-Caxias, curso Pós-Médio (curso técnico, com 5 cursos de Matemática, composto de alunos que já viram todo o conteúdo do Ensino Médio), formada por 40 alunos. Eles precisavam desenvolver a própria técnica e tiveram vinte minutos para tentar resolvê-lo. Ao final do tempo, apenas um aluno observou que a equação correspondia à soma de uma PG de razão  $x$  sem, no entanto, desenvolver o restante da solução.

Foi proposto, ainda, a um grupo de 15 professores que trabalham em turmas dos Ensinos Fundamental e Médio de escolas públicas e privadas. Eles puderam tentar resolver em casa e, após 4 dias, apenas dois professores apresentaram uma solução correta, que apresentamos a seguir:

- observando que  $x = -1$  é raiz do polinômio, efetua-se a divisão do mesmo por  $x + 1$ , obtendo

$$\begin{aligned}(x^6 + x^4 + x^2 + 1)(x + 1) = 0 &\implies (x^4(x^2 + 1) + x^2 + 1)(x + 1) = 0 \\ \implies (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1) &= 0;\end{aligned}$$

- dessa forma, as raízes da equação são  $-1, i, -i, \sqrt{i}, -\sqrt{i}, \sqrt{-i}$  e  $-\sqrt{-i}$ ;
- finalmente, usando a 2ª Fórmula de De Moivre, verifica-se que

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, & -\sqrt{i} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \sqrt{-i} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, & -\sqrt{-i} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.\end{aligned}$$

Note que essa resolução, além de ser mais trabalhosa, não se aplica a todas as equações desse tipo (por exemplo, aquelas com grau par). Isso mostra a importância de se utilizar, de fato, conexões como estratégias de resolução de problemas.

O Segundo exemplo envolve o conceito de divisibilidade de polinômios e consiste em analisar a divisibilidade de  $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$  por  $q(x) = 1 + x$  em função do grau  $n$  de  $p(x)$ . Antes de apresentar o exemplo, o professor pode propor que os alunos verifiquem a divisibilidade, em casos particulares (com os os polinômios de graus 4 e 5, por exemplo), efetuando a divisão "no braço".

Para justificar o desenvolvimento do exemplo 2, o professor deverá apresentar aos alunos o seguinte resultado, cuja demonstração é dada no anexo:

**Teorema 2.2.2.** *Considere os polinômios  $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$  e  $q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^m$ , com  $m < n$ . Então,  $p(x)$  é divisível por  $q(x)$  se, e somente se, todas as raízes de  $q(x)$  são raízes de  $p(x)$ .*

É importante ressaltar que, embora seja válida uma versão mais geral, optamos por apresentá-lo dessa forma por ser de mais fácil demonstração, visto que todas as raízes envolvidas possuem multiplicidade 1.

**Exemplo 2:** Analise a divisibilidade de  $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$  por  $q(x) = 1 + x$ .

**Solução:** Pelo Teorema 2.2.2,  $p(x)$  é divisível por  $q(x)$  se, e somente se,  $x = -1$  for raiz de  $p(x)$ . Dessa forma, segue do Corolário 2.2.1 que a divisibilidade ocorre se, e somente se, o grau  $n$  de  $p(x)$  é ímpar.

No exemplo anterior, a divisibilidade foi analisada, de maneira direta, por intermédio do Corolário 2.2.1. Apresentamos, a seguir, um exemplo que exige uma análise um pouco mais cuidadosa.

**Exemplo 3:** Analise a divisibilidade de  $p(x) = 1+x+x^2+\dots+x^n$  por  $q(x) = 1+x+x^2+x^3$ .

**Solução:** Novamente pelo Teorema 2.2.2,  $p(x)$  é divisível por  $q(x)$  se, e somente se, as raízes de  $q(x)$  forem raízes de  $p(x)$ . Isso significa que todos os vértices do polígono que representa as raízes de  $q(x)$  devem ser vértices do polígono que representa as raízes de  $p(x)$ .

Por outro lado, de acordo com o Teorema 2.2.1, as raízes de  $q(x) = 1+x+x^2+x^3$  são as raízes quartas da unidade, exceto a própria unidade 1, dadas por  $i$ ,  $-1$  e  $-i$ .

Em virtude da regularidade desses polígonos e de ambos terem o ponto  $(1, 0)$  como um de seus vértices, basta garantirmos que a raiz  $i$  de  $q(x)$  seja também raiz de  $p(x)$ . Dessa forma,  $p(x)$  é divisível por  $q(x)$  se, e somente se, existir  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\frac{2\pi k}{n+1} = \frac{\pi}{2},$$

ou seja,

$$n = 4k - 1.$$

Conclusão:  $p(x)$  é divisível por  $q(x)$ ,  $\forall n \in \{3, 7, 11, \dots\}$ .

O próximo exemplo deve ser proposto como exercício em sala de aula e consiste em estudar o mesmo polinômio do resultado principal, porém com fatores possuindo sinais alternados. O objetivo, aqui, é propiciar aos alunos trabalharem com os argumentos utilizados na demonstração do resultado principal.

**Exemplo 4:** Determine as raízes do polinômio

$$p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n.$$

**Solução:** Neste caso, o polinômio equivale a uma PG de razão  $-x$  e, usando a fórmula da soma desta PG, obtemos:

$$p(x) = \frac{((-x)^{n+1} - 1)}{-x - 1} = \frac{-(-x)^{n+1} + 1}{x + 1}, \quad \forall x \neq -1.$$

Analisando de acordo com a paridade de  $n$ , temos:

- $n$  ímpar:  $p(x) = \frac{-x^{n+1} + 1}{x + 1}$

- $n$  par:  $p(x) = \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}$

Note que, em ambos os casos, as raízes de  $p(x)$  são dadas pelas raízes do numerador e que  $x = -1$ , de fato, nunca será raiz de  $p(x)$ , pois

$$p(-1) = 1 - (-1) + (-1)^2 - (-1)^3 + \dots + (-1)^n(-1)^n = n + 1.$$

Dessa forma, concluímos que as raízes de  $p(x)$  são, a menos de  $x = -1$ ,

- As raízes  $(n+1)$ -ésimas da unidade 1, se  $n$  é ímpar
- As raízes  $(n+1)$ -ésimas de  $-1$ , se  $n$  é par

*Observação 2.2.2.* Como  $z = -1 = cis\pi$ , então  $\sqrt[n+1]{-1} = z_k$ , onde

$$z_k = \sqrt[n+1]{-1} cis \left( \frac{2k\pi + \pi}{n+1} \right) = cis \left( \frac{2k\pi + \pi}{n+1} \right),$$

com  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Após o desenvolvimento desse exemplo, é interessante que o professor proponha aos alunos a resolução de casos particulares. Apresentaremos, aqui o estudo dos polinômios de graus 2 e 3, pois as respostas são de fácil verificação.

(i)  $p(x) = 1 - x + x^2$

Como o grau de  $p(x)$  é par, o exemplo anterior, nos diz que suas raízes são, a menos de  $-1$ , as raízes cúbicas de  $-1$ , dadas por

- $z_0 = cis \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_2 = cis \left( \frac{4\pi + \pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Esse resultado pode ser conferido utilizando-se a fórmula resolutive para equação do segundo grau

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

(ii)  $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3$

Como o grau de  $p(x)$  é ímpar, o exemplo anterior, nos diz que suas raízes são, a menos de  $-1$ , as raízes quartas da unidade 1, dadas por:  $1, i$  e  $-i$ . A verificação desse resultado se dá substituindo os valores obtidos diretamente em  $p(x)$ :

- $p(1) = 1 - 1 + 1^2 - 1^3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- $p(i) = 1 - i + i^2 - i^3 = 1 - i - 1 + i = 0$
- $p(-i) = 1 - (-i) + (-i)^2 - (-i)^3 = 1 + i - 1 - i = 0$

Finalmente, a nossa proposta de aula se encerra com a sugestão de exercícios de fixação, para serem resolvidos pelos alunos em casa, cujos gabaritos são dados no anexo.

**Exercício 1:** Determine as raízes de

- (a)  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
- (b)  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
- (c)  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$

**Exercício 2:** Analise a divisibilidade de  $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$  por  $q(x)$ , onde

- (a)  $q(x) = 1 + x + x^2$
- (b)  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

**Exercício 3:** Mostre que o polinômio de  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$  não é divisível por  $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$



### 3 Considerações Finais

Este Trabalho de Conclusão do Curso me propiciou observar, estudar e trabalhar com várias conexões, que antes me pareciam inexistentes, entre conteúdos programáticos que são estudados ao longo do Ensino Médio. Ao desenvolver nossa teoria fomos utilizando Conexões Modeladoras e enfatizando soluções semânticas, sempre que foi possível.

Muitas vezes fui questionado por alunos do Ensino Médio curiosos em conhecer fórmulas resolutivas para equações de grau maior que 2 e, por isso, sempre alimentei grande interesse em soluções de equações de grau maior que 2. Este TCC tornou possível resolver algumas equações de grau  $n$  e abre portas para o estudo da resolução de tantas outras equações (basta descobrirmos, se existirem, as conexões adequadas).

O método utilizado pode também ser aplicado para resolver as equações da forma:

$$1 + qx + q^2x^2 + \dots + q^nx^n = 0, q \in \mathbb{C},$$

no universo dos números complexos. Nesse caso, as raízes são, a menos da unidade, iguais a:

$$x = \frac{\sqrt[n+1]{1}}{q}.$$

Este TCC foi de real importância e valor para mim pois, ao estudar as equações envolvidas de forma direta ou indireta nele, pude observar uma série de novas maneiras de lidar com situações antigas.

## 4 Anexo

### 4.1 Demonstração da identidade (I) pelo Princípio da Indução Finita

Apresentamos, aqui, a demonstração de que

$$1 + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por intermédio do Princípio da Indução Finita sobre  $n$ .

De fato, tem-se que

- para  $n = 1$ , a igualdade é válida, visto que

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 1 + x.$$

- Suponha que a igualdade seja válida para algum  $k \in \mathbb{N}$ , isto é,

$$1 + x + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Precisamos mostrar que a igualdade vale para  $k + 1$ . Observe que,

$$(1 + x + \dots + x^k + x^{k+1})(x - 1) = (1 + x + \dots + x^k)(x - 1) + x^{k+1}(x - 1).$$

Usando a hipótese de indução na primeira parcela da soma, tem-se

$$\begin{aligned} (1 + x + \dots + x^k + x^{k+1})(x - 1) &= x^{k+1} - 1 + x^{k+1}(x - 1) = \\ &= x^{k+1} - 1 + x^{k+2} - x^{k+1} = x^{k+2} - 1, \end{aligned}$$

isto é,

$$1 + x + \dots + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1},$$

como queríamos demonstrar.

## 4.2 Demonstração do Teorema 2.2.2

Suponha que  $p(x)$  seja divisível por  $q(x)$ . Então, existe um polinômio  $g(x)$  tal que

$$p(x) = q(x)g(x).$$

Dessa forma, se  $a$  é uma raiz qualquer de  $q(x)$ , então

$$p(a) = q(a)g(a) = 0,$$

isto é,  $a$  é raiz também de  $p(x)$ .

Reciprocamente, suponha que todas as  $m$  raízes distintas  $a_1, \dots, a_m$  de  $q(x)$  sejam também raízes de  $p(x)$ . Pelo Algoritmo da Divisão, sabemos que existem polinômios  $g(x)$  e  $r(x)$ , com  $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(q(x))$ , tais que

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

Suponha, por absurdo, que  $r(x)$  não seja identicamente nulo. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra,  $r(x)$  possui  $k$  raízes, com  $k < m$ . Por outro lado, tem-se, para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , que

$$r(a_i) = p(a_i) - q(a_i)g(a_i) = 0,$$

donde concluímos que  $r(x)$  possui, pelo menos,  $m$  raízes e chegamos a uma contradição. Conclusão:  $r(x)$  é identicamente nulo e, portanto,  $p(x)$  é divisível por  $q(x)$ .

## 4.3 Gabarito dos exercícios Propostos

### Exercício 1:

$$(a) S = \{cis(72^0), cis(144^0), cis(216^0), cis(288^0)\}$$

$$(b) S = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$$

$$(c) S = \{cis(40^0), cis(80^0), cis(120^0), cis(160^0), \\ cis(200^0), cis(240^0), cis(280^0), cis(320^0)\}$$

### Exercício 2:

(a)  $p(x)$  será divisível por  $q(x)$  se, e somente se,  $n \in \{4, 9, 14, 19, \dots\}$ .

(b)  $p(x)$  será divisível por  $q(x)$  se, e somente se,  $n \in \{2, 5, 8, 11, \dots\}$ .

### Exercício 3:

De acordo com o Teorema 2.2.1, as raízes de  $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$  são as raízes sextas da unidade, exceto a própria unidade 1. Seguindo os argumentos apresentados no Exemplo 3,  $P(x) = 1 + x + \dots + x^n$  é divisível por  $q(x)$  se, e somente se, existir  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\frac{2\pi k}{n+1} = \frac{\pi}{3},$$

ou seja,

$$n = 6k - 1.$$

Logo,  $P(x)$  é divisível por  $q(x)$  apenas quando  $n \in \{5, 11, 17, \dots\}$  e, portanto,

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

não é divisível por  $q(x)$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*, 3ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [2] Carreira, S., *Conexões no ensino de Matemática: não basta vê-las, é preciso fazê-las!*, Editorial da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e UIDEF da Universidade de Lisboa, 2010.
- [3] do Carmo, M.P., Morgado, A.C., E. Wagner, *Trigonometria/Números Complexos*, 3ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [4] Garcia, A., Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*, 6ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [5] Gonçalves, A., *Introdução à Álgebra*, 7ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [6] Hefez, A., *Elementos de Aritmética*, 2ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [7] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9394/1996.
- [8] Leuca, T., *Conexões no Ensino e Aprendizagem das Sucessões*, Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa, 2010.
- [9] Lima, E., Carvalho, P.C., Morgado, A., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3, 6ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [10] Moreira, C.G., *Uma solução das equações do terceiro e do quarto graus*, Revista do Professor de Matemática No. 25, pp. 23-28.
- [11] Nicodemos, D.S., *Manipulação de Provas Semânticas e Sintáticas em Cálculo Diferencial e Seus Potenciais Conflitos*, Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.