Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

AS CONTRIBUIÇÕES DA ESCOLA PITAGÓRICA PARA A MATEMÁTICA

REINALDO BARROS SALES

Relatório para o Exame Geral de Qualificação apresentado ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

2015

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

AS CONTRIBUIÇÕES DA ESCOLA PITAGÓRICA PARA A MATEMÁTICA

REINALDO BARROS SALES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

2015

SALES, REINALDO BARROS
AS CONTRIBUIÇÕES DA ESCOLA PITAGÓRICA PARA A MATEMÁTICA/ REINALDO BARROS SALES- Teresina: [s.n.], 2015.
50 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Pós Graduação em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

111
X111x

1. Pitágoras, Escola pitagórica, Teorema de Pitágoras, Grandezas irracionais, Poliedros, Música, Matemática - Estudo e Ensino. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da UFPI
Câmpus Teresina

TERMO DE APROVAÇÃO

REINALDO BARROS SALES
AS CONTRIBUIÇÕES DA ESCOLA PITAGÓRICA PARA A MATEMÁTICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes
Examinador

Profa. Ms. Jaqueline Feitosa Batista
Examinador Externo

Teresina, 05/03/2015

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, depois à minha esposa Andréia e aos meus filhos Jéssica e Ândrey.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar pela força e coragem que tem me dado; à minha esposa e filhos pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis; a todos os colegas de curso, pela amizade, exemplo e determinação; ao Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite pela tranquilidade e paciência com que conduziu a orientação deste trabalho e a todos os professores do curso PROFMAT.

Com organização e tempo, acha-se o segredo de fazer tudo e bem feito.

Pitágoras de Samos

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas das importantes contribuições matemáticas atribuídas a Pitágoras e aos pitagóricos. A metodologia empregada foi a pesquisa bibliográfica, levando em consideração aspectos da história do grego Pitágoras. Para isto, foram utilizadas referências de vários autores que escrevem sobre a História da Matemática. A princípio falaremos sobre a figura mítica de Pitágoras de Samos, as fontes históricas que o mencionam e a fundação da escola criada por ele; em seguida, abordaremos as principais descobertas matemáticas que lhes foram atribuídas como, por exemplo, um famoso teorema da Geometria plana que leva seu nome, o Teorema de Pitágoras, principal resultado atribuído aos pitagóricos, que tem suas aplicações em várias áreas do conhecimento e cuja inspiração levou ao famoso "Último Teorema de Fermat". Discorremos também sobre propostas de ensino, em sala de aula do ensino básico, referente aos temas: *Teorema de Pitágoras* e *Números irracionais*, visando contribuir para a melhoria do ensino da Matemática.

Palavra-chave: Pitágoras, Escola pitagórica, Teorema de Pitágoras, Grandezas irracionais, Poliedros, Música, Matemática - Estudo e Ensino.

Abstract

The objective of this paper is to present some of the important contributions mathematical attributed to Pythagoras and the Pythagoreans. The methodology was the literature, taking into account aspects of the history of the Greek Pythagoras. For this, references were used by several authors who write on the History of Mathematics. At first we'll talk about the mythical figure of Pythagoras of Samos, the historical sources that mention and the school foundation created by him; then discuss the major mathematical discoveries assigned to them, for example, a famous theorem of Geometry flat that bears his name, the Pythagorean theorem, the main attributable the Pythagoreans, which has applications in various areas of knowledge and whose inspiration led to the famous "Fermat's Last Theorem". We discuss also teaching proposals, in the classroom of basic education, the topics: *Theorem Pythagoras* and *Irrational numbers*, to contribute to the improvement of mathematics teaching.

Keyword: Pitágoras, Escola pitagórica, Teorema de Pitágoras, Grandezas irracionais, Poliedros, Música, Matemática - Estudo e Ensino.

Lista de Figuras

2.1 Números Triangulares 19
2.2 Números Quadrados 20
2.3 20
2.4 20
2.5 21
2.6 21
2.7 Números Hexagonais 22
2.8 24
2.9 24
2.10 25
2.11 26
2.12 26
2.13 Modelo da corda de 13 nós dos antigos egípcios 27
2.14 28
2.15 30
2.16 31
2.17 32
2.18 mostrando que $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1 \Rightarrow 216 + 512 = 729 - 1$ 32
2.19 35
2.20 35
2.21 36
2.22 38
2.23 40
2.24 40
2.25 41
2.26 Um poliedro convexo e um não convexo. 43
2.27 Poliedros regulares. 43
2.28 Monocórdio de Pitágoras 44
2.29 Notas encontradas por Pitágoras 45
2.30 46

Sumário

1 Um pouco de história **11**

1.1 Fontes de informações a respeito de Pitágoras 11

1.2 A formação da escola pitagórica 13

2 Principais contribuições atribuídas à escola pitagórica **15**

2.1 O raciocínio postulacional e a matemática demonstrativa 15

2.2 A aritmética pitagórica 16

2.2.1 Os números pares e ímpares 17

2.2.2 Os números amigáveis 17

2.2.3 Os números perfeitos, deficientes e abundantes 18

2.2.4 Os números figurados 19

2.2.5 Os números primos 22

2.3 O Teorema de Pitágoras 23

2.3.1 Possível demonstração de Pitágoras 23

2.3.2 Outras demonstrações do teorema de Pitágoras 25

2.3.3 A recíproca do teorema de Pitágoras 27

2.3.4 Os ternos pitagóricos 29

2.4 Outros conhecimentos associados ao teorema de Pitágoras 30

2.4.1 Generalização do teorema de Pitágoras 30

2.4.2 Do Teorema de Pitágoras ao último Teorema de Fermat . . . 31

2.4.3 O teorema de Pitágoras em sala de aula 33

2.5 A descoberta das grandezas irracionais 35

2.5.1 Os números irracionais em sala de aula 37

2.6 Identidades algébricas 39

2.7 Resolução geométrica de equações quadráticas 40

2.8 Os poliedros regulares 42

2.9 A música de Pitágoras 44

2.9.1 A escala musical pitagórica 46

3 Considerações Finais **48**

Introdução

Desde os tempos remotos o homem se utiliza da Matemática para resolver problemas. Seja de natureza prática como o cálculo de áreas de terrenos agrícolas, conforme era feito na demarcação de terras às márgens do rio Nilo ou de natureza teórica como a busca pela resposta do último teorema de Fermat.

Os filósofos e matemáticos gregos foram os primeiros a ver a Matemática como algo além de uma ferramenta para contagem e cálculos simples. Os grandes idealizadores da abstração e sistematização da Matemática foram Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. As descobertas de Tales e Pitágoras são muito importantes para a ciência, é tanto que ainda hoje são ensinadas nas escolas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) indicam que o processo de ensino e de aprendizagem na disciplina de Matemática pode ter uma contribuição significativa quando se recorre à História da Matemática, pois, desse modo, ela ganha vida e surge como uma criação humana em resposta a suas necessidades. Isso possibilita ao aluno comparar a Matemática do passado com a do presente, desenvolvendo valores favoráveis para uma melhor aprendizagem.

> *"Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para constituição de um olhar mais critico sobre os objetos de conhecimento". (BRASIL, 1997, p. 46)*

Contar e entender a história são meios importantes para favorecer o aprendizado e possibilitar novas descobertas e redescobertas como é o indicado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

O presente trabalho tem por objetivo abordar sobre a matemática do grego Pitágoras e da escola por ele fundada - *A ESCOLA PITAGÓRICA* - discorrendo um pouco sobre a história dessa escola e apresentando, em seguida, algumas de suas importantes contribuições para o desenvolvimento da Matemática como ciência, mostrando, desta forma, sua herança científica, desde sua época até os dias de hoje.

Este trabalho foi dividido em três partes e está organizado da seguinte maneira: a primeira parte inicia-se na seção 1 com um pouco de história mostrando as fontes de informações a respeito de Pitágoras e, em seguida, a formação da escola pitagórica.

Na segunda parte, seção 2, são apresentadas as principais contribuições atribuídas à escola pitagórica, as quais são: O raciocínio postulacional e a matemática demonstrativa, a aritmética pitagórica, o teorema de Pitágoras, a descoberta das grandezas irracionais, identidades algébricas, resolução geométrica de equações quadráticas, os poliedros regulares e a música de Pitágoras.

E na terceira parte, seção 3, fazemos as considerações finais concluindo este trabalho.

1 Um pouco de história

No século VI a.C., Pitágoras de Samos foi uma das figuras mais influentes e, no entanto, misteriosas da Matemática. Como não existem relatos originais de sua vida e de seus trabalhos, Pitágoras está envolto em lendas fantasiosas e mitos, tornando difícil para os historiadores separar o fato da ficção. No entanto, seus seguidores espalharam suas crenças e feitos por todo o mundo grego e, consequentemente, por todo o ocidente.

Os pitagóricos viam a figura do número como a essência de todas as coisas. O princípio metafísico de que tudo é número ou pode ser representado por números foi o pilar da filosofia pitagórica que baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium* , ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada(EVES, 2004).

1.1 Fontes de informações a respeito de Pitágoras

Embora muitos conhecessem as aspirações de Pitágoras, ninguém fora da Irmandade conhecia os detalhes ou a extensão do seu sucesso. Cada membro da escola era forçado a jurar que nunca revelaria ao mundo exterior qualquer uma de suas descobertas matemáticas. Mesmo depois da morte de Pitágoras, um membro da Irmandade, que quebrou o juramento, foi afogado. Ele revelou, publicamente, a descoberta de um novo sólido regular, o dodecaedro, contruído a partir de doze pentágonos regulares. Esta natureza alternativa secreta da Irmandade Pitagórica contribuiu para os mitos que se criaram em torno de estranhos rituais que seriam praticados. E também explica por que existem tão poucos relatos confiáveis de suas conquistas matemáticas.

Para EVES (2004), a principal fonte de informações a respeito dos primeiros passos da matemática grega é o chamado *Sumário Eudeminiano* de Proclo. Esse sumário consiste nas páginas de abertura do *Comentário sobre Euclides*, *Livro I*, de Proclo e é um breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides. Embora Proclo tivesse vivido no século V d.C., mais de um milênio depois da matemática grega, ele ainda teve acesso a muitos trabalhos históricos e críticos que de então para cá se perderam, salvo alguns fragmentos e alusões preservados por ele próprio e outros. Dentre esses trabalhos está um resumo de uma história aparentemente completa de geometria grega, já desaparecida à época de Proclo, cobrindo o período anterior a 335 a.C., e escrita por Eudemo, um discípulo de Aristóteles. O nome *Sumário Eudeminiano* se deve a esse trabalho anterior.

O próximo matemático ilustre a ser mencionado no *Sumário Eudeminiano* é Pitágoras, envolto numa névoa de tal misticismo por seus seguidores que pouco se sabe sobre ele com algum grau de certeza. Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egéia de Samos, leste do mar Egeu. Fala-se também na possibilidade de ter sido discípulo de Tales, já que era apenas cinquenta anos mais novo que este e morava próximo à Mileto.

Segundo BOYER (1974), várias bibliografias de Pitágoras foram escritas na Antiguidade, mas se perderam. É difícil separar história e lenda no que se refere a Pitágoras, pois ele representa tantas coisas para o povo - filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijão, santo profeta, milagreiro, mágico, charlatão. Que foi uma das figuras mais influentes é difícil negar. Pois seus seguidores, seja iludidos, seja inspirados espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego.

Para KAHN (2007) as principais fontes sobre Pitágoras são as obras de Diógenes Laércio, Porfírio e Jâmblico. Ainda segundo KAHN, a obra moderna mais fundamental sobre o assunto foi "Tradição e Ciência no Antigo Pitagorismo", escrito por Walter Burkert[1] em 1962, que relata o quão radicalmente a descrição tradicional da doutrina pitagórica foi alterada ou inventada pelos seguidores imediatos de Platão.

KAHN cita que na literatura da antiguidade, Pitágoras é tido como o fundador da Matemática, da Música, da Astronomia e da Filosofia. Nas palavras de Jâmblico, ele foi o "príncipe" e pai da filosofia divina (Kanh, 2007). Mas nem todos o aprovavam, nas palavras de Heráclito, "seu saber é grande, mas sua sabedoria é fraudulenta" (HERÁCLITO, apud KAHN, 2007).

[1]Estudou a cosmologia e filosofia de Pitágoras, relatados por Aristóteles até os tempos de Filolau, em meados e fim do século V (KAHN, 2007).

1.2 A formação da escola pitagórica

Pitágoras adquiriu suas habilidades matemáticas em suas viagens pelo mundo antigo. Algumas histórias tetam nos fazer crer que Pitágoras teria ido até a Índia e a Inglaterra, porém o mais certo é que ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e babilônios. Esses povos antigos tinham ido além da simples contagem e eram capazes de cálculos complexos que lhes permitiam criar sistemas de contabilidade sofisticados. De fato os dois povos viam a Matemática como uma ferramenta para resolver problemas práticos. A motivação que conduziu à descoberta de algumas leis básicas da Geometria era a necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do rio Nilo. Observou-se que os egípcios e babilônios faziam seus cálculos na forma de uma receita que podia ser seguida cegamente. Tais receitas passadas de geração a geração sempre produziam a resposta correta, e assim ninguém se preocupava em examinar, ou questionar, a lógica subjacente daquelas equações. O importante para essas civilizações era que os cálculos davam certo. Por que davam certo era irrelevante.

Depois de vinte anos de viagens, Pitágoras tinha assimilado todo o conhecimento matemático do mundo conhecido. Então ele velejou para seu lar, a ilha de Samos, no mar Egeu, com o propósito de fundar uma escola devotada ao estudo da filosofia e voltada para a pesquisa da matemática que acabara de conhecer. Queria entender os números e não meramente utilizá-los. Mas, durante sua ausência, o tirano Polícrates tinha transformado a outrora liberal Samos em uma sociedade intolerante e conservadora. Polícrates convidou Pitágoras a fazer parte de sua corte, mas o filósofo percebeu que o objetivo da oferta era meramente silenciá-lo e recusou a honra. Depois deixou a cidade e foi morar em uma caverna, numa parte remota da ilha.

Pitágoras não apreciava o isolamento e acabou subornando um menino para ser seu primeiro aluno. A identidade do garoto é incerta, mas alguns historiadores sugerem que ele também se chamava Pitágoras. Pitágoras, o mestre, pagava ao seu aluno três ébolos para cada aula a que ele comparecia. Logo percebeu que, à medida que as semanas se passavam, a relutância inicial do menino em aprender se transformava em entusiasmo pelo conhecimento. Para testar seu pupilo, Pitágoras fingiu que não podia mais pagar o estudante e que teria de interromper as aulas. Então o menino se ofereceu para pagar por sua educação. O pupilo tornara-se discípulo. Infelizmente este foi o único adepto que Pitágoras conquistou em Samos. Ele chegou a estabelecer temporariamente uma escola conhecida como Semicírculo de Pitágoras, mas suas ideias de reforma social eram inaceitáveis e o filósofo foi obrigado a fugir com sua mãe e seu único discípulo.

Pitágoras partiu para o sul da Itália, que era então parte da Magna Grécia. Ele se estabeleceu em Crotona onde teve a sorte de encontrar o patrono ideal em Milo. Milo era o homem mais rico de Crotona e um dos homens mais fortes de toda história, tratava-se de um homem de proporções hercúleas, que fora doze vezes campeão nos jogos olímpicos. Além de sua capacidade como atleta, Milo também apreciava e estudava a Filosofia e a Matemática. Ele cedeu uma parte de sua casa para que Pitágoras estabelecesse sua escola. Seguro em seu novo lar, Pitágoras fundou a Irmandade Pitagórica - um grupo de cerca de seiscentos seguidores, capazes não apenas de entender seus ensinamentos, mas também de contribuir criando ideias novas e demonstrações (SINGH, 2000).

2 Principais contribuições atribuídas à escola pitagórica

2.1 O raciocínio postulacional e a matemática demonstrativa

A Idade do Ferro que se anunciava trazia consigo mudanças abrangentes. O surgimento de uma nova civiliação se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Cilícia e no litoral da Itália. A visão estática do Oriente antigo tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como* e *porquê*.

Pela primeira vez em matemática o homem começou a formular questões como

- *por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?*
- *por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?*.

Algumas experiências como o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da Matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundametal, passou ao primeiro plano. Assim, a Matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo.

Em Matemática o conceito de prova ou demonstração é muito mais rigoroso e poderoso do que o que usamos em nosso dia a dia e até mesmo mais preciso do que o conceito de prova em outras ciências.

A diferença entre prova científica e prova matemática é ao mesmo tempo sutil e profunda. Ela é crucial para que possamos entender o trabalho de cada matemático, desde Pitágoras.

A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão.

Segundo LIMA (Números e Funções Reais, 2013), na apresentação de uma teoria matemática, toda definição faz uso de termos específicos, os quais foram definidos usando outros termos, e assim sucessivamente. Este processo iterativo leva a três possibilidades:

a) Continua indefinidamente, cada definição dependendo de outras anteriores, sem nunca chegar ao fim.

b) Conduz a uma circularidade, como nos dicionários.

c) Termina numa palavra, ou num conjunto de palavras que não são definidas, isto é, que são tomadas como representativas de conceitos primitivos. Exemplos: ponto, reta, conjunto.

Evidentemente, as alternativas a) e b) não convém à Matemática. A alternativa c) é a adotada.

Para podermos empregar os conceitos primitivos adequadamente, é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Tais princípios são chamados *axiomas* ou *postulados*. Assim como os conceitos primitivos são objetos que não se definem, os postulados são proposições que não se demonstram.

Uma vez feita a lista dos conceitos primitivos e enunciados os postulados de uma teoria matemática, todas as demais noções devem ser definidas e as afirmações seguintes devem ser demonstradas. Nisto consiste o *método postulacional ou axiomático*.

As proposições a serem demonstradas chamam-se *teoremas* e suas consequências imediatas são denominadas *corolários*. Uma proposição auxiliar, usada na demonstração de um teorema, é chamada um *lema*.

Segundo EVES (2004), em algum momento entre Tales, 600 a.C., e Euclides, 300 a.C., concluiu-se a noção de discurso lógico. O *método postulacional ou axiomático* tornou-se a verdadeira essência da matemática moderna e grande parte do desenvolvimento da geometria, segundo esse modelo, deve-se aos pitagóricos. Sem dúvida uma das maiores contribuições dos gregos primitivos foi o desenvolvimento desse método de raciocínio postulacional.

A Escola Pitagórica revigorou a matemática com sua busca zelosa pela verdade através da demostração matemática.

2.2 A aritmética pitagórica

Para DOMINGUES (1991), não resta dúvida de que os pitagóricos viam o papel dos números no mundo de uma maneira muito especial. Daí não ser surpresa que a aritmética teórica tenha nascido entre eles. Como a escola tratava a Matemática de uma maneira muito filosófica e abstrata, desvinculada das exigências da vida prática, era natural que separassem o estudo teórico dos números, que chamavam "aritmética", dos cálculos práticos, que denominavam "logística", preocupando-se apenas com o primeiro desses aspectos.

2.2.1 Os números pares e ímpares

Ainda segundo DOMINGUES, aos pitagóricos deve-se a distinção entre números pares e ímpares. Os seguintes teoremas, entre outros, eram conhecidos por eles:

- A soma de dois números pares é par;
- O produto de dois números ímpares é ímpar;
- Quando um número ímpar divide um número par, também divide sua metade.

2.2.2 Os números amigáveis

Segundo EVES (2004), Jâmblico, um influente filósofo neoplatônico que viveu por volta de 320 d.C., atribui a Pitágoras a descoberta dos números amigáveis.

Definição 2.1. *Dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual a soma dos divisores próprios*[1] *do outro.*

Por exemplo, 284 e 220 (par atribuído a Pitágoras), são amigáveis por que os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 cuja soma é 284, ao passo que os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142 cuja soma é 220.

Esse par de números alcançou uma aura mística, e rezava a superstição posterior que dois talismãs com esses números selariam uma amizade perfeita entre os que os usassem.

Parece que nenhum novo par de números amigáveis foi descoberto até que o grande especialista francês em Teoria dos Números Pierre de Fermat anunciou em 1636 um novo par formado por 17296 e 18416. Estabeleceu-se recentemente, porém, que se tratava de uma redescoberta e que esse par fora encontrado antes pelo árabe al-Banna (1256 - 1321) no fim do século XIII ou começo do século XIV, talvez usando a fórmula do árabe Tâbit ibn Qorra.

Tâbit ibn Qorra (826 - 901) inventou a seguinte regra para determinação de números amigáveis:

Teorema 2.1. *Se* $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *são três primos ímpares, então* $2^n pq$ *e* $2^n r$ *formam um par de números amigáveis.*

[1] Os *divisores próprios* de um número positivo N são todos os divisores positivos de N exceto o próprio N

Dois anos após a participação de Fermat, o matemático e filósofo francês René Descartes deu um terceiro par. Um estudo sistemático dos números amigáveis foi empreendido pelo matemático suíço Leonhard Euler que, em 1747, deu uma lista de trinta pares, ampliada por ele mais tarde para mais de sessenta.

2.2.3 Os números perfeitos, deficientes e abundantes

Também se atribuem aos pitagóricos os *números perfeitos, deficientes e abundantes*(EVES, 2004).

Definição 2.2. *Número perfeito é aquele número cuja soma dos divisores próprios resultam no próprio número.*

É o caso dos números 6 e 28.

Divisores próprios de 6 são: 1, 2 e 3 , somando $1 + 2 + 3 = 6$.

Divisores próprios de 28 são: 1, 2, 4, 7 e 14 , somando $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Definição 2.3. *Um número é deficiente se a soma de seus divisores próprios é menor que o próprio número.*

É o caso, por exemplo do número 15.

Divisores próprios de 15 são: 1, 3 e 5, somando $1 + 3 + 5 = 9 < 15$.

Definição 2.4. *Um número é abundante se a soma de seus divisores próprios é maior do que ele mesmo.*

É o caso, por exemplo, do número 12.

Divisores próprios de 12 são: 1, 2, 3, 4 e 6 , somando $1+2+3+4+6 = 16 > 12$.

À medida que os números inteiros se tornam maiores, a tarefa de encontrar números perfeitos se torna mais difícil. Até 1952, conheciam-se apenas doze números perfeitos, todos pares, dos quais os três primeiros são 6, 28 e 496.

Pitágoras era fascinado pelos números perfeitos, mas ele não se contentava em meramente colecionar esses números especiais, ele queria descobrir seu significado mais profundo. Uma de suas descobertas foi que a perfeição estava associada ao número 2.

Os números $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, etc. são conhecidos como potências de 2 e podem ser escritos como 2^n, onde n é natural. Todas estas potências chegam perto, mas falham em ser números perfeitos, porque a soma de seus divisores é sempre uma unidade menor do que o próprio número. Isso os torna apenas levemente imperfeitos:

$$2^2 = 4 \qquad Divisores \;\; 1, 2 \qquad Soma = 3$$
$$2^3 = 8 \qquad Divisores \;\; 1, 2, 4 \qquad Soma = 7$$
$$2^4 = 16 \qquad Divisores \;\; 1, 2, 4, 8 \qquad Soma = 15$$
$$2^5 = 32 \qquad Divisores \;\; 1, 2, 4, 8, 16 \qquad Soma = 31$$

A última proposição do livro IX dos *Elementos* de Euclides prova que se $2^n - 1$ é um número primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito.

Os números perfeitos dados pela fórmula de Euclides são números pares, e Euler provou que todo número perfeito par tem essa forma. A existência ou não de números perfeitos ímpares é uma das célebres questões abertas da Teoria dos Números.

2.2.4 Os números figurados

Na época de Pitágoras ainda se contava através do uso de pedrinhas ou de marcas de pontos na areia. Por outro lado eram os pitagóricos observadores atentos das formas geométricas.

Segundo EVES (2004), parece haver uma concordância universal quanto a que os *números figurados* se originaram com os membros mais antigos da escola. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a Geometria e a Aritmética.

- **Números Triangulares**

  Os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... são chamados *triangulares* porque correspondem à distribuição de pontos num plano na forma de triângulos, do seguinte modo:

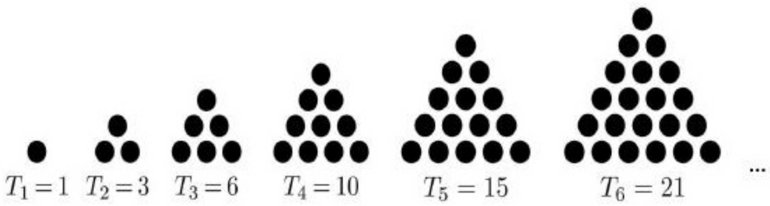


Figura 2.1: Números Triangulares

Se indicarmos por T_n o enésimo número triangular, vale a fórmula:

$$T_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

- **Números Quadrados**

Os números que resultam de dispor pontos num plano de modo a formar quadrados, conforme a figura 2.2, chamam-se *números quadrados*:

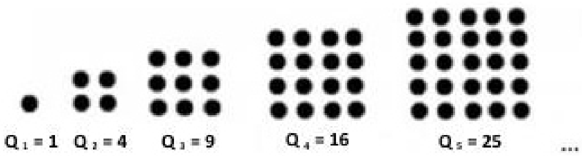


Figura 2.2: Números Quadrados

Muitos resultados interessantes sobre números figurados podem ser obtidos de maneira puramente geométrica e informal. Indicando por Q_n o enésimo número quadrado e dividindo seus pontos, como na figura 2.3, observa-se que

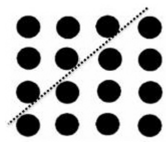


Figura 2.3:

$$Q_n = T_{n-1} + T_n = \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(2n) = n^2.$$

Para passar de um número quadrado a outro os pitagóricos procediam segundo o esquema da figura 2.4

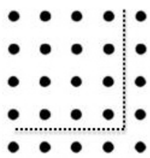


Figura 2.4:

donde

$$Q_n + (2n+1) = Q_{(n+1)} \Rightarrow n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Outra propriedade interessante dos números quadrados é

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

de acordo com a Figura 2.5.

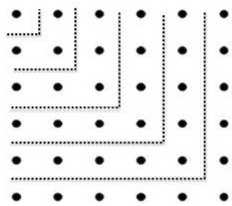


Figura 2.5:

- **Números Pentagonais**

Os números que resultam de dispor pontos num plano de modo a formar pentágonos, conforme a figura 2.6, chamam-se *números pentagonais*:

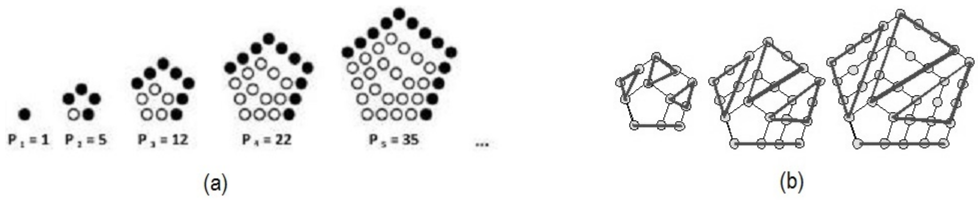


Figura 2.6:

O enésimo número pentagonal, P_n, é dado pela soma dos termos da PA

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2} = n + \frac{3n(n-1)}{2} = n + 3T_{(n-1)}.$$

(Resultado que pode ser observado na Figura 2.6b)

- **Números Hexagonais**

Os números que resultam de dispor pontos num plano de modo a formar hexágonos, conforme a figura 2.7, chamam-se *números hexagonais*:

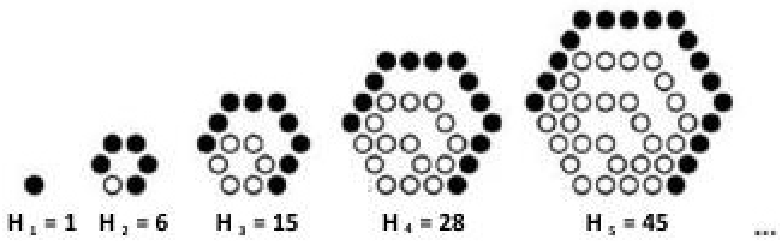


Figura 2.7: Números Hexagonais

No caso dos números hexagonais, o enésimo número hexagonal H_n é dado pela soma

$$H_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + [4(n-1)+1] = \frac{(1+4n-3)\cdot n}{2} = 2n^2 - n.$$

2.2.5 Os números primos

Definição 2.5. *Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de* ***número primo****. (HEFEZ, 2013)*

Segundo MELO (2014), é possível que os primeiros estudos sobre os números primos venham da Escola Pitagórica, que já compreendia a ideia de primalidade e estudava os números perfeitos e os números amigáveis. Os números primos eram chamados por eles de lineares, por serem representados por pontos agrupados em linha. Já os números não-primos poderiam ser representados por pontos formando retângulos, dando a ideia de que os números lineares (primos) seriam os geradores desses outros.

Outro fato chamativo era que, para os pitagóricos, o número dois não era considerado um número primo. Para eles, o número um e o número dois não seriam números verdadeiros, mas geradores de números ímpares e pares.

Quando *Os Elementos* de Euclides apareceram já muitos dos resultados importantes sobre números primos tinham sido provados.

Quantos serão os números primos? Essa pergunta foi respondida por Euclides no livro IX dos *Elementos*.

Utilizaremos a mesma prova dada por Euclides, onde pela primeira vez se registra o uso de uma demonstração por redução ao absurdo em matemática (HEFEZ, 2013).

Teorema 2.2. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração de Euclides

Suponha que exista apenas um número finito de números primos $p_1, \cdots, p_r$. Considere o número natural

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1.$$

Pelo teorema fundamental da aritmética[2], o número n possui um fator primo p que, portanto, deve ser um dos $p_1, \cdots, p_r$., e consequentemente, divide o produto $p_1 p_2 \cdots p_r$. Mas isso implica que p divide 1, o que é absurdo. □

2.3 O Teorema de Pitágoras

Para EVES (2004), a tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome.

Teorema 2.3. *O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.*

SINGH (2000) cita que o teorema de Pitágoras fora impresso em milhões, se não bilhões, de mentes humanas. É o teorema que toda criança inocente deve aprender. Esse teorema já era conhecido pelos chineses e babilônios, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras.

Alguns historiadores discordam da confiabilidade da atribuição de que Pitágoras tenha realizado a demonstração do teorema. É que Plutarco (I d.C.), que é a fonte histórica mais antiga, ao mencionar que Pitágoras tenha realizado tal feito, sacrificou um touro para comemorar (KAHN, 2007), ato que contrariava os princípios de respeito aos animais não-humanos que ele pregava.

2.3.1 Possível demonstração de Pitágoras

Muitas conjecturas têm sido feitas quanto à demonstração que Pitágoras poderia ter dado, mas ao que parece foi uma demonstração por decomposição como a que se segue, ilustrada na Figura 2.8.

Dado um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, consideremos os dois quadrados da figura 2.8, cada um de lados iguais a $a + b$. O primeiro

[2]Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como produto de números primos (HEFEZ, 2013, p. 141).

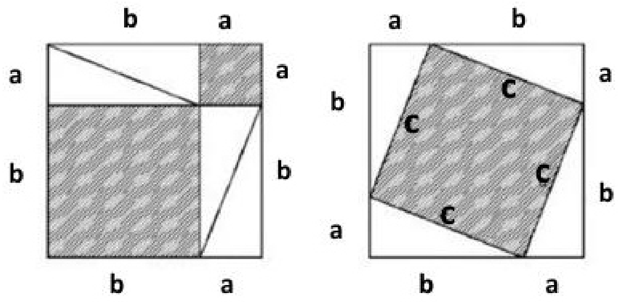


Figura 2.8:

quadrado está decomposto em seis partes - a saber, os dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado.

O segundo quadrado está decomposto em cinco partes - a saber, o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado.

Subtraindo-se as parte iguais em ambas as figuras, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados sobre os catetos.

Para provar que a parte central da segunda decomposição é efetivamente um quadrado de lado c, precisamos usar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a $180°$.

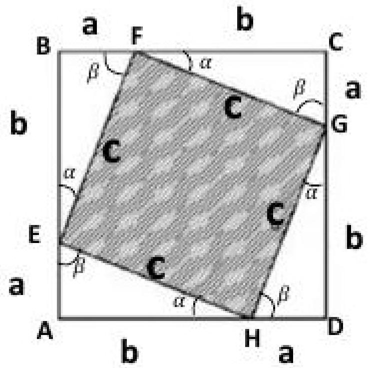


Figura 2.9:

De fato, baseado na figura 2.9, como consequência das congruências, temos $\angle FEB \equiv \angle GFC \equiv \angle DGH \equiv \angle EHA$, cuja medida representaremos por α; além disso, $\angle HEA \equiv \angle EFB \equiv \angle FGC \equiv \angle GHD$, cuja medida representaremos por β. Como os triângulos HAE, EBF, FCG e GDH são triângulos retângulos, temos:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

EVES (2004) cita que o *Sumário Eudeminiano* atribui esse teorema sobre triângulos em geral aos pitagóricos. E como uma demosntração desse teorema requer, por sua vez, o conhecimento de certas propriedades sobre retas paralelas, credita-se também aos pitagóricos o desenvolvimento dessa teoria.

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos), durante 20 anos colecionou demonstrações desse teorema, organizou num livro, ao qual chamou "The Pythagorean Proposition" (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. Algumas recebem até nomes: a mais bela prova, a prova mais curta, a demonstração do presidente, etc.

2.3.2 Outras demonstrações do teorema de Pitágoras

▶ **A prova mais curta do Teorema de Pitágoras**

Dado o triângulo ABC, retângulo em A (Figura 2.10), a altura AD (perpendicular a BC), relativa à hipotenusa, origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos ($B\hat{A}D = \hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, $C\hat{A}D = \hat{B}$, complemento de $\hat{C}$). Portanto, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{n}{c}$$
$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

As expressões acima fornecem $c^2 = an$ e $b^2 = am$. Adicionando-as membro a membro, obtemos $b^2 + c^2 = am + na = a(m+n) = a \cdot a = a^2$

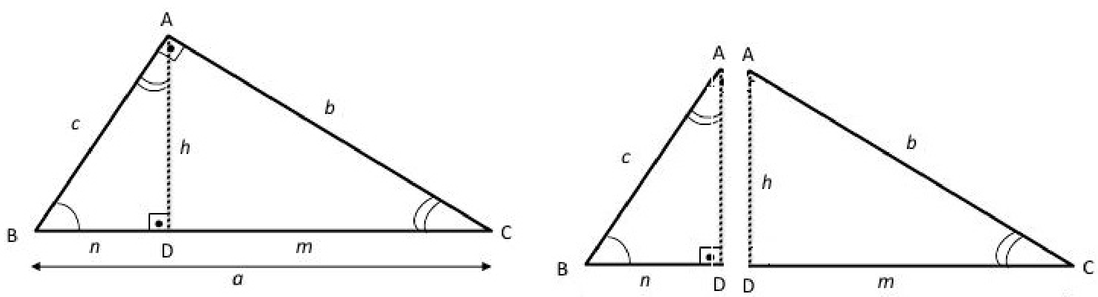


Figura 2.10:

▶ **A demonstração de Henry Perigal**

Segundo LIMA *et al.*(Temas e problemas elementares, 2013), Henry Perigal publicou em 1873 a demonstração que se pode apreciar na Figura 2.11. Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenche o quadrado construído sobre a hipotenusa.

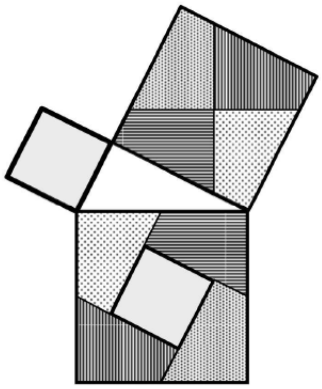


Figura 2.11:

Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Vamos provar que o quadrado Q_2 é realmente congruente com o quadrado Q_1, baseado na Figura 2.12.

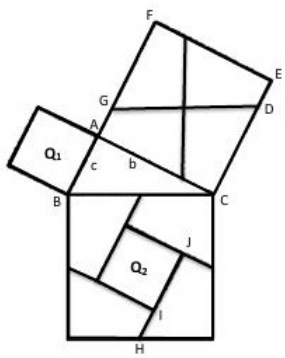


Figura 2.12:

Sejam $AC = b$ e $AB = c$ os lados dos quadrados construídos sobre os catetos. Como as quatro peças interiores ao quadrado $ACEF$ são congruentes, façamos $AG = DE = x$.

Sendo $BCDG$ um paralelogramo, $BG = CD$, ou seja, $c+x = b-x \Rightarrow c = b-2x$. Como $HJ = GF = CD$ e $HI = DE$, temos $IJ = HJ-HI = b-x-x = b-2x = c$. Portanto $Q_1 \equiv Q_2$, como queríamos demonstrar. $\square$

2.3.3 A recíproca do teorema de Pitágoras

Os antigos egípcios faziam uso de uma corda com treze nós, igualmente espaçados, de modo a determinar um ângulo reto (Figura 2.13). Ao avaliarmos o emprego da corda de treze nós, fica claro que os egípcios também sabiam que um triângulo de lados 3, 4 e 5 possui um ângulo de 90°. Certamente eles já conheciam o Teorema de Pitágoras e sua recíproca. Segundo LIMA *et al.*(Temas e Problemas Elementares, 2013), o Teorema de Pitágoras já era conhecido na China cerca de 600 anos antes de Pitágoras e há provas concretas de que os babilônios antigos também conheciam esse teorema. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados, e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322, está na Universidade de Columbia. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos.

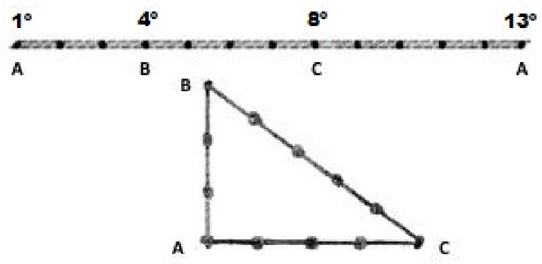


Figura 2.13: Modelo da corda de 13 nós dos antigos egípcios

Na verdade, tanto egípcios como chineses e babilônios conheciam e utilizavam na prática a recíproca do teorema de Pitágoras, que diz:

Teorema 2.4. *Se a, b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$, o triângulo de lados a, b e c é retângulo.*

Demonstração

Consideremos o triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ (Figura 2.14).

1° **caso**: $A < 90°$

Imaginemos que $b \leqslant c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.

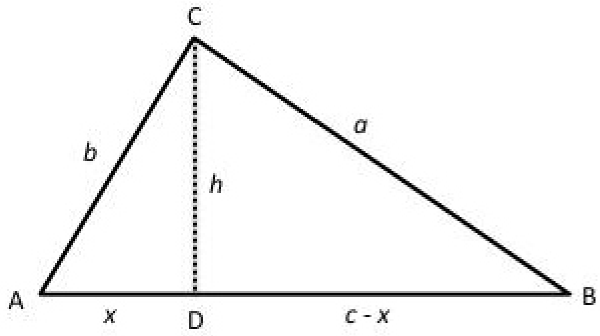


Figura 2.14:

Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$.

Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$.

2° **caso**: $A > 90^\circ$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB.

Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$, ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$.

Demonstramos então que em um triângulo ABC, de lados a, b e c,

$$A = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$A < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Para WAGNER (2011), é importante que desde cedo o aluno conheça a diferença entre uma proposição e a sua recíproca.

2.3.4 Os ternos pitagóricos

Segundo SINGH (2000), um dos rejeitados a ingressar na Irmandade Pitagórica foi um candidato chamado Cilon que ficou furioso com sua humilhação e rejeição, e vinte anos depois ele se vingou. Durante a sexagésima Olimpíada (510 a.C.) houve uma revolta na cidade de Síbares. Telis, o líder vitorioso na revolta, começou uma bárbara campanha de perseguição contra os partidários do governo anterior, o que levou muitos deles a buscarem refúgio em Crotona. Telis exigiu que os traidores fossem mandados de volta para receberem sua punição em Síbares. Mas Milo e Pitágoras convenceram os cidadãos de Crotona a enfrentar o tirano e protegerem os refugiados. Telis ficou furioso e imediatamente reuniu um exército de 300 mil homens e marchou sobre Crotona. Milo defendu a cidade com 100 mil cidadãos armados. Depois de setenta dias de guerra, a liderança superior de Milo levou-o à vitória.

Apesar do fim da guerra, a cidade de Crotona ainda estava tomada pela agitação devido às discussões sobre o que deveria ser feito com os espólios da guerra. Temendo que as terras seriam dadas para a elite pitagórica, o povo de Crotona começou a protestar. Já havia um certo ressentimento entre as massas porque a Irmandade continuava a ocultar suas descobertas, mas nada aconteceu até que Cilon surgiu como porta-voz do povo. Ele alimentou os temores, a paranoia e a inveja da multidão, liderando-a num ataque para destruir a mais brilhante escola de matemática que o mundo já vira. A casa de Milo e a escola adjascente foram cercadas, todas as portas trancadas e bloqueadas para que ninguém escapasse, e então o incêndio começou. Milo abriu caminho e escapou, mas Pitágoras morreu com muitos de seus discípulos.

Depois da morte de seu fundador, a Irmandade deixou Crotona. Mas as perseguições continuaram e muitos membros tiveram que se refugiar no estrangeiro. Esta emigração forçada encorajou os pitagóricos a espalharem seu credo matemático pelo mundo antigo. Os discípulos de Pitágoras estabeleceram novas escolas e ensinaram aos seus alunos os métodos da prova lógica. Além de ensinarem sua prova do teorema de Pitágoras, eles também explicaram ao mundo o segredo de encontrar os ternos pitagóricos que consiste em encontrar inteiros a, b e c que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo de tal modo que $a^2 + b^2 = c^2$. Por exemplo, $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ formam um terno pitagórico já que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Credita-se aos pitagóricos a fórmula

$$m^2 + (\frac{m^2-1}{2})^2 = (\frac{m^2+1}{2})^2,$$

na qual o terno ordenado $(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2})$, para todo m ímpar, constitui um terno pitagórico.

Talvez observando o gnômon (pontos à direita e acima do ângulo reto traçado na Figura 2.15) que fecha o número n^2 tem $2n + 1$ pontos e que este número representa dois lados de um quadrado.

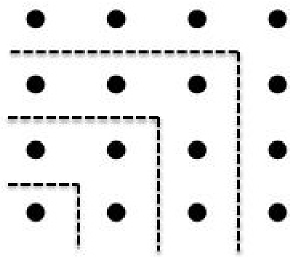


Figura 2.15:

Os pitagóricos devem ter experimentado fazer $2n + 1 = m^2$ (o que implica m ímpar, pois se o quadrado de um número é ímpar, o próprio número também o é).

Daí segue que
$$n = \frac{m^2 - 1}{2}$$
e portanto:
$$n + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}.$$

Como $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, então:
$$(\frac{m^2 + 1}{2})^2 = (\frac{m^2 - 1}{2})^2 + (m^2 - 1) + 1.$$
Donde
$$m^2 + (\frac{m^2 - 1}{2})^2 = (\frac{m^2 + 1}{2})^2.$$

2.4 Outros conhecimentos associados ao teorema de Pitágoras

2.4.1 Generalização do teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Vamos imaginar figuras *semelhantes* quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

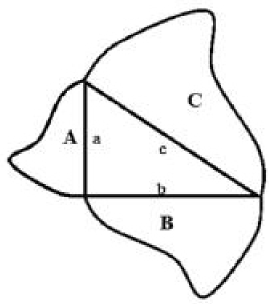


Figura 2.16:

Sejam C, A e B as áreas de figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a e b de um triângulo retângulo como da Figura 2.16.

Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então:

$$\frac{C}{B} = (\frac{c}{b})^2 \Rightarrow \frac{C}{c^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{B} = (\frac{a}{b})^2 \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

Portanto,

$$\frac{C}{c^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{A}{a^2}$$

Pela propriedade das proporções, sendo $c^2 = a^2 + b^2$, concluímos que $C = A + B$.

Isto significa que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, *a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.*

2.4.2 Do Teorema de Pitágoras ao último Teorema de Fermat

O Teorema de Pitágoras e sua infinidade de ternos foram abordados no livro *O último Problema*, de Eric T. Bell, que despertou a atenção de um jovem inglês chamado Andrew Wilis. Embora a Irmandade tivesse conseguido um entendimento quase completo dos ternos pitagóricos, Wilis logo descobriria que a equação $a^2 + b^2 = c^2$, aparentemente inocente, tinha um lado negro, isto é, que no caso mais geral, citado abaixo, ainda não tinha sido demonstrada e que havia desafiado as mentes mais brilhantes da Matemática, como por exemplo, Leonhard Euler.

Na equação de Pitágoras os três números, a, b e c são todos elevados ao quadrado

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Contudo, o livro descrevia uma equação parecida na qual a, b e c são elevados ao cubo

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

Encontrar números inteiros que satisfaçam a equação cúbica parece impossível.

Na equação original, "ao quadrado", o desafio era arrumar os ladrilhos de dois quadados e formar um terceiro quadrado maior conforme a Figura 2.17.

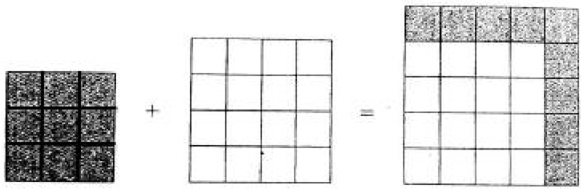


Figura 2.17:

Na versão "ao cubo" o desafio é rearrumar dois cubos formados por "cubinhos menores", para formar um terceiro cubo, maior. O mais próximo que alguém já chegou de um arranjo perfeito foi aquele em que falta ou sobra um cubinho (exemplo, Figura 2.18).

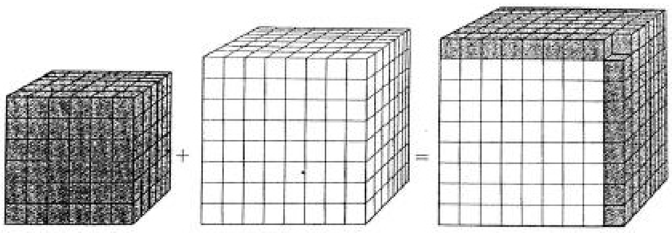


Figura 2.18: mostrando que $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1 \Rightarrow 216 + 512 = 729 - 1$

Além disso, se a potência mudar de 3 (cubo) para qualquer outro número mais alto n, então a descoberta de uma solução se torna igualmente impossível.

Pierre de Fermat nascido em 20 de agosto de 1601, na cidade de Beaumont-de-Lomagne, no sudoeste da França, era um verdadeiro estudioso amador de matemática. Enquanto estudava o Livro II da *Aritmética*, Fermat encontrou toda uma série de observações, problemas e soluções relacionadas com o Teorema de Pitágoras e os ternos pitagóricos. Ele ficou impressionado com a variedade e a quantidade de ternos pitagóricos e estava ciente de que, séculos atrás, Euclides tinha feito uma demonstração provando que, de fato, existe um número infinito de ternos pitagóricos.

O último teorema de Fermat, como é conhecido, declara que

$$a^n + b^n = c^n$$

não tem solução no campo dos números inteiros para n maior do que 2.

Na margem de sua *Aritmética*, ao lado do problema 8, Fermat escreveu uma nota de sua observação:

> *"É impossível para um cubo ser escrito como soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevado a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes."*

Depois dessa nota na margem, esboçando sua teoria, Fermat colocou um comentário adicional que iria assombrar gerações de matemáticos:

> *"Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la."*

Suas próprias palavras sugerem que ele estava satisfeito com sua demonstração mas não se daria ao incômodo de escrevê-la, quanto mais publicá-la, como, de fato, nunca o fez.

Em 23 de junho de 1993, em uma Conferência no Instituto de Matemática Isaac Newton em Cambridge, Andrew Wiles, passados 356 anos desde a apresentação do teorema, faz o anúncio da descoberta de sua demonstração. Infelizmente havia uma pequena falha, Wiles então se afasta por mais um ano, a fim de corrigir o erro e apresentar a nova demonstração reformulada. Após a correção do erro detectado, foram necessários mais alguns meses para a apreciação da demonstração, que possuía cerca de 200 páginas, e após um período de suspense, em 1995 a demonstração é finalmente aceita, sendo porém tão técnica que apenas alguns poucos no mundo inteiro eram capazes de compreendê-la.

2.4.3 O teorema de Pitágoras em sala de aula

O grande desafio dos educadores é tornar a Matemática mais atrativa e interessante e fazer com que os alunos despertem o interesse em busca do conhecimento. Semelhantemente, é desafiador formar cidadãos autônomos, com capacidade de pensar, raciocinar, resolver problemas, cidadãos que, através dos conhecimentos matemáticos, possam entender a realidade que os cerca e transformá-la de forma positiva.

O livro didático é a principal ferramenta utilizada pelo professor no seu planejamento de aula, exercendo um papel muito importante no processo de ensino-aprendizagem. Por esse motivo, o professor deve dispor de vários livros de qualidade, que se adequem à realidade cognitiva e cultural de seus alunos. Sabemos que, muitas vezes, por falta de tempo para ler e pesquisar, o professor acaba utilizando o livro que a escola, quando pública, escolhe por meio do PNLD - Programa Nacional do Livro Didático.

A maior parte dos livros didáticos de matemática abordam o assunto "Teorema de Pitágoras" estritamente prático, com pouquíssima contextualização histórica e trazem, quase sempre, uma única demonstração, por meio de semelhança de triângulos.

Uma proposta na apresentação deste tema, a fim de mostrar maneiras diferentes de aprender e ensinar matemática, seria:

- fazer uma apresentação histórica a respeito do triângulo retângulo e do personagem Pitágoras de Samos;
- fazer algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, utilizando-se também de recursos visuais como um software geométrico, audio-visuais e material concreto, como por exemplo, a demonstração de Perigal, vista na seção 2.3.2, na forma de quebra-cabeça;
- resolver e propor exercícios com aplicações no dia a dia, fazendo uso da interdisciplinaridade, e que tenham alguma significação para o aluno, com o objetivo de estimular o aprendizado e despertar o interesse;
- familiarizar o aluno com o Teorema de Pitágoras através de metodologias diferenciadas, propondo atividades lúdicas como, por exemplo, dinâmicas de grupo e jogos interativos.

Tudo isso tendo em vista a importância e necessidade de diversificarem-se os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula de matemática, conforme enfatizam os Parâmetros Curriculares Nacionais.

> *"É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução". (BRASIL, 1998, p.42)*

2.5 A descoberta das grandezas irracionais

Os números mais simples são os inteiros positivos: 1, 2, 3, etc, usados para contar. Mas as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, que levaram à introdução de frações como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, etc. Definindo-se, assim, um *número racional* como o quociente $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, de dois números inteiros, o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações.

Podemos pensar nos números naturais como representados por pontos de uma reta (Figura 2.19), cada ponto separado do anterior por uma unidade de comprimento.

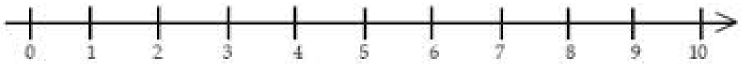


Figura 2.19:

Podemos representar os números racionais na mesma reta (Figura 2.20) e pensar neles como medindo frações de comprimento.

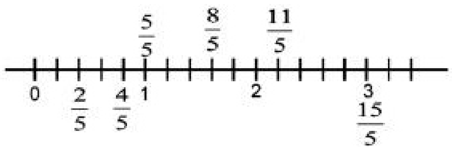
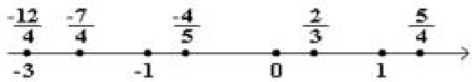


Figura 2.20:

No início dos tempos modernos, algebristas italianos inventaram os números negativos que também podem ser representados na reta.



As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes. Então para cada número racional, há um ponto da reta. Para os primeiros matemáticos parecia evidente que todos os pontos da reta seriam usados dessa maneira. Deve ter sido um choque descobrir que há pontos da reta que não correspondem a nenhum número racional. Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos.

Uma enorme crise, que abalou os alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, toda a estrutura da matemática grega, surgiu quando entre os pitagóricos, alguém observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis, isto é, não há nenhum número racional que corresponda ao ponto P da reta no caso em que OP é igual a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade (Figura 2.21).

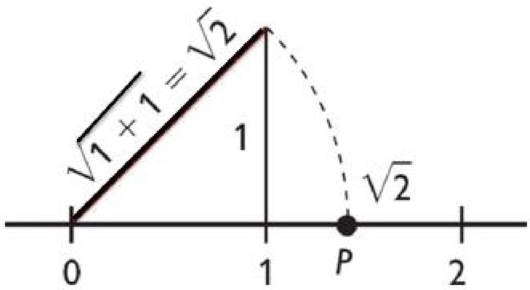


Figura 2.21:

Novos números tiveram que ser inventados para serem associados a esses pontos; e não sendo racionais, vieram a ser chamados *números irracionais*. A descoberta desses números assinala um dos grandes marcos da História da Matemática.

Para provar que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser representado por um número racional, basta provar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um número racional, isto é, que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \;\; \Rightarrow \;\; m = n\sqrt{2} \;\; \Rightarrow \;\; m^2 = 2n^2.$$

Mas esta última igualdade é absurda, pois na decomposição de m^2 em fatores primos o expoente do fator 2 é par enquanto que em $2n^2$ é ímpar.

Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (c. 425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais. Por volta de 370 a.C., o "escândalo" fora resolvido por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção. O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos *Elementos* de Euclides, essencialmene coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872.

2.5.1 Os números irracionais em sala de aula

É realmente necessário ensinar os números irracionais na Educação Básica?

O ensino dos números irracionais é essencial nas últimas séries do nível fundamental e no ensino médio, porque é preciso construir o conjunto dos números reais a fim de poder prosseguir com o estudo da Matemática. Não há como introduzir o tema das funções e dos seus gráficos, sem passar pela identificação do conjunto numérico dos reais com a reta geométrica; não há como fazer geometria, trigonometria ou logaritmos, progressões geométricas ou matemática financeira, sem reconhecer os irracionais.

Tratar este assunto nos níveis fundamental e médio, certamente, não é muito fácil para os alunos, por apresentar um certo grau de abstração. Porém as dificuldades em compreender e conceituar adequadamente o conjunto dos números irracionais, infelizmente, também atinge parte dos professores.

Um estudo realizado por BOFF (2008) com cerca de 130 professores da rede estadual de ensino de Foz do Iguaçú e Região exemplifica a situação.

BOFF (2008) relata que alguns professores afirmaram que $\frac{2}{7}$ é um número irracional, pois quando fazem a divisão na calculadora resulta em 0,285714... "e como os decimais não se repetem, dois sétimos é irracional".

Um estudo realizado por COSTA (2008), também em Foz do Iguacú e Região, um professor diante da afirmacão: "quaisquer que sejam os números irracionais α e β , pode-se concluir que $\alpha + \beta$ é irracional", justificou que a afirmativa não é verdadeira, pois: "$\sqrt{2} + \sqrt{7} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$ finalizando com a contestação: três é racional".

De acordo com COSTA (2008), um professor ofereceu a fração $\frac{9}{14}$ como exemplo de número irracional, ao ser indagado como ele havia chegado a tal conclusão o professor respondeu: "em forma de fração é racional, mas se dividirmos é irracional". Fica nítido que este professor não sabe conceituar, e não entende o significado de número irracional.

Na verdade, o que ocorre na maioria dos cursos de licenciatura em matemática, segundo GOMES (2006), é uma divisão das disciplinas em específicas e pedagógicas. Nas disciplinas ditas de conteúdo específico, temos um ensino baseado na transmissão de conhecimentos (giz ou pincel e quadro negro), no desenvolvimento da habilidade de efetuar demonstrações, esta herdada do formalismo e da influência dos bacharelados. Entretanto as avaliações são efetuadas por meio de provas onde são cobradas resoluções de exercícios padrões, muitos dos quais semelhantes aos solucionados em sala de aula. Segundo os resultados mais recentes oriundos da psicologia cognitiva esta visão é inadequada, e sua existência constitui um problema a ser superado. Torna-se necessário relacionar a teoria e a prática muitas das vezes, tão distante nas discussões das licenciaturas. É preciso criar mecanismos nos cursos de formação que levem o professor formador de professores a ter consciência de que está formando professores para a educação básica.

▸ Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Definimos segmento de reta como o conjunto dos pontos entre dois pontos dados de uma reta, incluindo estes. Vamos indicar a medida ou comprimento do segmento de reta AB por $|AB|$.

Dado um segmento de reta AB, se for possível obter $n-1$ pontos intermediários $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ sobre o segmento AB de tal modo que os n segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}B$ tenham a mesma medida do segmento unitário u ($|u| = 1$), então $|AB| = n$, conforme ilustramos na figura 2.22.

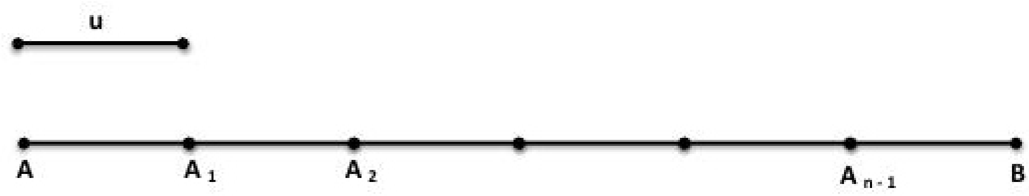


Figura 2.22:

Se o segmento AB não contém u um número exato de vezes, vamos admitir que seja possível encontrar um segmento menor, digamos v, tal que v esteja n vezes contido em u e m vezes contido em AB, com m e n inteiros. Nesse caso, v é um submúltiplo comum de AB e u.

Quando existe esse segmento comum, dizemos que AB e u são segmentos **comensuráveis**.

Como $u = n \cdot v \Rightarrow v = \frac{1}{n} \cdot u \Rightarrow v = \frac{1}{n}$, temos que $|AB| = m \cdot v = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

Sendo m e n números inteiros, $\frac{m}{n}$ é o quociente entre dois inteiros e também é a medida do segmento de reta AB. Dizemos que o resultado desta medição, ou seja, o número que expressa esta medida, é um número **racional**.

Nem sempre porém, escolhida a unidade de comprimento u, o segmento de reta que se quer "medir" e o segmento u são comensuráveis. É o que ocorre quando u é o lado de um quadrado e AB é sua diagonal, conforme já falado.

Dois segmentos de reta não comensuráveis se dizem **incomensuráveis.**

As muitas dificuldades tanto por parte de alunos como de professores é por falta de entender as definições de número racional e irracional.

Podemos listar três maneiras de se definir um número irracional de modo a oferecer, aos alunos e professores, condições de atingir os objetivos.

1ª) Dizemos que um número é irracional quando representa a medida de um segmento incomensurável com a unidade.

2ª) Um número irracional é um número real que não pode ser colocado na forma $\dfrac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros com $n \neq 0$.

3ª) Um número é irracional, se sua representação decimal for infinita e não-periódica (a representação decimal de um número X é um símbolo da forma $X = a_0, a_1a_2a_3a_4...a_n....$)

Alguns livros didáticos apresentam textos atualizados e dão especial cuidado à história dos números, como forma de contextualizar os irracionais. Iniciam com a história da crise da irracionalidade pela qual passaram os gregos na época de Pitágoras. Trabalham o conceito de incomensurabilidade de forma intuitiva, medindo e calculando razões entre seguimentos, entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, relembrando o número pi, e entre o comprimento da diagonal do quadrado e o lado, para chegar à raiz de 2. Utilizam o Teorema de Pitágoras para o cálculo de diagonais, justificando o aparecimento das raízes inexatas. Tratam da história de pi e do Teorema de Pitágoras. Definem finalmente número irracional como números não racionais, aqueles que têm representação infinita e não periódica.

Textos com esta abordagem são bem recentes e sinalizam uma evolução na direção da valorização da história dos números e das questões geométricas que deram origem aos irracionais. Ao mesmo tempo, mostram a preocupação dos autores em explicitar a crise da irracionalidade e convencer os alunos da existência dos números irracionais, recorrendo para isto, ou à noção de incomensurabilidade ou ao cálculo por aproximações sucessivas.

2.6 Identidades algébricas

As identidades algébricas são expressões matemáticas que envolvem as operações fundamentais e algumas funções, as quais são válidas para quaisquer conjuntos de números.

EVES(2004) relata que os gregos antigos idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas, imbuídos da ideia de representações de um número por meio de um comprimento. Atribui-se aos pitagóricos parte considerável dessa álgebra geométrica que se acha espalhada por vários dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides. Assim, o livro II dos *Elementos* contém várias proposições que em realidade são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica. Parece bastante certo que essas proposições tenham sido desenvolvidas pelos primeiros pitagóricos, através de métodos de decomposição.

Dentre essas proposições citamos o hoje conhecido *"quadrado da soma de dois termos"*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Geometricamente, decompondo o quadrado de lado $a+b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2, b^2, ab e ba, como mostra a figura 2.23.

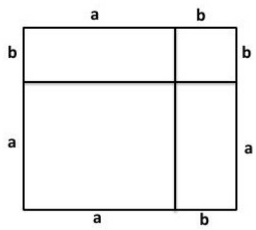


Figura 2.23:

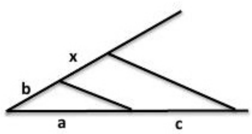
O enunciado de Euclides para essa proposição é: *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual a soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.*

2.7 Resolução geométrica de equações quadráticas

EVES(2004) cita que os gregos, em sua álgebra geométrica, se utilizaram de dois métodos principais para resolver certas equações simples - o **método das proporções** e o **método da aplicação de áreas**. Há indícios de que ambos esses métodos se originaram com os pitagóricos.

O método das proporções permite a construção de um segmento de reta x dado por $a : b = c : x$ ou por $a : x = x : b$, em que a, b, c, são segmentos de reta dados. Isto é, o método das proporções fornece soluções gométricas das equações (Figura 2.24).

$$ax = bc \qquad \text{e} \qquad x^2 = ab.$$



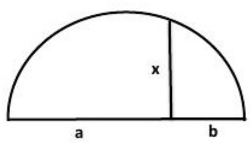


Figura 2.24:

Para explicar o método da aplicação de áreas, considere a Figura 2.25. Segundo BECKER(2004), algumas construções geométricas encontradas no Livro II de *Os Elementos*, tratam da resolução de equações quadráticas.

Para analisar a validade das construções, faremos o uso de conceitos de geometria moderna.

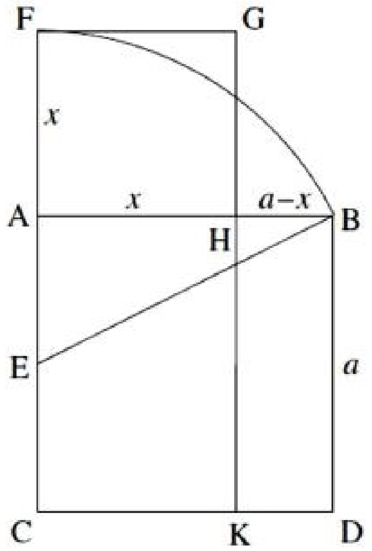


Figura 2.25:

Um dos exemplos de equação que apresentaremos, seguida da construção geométrica que fornece as suas soluções, é a equação quadrática $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Esta equação surge na proposição 11 do Livro II, cujo problema é dividir um segmento AB, de modo que o retângulo sobre o segmento todo e uma das partes, possua a mesma área que o quadrado construído sobre a outra parte do segmento (Fig. 2.25). Ou seja, achar H de modo que $a(a - x) = x^2$. Em outras palavras, achar a raiz positiva x (ou AH) da equação quadrática $x^2 + ax = a^2$.

Na figura, construímos o quadrado ABDC sobre o segmento $AB = a$. Dividimos AC ao meio em E. Traçamos EB e estendemos CA, com centro em E e raio EB traçamos o arco encontrando o ponto F, desta forma EF = EB. Construímos o quadrado FGHA. Então, afirmamos que H é o ponto procurado (de maneira que $x = AH$ é a raiz positiva de $x^2 + ax - a^2 = 0$.)

Sabemos que $AB = a$ e $EA = \dfrac{a}{2}$, pelo Teorema de Pitágoras no ΔAEB:

$$AB^2 + AE^2 = EB^2 \Rightarrow EB^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow EB = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$EB = EF = EA + AF \Rightarrow AF = AH = x = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

Sabemos que a equação quadrática citada anteriormente, possui uma solução negativa. No entanto, Euclides cita apenas a solução positiva em *Os Elementos*, devido ao fato de que para ele não existiam os números negativos, sendo assim a outra solução era considerada "falsa". Sabemos que AF é raiz da equação porque é igual a AH, sendo assim a solução "falsa" ou negativa é dada pelo segmento $CF = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}$.

Além disso, não vamos nos esquecer do problema inicial que impulsionou a resolução da equação quadrática em questão, para Euclides o problema consistia em encontrar um ponto H de modo que as áreas do retângulo $HBDK$ e do quadrado FGHA fossem iguais, mas na verdade o problema recaía em uma equação quadrática. Analisando o pensamento grego, pela visão de Euclides, podemos perceber que as soluções são dadas por segmentos, que possibilitam a construção dos quadriláteros desejados. É provável que Euclides não estava pensando na solução de equações quadráticas, mas sim na solução de um problema envolvendo áreas. Porém, hoje sabemos que estas construções nos possibilitam encontrar as soluções para equações quadráticas. Além disso, esta construção nos permite construir o "número de ouro", basta tomarmos $AB = a = 1$ e assim obter $AH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou seja, a conhecida razão áurea.

2.8 Os poliedros regulares

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces*, onde:

- cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
- é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

  (LIMA *et al.*, A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, 2006).

Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de *interior* desse poliedro. Dizemos que um poliedro é *convexo* se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.

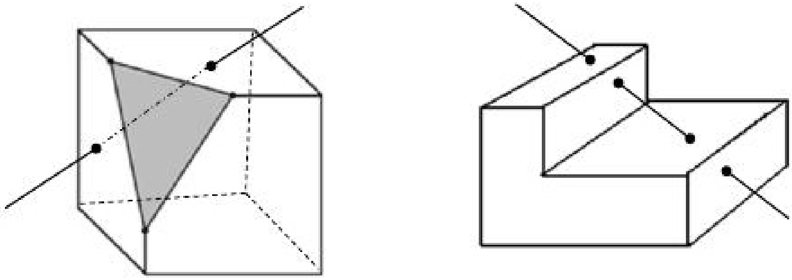


Figura 2.26: Um poliedro convexo e um não convexo.

"Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas"(LIMA *et al.*, A Matemática do Ensino Médio, vol. 2).

Segundo EVES (2004), os poliedros regulares são designados de acordo com o número de faces que possuem. Assim, há o tetraedro com quatro faces triangulares, o hexaedro, ou cubo, com seis faces quadradas, o octaedro com oito faces triangulares, o dodecaedro com doze faces pentagonais e o icosaedro com vinte faces triangulares (Figura 2.27).

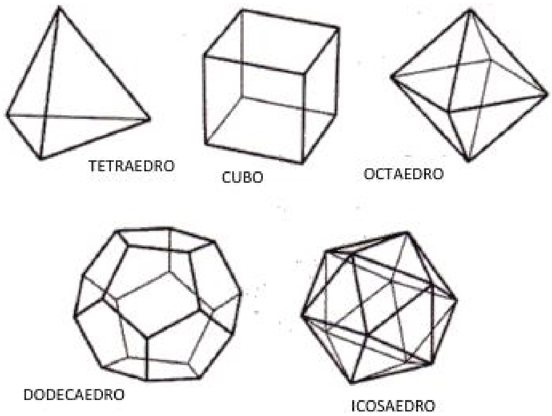


Figura 2.27: Poliedros regulares.

Os primórdios da história dos poliedros perdem-se nas brumas do passado. Há um início de tratamento matemático desses sólidos no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides. O primeiro escólio desse livro observa que se "irá tratar dos sólidos de Platão, assim chamados erradamente, porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro a Teeteto".

De qualquer maneira Platão, em seu *Timeu*, apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces.

2.9 A música de Pitágoras

PEREIRA (2013) diz que a relação entre matemática e música se evidencia de forma científica primeiramente com Pitágoras, que foi o primeiro a realizar uma experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial. Trata-se do experimento feito com o monocórdio, instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa, possuindo ainda um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções (Figura 2.28).

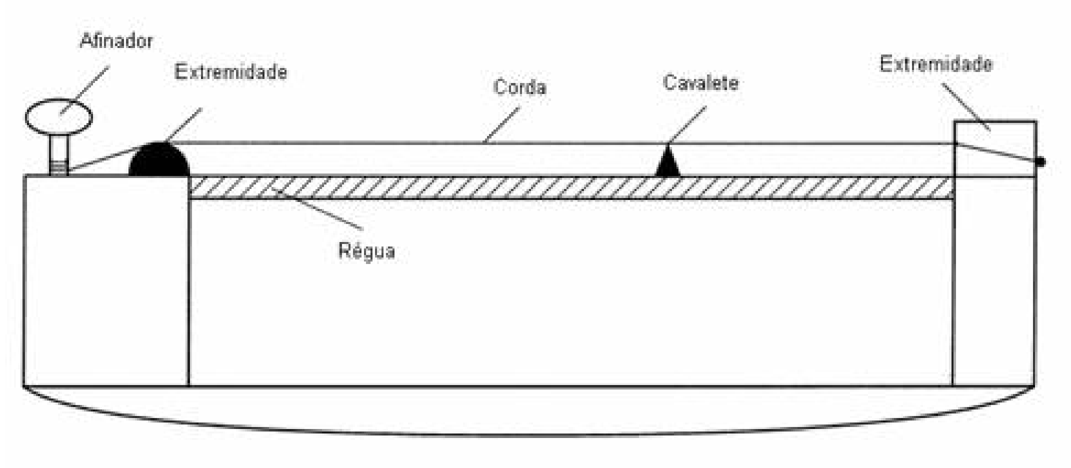


Figura 2.28: Monocórdio de Pitágoras

O monocórdio, ao ser tocado na modalidade "corda solta", isto é, presa apenas pelas extremidades, produzia um som, uma nota musical que serviria de referência para que pudesse determinar as outras. As "novas" notas encontradas por ele foram determinadas a partir de proporcões numéricas bem definidas: (Figura 2.29)

- A Tônica[3], de razão 1:1 $\rightarrow$ comprimento c
- A Quarta, de razão 3:4 $\rightarrow$ comprimento $\dfrac{3c}{4}$

[3]Em Música, a primeira nota de uma escala ou de um acorde é denominada tônica ou fundamental.

- A Quinta, de razão 2:3 $\rightarrow$ comprimento $\dfrac{2c}{3}$
- A Oitava, de razão 1:2 $\rightarrow$ comprimento $\dfrac{c}{2}$

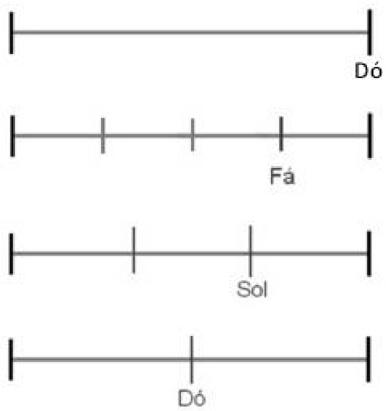


Figura 2.29: Notas encontradas por Pitágoras

Segundo SINGH (2000), Iamblicus, um estudioso do século IV, descreve como Pitágoras descobriu os princípios básicos da harmonia musical.

Certa vez ele estava dominado pela ideia de descobrir se poderia criar um instrumento mecânico para ampliar o sentido da audição, que fosse preciso e engenhoso. Por algum ato divino de sorte, aconteceu de pitágoras passar por uma oficina de um ferreiro e ouviu os martelos golpeando o ferro e produzindo uma harmonia variada, cheia de reverberações, exceto por uma combinação de sons.

De acordo com Iamblicus, Pitágoras correu imediatamente para dentro da forja a fim de investigar a harmonia dos martelos. Ele percebeu que a maioria dos martelos podia ser usada simultaneamente para gerar sons harmoniosos, enquanto qualquer combinação contendo um martelo particular produzia um ruído desagradável. Ele analisou os martelos e descobriu que aqueles que eram harmoniosos entre si tinham uma relação matemática simples - suas massas eram proporções simples, ou frações, umas das outras. Ou seja, martelos que possuíssem a metade, dois terços ou três quartos do peso de um determinado martelo produziriam sons harmoniosos. Por outro lado, o martelo que gerava desarmonia quando golpeado junto com os outros tinha um peso que não apresentava qualquer relação simples com o peso dos outros.

Pitágoras descobrira que as relações numéricas simples são as responsáveis pela harmonia na música. Tocando simplesmente uma corda temos uma nota padrão (tônica), que é produzida pela vibração da corda inteira. Prendendo a corda em determinado ponto de seu comprimento é possível produzir outras vibrações ou notas, como ilustrado na Figura 2.30.

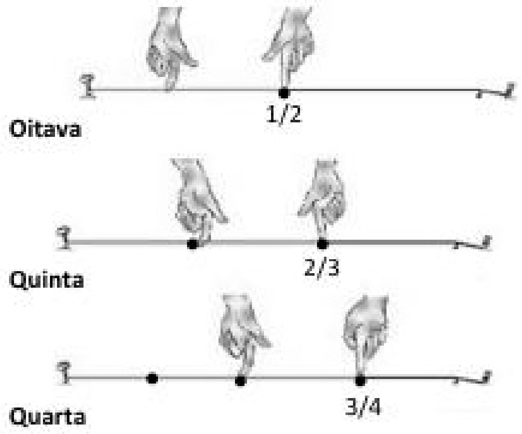


Figura 2.30:

2.9.1 A escala musical pitagórica

Segundo PEREIRA (2013), não se sabe ao certo em que nota estava afinado o monocórdio, mas, na verdade, isso não tem importância, pois o que realmente interessa é a relação entre a corda tocada solta (tônica) e as outras notas obtidas pressionando o monocórdio em determinadas posições e fazendo vibrar a corda pressionada nessas posições. Essas notas consoantes são, na escala ocidental atual, a **oitava**, a **quinta** e a **quarta**, relativas à tônica.

A oitava é a nota obtida ao tocar a corda na metade do seu comprimento e que o ouvido humano interpreta como sendo a mesma nota. A primeira e a oitava são identificadas por nós como sendo notas naturalmente equivalentes.

Pode-se fazer uma analogia com o violão, por exemplo. Quando tocamos uma nota na 12^a casa do violão, obtemos a oitava da nota tocada com a corda solta. E a 12^a casa pressionada corresponde à corda pressionada na metade do seu comprimento, ou seja, na razão 1:2. Exatamente como descobriu Pitágoras há 2500 anos!

A partir dessa descoberta, estava, então, formada a primeira escala musical, a mais elementar e a que serviu de base para a música grega: a escala formada pelos quatro sons descobertos por Pitágoras, que hoje sabemos que eles representam a 1^a, a 4^a, a 5^a e a 8^a na escala atual[4]. Como consequência, surgiu o tetracórdio, uma

[4]dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó

espécie de lira com quatro cordas, cada uma contendo uma nota daquela escala.

Pitágoras também verificou que o som produzido pelo monocórdio quando pressionado em outros pontos senão esses mostrados acima produziam outros sons, porém dissonantes, não aprazíveis. Pode parecer abstrato, mas, mesmo um leigo em Música é capaz de comprovar esse fato, da seguinte maneira:

- Tome um violão, escolha uma corda e meça-a com uma régua.

  Toque-a e "sinta" a sonoridade.

- Agora tome dois terços da corda, prenda-a e toque novamente.

  O segundo som parecerá, digamos, concordante com o primeiro.

- Por fim, escolha uma fração distinta da anterior.

  Por exemplo, três sétimos. Toque a corda.

  Este último não parecerá consoante com o primeiro, mas dissonante.

3 Considerações Finais

Pitágoras de Samos e seus seguidores deixaram muitas contribuições no campo da Matemática. Fizemos, neste trabalho, a apresentação de alguns dos importantes conhecimentos matemáticos desenvolvidos por eles. Dissertamos sobre a figura misteriosa de Pitágoras e a fundação de sua escola.

O pitagorismo perdurou por cerca de 200 anos, cujos membros somavam quase 600 pessoas. Embora não haja provas concretas da maioria dos feitos de Pitágoras e de seus discípulos, é impossível negar que todo o conhecimento matemático produzido pela Irmandade Pitagórica contribuiu notavelmente para a História da Humanidade, pelo seu interesse pelo estudo da Matemática, sendo também eles os primeiros a produzir demonstrações rigorosas sobre as verdades matemáticas. Suas ideias e crenças foram difundidas por toda a Grécia, inspirando os matemáticos das gerações futuras. Segundo BOYER (1974), atribui-se aos pitagóricos parte considerável da Álgebra Geométrica encontrada nos primeiros livros de *Os Elementos*, de Euclides. Por isso, embora Tales de Mileto seja conhecido como o "primeiro matemático", Pitágoras é conhecido como o "Pai da Matemática".

Devemos aos pitagóricos o método do raciocínio postulacional. A aritmética e a geometria deles causaram diversos problemas de Teoria dos Números ainda hoje não solucionados. Falamos sobre sua principal descoberta, o teorema que leva o nome de Pitágoras, o qual inspirou o famoso "Último Teorema de Fermat" demonstrado em 1994 pelo matemático britânico Andrew Wiles.

Discorremos também sobre algumas propostas de ensino quanto ao Teorema de Pitágoras e aos números irracionais.

Concluímos, enfim, que a matemática deixada pela Escola Pitagórica é, de fato, uma deslumbrante página da história da Matemática, e suas descobertas certamente dominarão a mente de muitos por várias gerações.

Referências

BECKER, RENATA LEANDRO. A Álgebra Geométrica de Euclides. Monografia, Graduação. UFSC, Florianópolis - 2004.

BOFF, M. P. Números Irracionais e Transcendentes na Sala de aula de Matemática. Monografia, Graduação. UNIOESTE, Foz do Iguaçu, 2008.

BOYER, C. B. História da Matemática. Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar d Blucher. 1974.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares Nacionais: matemática. Brasília, Ministério da Educação, 1998.

BRASIL, (1997), Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.

COSTA, C. Considerações sobre Números Racionais na Sala de aula de Matemática. Monografia, Graduação. UNIOESTE, Foz do Iguaçu, 2008.

DOMINGUES, Hygino H. Fundamentos de aritmética - São Paulo: Atual, 1991.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GOMES, Jacqueline Oliveira de Melo. A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Monografia, Mestrado. UFPB, João Pessoa - 2006.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT - 2013.

KAHN, Charles H. Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história. Tradução Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 2007.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, P. C.; WAGNER A.; MORGADO, A. C. Temas e problemas elementares. 5.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, P. C.; WAGNER A.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, vol. 2 - 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

MELO, Rafael Pereira de. Números primos: história, tópicos, criptografia e o ensino da matemática. Dissertação (mestrado), 2014.

PEREIRA, Marcos. Matemática e Música. De Pitágoras aos dias de hoje.

Dissertação (mestrado), 2013.

SINGH, S. O último teorema de Fermat. Tradução de Jorge Luiz Calife. 7 ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2000.

WAGNER, Eduardo. Programa de Aperfeiçoamento da Matemática do Esino Médio, julho/2011 disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2EIxn02dsfE. Acesso em 02/02/2015 as 10:00.