UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

EVERTON ALVES DE ARAUJO

# PROPOSTA DE ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO VIA GEOGEBRA

Juazeiro – BA
2015

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

EVERTON ALVES DE ARAUJO

# PROPOSTA DE ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO VIA GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Comissão Local do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco –UNIVASF,como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof° Felipe Wergete

Juazeiro – BA
2015

Araújo, Everton A. de.

A663p Proposta de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via Geogebra / Everton Alves de Araújo. – Juazeiro-BA, 2015

xvi; 140 f. : il. ; 29 cm.

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional ( PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Juazeiro-BA, 2015.

Orientador: Prof° Dr. Felipe Wergete Cruz.

Referências.

1. Cálculo - Ensino Médio. 2. Cálculo diferencial e integral. 3. GeoGebra. I. Título. II. Cruz, Felipe Wergete. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 515.33

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

*Universidade Federal do Vale do São Francisco*

*Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional*

***PROFMAT/UNIVASF***

PROFMAT

# PROPOSTA DE ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO VIA GEOGEBRA

Por:

EVERTON ALVES DE ARAÚJO

**Dissertação aprovada em 06 de Fevereiro de 2015.**

Felipe Wergete Cruz

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Orientador - UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora Interna - Universidade de Pernambuco - UPE

Prof. Dr. Claudemiro de Lima Júnior
Examinador Externo – Universidade de Pernambuco - UPE

Juazeiro
2015

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais João Pinto de Araujo e Anselmina Alves de Araujo por serem um exemplo de vida e terem sempre me apoiado em tudo que quis realizar em minha trajetória.

A minha irmã Evelyn Alves de Araujo por sempre acreditar na minha capacidade.

A minha companheira Deise Maria por ter me oferecido os maiores incentivos para cumprir todos os compromissos vivenciados.

A todos da turma PROFMAT 2013 do polo Juazeiro-BA, mas principalmente aos colegas Rafael Vitor, Maria da Paz, Ednaldo Silva, Humberto Felipe e Vaniel Santos os quais compartilharam estudos, alegrias e continuam nessa caminhada.

Aos professores Felipe Wergete e Beto Saavedra que foram a base do primeiro ano do curso e caracterizaram-se como modelos de docência.

A dedicação e as orientações dos Professores Felipe Wergete e Lucília Batista que corroboraram com a qualidade desse trabalho e serem educadores exemplares que persistem no que acreditam.

Ao amigo Rafael Vitor por ceder turmas da instituição que ele leciona para participarem como elementos de estudo desse trabalho, aproveitando para agradecer imensamente, também, a todos os alunos colaboradores que me proporcionaram essa experiência incrível de ensino.

E, ao programa PROFMAT que me deu a oportunidade de acrescer essa experiência acadêmica em minha qualificação.

## RESUMO

O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral é tradição dos currículos de Ensino Superior dos cursos de exatas e se fez presente algumas vezes, na história, também no Ensino Secundário até os meados do fim dos anos 50, porém, atualmente esse escopo não pertence a Escola Básica. A proposta desse trabalho é a abordagem intuitiva desse campo de estudo no Ensino Médio, contudo não da forma que é comumente apresentado na universidade nos cursos de Engenharia e Matemática. Na verdade, a perspectiva é oferecer ao aluno um primeiro contato de forma que ele tenha a motivação desse aprendizado para que tal conhecimento faça parte da continuação de sua vida acadêmica. O fato é que mesmo incluindo os temas de limites, derivadas e integrais durante os 3 (três) anos do ensino médio, a proposta incide em renovar a metodologia comum do ensino do cálculo. Modificando a atual forma de se disseminar aos alunos conceitos novos por métodos mnemônicos de cálculo sem finalidade explícita, sem se concatenar nenhum conhecimento anterior de tantos anos de estudo, e não apresentar aplicações na vida acadêmica e futura, por uma maneira diferenciada onde se foca no que realmente os alunos de quaisquer níveis querem saber - “Pra quê serve isso? Com qual finalidade utilizo aquilo?”, etc. Para se chegar onde se deseja, será esboçado o histórico do Ensino do Cálculo em âmbito nacional, e assim trazer à tona dados técnicos, opiniões, propostas e sugestões. Também será feita uma análise bibliográfica dos tópicos de cálculo com abordagem para o Ensino Médio. Assim, os livros mais indicados serão citados dentre as sugestões dos próprios autores quanto à qualidade desse ensino inovador. O ensino do cálculo, propriamente dito, será proposto através da ferramenta tecnológica, o *software GeoGebra*, onde serão ditadas atividades sobre o ensino desses tópicos com o auxílio do *software* e a análise dos resultados da aplicação dessas atividades em duas turmas experimentais de alunos do Ensino Médio, com o fim de estimular o aprendizado de cada tópico por meio de visualização e intuição do tema, sem conceitos exagerados e na medida do possível fazendo utilização de assuntos que já foram aprendidos anteriormente pelos discentes. Por fim, verificou-se que é possível inserir no âmbito do ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, com as ideias intuitivas de Cálculo, utilizando ferramentas diversas com tecnologias adequadas, e dessa forma proporcionar aos estudantes novas técnicas de ensino que favoreçam a aprendizagem desses e muitos outros conceitos matemáticos.

**Palavras-chave:** Cálculo. Ensino Médio. Experimento. Ensino Intuitivo. *Software GeoGebra*.

# ABSTRACT

Teaching the Differential and Integral Calculus is traditional resume of higher education courses in exact and made this a few times in history, also in secondary education until the mid to late 50s, however, currently does not belong to this scope School Basic. The purpose of this work is the intuitive approach to this field of study in high school, but not in the way that is commonly presented in university courses in Engineering and Mathematics. Indeed, the prospect is to offer students a first contact so that he has the motivation to this learning that such knowledge is part of their continued academic life. The fact is that even including the topics of limits, derivatives and integrals over the 3 (three) years of high school, the proposal focuses on renovating the common teaching methodology of calculation. Modifying the current way of disseminating new concepts to students by mnemonic methods of calculation without explicit purpose, without any prior knowledge concatenate many years of study, and not submit applications in future academic life, and a distinctive way which focuses on students who really want to know any levels - "for what use is it? I use it for what purpose?", and so on. To get where you want, will be outlined the history of the Teaching of Calculus nationwide, and thus bring forth technical data, opinions, proposals and suggestions. Also a literature analysis approach with calculus topics for middle school will be made. Thus, the most suitable books will be mentioned among the suggestions of the authors on the quality of this innovative education. The teaching of calculus, itself, will be offered through technological tool, the software *GeoGebra*, where activities will be dictated on teaching these topics with the help of the software and the analysis of results of applying these activities in two experimental groups of students of teaching medium, in order to stimulate the learning of each topic through visualization and intuition of the subject, without exaggerated concepts and where possible making use of issues that have been previously learned by students. Finally, it was found that it is possible within the scope of the teaching and learning of Mathematics in Secondary Education, with intuitive ideas of Calculus, using various tools with appropriate technologies, and thus provide students with new teaching techniques that encourage learning these and many other mathematical concepts.

**Key-words:** Calculus. Secondary School. Experiment. Intuitive Education. *GeoGebra* Software.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ABREVIATURAS

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

HDMI - *High-Definition Multimedia Interface*

MMM - Matemática Moderna

PC – *Personal Computer* (Computador Pessoal)

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

P.G. – Progressão Geométrica

SENAI - Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

TI - Tecnologia da Informação

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação

USB - *Universal Serial Bus*

VGA - *Video Graphics Array*

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O tema desse trabalho é uma recorrência no campo do ensino/aprendizagem, o qual a busca de aprimorar quaisquer vínculos com a Matemática é um ganho para a ciência que ainda é vista com insegurança por alunos de diversos níveis de ensino. Desde muito tempo, o ensino do Cálculo é debatido, seja no Ensino Superior ou Secundário, e os motivos principais se mostram como falta de preparo para os professores, desqualificação do ensino matemático desde o Ensino Básico, e a não visibilidade de aplicações diretas.

Para esclarecer essa prática de que o Cálculo e seus adendos sejam considerados assuntos de dificuldade extrema e inaplicáveis é que este trabalho foi executado com vistas a contribuir de forma sistemática com o ensino da matemática e mais especificamente para os tópicos de Cálculo Diferencial e Integral que já fizeram parte do currículo ensinado no ensino básico e diversas vezes discutido sua real utilização.

Sendo assim, o ponto crucial que justifica essa abordagem de forma mais ampla é que com a perspectiva do cálculo, é possível oferecer além do primeiro contato aos alunos do ensino médio, apresentar o tema de forma que eles tenham o interesse por esse aprendizado para que tal conhecimento faça parte da continuação de sua vida acadêmica. Esse processo se atenta à importância que o Cálculo traz em suas definições e a gama de aplicações em vários campos científicos que seus conceitos atingem como, por exemplo, Física, Química, Biologia, Economia, Astronomia, Arqueologia, Medicina, Psicologia, Ciências Políticas, entre outras áreas (ZUIN, 2001, p. 15 e REIS, 2009, p. 81).

Diante do exposto, é provável que mesmo se o aluno não tiver aptidão para a área de exatas, existindo um ensino que preze pelo entendimento, seja qual for o método utilizado, esse aluno compreenderá com mais entusiasmo os assuntos de matemática que poderão ser aplicados futuramente na área de sua escolha após a conclusão do Ensino Secundário.

Dentre os diversos pontos de vista em que passaram os temas de cálculo diferencial e integral, o objetivo desse trabalho é promover de forma inovadora que alunos do ensino médio tenham a oportunidade de aprender os conceitos do Cálculo

Diferencial e Integral para colaborar com suas vidas acadêmicas posteriores devido a grande aplicabilidade do tema.

Em consonância ao exposto se faz necessário estipular metas mais específicas para serem cumpridas com o fim de alcançar o que se deseja cujo objeto advém de virtudes que compreendem minúcias didáticas e motivacionais, tais como: verificar os assuntos principais de ensino médio que são mais adequados para a aplicação no Ensino do Cálculo; montar atividades relevantes no *GeoGebra* de forma que abranjam os principais tópicos de limites, derivadas e integrais; aplicar as atividades nos encontros experimentais, focando o estímulo intuitivo e visual; motivar os alunos no aprendizado em Matemática os fazendo acreditar na sua real importância; e evidenciar a importância da Matemática em diversas áreas científicas (exatas e não exatas).

Esta dissertação terá a estrutura de sete capítulos. Após essa introdução, o primeiro capítulo aborda alguns tópicos do Ensino do Cálculo Diferencial com respeito ao histórico desse Ensino no Brasil, as reviravoltas que existiram no 2° grau, bem como serão abordados, também, questões relacionadas com o porquê englobar esses temas no ensino médio, e o mecanismo de tentar aumentar o interesse na Matemática, em que o aluno do Ensino Básico é o sujeito principal dessa nova metodologia.

No segundo capítulo, foram feitas análises bibliográficas em livros do ensino médio que tratam do tema e buscam incorporar ao ensino corriqueiro as visões do cálculo. Alguns autores pecam em excessos, e outros tratam de forma muito estimulante, e é esta revisão que se pretende nessa seção com vistas a contribuir com alunos e professores. É uma visão ainda muito difícil de ter, pois esse tema, atualmente, não participa do Currículo de Matemática para o Ensino Médio com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), englobando os Estados onde estão a instituição polo e a escola de realização dos experimentos pedagógicos da metodologia.

No terceiro capítulo, foi exposto um pouco a respeito da utilização da tecnologia aplicada ao ensino, mais diretamente aos *softwares* matemáticos, capazes de realizar um ótimo trabalho no campo de intuição e visualização, de modo que seja tratado a favor do trabalho docente e ao melhor aproveitamento de transmissão de ensino para os alunos. Inclusive, é importante salientar que o auxílio da ferramenta não exclui a forma de ensino tradicional e sim, corrobora ao mesmo. A ferramenta aqui utilizada será o *GeoGebra*, que traz uma gama de opções e se usada de forma correta a aplicação desejada terá efeitos e resultados excelentes.

Já no quarto capítulo, explicitou-se a metodologia aplicada no trabalho, o que faz parte do escopo de citar o público alvo, como se deu a pesquisa, a formação das atividades dentro do *software*, a descrição do método propriamente dito, assim como a descrição das atividades de sala de aula e seus objetivos acadêmicos.

A experiência de sala de aula e as interações com os discentes, ou seja, a aplicação do método elaborado, mencionando os aspectos positivos de se gerir atividades englobando assuntos matemáticos em busca de visualizar aplicações reais, compreende dessa forma, cada tópico do escopo – estão citados no quinto capítulo.

Já no sexto capítulo, foi a vez do método avaliativo advindo de questionários com fim de obter dados precisos de cada atividade explanada e de todo o método em si. Após isso, o sétimo capítulo apresenta-se a discussão de alguns resultados obtidos com o objetivo de dar classificação ao método aplicado durante o trabalho. E finalmente, foram realizadas considerações finais da dissertação a partir da metodologia proposta e sugestões para trabalhos posteriores.

# 1 ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO

Com o paradigma do ensino do Cálculo em quaisquer graus de ensino é inegável a dificuldade extrema tanto do ensino quanto do aprendizado, e mesmo tendo diversos fatores responsáveis por esse impasse, como a metodologia tradicional aplicada pelos professores da disciplina, a falta de interesse dos alunos nos processos iniciais de aprendizado do Cálculo, que são fundamentais para a resolução dos problemas que são postos diante deles posteriormente, o acadêmico não obterá a base necessária e terá imensa dificuldade em resolver os problemas envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral. Com esse aspecto, será realizado um apanhado teórico dos currículos e possibilidades de inserção desses tópicos de ensino a partir do contexto histórico.

O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral já teve participação nas salas de aula do ensino médio, chamado também de 2° grau. Es se momento histórico iniciou em meados de 1942 na Era Vargas, com o ministro de Educação e Saúde Pública da época, Gustavo Capanema que incentivou novas leis de reforma do Ensino, que ficaram conhecidas como "Reforma Capanema". Com a Lei Orgânica do Ensino Industrial e a Lei Orgânica do Ensino Secundário, além de ter sido fundado o SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial) houve também a divisão do Ensino Secundário em três modalidades: Clássico, Científico e Normal que, embora profissionalizante, era considerado, dentro do ensino secundário, voltado para a continuação de estudos em nível superior e ensino técnico, com três modalidades de cursos: técnico industrial, técnico agrícola e técnico comercial (PALMA FILHO, 2005, p. 52).

Por outro lado, de acordo Burigo (1989) desde o início do século XX, em muitos países, havia uma preocupação por parte de professores com o ensino de Matemática, fato esse manifestado desde o IV Congresso Internacional de Matemática, acontecido em Roma em 1908, onde se criou uma comissão internacional para analisar o desenvolvimento do ensino de Matemática em diversos países. O matemático *Felix Klein*, membro da comissão, divulgou a experiência desenvolvida na Alemanha com a '*Meraner Reform*' (BURIGO, 1989, p. 126), cuja referência deu início, quase 50 anos mais tarde, através do primeiro projeto de internacionalização do ensino de Matemática, denominado de Movimento da Matemática Moderna (MMM), em meados dos anos 60. Os defensores da Matemática Moderna pretendiam aproximar a Matemática da escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Dessa maneira, segundo Dieudonné (1973, p. 17-19), as propostas veiculadas no movimento realmente deveriam vigorar sem o processo que ele chama de “rigor e axiomatização”, pois através da combinação da ciência criativa e do profundo entendimento do material estudado faz os alunos adquirirem “senso de mundo”. Pela razão do MMM ter incluído no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia, transformações geométricas, dentre outros temas, não haveria tempo e espaço para todo o programa ser ministrado, já que o rigor e o formalismo eram o ponto chave dessa filosofia. Com isso, caíram alguns currículos como a qualidade do Ensino em Geometria, pelos excessivos axiomas, e o Cálculo, com a justificativa de que esse ensino necessitaria de muitos detalhamentos e rigores que ocupariam ao menos um semestre completo (ÁVILA, 1991, p. 2 - 3).

A partir desse movimento não se teve mais o ensino do cálculo nos currículos escolares, e com essa ausência vieram diversos debates, discussões, trabalhos divulgando e defendendo esse tópico, pois ironicamente os modernistas criticavam o ensino da Matemática que datavam até 1700, mas excluíram o Cálculo que era o que se tinha de mais moderno na Matemática até aquele momento, segundo as ideias de Ávila (1991). Assim, vem-se apenas discutindo a importância do ensino do Cálculo e o quanto os alunos são favorecidos ao aprendê-lo.

De fato, o Cálculo tem um papel de alta relevância no desenvolvimento tecnológico e científico, uma gama de aplicações reais no mundo atual, e sendo um dos pilares do ensino secundário, oferecer os conhecimentos necessários para se englobar na sociedade de forma a poder melhorá-la, então o Cálculo se encaixa perfeitamente nos pontos a serem abordados e alcançados durante o Ensino Médio, conforme a seção IV, artigo 35 da Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996:

> Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996, p. 10)

.

De modo geral, o ensino de toda a matemática tem esse papel de englobar a sociedade e ser um instrumento eficaz e necessário para interconectar diversas áreas do conhecimento, e o com o Cálculo não é diferente. A inserção dos conceitos fundamentais de Cálculo nessa fase da escolaridade relaciona-se com a possibilidade de utilizar processos infinitos de aproximação, os quais podem ser explorados em diversos conteúdos do Ensino Médio. Aliás, esses temas possuem grande aplicabilidade em problemas reais que podem ser trabalhados juntos com outros assuntos. E esse é um dos grandes problemas associados à adaptação de assuntos estudados para se aplicar em outros temas, porque o currículo matemático atual do ensino médio, mesmo após anos e anos, é inadequado e mal estruturado, devido à herança formalística da Matemática Moderna (DUCLOS, 1992, p. 30).

E conforme Lima *et al*. (2001, p. 310):

> Contudo, o grande dilema do ensino do Cálculo a nível médio situa-se na conceituação, admitindo que a fundamentação rigorosa dos conceitos (basicamente topológicos) está fora de cogitação nesse contexto e o problema reduz-se a uma questão de senso didático, bom gosto, equilíbrio e, acima de tudo, a honestidade intelectual que consiste em dizer a verdade sem ser obrigado a dizer toda ela. O êxito da tarefa vai estar na eficiência surpreendente das aplicações, justificando o uso adequado da intuição.

Mesmo tecendo esses desafios de se formar uma metodologia para o trabalho do cálculo diferencial e integral, há a percepção do formato de ensino a partir da aplicação dos conceitos de limites, dentre os demais que originam do primeiro.

# 2 ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA

Apesar das dificuldades quanto ao ensino do cálculo no ensino médio, ainda hoje existem diversos autores que abordam esses títulos (limites, derivadas e integrais) nos livros didáticos de 2° grau, mesmo que esses assuntos não estejam regidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000). Esse tipo de abordagem nos livros ocorre na maioria das vezes no terceiro volume dos conjuntos pedagógicos voltados ao Ensino Médio, e quanto a isso, há um posicionamento de Rezende (2003) que isso significa a existência de uma vontade indireta entre os estudiosos, ocupados com tarefas pedagógicas, de trazer a tona os conhecimentos do Cálculo para o Ensino Médio.

E a dúvida é que mesmo com a tentativa de apresentar esses temas nos livros, os mesmos não são aplicados por razão de não estarem previstos no currículo escolar. E nesse emaranhado de livros é válido realizar uma pequena e sutil análise dos diversos autores do mercado com o fim de sugerir um ou mais livros que sejam adequados para a aplicação em sala de aula no novo formato já mencionado, em que o Cálculo já estará estruturado ao Ensino Secundário.

Aqui é importante enfatizar que as análises dos 9 (nove) livros abaixo foram compostas e citadas a partir do livro *Exame de Textos: Análise de Livros Didáticos para o Ensino Médio*[1], livro este editado pelo Professor Elon Lages Lima através da Sociedade Brasileira de Matemática no ano de 2001, e a partir desse compêndio foram evidenciadas situações que são capazes de colaborar com a escolha de um livro ou outro para o estudo do cálculo no Ensino Secundário da forma aconselhada.

---

[1] Precisamente trata-se a análise de livros por uma comissão formada por: Augusto César Morgado, Edson Durão Júdice, Eduardo Wagner, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Paulo Quinhões Carneiro, Maria Laura Magalhães Gomes, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Elon Lages Lima.

## 2.1 ANÁLISE DO PRIMEIRO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Iezzi et al. (1980)*[2];

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Wagner e Morgado (2001.a).*

O cálculo nesse livro é visto do capítulo 6 ao capítulo 9, onde é iniciado com a revisão sobre funções, visto no volume 1 da coleção, contudo é considerado como tendo uma ótima explicação e advém de gráficos bem realizados. Além disso, são notórias e bem criativas as contextualizações dos problemas envolvidos.

Há adequação na abordagem de limites e continuidades, pois não exclui o suporte intuitivo. Quanto a apresentação das derivadas, também ocorre interessantes interpretações geométricas, tanto no conceito quanto nas relações de taxas de variação. Novamente, os problemas existentes são bem contextualizados, embora sejam mais aplicados para as noções iniciais (WAGNER e MORGADO, 2001.a, p. 134). Ainda quanto as derivadas, o autor não induz o aluno a relações de fórmulas para serem memorizadas, as regras de derivação são deduzidas a partir do conceito.

No último capítulo desse tema tem-se a abordagem da variação de funções que também é de ótima qualidade, distinguindo bem relações entre o sinal da derivada e o crescimento da função, bem como os extremos absolutos de extremos locais. Mas segundo Wagner e Morgado (2001. a) existem abusos de linguagem que são irrelevantes pela qualidade do material que inclusive não apresenta os conceitos de funções integrais.

De modo geral, como é bastante difícil escrever sobre cálculo para alunos do ensino médio, em todo momento existe o risco de gerar uma intuição demasiada ou uma excessiva formalização. Neste ponto, o livro conseguiu um ótimo equilíbrio.

---

[2] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antônio dos Santos Machado, Volume 3, Editora Saraiva, 7ª edição, 1980. 292 páginas.

## 2.2 ANÁLISE DO SEGUNDO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Bianchini e Paccola (1995)*[3]*;*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Carvalho e Carvalho (2001.a).*

Nesse livro o cálculo é visto nos capítulos 8, 9 e 10. Inicia-se com o estudo de limites de forma cuidadosa e bem explicada ilustrativamente, e a apresentação das propriedades principais no nível esperado. Há comentários de limites laterais, existência de limites e indeterminações.

Para a continuidade de funções, é exibida a definição adequada, a qual é seguida de exemplos pertinentes com gráficos. Após, o tópico mais interessante para Carvalho e Carvalho (2001. a) é o de derivadas que é apresentado de forma diferenciada com exemplo de velocidade média reduzindo os intervalos de tempo, que aplicando os conceitos de limites anteriores se deduzem os conceitos matemáticos do quociente de acréscimos, e então, apresenta-se de fato, as funções derivadas. Nas regras de derivação e na apresentação da regra da cadeia existem lapsos conceituais que poderiam ser evitados, devido ao excesso de formalidade (CARVALHO e CARVALHO, 2001.a, p. 104).

Contudo, as aplicações mostradas são de boa percepção, sejam nos problemas de máximos e mínimos exemplificados, assim como para a geometria e física. E novamente, esse livro não aborda em nenhum momento o conceito de integrais.

O balanço geral dos capítulos de introdução ao Cálculo é bastante positivo. Embora a exposição possua pequenas falhas, conforme a escolha dos tópicos de cálculo e, especialmente, dos exemplos e exercícios, foi conduzida com veemência e fornece uma boa introdução ao assunto.

---

[3] Edwaldo Bianchini e Herval Paccola, Volume 3, Editora Moderna, Versão alfa e beta, 1995. 128 páginas.

## 2.3 ANÁLISE DO TERCEIRO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Smole e Kiyukawa (1999)*[4]*;*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Wagner e Morgado (2001.b).*

Relativamente foi um dos melhores livros secundários que abordam esse tema, por questões de optar pela informalidade da noção de limites e por possuir uma redação de conceitos bem explicados e adequados ao público (WAGNER e MORGADO, 2001.b, p. 265). Os exercícios existentes parece não cometerem erros, e os comentários são diretos e contidos, sem exageros.

Em derivadas, a abordagem não é diferente, novamente bem escrito para o fim que se destina, e apresenta a aplicação física cinemática para interpretação. Existe a concisão das relações operatórias, máximos e mínimos (sinal da derivada). Para os exercícios, na opinião dos Professores Wagner e Morgado (2001. b), os autores optaram por visualizações geométricas, embora insuficientes para funções que vislumbram apenas os polinômios.

## 2.4 ANÁLISE DO QUARTO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Barreto Filho e Silva (1998)*[5]*;*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Lima e Wagner (2001.a).*

As duas seções iniciais pretendem servir de introdução ao Cálculo Infinitesimal. Mas deixam muito a desejar de acordo com a análise de Lima e Wagner (2001.a, p. 78): “elas contêm uma série de noções mal apresentadas, nas quais a parte teórica é ausente ou deficiente e as aplicações interessantes não

---

[4] Katia Cristina Stocco Smole e Rokusaburo Kiyukawa, Volume 3, Editora Saraiva, 2ª edição, São Paulo, 1999. 333 páginas;

[5] Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva, Volume 3, Editora FTD, 1998. 366 páginas.

existem”. Mais especificamente, os exemplos são irreais e sem conexão de entendimento, exageros e formalidades nos conceitos de limites sem explanação e ainda há casos de erros graves de definição, como por exemplo, não considerar o domínio da função em casos de cálculo de limites nesse ou naquele ponto. Contém erros nas definições de continuidade, como também na afirmação dos limites infinitos. A parte conceitual de derivadas é deficiente apesar da grande importância na vida real, são discriminadas regras de derivação sem justificativas, argumentos não pertinentes, e o mais incrível é que não existem exercícios aplicativos resolvidos com as derivadas (LIMA e WAGNER, 2001.a, p. 79).

Assim, não há razão de incluir noções de cálculo nesse livro. A teoria é fraquíssima e coberta de erros, as manipulações são insuficientes e as aplicações inexistem. Ao concluir a leitura, o aluno não se sentirá capaz de utilizar esses resultados em nenhuma situação, sejam práticas ou teórico (LIMA e WAGNER, 2001.a, pg. 78).

## 2.5 ANÁLISE DO QUINTO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Gentil et al. (2000)*[6]*;*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Carvalho e Carvalho (2001.b).*

Esse livro é considerado deficiente para o ensino do cálculo, conforme análise dos capítulos 7, 8 e 9. No capítulo 7 sobre limites não existe motivação ou contextualização para esse conceito, por não considerar valores fora do domínio da função dada no exemplo (CARVALHO e CARVALHO, 2001.b, p. 162). Além disso, fala-se de limites laterais sem conceituar limites, e a abordagem sobre continuidade contém exemplos com linguagens descuidadas. Ainda, ocorrem casos em que demonstrações são feitas diretamente, sem menções importantes, além de haver afirmações avançadas sem o menor comentário.

[6] Nelson Gentil, Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Antonio Carlos Greco, Antonio Bellotto Filho e Sérgio Emílio Greco, Volume 3, Editora Ática, 7ª edição, 2000. 400 páginas.

Quanto a apresentação das derivadas existem exemplos que poderiam ser melhorados, como aplicar acréscimos pequenos nas taxas de variação, o que não ocorre. Porém, a motivação da derivada como sendo o limite de retas secantes é bem feita e há problemas bem contextualizados, mas o aluno já recebe o modelo matemático pronto, e não é motivado a raciocinar para formar suas próprias ideias, de acordo com Carvalho e Carvalho (2001. b). Nos tópicos sobre derivadas de ordem superior, a relação entre derivada e funções crescentes e decrescentes, os pontos críticos, concavidade e pontos de inflexão não são bem colocados, e não explora adequadamente o tema nem suas aplicações (CARVALHO e CARVALHO, 2001.b, p. 163).

Por fim, esse livro apresenta o conteúdo das integrais, mostrado como antiderivadas e mesmo que de forma vaga a noção de integrais, tanto indefinidas quanto definidas. Citam-se as integrais definidas como um número real e diz-se que para uma função não negativa, a integral definida representa a área compreendida entre o gráfico da função, o eixo dos x e as retas perpendiculares $x = a$ e $x = b$, onde $a < b$.

## 2.6 ANÁLISE DO SEXTO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Giovanni e Bonjorno (2000)*[7]*;*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Carneiro e Morgado (2001).*

O texto a respeito do cálculo inicia no capítulo 10 e segue até o capítulo 12. Compreende inicialmente o estudo dos limites em exemplos simples, contudo apresenta o conceito formal exibindo as relações entre os épsilons (ε) e deltas (δ) que até então só eram vistos no Ensino Superior. Em razão de não arriscar apresentar conceitos incorretos de maneira formal, estes autores adotam uma atitude trágica: os conceitos e propriedades dos limites são apresentados em forma

[7] José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, Volume 3, Editora FTD, 2ª edição, 2000. 400 páginas.

de receitas de bolo, então conceitos importantes estão errados, não são segundo Carneiro e Morgado (2001, p. 222).

Há um desacordo do conteúdo apresentado com os exercícios propostos, pois não trazem o mínimo intuitivo da definição. Fatos como esses, não surpreende que os alunos achem difícil o conceito de limite.

Ainda existem despropósitos como apresentar os teoremas dos limites sem nenhuma justificativa ou interpretação (CARNEIRO e MORGADO, 2001, p. 223), e conceitos simples como o de continuidade são dados de forma incorreta, conforme se diz: '*uma função contínua é aquela em que "o gráfico pode ser desenhado de uma só vez, sem levantar a ponta do lápis do papel*". '(GIOVANNI e BONJORNO, 2000, p. 232).

Na continuação das receitas do livro, há a "aparição" dos limites infinitos e indeterminações, sem maiores explicações. Este capítulo 10 é considerado deseducativo por Carneiro e Morgado (2001). Por outro lado, as definições introdutórias de derivadas são motivadas conceitualmente e graficamente. Outro ponto positivo deste título é uma seção voltada para as aplicações de derivada sobre o estudo do movimento.

Considerando o estudo local das funções deriváveis, os autores pecam novamente ao fornecer a ideia do que se quer fazer (aplicação de derivada a problemas de máximos e mínimos), e simplesmente não consegue executar. Além disso, contêm erros de semântica, casos em que se é afirmado algo e logo depois é citada uma condição contrária de antes. Há, também, demonstrações em que é improvável que o aluno acompanhe e termine confundindo o que já aprendeu, e aumenta essa insegurança com afirmações falsas no caso geral (pois o autor analisou em casos peculiares) (CARNEIRO e MORGADO, 2001, p. 224).

Ainda apresenta um capítulo sobre máximos e mínimos que deveria concluir no esboço de gráficos de funções, contudo não há nenhuma citação sobre concavidade ou pontos de inflexão, bem como não se fala de assíntotas, e ainda nenhum exercício para a construção de gráficos.

## 2.7 ANÁLISE DO SÉTIMO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Dante (1999)[8];*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Lima e Wagner (2001. b).*

O volume dessa coleção se encerra com exatamente o estudo do cálculo que é mencionado nos capítulos 7 e 8, introduções de limites e derivadas, respectivamente. Por início, na tentativa de explicar limites o autor coloca exemplos não muito felizes, pois não trazem desigualdades ou comparações que caracterizam a noção de aproximação, e, portanto, não ajudam a compreender a ideia intuitiva de limite (LIMA e WAGNER, 2001.b, p. 309).

Aqui, novamente, temos o problema da não preocupação do autor com o domínio da função quando ocorre a situação de como se comportaria a função $f(x)$ quando $x$ tende ao valor de $a$, sendo $a$ não pertencente ao domínio. E, mais adiante, existem demonstrações não claras, por não mencionar fatos (e/ou prová-los adequadamente) em tópicos anteriores.

Outra observação é que mesmo enfatizando preocupação com manipulações e aplicações do Cálculo, o autor não menciona limites de somas em séries numéricas, pois seria uma ótima oportunidade de justificar manipulações nas séries geométricas que envolvem a noção de limite (LIMA e WAGNER, 2001.b, p. 311).

Logo depois desse capítulo, faz-se uma rápida interpretação geométrica da derivada e das regras de derivação. Surgem resultados sem informações de como apareceram, como por exemplo, a regra da cadeia e a derivação da função inversa. E segundo opinião de Lima e Wagner (2001.b, p. 312) "*o capítulo é escasso em aplicações e exercícios de problemas contextuais*".

## 2.8 ANÁLISE DO OITAVO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Paiva (1999)[9];*

---

[8] *L*uiz Roberto Dante, Volume 3, Editora Ática, 1ª edição, 1999. 383 páginas;

[9] Manoel Rodrigues Paiva Volume 3, Editora Moderna, 1ª edição, 1999. 305 páginas.

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Carvalho e Carvalho (2001.c).*

Neste livro, nos capítulos 23 a 35 existe um rigor muito forte que poderia ser utilizado no Ensino Universitário, ou seja, não deixa clara a importância do cálculo quanto às aplicações e as resoluções de problemas.

O livro apresenta no início com fatos históricos incorretos, e exemplos não apropriados para a noção intuitiva de limites, e na definição entra no contexto formal dos épsilons ($\varepsilon$) e deltas ($\delta$), e os exercícios dessa parte parecem resolvidos inexplicavelmente. Fala-se em tendência, vizinhança, e outras linguagens excessivamente técnicas (CARVALHO e CARVALHO, 2001.c, p. 343). Já a parte de continuidade é vista de forma adequada e os exemplos para esse fim são bons.

Exibem-se os limites e continuidades de funções trigonométricas demonstradas a partir de uma verdade imposta, bem como a representação do número $e$ (neperiano) através de um determinado limite quando $n$ tende ao $\infty$.

Por outro lado, o estudo de derivadas é bastante precário e a motivação deixa a desejar. Afirma-se que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função e então se prossegue à definição formal geral de derivada. Não há outras interpretações da derivada nem se mostra ou comenta sua importância em outros contextos (CARVALHO e CARVALHO, 2001.c, p. 343).

Os tópicos de regras de derivação, derivada de funções inversas, derivação implícita e o estudo da variação de uma função através da derivada não acrescenta nada do que já se tem em um livro inicial no ensino universitário.

Há uma falha grave em omitir resoluções de problemas de máximos e mínimos, pois sem dúvidas é uma das grandes aplicações da derivada e se trata de um assunto que permite uma agregação da álgebra com a geometria, fato que muitas vezes chama a atenção dos alunos (CARVALHO e CARVALHO, 2001.c, p. 344).

Também há poucos exercícios que trazem as aplicações mais desafiadoras.

## 2.9 ANÁLISE DO NONO LIVRO SELECIONADO

*Livro: Bucchi (2000)[10];*

*Análises realizadas sob as ideias dos Professores Júdice e Gomes (2001).*

Inicialmente o autor faz uma menção histórica do cálculo, bem como notas biográficas sobre Newton e Leibniz. Após isso, apresenta os conceitos de limites com a noção de aproximação de um ponto exibindo o seu gráfico. Sucessivamente introduz ineficazmente os elementos delta e épsilons, pois não relacionam com a vizinhança explicada.

No contexto das definições, inesperadamente se isolam dos conceitos e não se explica a existência dos limites. Apresentam os limites laterais e através de exemplos mal formulados se pede para o aluno deduzir que a existência de limites de uma função está atrelada com a igualdade dos limites laterais nesse ponto. (JÚDICE e GOMES, 2001, p. 458).

Outros lapsos ocorrem quando se define limites infinitos, pois não favorecem o objetivo deste tipo de esclarecimento, assim como os exemplos e as atividades propostas de continuidade não mencionam se uma função é contínua em um ponto ou intervalo, embora a noção de continuidade ter sido definida corretamente (JÚDICE e GOMES, 2001, p. 458).

Esse livro apresenta falhas conceituais, como por exemplo, cálculo do limite do quociente de polinômios sem se determinar o domínio do denominador com a indeterminação "$0/0$". Ainda de acordo com Júdice e Gomes (2001, p. 459) "há uma inadequação de linguagem quando se diz em substituir $x$ por $+\infty$", mas é importante lembrar que ∞ é um símbolo e não se pode substituir a variável por ∞ como se fosse um número.

No capítulo a respeito de derivadas, inicialmente, o livro não apresenta motivações para o tema, e há pouca valia de conteúdo na seção "A derivada e a cinemática", pois não é dada qualquer explicação a respeito da noção de reta tangente a uma curva (JÚDICE e GOMES, 2001, p. 460).

---

[10] Paulo Bucchi, Volume 3, Editora Escala, 1ª edição, 2000. 252 páginas.

O autor define funções crescentes e decrescentes num intervalo com base no sinal de suas derivadas, sem relacionar essa situação com as funções crescentes e decrescentes apresentadas na 1ª série do Ensino Médio. Aliás, a referência dada aos pontos máximos e mínimos é realizada por gráficos e condições sobre o sinal da derivada, contudo sem conectá-los ao crescimento e decrescimento da função. Da mesma maneira, define-se ponto de inflexão sem caracterizar com as concavidades de uma função, considerado por Júdice e Gomes (2001) como uma perda de grande oportunidade. A análise destes dois últimos capítulos do volume põe em evidência uma realização um tanto descuidada e a sensação que não valeu a pena focalizar os conteúdos do Cálculo nessa coleção.

Diante de uma visão particular dos livros mencionados, mediante as sugestões, citações, comentários e críticas dos autores, é possível considerar que as três primeiras análises destacam-se para o ensino do cálculo no ensino médio. Seguem os autores:

- Iezzi *et al.* (1980);
- Bianchini e Paccola (1995); e
- Smole e Kiyukawa (1999).

A razão desses livros serem os mais adaptados para o estudo do Cálculo Diferencial é que além de bem escritos, eles fazem bastante apelo à intuição geométrica e destacam as ideias exibidas em apresentações claras, sem exceder o formalismo.

Além de todos esses livros citados e comentados, vale dizer que certos livros voltados para o Ensino Superior como o do Prof. Geraldo Ávila[11] pode ser adequado ao ensino médio, pois reflete, com as devidas adaptações, um ensino mais intuitivo e com abordagens aplicativas e práticas. Porém, esse fato é caso para um futuro estudo e uma análise bem mais aprofundada dos autores de livros para o Ensino Superior, que são mais “encorpados” e possuem outro público alvo, ou seja, advém da sutileza de extrair as benfeitorias do ensino inicial do cálculo e trazer para o Ensino Médio.

---

[11] Cálculo Funções de uma Variável Vol. 1, Editora Livros Técnicos e Científicos, 4ª edição, 1981.

# 3 A TECNOLOGIA ALIADA AO ENSINO DA MATEMÁTICA

Como já foi dito sobre as virtudes do ensino do Cálculo, e dos melhores títulos bibliográficos para se trabalhar esse assunto, nessa fase do trabalho será discorrido a respeito das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) como uma alternativa vinculada para contribuição de melhoria de desempenho nos mais variados contextos (MORAN, 2007, p. 14), e também, para o suporte científico e o processo de ensino aprendizagem.

Fato incontestável é que a Tecnologia da Informação provocou alterações no processo educacional e sua utilização, nesse ambiente vem assegurando diferentes configurações ao processo educacional. Nessa lógica, Albertini (2010) evidenciou que o desenvolvimento e o acesso a Tecnologia da Informação (TI) contribuem para alterações significativas na prática de ensinar e aprender, promovendo a consolidação de novos ambientes de pesquisa e de geração de conhecimentos por meio da interação entre os seus agentes, independentemente do tempo e do espaço. Além disso, os professores tendem a adotar uma prática docente mais eficaz pautada no planejamento, na organização e sistematização, permitindo a revisão e atualização dos conteúdos e uma consequente possível melhoria do processo educacional.

Dentre as diversas áreas de desenvolvimento científico, a utilização didática da TI é discutida por diversos educadores há alguns anos, e para o empenho matemático descende da década de 90 nos periódicos, revistas da área, encontros, anais de congressos de Educação Matemática de acordo Valente (1996 *apud* OLIVEIRA e VALLADARES, 1999, p. 27), a qual existem inúmeras pesquisas e estudos sobre o uso do computador no ensino da Matemática. Nessa linha, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998, p. 43) sugerem que:

> O uso dessas tecnologias traz significativas contribuições para se repensar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática à medida que relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente; evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; permite que os alunos construam uma visão mais

> completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas frente ao seu estudo.

Nesse sentido, durante qualquer momento de transição ocorrem adaptações as novas situações, e com o ensino não é diferente, e permeando esse fato, é esperado que alguns estudantes poderão apresentar dúvidas, sejam dificuldades em Matemática, que sempre existiram, ou com o entendimento da nova ferramenta, portanto cabe ao professor propor esse desafio aos estudantes do Ensino Médio. E nesse ponto de vista, também é responsabilidade e dever do professor proporcionar aos estudantes diferentes alternativas para que alcance seus objetivos de aprendizagem (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 46) como, por exemplo, a utilização de um recurso computacional de visualização, que é o caso do *software GeoGebra*, proposto nesse trabalho.

O GeoGebra[12] é um *software* livre e gratuito, com variadas possibilidades de trabalhos e aplicações na matemática, e que tem a característica multiplataforma, isto é, há versões tanto para o *Windows* quanto para *Linux*. É um recurso dinâmico, além da construção e visualização dos diversos entes matemáticos, permite a inserção de parâmetros e a variação desses parâmetros de forma a possibilitar, por exemplo, uma análise crítica de diversos problemas que envolvem algum tipo de modificação. Além disso, é um recurso computacional extremamente versátil, pois permite englobar o estudo da álgebra, geometria euclidiana e analítica e o cálculo, devidamente adaptados.

Apesar de não ser um *software* voltado para a manipulação algébrica, como diversos outros *softwares* como, por exemplo, o *Matlab*[13], ou o *Mathematica*[14], o GeoGebra torna-se facilitador devido a sua interface intuitiva e simples. O uso de *zoom*, mobilidade de elementos da tela de trabalho, ajustes gerais, inserção de animações e a utilização de seletores, que inclusive esse último item é que favorece a dinamicidade do que se deseja, modificando parâmetros e simultaneamente trazendo a construção visual da manipulação realizada.

É importante notar que a ferramenta computacional na sala de aula por mais simples ou sofisticada que seja têm o mesmo fundamento, que é oferecer o suporte

---

[12] http://www.geogebra.org/. Acessado em 07 jun 2014;

[13] http://www.mathworks.com/. Acessado em 26 set 2014;

[14] http://www.wolfram.com/mathematica/. Acessado em 26 set 2014.

educacional necessário tanto para os alunos quanto para os professores, pois a relação psicopedagógica se mantém, ou ainda pode se fortalecer, devido aos diversos fatores como curiosidade, interesse, foco, motivação, dentre outros. Assim, as ferramentas tecnológicas aplicadas a educação, em quaisquer áreas, inclusive na matemática tem a característica de gerar facilidade tanto no ensino para o professor devidamente preparado, quanto para o aluno captador de informações, gerando uma real construção do conhecimento.

De acordo com essa visão de construção do conhecimento, Barufi (1999, p. 167) analisa o uso do computador, e confirma que:

> [...] precisamos ter claro que o computador é extremamente útil em tarefas que podem ser transformadas em algoritmos, como também em outras que não podem. Em particular, no que diz respeito ao trabalho do Cálculo, ele é uma ferramenta extremamente útil para propiciar a formulação de inúmeros questionamentos, reflexões e análises que fazem com que a sala de aula se torne visivelmente um ambiente onde relações podem ser estabelecidas, possibilitando articulações diversas e, portanto, a construção do conhecimento.

A partir desse fundamento, acredita-se que o assunto do Cálculo é de fundamental relevância para a melhoria do ensino e da aprendizagem de matemática de modo a oferecer aos estudantes, uma base matemática mais consistente, baseada na experimentação, na visualização e na aplicação dos conteúdos.

Por outro lado, a inserção das ideias intuitivas ao ensino da matemática depende, ainda, de outros fatores, como o preparo do professor que atende aos alunos de quaisquer níveis, logo é necessário que haja investimento na formação continuada dos professores de matemática com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino dessa disciplina, que representará com certeza grande avanço para a melhoria da qualidade do ensino básico do país conforme as ideias de Lachini e Laudares (2001). E um dos fatores intangíveis cruciais ao uso das ferramentas de Tecnologia da Informação é a receptividade dos discentes o qual favorece ao incentivo de aprendizado pela sua alta aceitabilidade.

# 4 METODOLOGIA

Não se pretende enumerar as causas de reprovações, ou realizar estatísticas com os dados de aprovações e reprovações nas disciplinas de Cálculo na Universidade. Na verdade, será proposta uma metodologia de ensino das noções básicas dos tópicos de cálculo, com a utilização das TICs, para alunos de 2ª e/ou 3ª série do Ensino Médio para tentar formar uma base sólida de conhecimento que inicie o estudante para o preparo acadêmico futuro independente da área de atuação de sua escolha.

Com base na visualização e na experimentação é possível estabelecer diversas relações do ensino em cima das ideias intuitivas do cálculo. A metodologia que se apresenta advém de enfatizar essa ferramenta valiosa na aprendizagem de diversos conteúdos do Ensino Médio.

> O Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos. É perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função. (ÁVILA, 1991, p. 4).

Nesta etapa da escolaridade, na área de matemática, os alunos passam a ter maior contato com conteúdos que possuem grande aplicabilidade nos problemas do dia a dia. É justamente nesse momento, aliado a outros estudos, que podem ser apresentadas atividades exploratórias que estimulem a atenção e destacam a curiosidade do estudante, de modo a dar significado ao conteúdo matemático.

## 4.1 MATERIAIS E RECURSOS

Para se atingir o que se propõe nesse trabalho será necessário aplicar a metodologia em questão com suporte de alguns materiais. Os recursos principais são:

- Utilização da estrutura de uma sala de aula;
- Quadro branco;
- Pincel Marcador para quadro branco;

- Projetor de Imagens ou equipamento assemelhado;
- Computador tipo PC ou *notebook* com o *Software* GeoGebra instalado (versão 4.2.6 ou superior).

Como se pode perceber não existem materiais difíceis de se conseguir, logo a eficiência do método se deve quase que exclusivamente aos indivíduos participantes do processo: alunos e professor instrutor, na busca e construção do conhecimento.

## 4.2 PÚBLICO ALVO

O ensino do cálculo é comumente aplicado no primeiro semestre do curso superior dos cursos de exatas nas disciplinas introdutórias do Cálculo, ou nos cursos de pré-cálculo, que apresentam as noções de funções para depois se estudar o Cálculo propriamente dito. Contudo, em virtude do tema escolhido, se propõe uma adaptação e uma metodologia diferenciada de abordagem. A inovação de se realizar o experimento pedagógico com alunos do ensino médio é a meta desde que realizado adequadamente.

De fato, a proposição que se pretende é estipular um ensino que seja regido aos alunos durante todo o Ensino Médio, onde tópicos específicos devem ser apresentados de maneira gradual as 3 (três) séries do Ensino Médio, mas por limitação para aplicação, adaptação e avaliação do método, especificamente, quanto a este estudo, foram colocados pré-requisitos de alguns assuntos matemáticos que o aluno necessitava ter ciência para acompanhar as principais ideias do Cálculo, e apenas por esse motivo, tomou-se base o público alvo de alunos do 2ª e/ou 3ª série do Ensino Médio.

## 4.3 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Como mencionado anteriormente a proposta foi realizada a partir de atividades pré-montadas no GeoGebra e daí estimular o aprendizado do cálculo diferencial e integral de modo intuitivo, repassando as noções iniciais de limites, derivadas e integrais. Foram utilizados assuntos já conhecidos pelos alunos (em séries anteriores) nas atividades citadas como meios de trazer essas novas informações.

É imprescindível que os alunos participantes possuam os conhecimentos ditos como “Pontos de Revisão” com a finalidade de aplicar cada atividade. Esses “Pontos de Revisão” são basicamente os constantes na Tabela 1.

Tabela 1: Pontos de Revisão de acordo com as atividades relacionadas

| PRÉ-REQUISITOS | ATIVIDADES RELACIONADAS |
|---|---|
| Polígonos inscritos em circunferência | 1 |
| Áreas e perímetros de polígonos e área da circunferência | 1, 10, 11 |
| Reta real | 1 |
| P.G. (conceito e soma finita e infinita dos elementos) | 2 |
| Assíntotas de gráficos e interpretação do infinito | 3 |
| Retas secantes e tangentes | 4, 5 |
| Inclinação da reta | 4, 9, 10 |
| Velocidade média - Cinemática | 6 , 7 |
| Função quadrática (gráfico), ponto máximo e mínimo | 8, 9, 10 |
| Intervalos e função limitada | 8 |
| Pontos de um gráfico | 5, 11 |

Os tópicos citados acima foram escolhidos de acordo com as atividades montadas no programa, e com o objetivo apontado para cada uma delas, ou seja, o nível de conhecimento que se pede para tal tarefa é superficial em sua maioria, pois tem a finalidade de apenas cumprir o entendimento das atividades que seguem uma sequência de compreensão, findando com os alunos compreendendo os principais tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, e alguns dos fins aplicativos.

Os dados de conhecimentos dos “Pontos de Revisão”, bem como a identificação do grupo participante foram coletados dos alunos participantes através de um questionário inicial (APÊNDICE D) a fim de se ter dados de controle para uma futura análise comparativa na avaliação metodológica.

É relevante afirmar que os alunos que foram submetidos às apresentações das atividades propostas não tiveram contato direto com a manipulação do *software*, e a relação de aprendizado aconteceu apenas no modo interativo entre professor e aluno. Com essa perspectiva de visualização e intuição indubitavelmente proporcionada pelo ambiente informatizado, abre-se o espaço para o estudo exploratório de campo (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 32)[15] o qual ocorre proposição contributiva da relação de ensino.

## 4.4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A proposta dessas atividades é apresentar, ao estudante, os conhecimentos matemáticos de uma maneira diferenciada através da interação com novas tecnologias. Assim, espera-se que matemática do Ensino Médio possa ser entendida como uma ferramenta a ser aplicada nas mais diferentes situações, seja na sua vida profissional ou em seus estudos futuros, e a partir disso, a antiga concepção de que na matemática é necessária apenas se memorizar fórmulas e para aplicar os mecanismos para efetuar cálculos, muitas vezes desconexos de qualquer problema de utilidade real, deve ser abandonada.

Com esse propósito serão discriminadas as atividades realizadas no GeoGebra com a finalidade de serem aplicadas. Foram propostas 11 (onze) atividades que abordam situações simples de assuntos do ensino médio com a perspectiva de exibir aos alunos os principais elementos e tendências do cálculo de forma a atingir os objetivos inicialmente traçados.

Pensou-se em distribuir essas atividades de forma que se crie na mente do aluno uma gradação de conhecimentos que de forma interativa o faça compreender os elementos iniciais de cada tópico com a superficialidade necessária, pois sem haver a intenção de buscar formalismo pedagógico o discente tem a oportunidade de fazer parte da construção de sua própria instrução.

Os quadros abaixo seguem com a proposta de cada uma das atividades bem como com os objetivos pedagógicos que se espera atingir. E ainda, como forma de situar o aluno e o professor em cada instrução foram delineados os pré-requisitos

[15] Segundo esses autores, o termo “pesquisa naturalista ou de campo” se refere aos estudos que são realizados diretamente no campo onde acontece o fenômeno estudado.

necessários para os aprendizes terem êxito em compreender esta e as demais atividades.

A seguir serão mostrados os quadros citados, seguidos de uma descrição das atividades com a meta de relatar o raciocínio de cada passo da atividade e o fim que se deseja para elas.

### 4.4.1 Descrição da Atividade 1

Quadro 1: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 1 - Polígonos Inscritos

| |
|---|
| **Atividade 1:** Polígonos Inscritos |
| **Proposta:** Construir um polígono de $n$ lados inscritos em uma circunferência de mesmo raio, onde $n$ varia de 3 a algum número natural elevado e observar os valores da área de cada um desses polígonos inscritos. |
| **Objetivo:** Exibir que a tendência do valor de área desse polígono quando $n$ tende ao infinito é igual ao valor da área da circunferência. |
| **Pré-requisitos:** Conhecimento básico de polígonos inscritos em uma circunferência; ideia intuitiva de áreas de polígonos e da circunferência; significado de reta natural. |

Essa atividade tem o objetivo claro e simples de inserir os alunos do ensino médio para a intuição básica das noções de limites. A atividade se apresenta no *software* com um polígono de $n$ lados inscrito em uma circunferência e faz o discente focar sua atenção na comparação entre as representações de áreas do polígono ($Área\ P_a$) e da circunferência ($Área\ C$).

Com vias de facilitar a visualização da área do polígono, a mesma foi destacada no programa GeoGebra com a cor azul, conforme a Figura 1 abaixo:

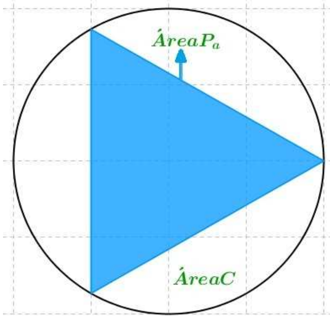


Figura 1: Polígono inscrito $P_a$ (cor azul) na circunferência $C$

Após ser informada a proposta para os alunos participantes foi utilizada a ferramenta seletora do número $n$ (cuja variação de 3 a 500 entre os números naturais) a qual altera o polígono inscrito propriamente dito (Figura 2).

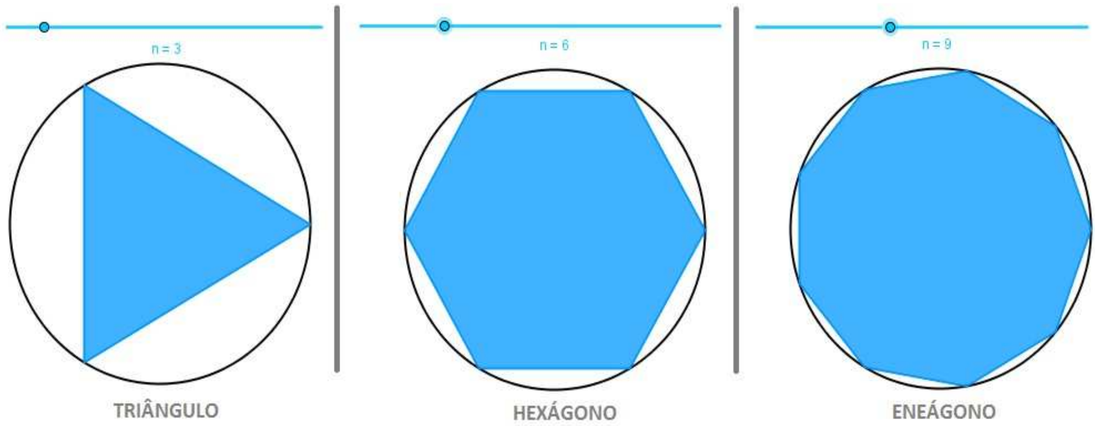


Figura 2: Alteração do polígono $P_a$ de acordo com o número de lados $n$

De maneira intuitiva, o aluno percebe que as áreas citadas tem a seguinte relação:

$$Área\ P_a < Área\ C. \tag{1}$$

Quando se eleva o número de $n$, talvez o aluno fique em duvida se as áreas em certo ponto se tornam iguais, contudo com o recurso do *zoom* é possível ver que existem áreas "sobrando" entre a circunferência e o polígono, independente do número de lados escolhido. E com fins de exemplo exibimos a Figura 3 que corrobora com o que foi dito.

É importante citar que mesmo sendo o número de lados superiores ao colocado na ferramenta (500) as áreas $P_a$ e $C$ assumirão a relação (1) e, dessa maneira faz o acadêmico pensar na ideia de limites introduzindo a noção intuitiva de infinito na matemática, pois o fazemos ver que mesmo pondo o número de lados para um milhão (1.000.000)[16] a relação (1) é válida, fazendo-o acreditar que para um

[16] através das propriedades do GeoGebra é possível colocar quaisquer valores no seletor $n$, inclusive o valor de 1.000.000, ou maior.

número indefinidamente grande esse fato continuará. Como necessariamente a igualdade dessas áreas não acontece, é que se introduz a noção de limites, representado pela notação $lim$, e indicamos o que ocorre com a relação de áreas quando o número de lados $n$ cresce muito, o que costumaremos chamar de infinito ($\infty$), ou seja, quando $n \to \infty$ (lê-se "$n$ tende ao infinito"), a relação de áreas é:

$$\lim_{n \to \infty} Área\ P_a = Área\ C. \tag{2}$$

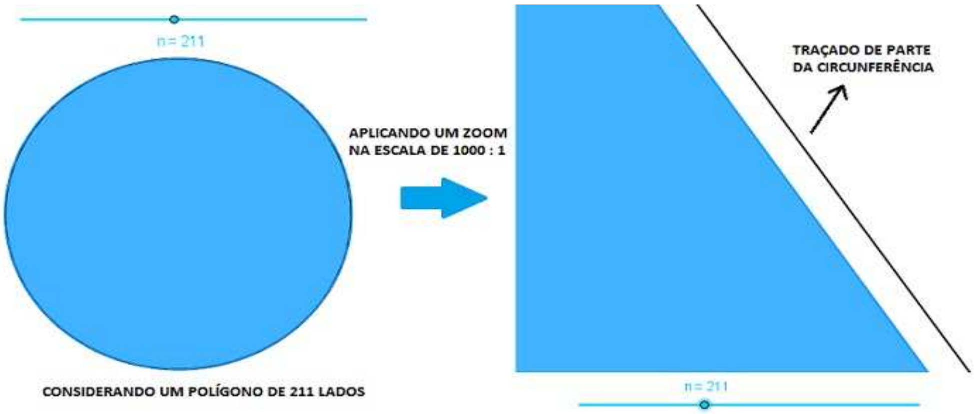


Figura 3: Visualização do polígono de 211 lados e parte da circunferência no GeoGebra com escala 1:1000

Intuitivamente, a área de cor azul ocupa cada vez mais a área de "sobra" da circunferência, mas só ocupará o seu todo no momento em que $n$ tende ao infinito, de acordo é mostrado na Figura 4.


Figura 4: Ocupação de região da circunferência com $n = 300$ e $n = 500$ na escala de 1:1000

### 4.4.2 Descrição da Atividade 2

Quadro 2: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 2 (parte 1) - Soma de Progressão Geométrica – P.G.

| |
|---|
| **Atividade 2 – parte 1:** Soma de Progressão Geométrica – P.G. |
| **Proposta 1:** Realizar uma soma de PG infinita de razão maior que 1 e elemento inicial igual a 1 e verificar o valor dessa adição; |
| **Objetivo 1:** Observar visualmente que essa soma tende ao infinito positivo quando a razão é maior que 1. |
| **Pré-requisitos:** Conceito de P.G. (elementos, razão e formação); soma de elementos de uma P.G. de razão maior que 1. |

Para essa primeira parte da atividade foi formalizada no *software* uma sequência de elementos em P.G. cujo elemento inicial foi fixado em 1 ($a_1 = 1$), e a razão $r$ (maior que 1) e o número de elementos $n$ são variáveis manipuláveis pela ferramenta seletora, onde eles foram configurados da seguinte maneira:

$$1 \leq n \leq 1100 \text{ e } 1 < r \leq 100 \text{ ,} \tag{3}$$

ambos com incrementos de $1$ unidade.

Para tornar a atividade mais visual, os elementos quando posicionados ficam representados por barras verticais cuja base localiza-se no eixo das abscissas e a altura (marcado no eixo das ordenadas) fica exatamente no valor do elemento. Além disso, os elementos subsequentes são unidos a partir do lado direito de forma crescente formando um gráfico de barras. Observe a Figura 5 a qual representa o que foi dito.

A ideia principal é perceber a tendência do valor da soma dos elementos dessa progressão quando se aumenta o número $n$. E com o auxílio intuitivo do GeoGebra e sabendo que se tem uma sequência crescente, faz-se um aumento contínuo do valor de $n$, e pede-se a observação tanto do gráfico de barras quanto do valor da soma destacado.

E, assim, é perceptível que o valor da soma cresce rapidamente devido ao resultado dos membros da sequência que também aumenta rapidamente, e na matemática, quando um valor pode ser aumentado, continuado ou estendido, tanto quanto se queira se fala na concepção do infinito, conjecturado inicialmente por Georg Cantor em 1873.

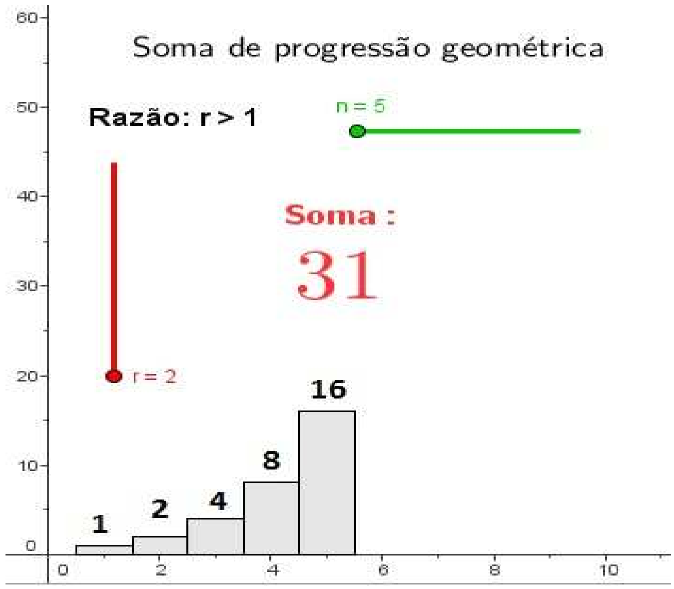


Figura 5: Representação em barras da Soma de PG com $a_1 = 1$ e $r = 2$

Especulando essa tendência de crescimento relativo do valor da soma da sequência geométrica, é que enfatizamos que quando o número de elementos $n$ cresce indefinidamente, o valor da soma tem a mesma característica, já que a sequência é crescente ( $r > 1$).

Veja a Figura 6 que exemplifica a soma da sequência quando $n = 500$ e $n = 1035$, onde o valor da soma no primeiro caso é $3{,}24 \times 10^{150}$ e no segundo o valor é tão grande que até mesmo o *software* GeoGebra já o considera tendente ao infinito (∞).

Para facilitar a compreensão foi fixado o valor da razão da sequência ($r = 2$), contudo se aumentarmos esse valor é visível que a soma dessa nova sequência crescerá mais rápido do que antes, significando que a tendência ao infinito continua, mas dessa vez acontecerá mais rapidamente.

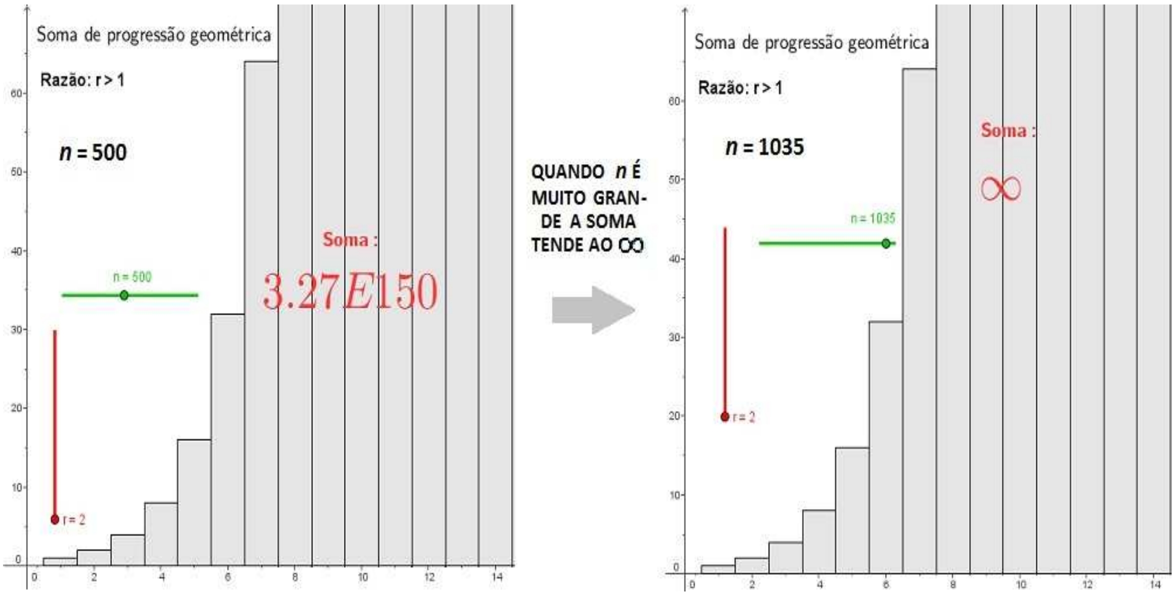


Figura 6: Comparação da Soma de PG de razão $r = 2$ com $n = 500$ e $n = 1035$

Veja na Figura 7 que com $r = 8$, já temos para $n = 182$ o valor da soma de $3{,}29 \times 10^{163}$, e o programa já considera infinito (imensamente grande) para $n = 352$:

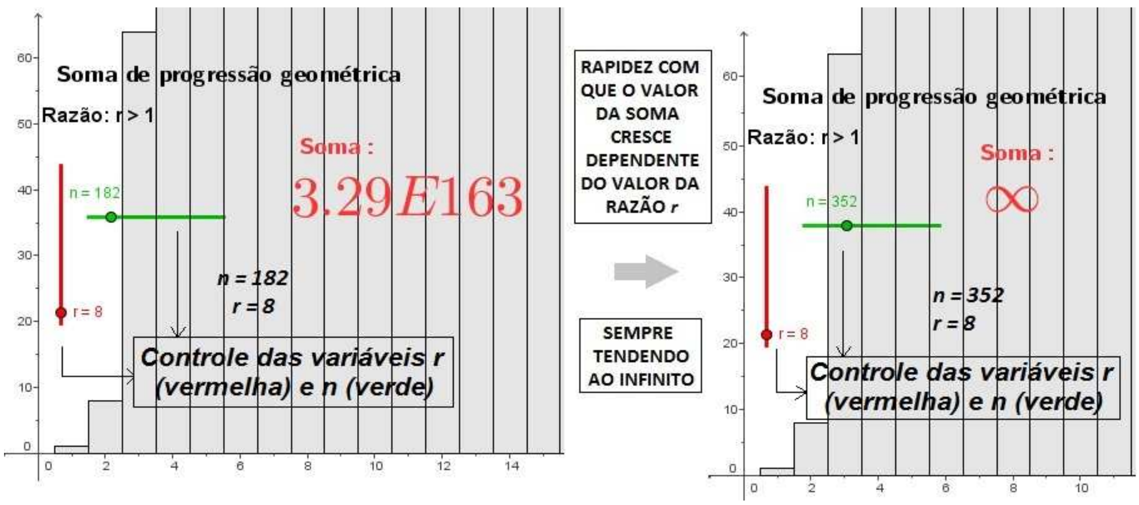


Figura 7: Comparação da Soma de PG de razão $r = 8$ com $n = 182$ e $n = 352$

Em todas as relações vistas sendo $r > 1$, é possível escrever a notação matemática de limites para a soma das progressões geométricas ($Soma$) da forma:

$$\lim_{n \to \infty} Soma = \infty \qquad (4)$$

onde se lê,” quando $n$ tende ao infinito, então a $Soma$ também tenderá ao infinito”.

Quadro 3: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 2 (parte 2) - Soma de Progressão Geométrica – P.G.

| |
|---|
| **Atividade 2 – parte 2:** Soma de Progressão Geométrica – P.G. |
| **Proposta 2:** Realizar uma soma de PG de razão maior que 0 e menor que 1 e elemento inicial igual a 1 e verificar o valor dessa adição; |
| **Objetivo 2:** Observar visualmente que essa soma é tendente ao valor $\frac{\text{elemento inicial da PG}}{1-\text{razão}}$. |
| **Pré-requisitos:** Conceito de P.G. (elementos, razão e formação); soma de elementos de uma P.G. de razão entre 0 e 1. |

Agora, para a segunda parte da Atividade 2 tem-se no *software* uma sequência de elementos em P.G. cujo elemento inicial também foi fixado em 1 ($a_1 = 1$), e a razão $r$ (entre 0 e 1) e o número de elementos $n$ são variáveis manipuláveis pela ferramenta seletora, onde eles foram configurados da seguinte maneira:

$1 \leq n \leq 300$ com incremento de $1$ e $0 < r < 1$ com incrementos de $0{,}01$. (5)

Da mesma forma que na parte 1, a visualização dos elementos da progressão geométrica também é feita através de gráficos de barras, e nota-se a tendência do valor da soma dos elementos dessa progressão quando o número de $n$ aumenta.

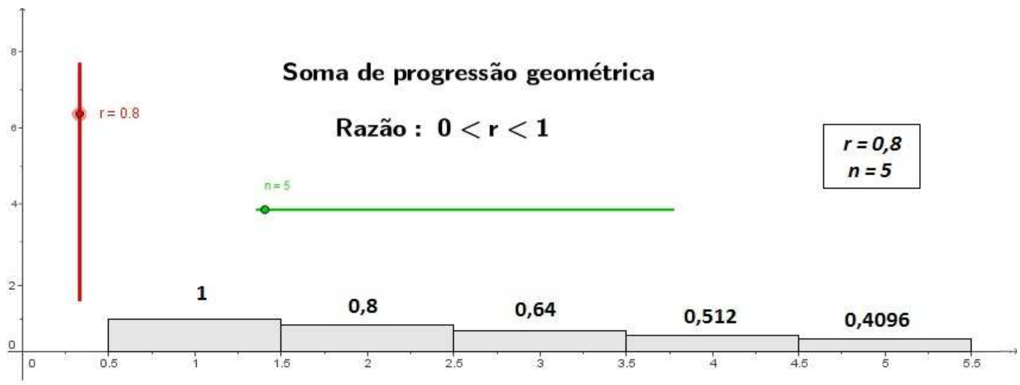


Figura 8: Representação em barras da Soma de PG com $a_1 = 1$, $r = 0{,}8$ e $n = 5$

E com o auxílio intuitivo do programa GeoGebra e sabendo que se tem uma sequência decrescente, pelo fato de os elementos posteriores serem sempre menores que os anteriores por motivo da razão da série estar entre $0$ e $1$, como podemos visualizar na Figura 8.

Sendo assim, com um aumento contínuo do número de elementos $n$, através da observação tanto do gráfico de barras quanto do valor da soma destacado, percebe-se que o valor da soma cresce lentamente devido ao resultado dos membros da sequência diminuírem lentamente.

Mas essa soma cresce indefinidamente com o aumento de $n$? Não, pois o decréscimo dos membros da série torna a soma limitada por meio da relação existente para obtenção do valor da soma dos termos de uma progressão geométrica, mostrada pela equação (6).

$$Soma = \frac{a_1 \times (1 - r^n)}{1 - r}, \tag{6}$$

onde $a_1$ é o elemento inicial, $n$ o número de elementos e $r$ a razão. É possível adaptar (6) para somas infinitas com $0 < r < 1$, pois $r^n \to 0$, devido ao crescimento de $n$, e assim, obter que:

$$Soma = \frac{a_1}{1 - r}. \tag{7}$$

Como foi considerado inicialmente que $a_1 = 1$, a substituição de $a_1$ em (7), segue o valor limite da soma:

$$Soma = \frac{1}{1 - r}. \tag{8}$$

Intuitivamente pelo GeoGebra, quando $n \to \infty$, numa sequência de razão $1/2$ temos um valor limite de soma igual a 2, como vemos a seguir na Figura 9. Observamos que para $n = 230$, o valor da $Soma$ é $1{,}99999999$, e para $n = 300$, o valor da $Soma$ é $1{,}9999999999$ com diferença de apenas $0{,}0000000111$, já para $n = 1000$ o programa já considera $Soma = 2$, que é o valor limite da nossa soma. Isso significa que por mais que $n$ aumente, o valor da $Soma$ não ultrapassará o valor 2.

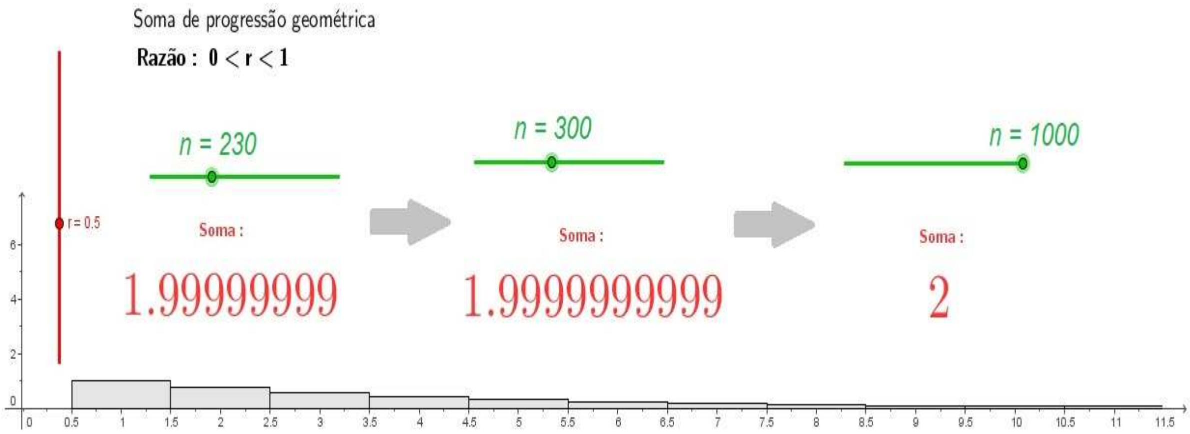


Figura 9: Comparação da Soma de PG de razão $r = \frac{1}{2}$ com $n = 230$, $n = 300$ e $n = 1000$

E assim, matematicamente com $0 < r < 1$, é possível escrever a notação matemática de limites para a soma das progressões geométricas ($Soma$) da forma:

$$\lim_{n \to \infty} Soma = \frac{a_1}{1 - r}, \tag{9}$$

onde se lê, “quando $n$ tende ao infinito, então a $Soma$ será limitada na expressão (7)”.

Observe que justamente se chama essa $Soma$ de infinita, pois independe do valor $n$ (infinitos elementos), e mesmo assim consegue-se um resultado numérico para essa soma.

### 4.4.3 Descrição da Atividade 3

Quadro 4: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 3 - Retas Assintóticas

| |
|---|
| **Atividade 3:** Retas Assintóticas |
| **Proposta:** Apresentar a visualização de gráficos assintóticos e verificar os valores que certas funções quando os valores das abscissas crescem ou diminuem indefinidamente. |
| **Objetivo:** Fazer a análise de significado intuitivo do que são os limites quando determinado valor tende a $+\infty$ ou $-\infty$. |
| **Pré-requisitos:** Saber o que é assíntota, ao menos visualmente; interpretar o que significa infinito. |

Essa atividade tenta abordar mais uma noção de limites, o qual apresentamos através de conceitos de retas assíntotas. As assíntotas podem ser verticais, horizontais e/ou inclinadas e basicamente uma reta é assíntota a uma curva quando um ponto ao mover-se ao longo da parte extrema da curva se aproxima desta reta, mas não a "toca" (AYRES JR., 1994).

Contudo, isso parece muito técnico intuitivamente, e por isso, a base do *software* é que aparecem os apelos visuais. Foi proposta a construção da função $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, onde aparece uma assíntota vertical e horizontal que pela definição de Ayres Jr. (1994) é plausível de serem encontradas a partir do estudo do domínio da função $f(x)$. O domínio da função é importante nesse caso para descobrir quais os números que a função não pode assumir para que a sua condição de existência não seja afetada, os quais representam as retas "imaginárias" assíntotas.

Para a função $f(x)$ o domínio pode ser determinado como $D = \mathbb{R} - \{1\}$, logo exatamente a reta que tem abscissa igual a 1 é uma das assíntotas $x = 1$. Observe a Figura 10 com a visualização da reta "imaginária" assíntota $x = 1$.

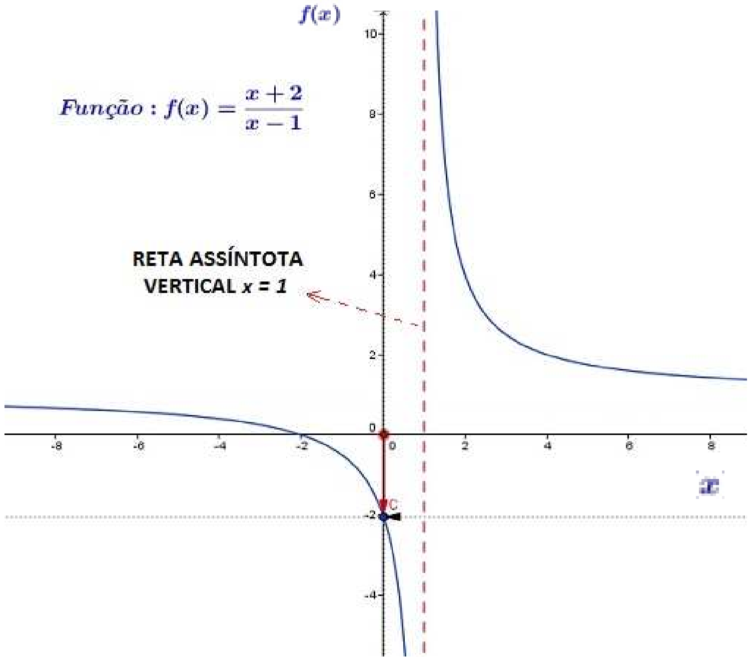


Figura 10: Representação da assíntota vertical $x = 1$ para a função $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

A partir da assíntota vertical $x = 1$ é possível realizarmos o estudo do limite de $f(x)$ quando os valores de $x$ estão próximos a $1$, seja pelo lado direito, (positivo) caracterizado pela notação $1^+$, seja pelo lado esquerdo de $1$ (negativo), representado por $1^-$. Assim, visualmente foi criado um ponto $C$ que possui mobilidade na curva e nos fornece informações de aproximação de um certo ponto, maneira muito útil para um resultado intuitivo. Tratando disso, é possível observar que quanto mais próximo do ponto 1 pela direita ($1^+$) a curva está, cada vez mais próximo o ponto $C$ se aproxima da assíntota $x = 1$, mas o ponto $C$ não "encosta" nesta reta, e o limite de $f(x)$ tende a $+\infty$, por razão de os valores das ordenadas da curva nessa aproximação serem muito grandes e positivos. E, da mesma forma, quanto mais próximo do ponto 1 pela esquerda ($1^-$) a curva está, cada vez mais próximo o ponto $C$ se aproxima da assíntota $x = 1$, mas o ponto $C$ também não "encosta" na reta, e o limite de $f(x)$ tende a $-\infty$, pois os valores das ordenadas da curva nessa aproximação serem muito grandes e negativos. Vejamos essas tendências na Figura 11:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \to +\infty \tag{10}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \to -\infty\,. \tag{11}$$

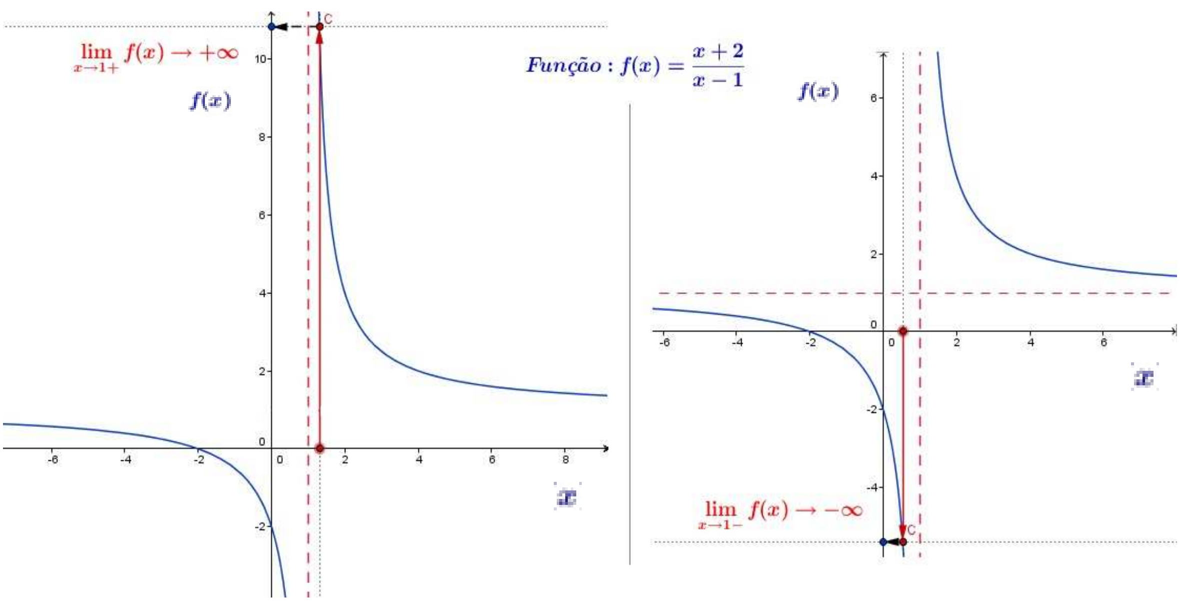


Figura 11: Tendências dos valores de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de 1 ($1^+$ e $1^-$)

Por outro lado, existe nessa função uma assíntota horizontal, a reta $y = 1$. De fato, o valor $y = 1$ também não participa da função $f(x)$, pois se isso fosse verdade teríamos um caso impossível de que:

$x + 2 = x - 1$, que só ocorre se $2 = -1$, e isso é incorreto, o que justifica a função não ter os valores quando $y = 1$.

E seguindo o mesmo raciocínio da assíntota vertical, é possível fazer o estudo do limite de $f(x)$ quando os valores de $x$ se afastam tanto para o lado direito (positivo) caracterizado por $+\infty$, quanto para o lado esquerdo (negativo) caracterizado por $-\infty$. E novamente através do mesmo ponto $C$ móvel da atividade, analisamos que os valores das abscissas da curva quando são muito grandes e positivos ($+\infty$), cada vez mais próximo o ponto $C$ se aproxima da assíntota $y = 1$, mas o ponto $C$ não "encosta" nesta reta, e o limite de $f(x)$ tende ao valor $1$. E, por essa mesma ideia, quando os valores das abscissas da curva são muito grandes e negativos ($-\infty$), cada vez mais próximo o ponto $C$ se aproxima da assíntota $y = 1$, mas o ponto $C$, também, não "encosta" nesta reta, e o limite de $f(x)$ tende ao valor $1$. Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \to 1 \tag{12}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to 1 \tag{13}$$

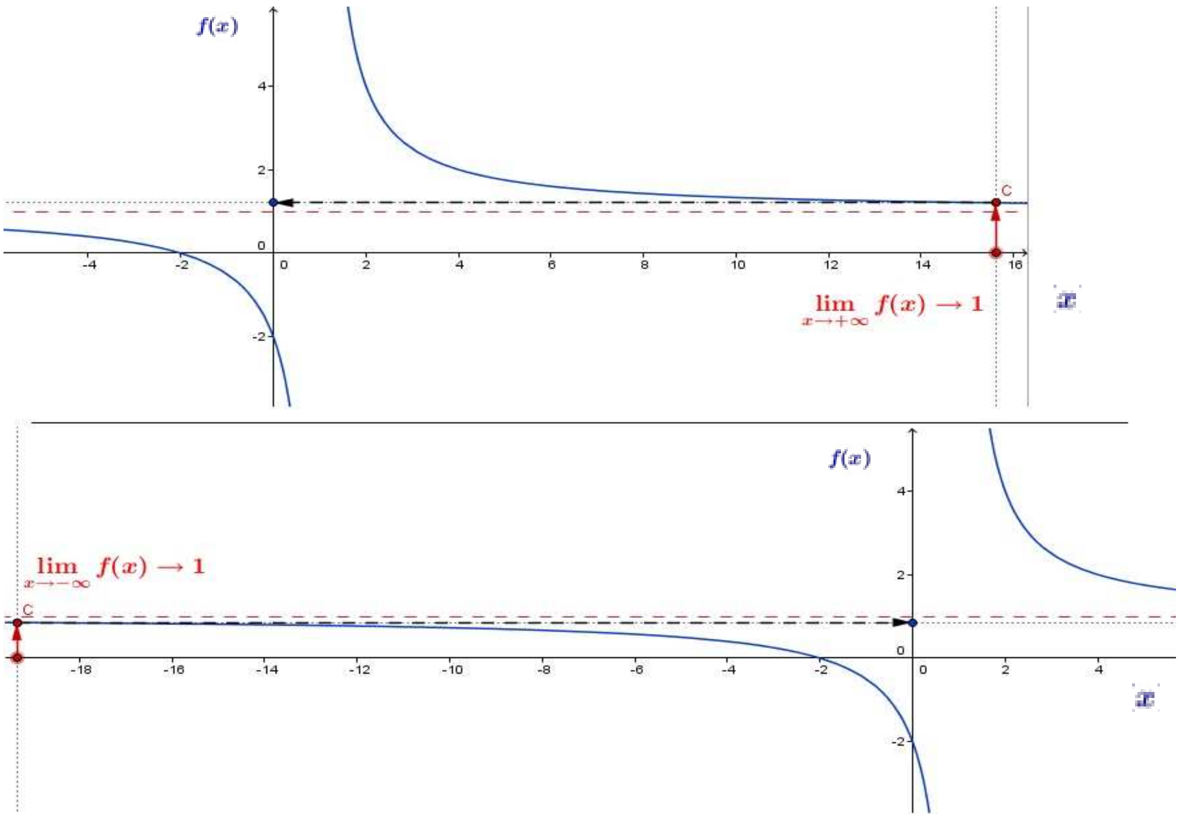


Figura 12: Tendências dos valores de $f(x)$ quando $x$ se encaminha para $+\infty$ e $-\infty$

Dessa maneira, é provável colocarmos tópicos importantes de limites em uma sala de aula do ensino médio, de maneira que os alunos entendam e fiquem interessados em saber mais sobre o tema, desmistificando o ensino do cálculo de forma mais branda.

### 4.4.4 Descrição da Atividade 4

Quadro 5: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 4 - Reta tangente e Limite

| |
|---|
| **Atividade 4:** Reta tangente e Limite |
| **Proposta:** Construir uma secante e uma tangente a um gráfico e fazer a tendência de superposição com as ideias de limites através dessa visualização. |
| **Objetivo:** Apresentar intuitivamente os conceitos de derivada através do limite da reta secante a reta tangente do gráfico em um determinado ponto. Exibindo as inclinações das retas para determinar essa relação de função com a inclinação da reta tangente (originada do limite citado). |
| **Pré-requisitos:** Significado de reta tangente e secante, inclinação da reta. |

A partir dessa atividade começam as ideias de utilização de inclinações de retas e como isso vai contribuir com o raciocínio para o ensino do cálculo. Basicamente, o aluno deverá saber o que significa reta secante e reta tangente a uma curva (graficamente) e entender o que representa inclinação de uma reta.

O GeoGebra se apresenta com o gráfico da função exemplo de equação $f(x) = 2x^2 + 5x$, uma reta secante (cor azul) e uma reta tangente (cor vermelha) com características de alteração de parâmetro, ou seja, há possibilidade de deslocar os pontos que formam essas retas, logo as retas podem ser movidas pela curva para onde se queira. A ideia relatada é verificada através da Figura 13.

Com a perspectiva de Pierre de Fermat desde o século XVII de que uma reta que passa por um ponto possui unicamente uma inclinação, é notável que se não modificarmos o ponto e nem a inclinação referida teremos a mesma reta, e não existirão outras retas com essas características (SIGUENÃS, 2009).

É esse ponto de vista que a Atividade 4 se propõe a mostrar. Focando nas retas tangente e secante, e movendo o ponto *b*, que altera o ponto *d* da reta secante, para modificar o posicionamento desta reta. Como já dito, ao se alterar a

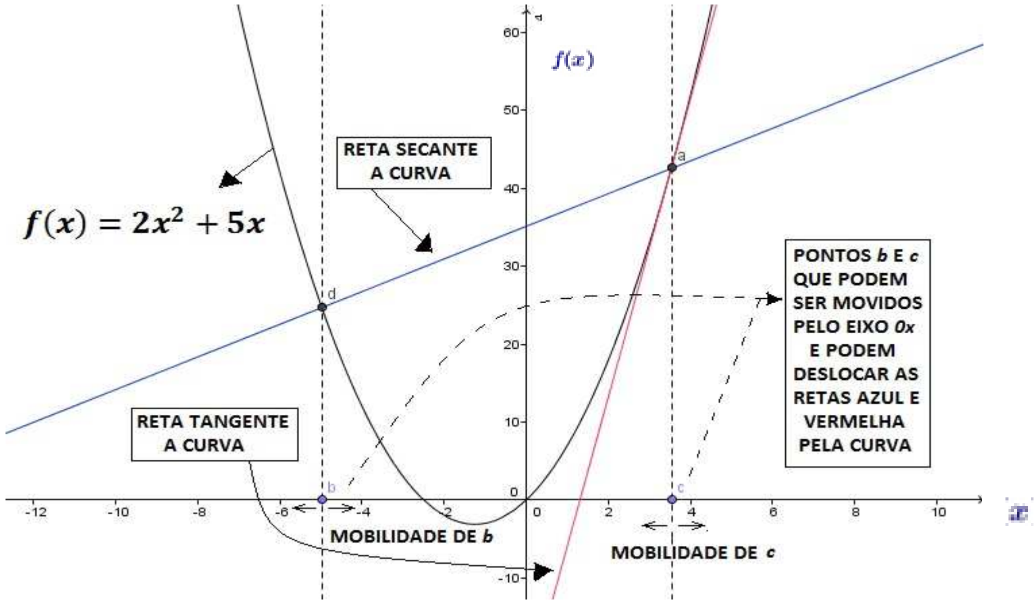


Figura 13: Descrição da interação da Atividade 4 - $f(x)$, retas tangente e secante

reta, temos um novo valor de inclinação. Ao se manter fixa a reta tangente e aproximarmos a reta secante dela, pede-se a verificação pelos alunos dos valores de inclinações de ambas as retas, que ficam destacadas na tela. Conforme mostra a Figura 14, é possível perceber que a inclinação da reta tangente é fixa, e a da reta secante é modificada de acordo com a mobilidade da própria reta.

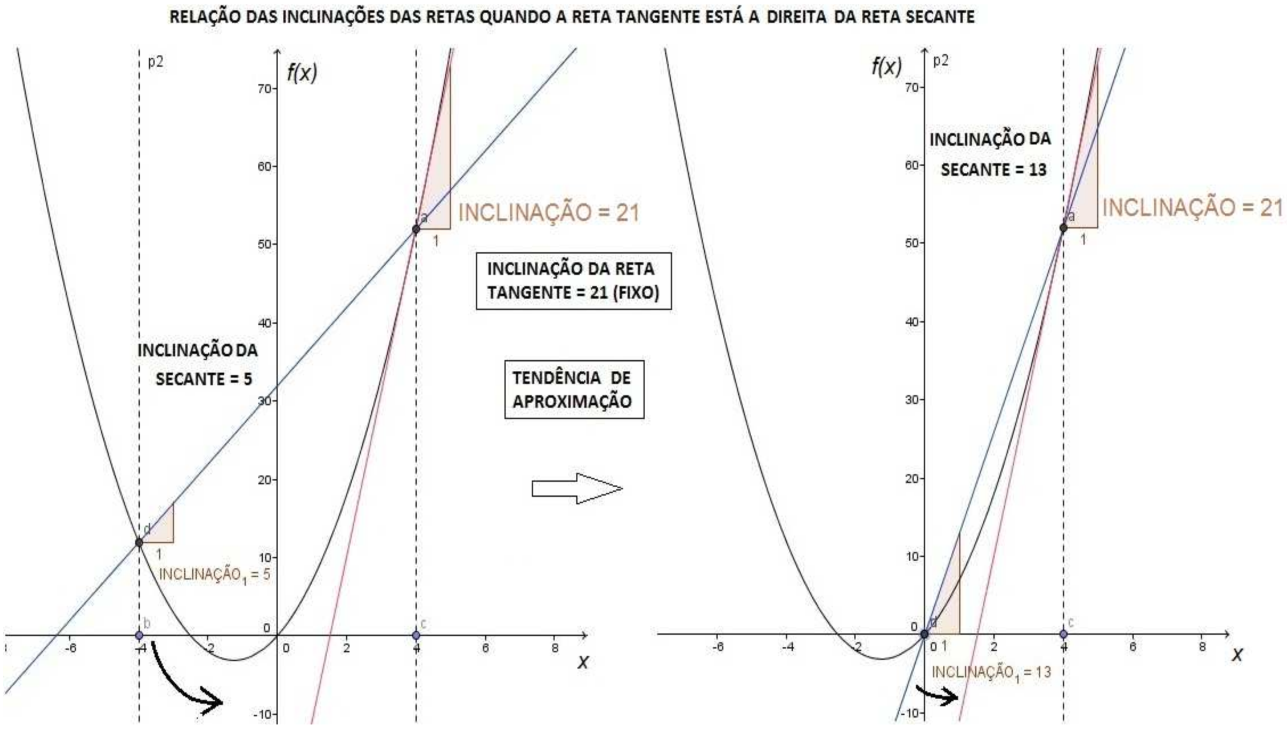


Figura 14: Relação das inclinações das retas – Tangente à direita da Secante

A observação solicitada é que quanto mais próxima a reta secante fica da reta tangente, mais perto dos valores de inclinação estão. Na Figura 14, temos o primeiro caso, o qual fixamos a reta tangente do lado direito, o qual a inclinação é igual a 21, e na posição inicial da reta secante (a esquerda da outra) o valor de inclinação é de 5, e quanto mais aproximamos da outra reta, essa inclinação, com relação a essa função $f(x)$, aumenta gradativamente, onde exibimos o posicionamento quando a inclinação se torna igual a 13. E verificando ainda a Figura 14, é possível perceber que a inclinação continua aumentando quando a reta tangente está mais a direita da reta secante, cada vez que essas retas ficam mais juntas.

Por outro lado, mostramos o segundo caso possível na Figura 15, o qual fixamos novamente a reta tangente do lado esquerdo, com inclinação igual a - 3, e na posição inicial da reta secante (a direita da outra) o valor de inclinação é de 5, e quanto mais aproximamos da outra reta, essa inclinação, com relação a essa função $f(x)$, diminui gradativamente, onde exibimos o posicionamento quando a inclinação se torna igual a - 2. E verificando ainda a Figura 15, é possível perceber que a inclinação continua diminuindo quando a reta tangente está mais a esquerda da reta secante, cada vez que essas retas ficam mais juntas.

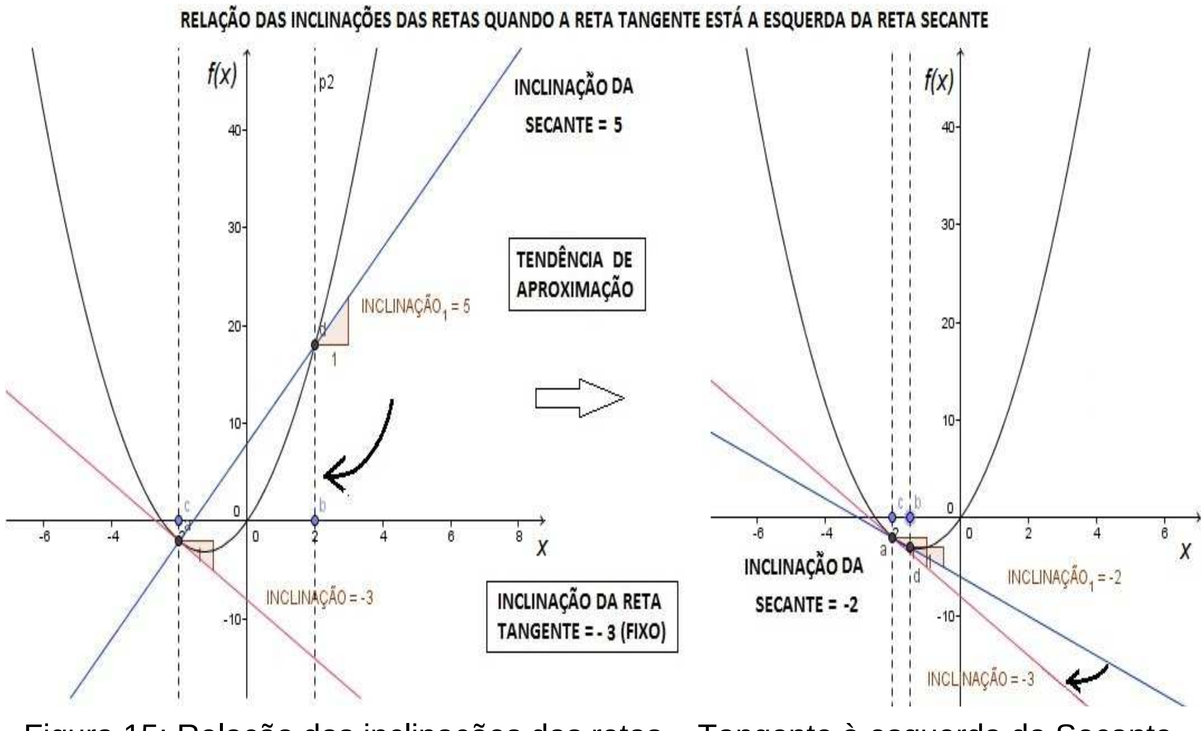


Figura 15: Relação das inclinações das retas – Tangente à esquerda da Secante

Através desses dois casos e de forma intuitiva é de se imaginar que quanto mais próximas essas retas ficam, mais suas inclinações também se aproximam, logo, quanto menor a distância entre os pontos $b$ e $c$ do eixo $0x$, mais a reta secante tende a reta tangente. Em termos de limites, é justo afirmar que quando $|b-c| \to 0$, então o limite $\lim_{|b-c|\to 0} Reta\,Secante = Reta\,Tangente$, pelo fato da aproximação das inclinações das retas, e pela propriedade da unicidade dita no início da Atividade 4, a reta secante tanto para um lado quanto para o outro se torna, de fato, a reta tangente a curva. Na Figura 16 é exibida essa coincidência das retas.

Mas poderia haver questionamentos como o que isso tudo tem a ver com o tema proposto. E essa situação deve ser tida como uma informação importante, pois com uso das noções de limites obtemos uma reta tangente a uma curva a partir das retas secantes, e ainda mais, foi possível traçar o início do objetivo gráfico da atividade que seria a introdução do significado geométrico das derivadas em um ponto, sem sequer fazer a definição do conceito de funções derivadas, meta essa que será proposta para a próxima atividade.

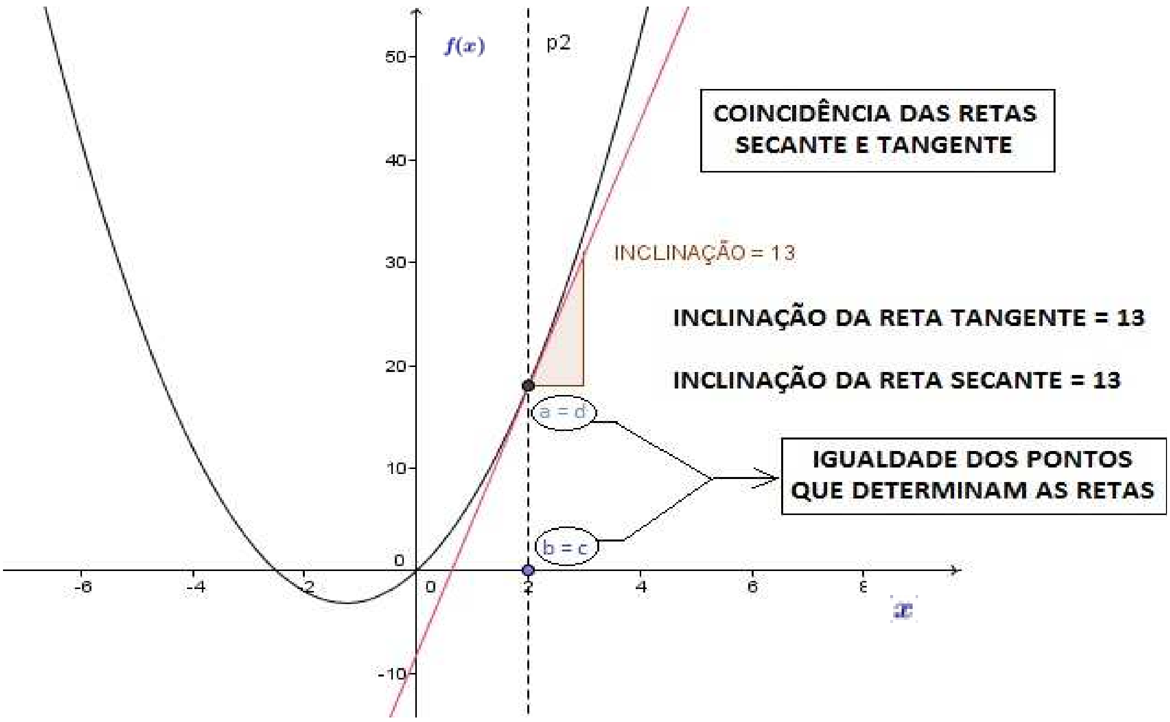


Figura 16: Coincidência das retas secante e tangente

### 4.4.5 Descrição da Atividade 5

Quadro 6: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 5 - Coeficiente Angular e Tangentes

| |
|---|
| **Atividade 5:** Coeficiente Angular e Tangentes |
| **Proposta:** Construir gráficos de $f(x)$ e a partir deles observar que os valores dos coeficientes angulares possuem uma relação comum.<br>A atividade exibe o gráfico da função $f(x)$ escolhida e existe uma animação dos pontos de $(x, f(x))$ a partir da função tangente em cada um desses pontos.<br>Utilizam-se os conceitos da atividade anterior. |
| **Objetivo:** Descobrir qual é a função formada pelos pontos da função tangente em cada ponto $(x, f(x))$, bem como tentar identificar alguma relação dessa função com o próprio $f(x)$. |
| **Pré-requisitos:** Construção de gráficos simples (pelo menos o seu significado), e saber o conceito de tangentes a pontos desses gráficos (advindo da atividade anterior). |

Como indicamos na Atividade 4, de forma geométrica, que a inclinação da reta tangente a uma curva é o valor da derivada da curva naquele ponto, então o que seria obtido se traçarmos todas as retas tangentes dessa curva e extraíssemos os valores das inclinações respectivas? É a essa pergunta que tal atividade se propõe a responder, sempre de modo visual e intuitivo.

A atividade em si consiste em escolher uma função de estudo e colocá-la no campo “$f(x) =$”, e fazer a animação do ponto $A$ que percorre toda a função em seu domínio. Ao realizar isso, é exibido na Janela de Visualização o gráfico de $f(x)$ com o ponto $A$ móvel, conforme pode ser visto na Figura 17. Também, foi programado para exibição da reta tangente por cada ponto $A$ e o correspondente valor de inclinação. A partir dessas inclinações é mostrado na Janela de Visualização 2 do GeoGebra o “rastro” da função formada por esses valores, também na Figura 17. E por fim, no campo “Entre com a função do gráfico à direita =” tenta-se acertar qual é a função correta que aparece na Janela de Visualização 2, a chamada função derivada de $f(x)$. Se ocorrer um acerto, ou um erro na escrita da função no campo correlato, o *software* oferece essas indicações.

Foram estipulados alguns passos didáticos para apresentação dessa atividade. Iniciou-se com uma função constante qualquer, por exemplo, $f(x) = 1$, na Figura 17 mostra-se os detalhes da atividade no GeoGebra.

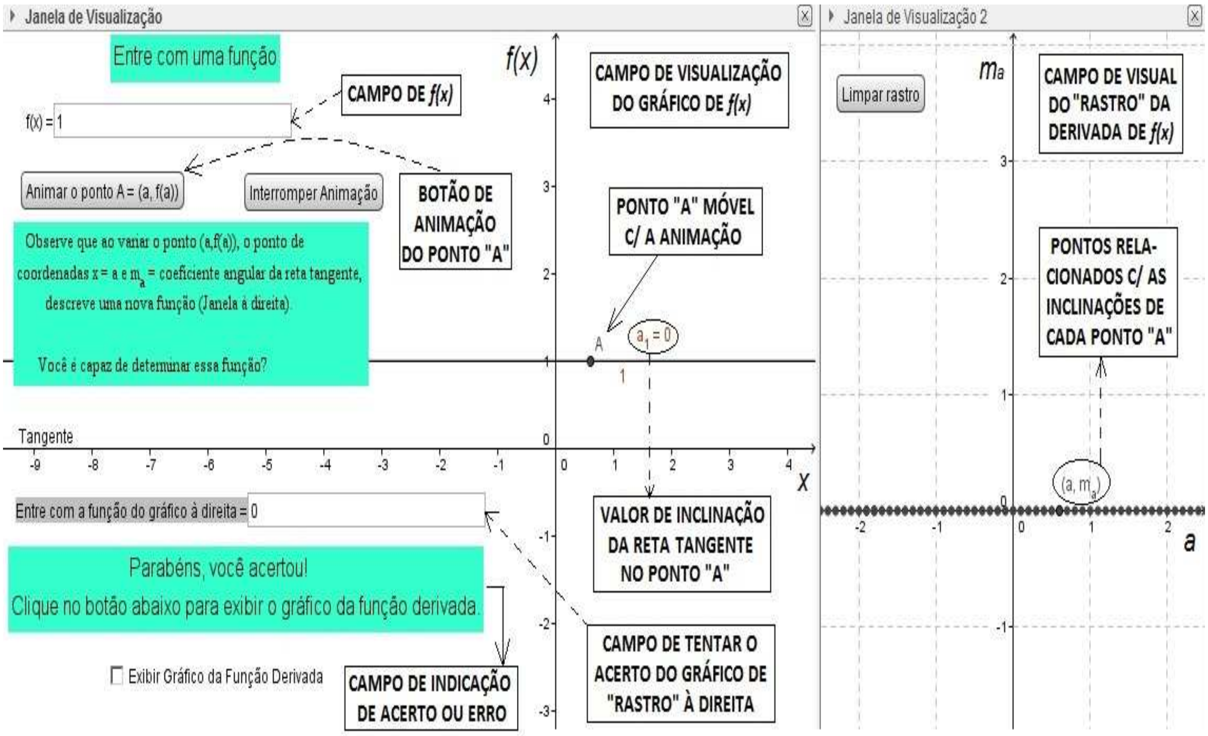


Figura 17: Apresentação da Atividade 5 no GeoGebra

No exemplo em questão é possível ver que o gráfico existente na Janela de Visualização 2, da Figura 17 é $g(x) = 0$, bem como para todos as funções constantes do tipo $f(x) = k$, para $k \in \mathbb{R}$, pois todas elas fornecem o valor $0$ (zero) de inclinação para todos os pontos do domínio. E colocando o valor 0 (zero) no campo “Entre com a função do gráfico à direita =”, acerta-se a atividade.

Com objetivo didático, podemos utilizar essa ferramenta para uma função de uma reta, como $f(x) = x$. Executando a animação do ponto $A$ da reta, obtemos o “rastro” da função inclinação na Janela de Visualização 2, conforme tem-se na Figura 18.

Como observado, a inclinação da reta é sempre a mesma, o que gera a função da direita sempre uma função constante, e para o caso do exemplo dado é temos $g(x) = 1$, conforme o gráfico da Figura 18. Contudo se o aluno não acertar a

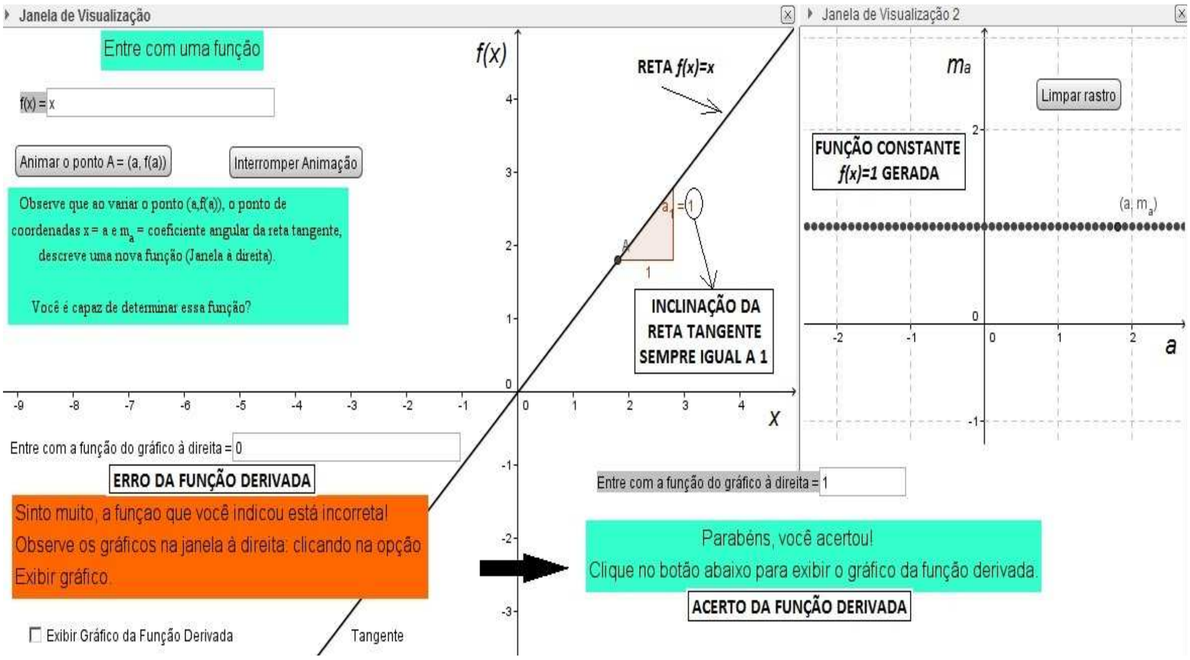


Figura 18: Aplicação da atividade com a função $f(x) = x$

resposta da função à direita, o programa informa o erro, e se ele o acertar, o GeoGebra também o avisa, parabenizando-o.

A atividade dispõe de uma estrutura que pode se aproveitar muito o estudo de quaisquer tipos de funções, mas para o foco do ensino médio, é virtude do professor instrutor escolher adequadamente as funções exemplo para se ter um fim desejado de compreensão e não pressionar os discentes com conhecimentos que talvez eles não tenham, saindo do foco da metodologia.

### 4.4.6 Descrição da Atividade 6

Quadro 7: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 6 - Velocidade Média

| |
|---|
| **Atividade 6:** Velocidade Média |
| **Proposta:** Visualizar que se têm aplicações iniciais para o estudo do cálculo diferencial e que se conectam diretamente com o limite de funções e com os conceitos intuitivos vistos de função derivada. A situação da proposição é um corpo que percorre certa distância em um tempo determinado e assim, é possível calcular a velocidade desse móvel. E, para esse caso, é importante observar o coeficiente angular e ver qual a coincidência que se tem. |
| **Objetivo:** Interpretar os conceitos de velocidade média como o valor do coeficiente |

| |
|---|
| angular a reta tangente no intervalo requerido, ou seja, dados dois pontos de um gráfico, a velocidade média será justamente o valor da inclinação da reta que passa pelos dois pontos dados. |
| **Pré-requisitos:** Significado de velocidade média de um corpo (cinemática básica), cálculo de velocidade média de um móvel tendo as informações de velocidades final e inicial, bem como o tempo final e inicial do movimento. |

Nessa atividade resolvemos apresentar uma relação entre inclinação de reta tangente e velocidade média.

A atividade se apresenta com um móvel que percorre do ponto $A$ para o ponto $B$ cujas coordenadas são respectivamente $(2, 9)$ e $(7, 14)$, que aparece no formato $(t, s)$, onde $t$ é o tempo do percurso e $s$ é a distância percorrida.

Pedem-se duas coisas, a inclinação da semirreta $AB$ e a velocidade média do móvel que vai de $A$ para $B$. Para a primeira questão a obtenção da inclinação da reta $m$ advém da relação:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \tag{14}$$

onde $(x_0, y_0) = A$ e $(x, y) = B$ . Assim:

$$m = \frac{14 - 9}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1. \tag{15}$$

Por outro lado, o cálculo da velocidade média ($V_m$) na física é resultado do quociente entre a variação da distância percorrida pela variação do tempo gasto no percurso:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{14 - 9}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1\ m/s. \tag{16}$$

Verifica-se que os valores de (15) e (16) são numericamente iguais, e isso se deve pelo motivo de a semirreta $AB$ utilizada ser a mesma. Essa visualização pode ser feita na Figura 19:

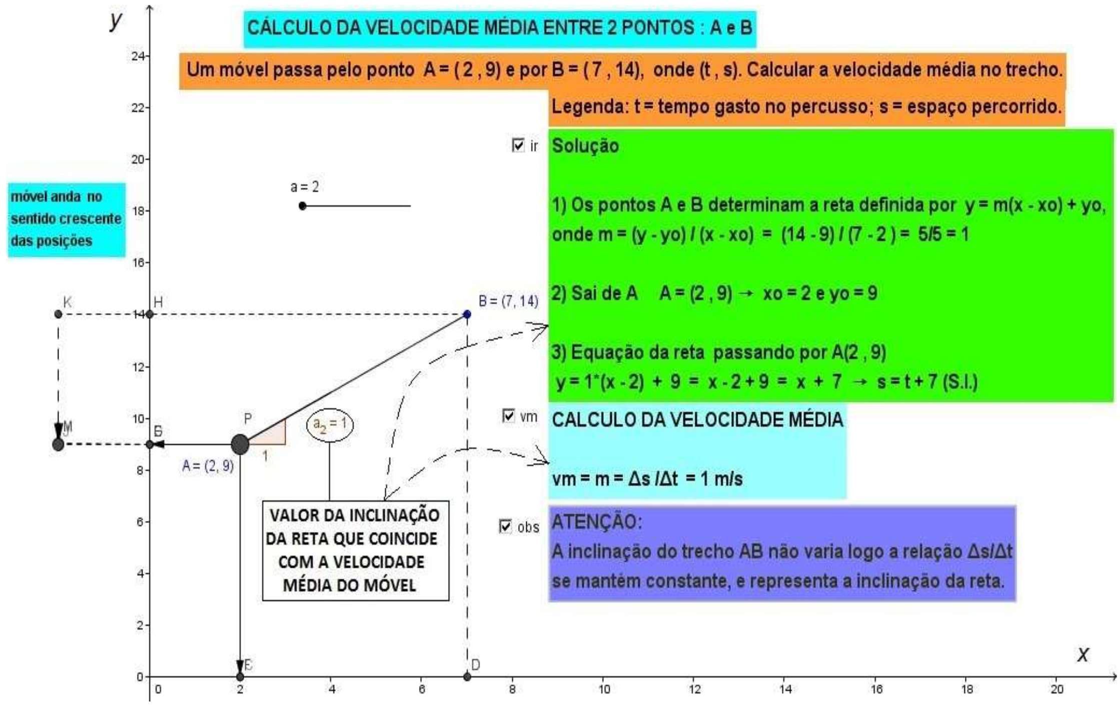


Figura 19: Inclinação do segmento $AB$ relacionada com a velocidade média

É importante citar que essa atividade possui o intuito de iniciar o estudante com as relações aplicativas do cálculo como é o caso da taxa de variação envolvida aqui. Especificamente, essa simples aplicação é apenas um breve início do que é possível realizar no campo da física o qual será aprofundada na próxima atividade.

### 4.4.7 Descrição da Atividade 7

Quadro 8: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 7 - Velocidade Média e Instantânea

| |
|---|
| **Atividade 7:** Velocidade Média e Instantânea. |
| **Proposta:** Estipula-se um móvel a partir do instante zero (cidade A) e desloca-o a uma cidade B e C. Nesse caminho há 2 (dois) guardas que anotam a velocidade instantânea do veículo nas cidades B e C, e desses valores se extraem algumas informações.<br>Aqui, tenta-se envolver o aluno mais a partir da aplicação para daí conseguir impor a importância do cálculo. Para essa atividade relacionaremos os conceitos de velocidade média (antes vista) com a velocidade instantânea (que aborda a essência de inclinação da reta, só que por um ponto). |
| **Objetivo:** Trazer a visualização para se chamar atenção de um fato novo para se |

| |
|---|
| afirmar o conceito do que foi visto na Atividade 6. Ou seja, a velocidade instantânea em um determinado ponto $(x, f(x))$ tem tudo a ver com o valor da derivada da função espaço $f(x)$ (curva fornecida) no ponto escolhido $(x, f(x))$, que é a inclinação da reta tangente que passa por esse ponto. |
| **Pré-requisitos:** Significado de velocidade média, aproximação da reta secante a tangente no gráfico da função e inclinação da reta. |

Nessa atividade há mais uma aplicação para a Física, a qual sugere que um veículo sai da cidade A e trafega até a cidade B, passa por 2 guardas na rodovia cujo limite de velocidade é de 90 Km/h, depois o móvel vai até a cidade C. O veículo segue em viagem segundo a equação de movimento:

$$s(t) = 8t^2 + 40t, \tag{17}$$

onde $s$ é a distância percorrida em Km e $t$ é o tempo em horas.

E a partir desse contexto a atividade propõe 4 (quatro) perguntas que relacionam com o que foi aprendido até agora sobre o cálculo. Veja a Figura 20 que exibe a estrutura inicial da Atividade 7:

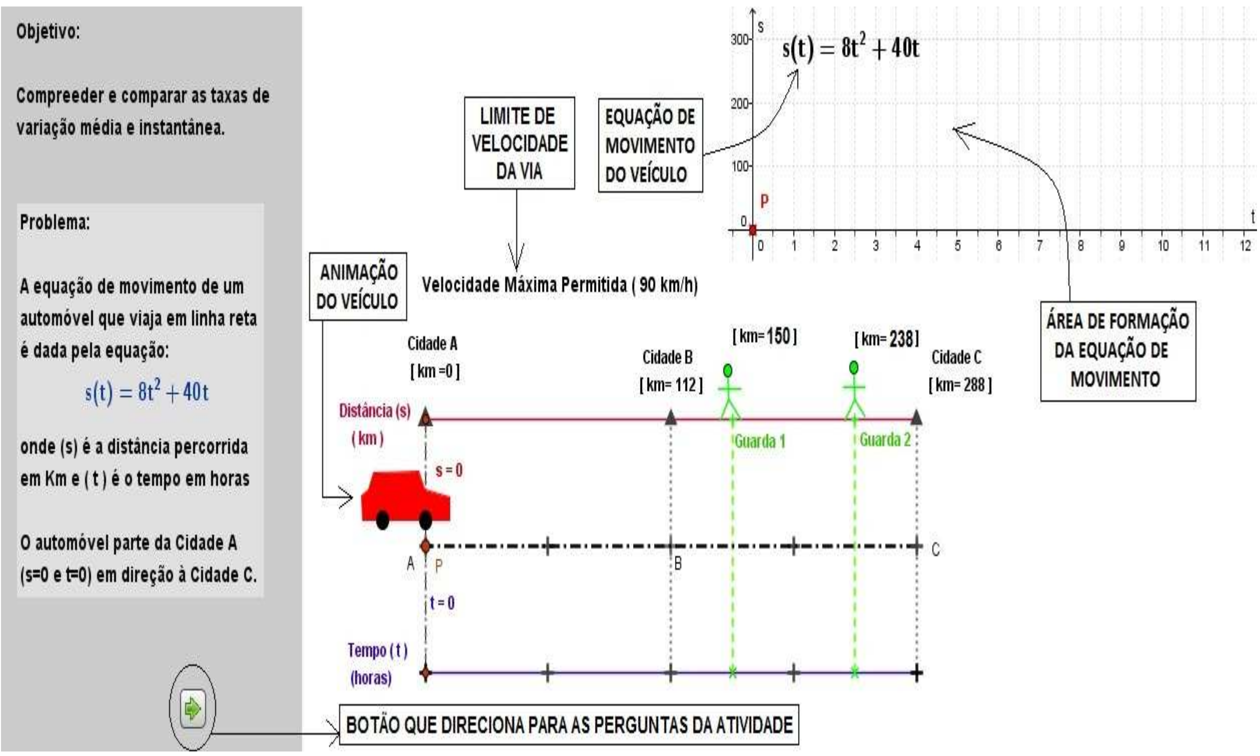


Figura 20: Contexto da Atividade 7 aplicada no GeoGebra

Pressionando o botão para o direcionamento de perguntas, temos a primeira situação.

Pergunta 1: Qual é a velocidade média do automóvel no percurso entre as cidades A e B?

Para iniciar deslocamos o veículo até a cidade B que significa que o mesmo percorreu 112 Km em 2 horas de viagem. Trata-se basicamente de um cálculo simples para determinar a velocidade média, ou seja,

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{112-0}{2-0} = \frac{112}{2} = 56\ Km/h, \tag{18}$$

que através da Atividade 6 sabe-se que o valor de $V_m$ representa a inclinação da reta de pontos extremos $(0,\ 0)$ e $(2, 11\ 2)$ que correspondem aos pontos $A$ e $B$.

Observe a Figura 21 que mostra a equação de distância junto com a reta que passa por $AB$, e que a inclinação dessa reta é equivalente ao quociente da variação da distância pela variação do tempo gasto no percurso, o qual é justamente a velocidade média desse trajeto.

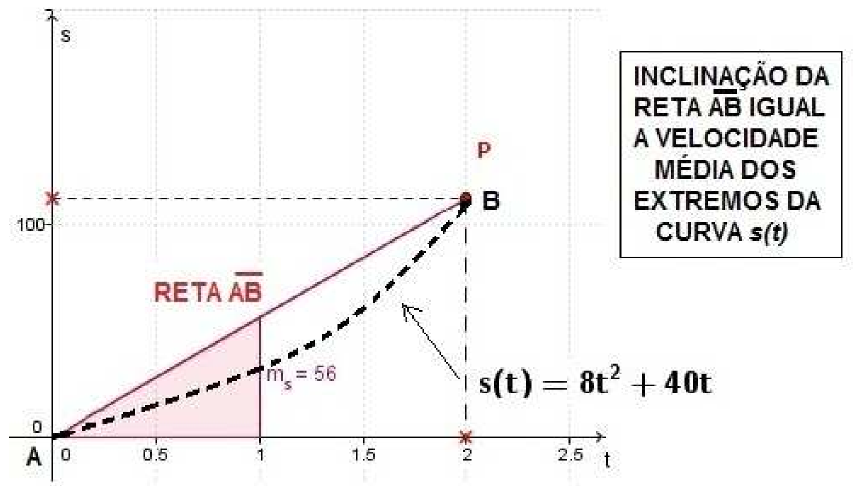


Figura 21: Equação de espaço $s(t)$ e inclinação da semirreta $\overline{AB}$

Respondido o quesito 1 partimos para outra situação.

Pergunta 2: O veículo passa pelo Guarda 1, e questiona-se se ele foi multado por excesso de velocidade.

Novamente arrastamos o veículo até o ponto citado, no caso $({}^{5}\!/_{2}, 150)$.

Para sabermos se o motorista foi multado ou não devemos encontrar sua velocidade instantânea $V_i$, ou seja, a velocidade do veículo no momento que está no ponto “Guarda 1”.

Para a velocidade instantânea é suficiente que apliquemos o limite da função velocidade média quando o tempo tende a abscissa do ponto desejado, ou seja, é a inclinação da reta tangente a curva da distância nesse ponto, que é único, conforme afirmado na Atividade 4. Com efeito, temos:

$$\lim_{t \to t\prime} V_m = \lim_{t \to t\prime} \frac{\Delta s}{\Delta t} = inclinação\ da\ reta\ tangente\ a\ s(t) \rightarrow m_T \qquad (19)$$

Aplicando (19) ao ponto $(5/2, 150)$, segue que:

$$\lim_{t \to 2,5} V_m = \lim_{t \to 2,5} \frac{\Delta s}{\Delta t} = m_{T_1} \qquad (20)$$

Observe a Figura 22 que fornece o valor da inclinação da reta tangente ($m_{T_1}$), e com isso a velocidade instantânea no momento em que o veículo passa pelo Guarda 1, conforme a eq. (20).

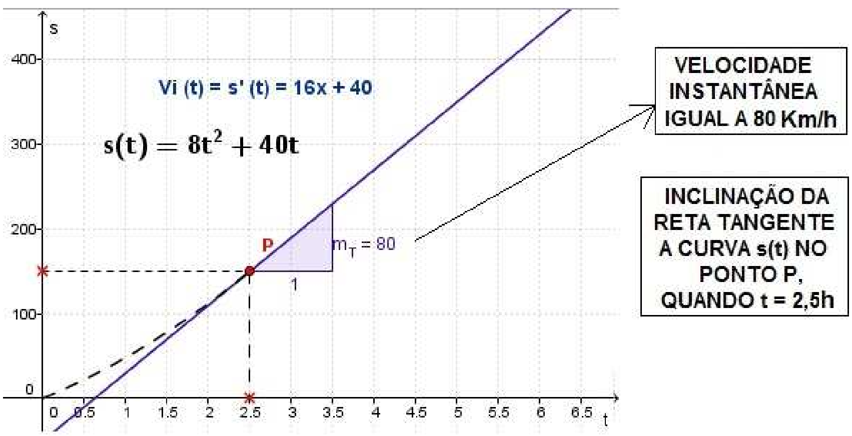


Figura 22: Inclinação da reta tangente a $s(t)$ em $t = 2,5\ h$ representa $V_i = 80\ Km/h$

Concluindo a resposta da pergunta 2, como $V_i = 80\ Km/h$ e o limite da via é de $90\ Km/k$, então o motorista não foi multado pelo Guarda 1.

Já a pergunta 3 se refere ao mesmo questionamento de multa só que quando o veículo passa pelo Guarda 2.

Agora colocamos o veículo até o ponto citado, no caso $({}^{7}/_{2}\,, 238)$. E através da mesma justificativa da situação anterior aplicamos a eq. (19), a qual referida ao ponto em questão obtém-se o resultado:

$$\lim_{t\to 3,5} V_m = \lim_{t\to 3,5} \frac{\Delta s}{\Delta t} = m_{T_2} \qquad (21)$$

Observe que na Figura 23 aparece o valor da inclinação da reta tangente ($m_{T_2}$), e com isso da velocidade instantânea no momento em que o veículo passa pelo Guarda 2, conforme a eq. (21).

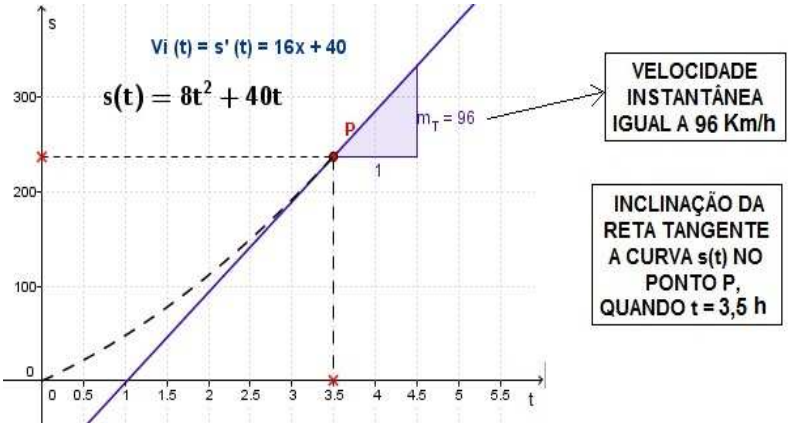


Figura 23: Inclinação da reta tangente a $s(t)$ em $t = 3,5\ h$ representa $V_i = 96\ Km/h$

E, concluindo a resposta da pergunta 3, como $V_i = 96\ Km/h$ e o limite da via é de $90\ Km/h$, então o motorista agora foi multado pelo Guarda 2.

E para finalizar os questionamentos, seguimos para a pergunta 4.

Pergunta 4: Qual a velocidade média do automóvel no percurso entre as cidades A e C?

Com essa finalidade, deslocamos o veículo na cidade C que representa que o mesmo percorreu 288 Km em 4 horas de viagem, logo simplesmente determinamos a velocidade média, ou seja,

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{288-0}{4-0} = \frac{288}{4} = 72\ Km/h. \qquad (22)$$

E esta visualização está na Figura 24:

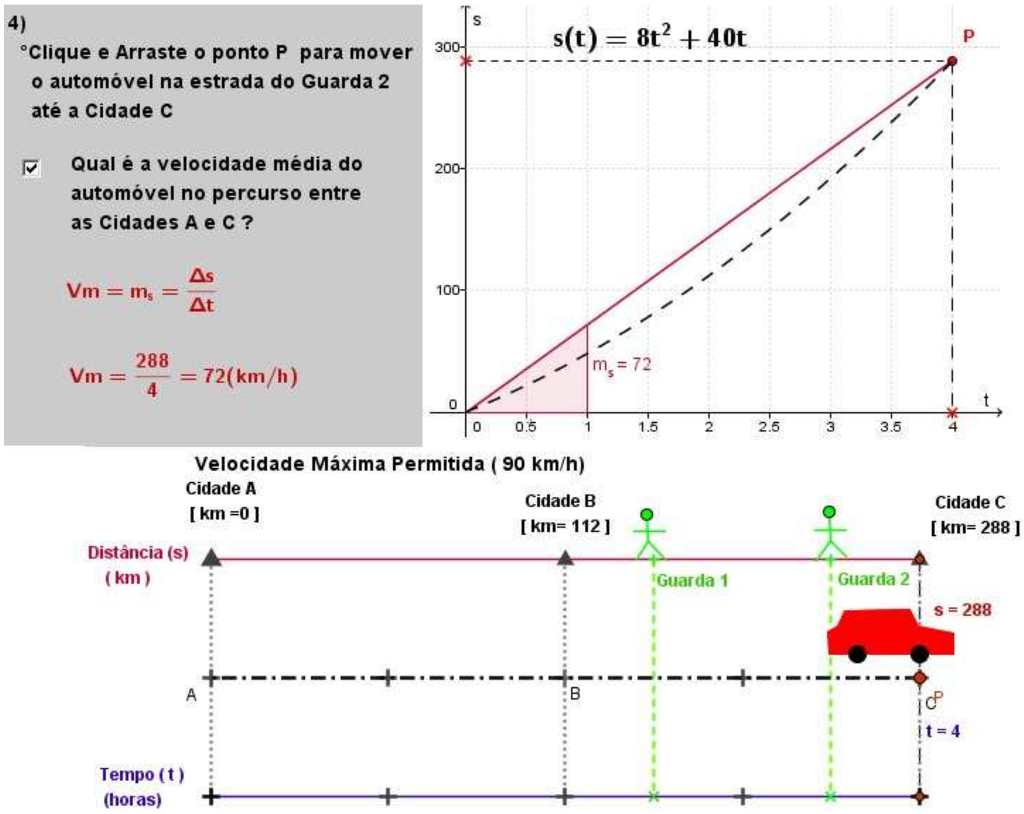


Figura 24: Visualização do esquema da pergunta 4 da Atividade 7

É importante salientar que apesar de o motorista durante a viagem ter uma velocidade média abaixo do limite $(72\,Km/h)$, isso não significa que ele não ultrapassou essa velocidade em alguns momentos do trajeto, como por exemplo, no ponto onde está o Guarda 2, onde o veículo chegou a $96\,Km/h$.

### 4.4.8 Descrição da Atividade 8

Quadro 9: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 8 - Máximos e Mínimos em Função Quadrática

| |
|---|
| **Atividade 8:** Máximos e Mínimos em Função Quadrática. |
| **Proposta:** O estudo dessa parte se concentra no gráfico da função quadrática mais especificamente no que diz respeito a ponto de mínimo e máximo (locais e absolutos).<br>Temos duas retas paralelas ao eixo das ordenadas, uma para o máximo e a outra para o mínimo, onde cada uma delas deve passar pelo ponto que a determina.<br>Como estamos tratando com uma função quadrática, então em termos absolutos |

| |
|---|
| (toda a curva), só teremos um ponto de mínimo (concavidade para cima) ou apenas um ponto de máximo (concavidade para baixo), pois nestes casos há apenas uma reta tangente cuja inclinação é nula, e justamente nos pontos citados (máximo ou mínimo).<br>Em termos locais, é sempre possível encontrar um ponto de mínimo e um ponto de máximo, isto porque a função de 2° grau estará limitada em um intervalo, e assim não necessariamente será possível encontrar a reta tangente cuja inclinação é nula. |
| **Objetivo:** Localizar os pontos de máximo e mínimo (locais e absolutos), se eles assim existirem. |
| **Pré-requisitos:** Função quadrática, ponto máximo e mínimo, função limitada (intervalos). |

Essa atividade trata a respeito de pontos críticos (máximo e mínimo) em uma dada função quadrática. Basicamente, é para fazer o aluno pensar como encontrar pontos de máximos e/ou mínimos com a proposta de retas tangentes a uma curva e suas inclinações.

O fato de ser utilizado o gráfico de uma função quadrática é por razão de ser mais didático ao aluno, pois essas funções possuem apenas um ponto crítico por vez, isto é, se tiver concavidade para baixo, existirá apenas ponto de máximo e esse será único, e da mesma forma quando a função tiver concavidade para cima teremos apenas ponto de mínimo que também será único, conforme é exibido na Figura 25.

A proposta pretende verificar o que acontece com a inclinação da reta tangente quando o ponto de tangência considerado é um ponto crítico. Através da Figura 25 é possível notar que a reta tangente nesse ponto é paralela ao eixo $0x$, e isso pelos conceitos vistos, significa que o valor da inclinação dessa reta é igual a zero.

Na Figura 26, exibe-se a tela da atividade no GeoGebra. De acordo com o que afirmamos sobre a inclinação da reta tangente nos pontos de máximo e mínimo serem iguais a zero, é intuitivo que esse fato aconteça com todas as funções em seus pontos críticos.

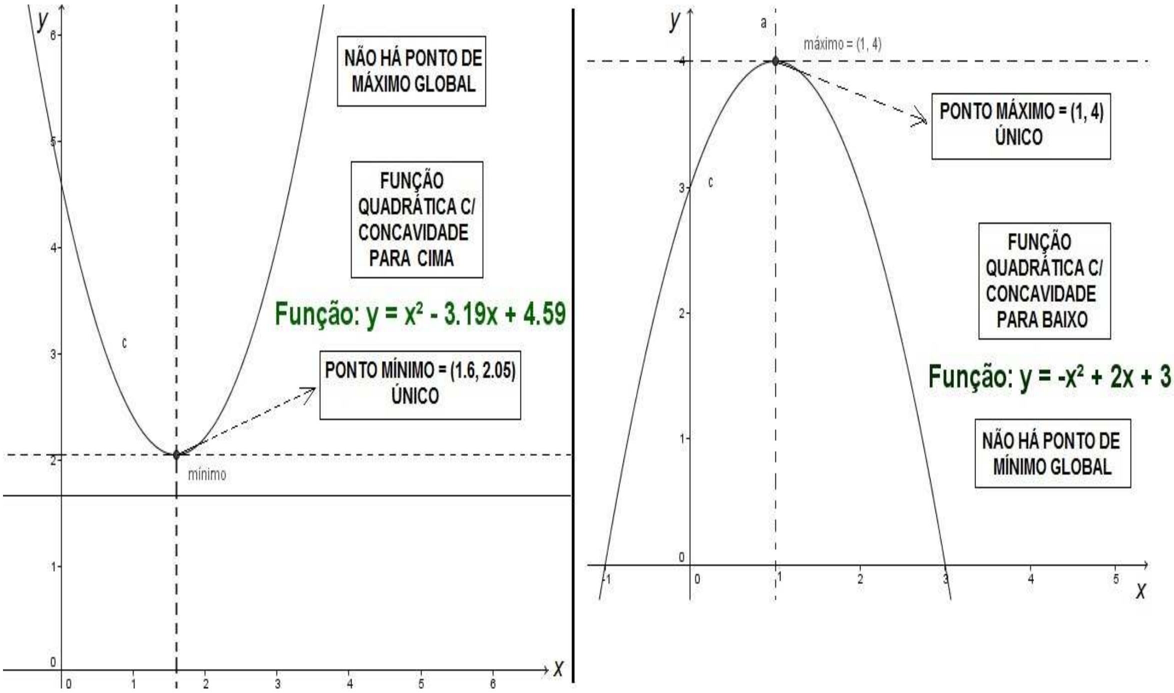


Figura 25: Funções quadráticas com concavidade para cima e para baixo e seus pontos críticos

Pela razão de chamarmos a inclinação da reta tangente no ponto de derivada da função no ponto em questão, podemos dizer que para a obtenção dos pontos críticos de quaisquer funções (que tenham esses pontos) é suficiente que calculemos a derivada do ponto e a façamos igual a zero.

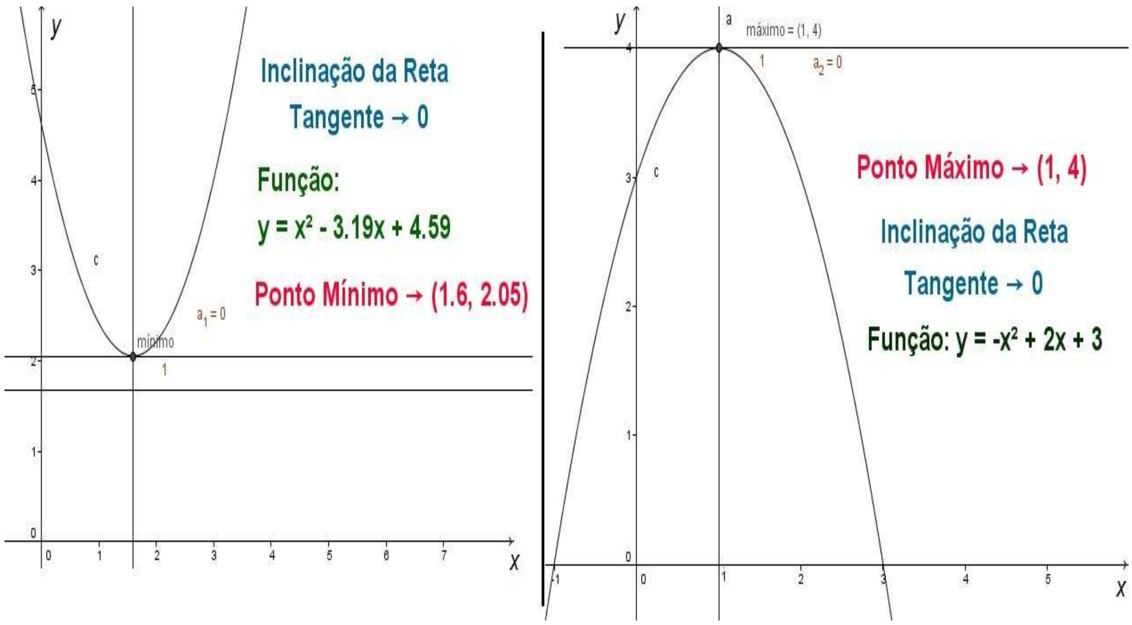


Figura 26: Inclinações das retas tangentes iguais a zero nos pontos críticos

Uma outra observação importante é a utilização da função quadrática com fins didáticos, conforme dito, mas é plenamente possível aplicar essa ideia ao contexto de outras funções. Um exemplo clássico é a apresentação de uma função trigonométrica, como o $sen(x)$, que possui inúmeros pontos críticos. Veja a Figura 27 a qual corrobora esse exemplo o qual apresenta tanto pontos mínimos quanto máximos.

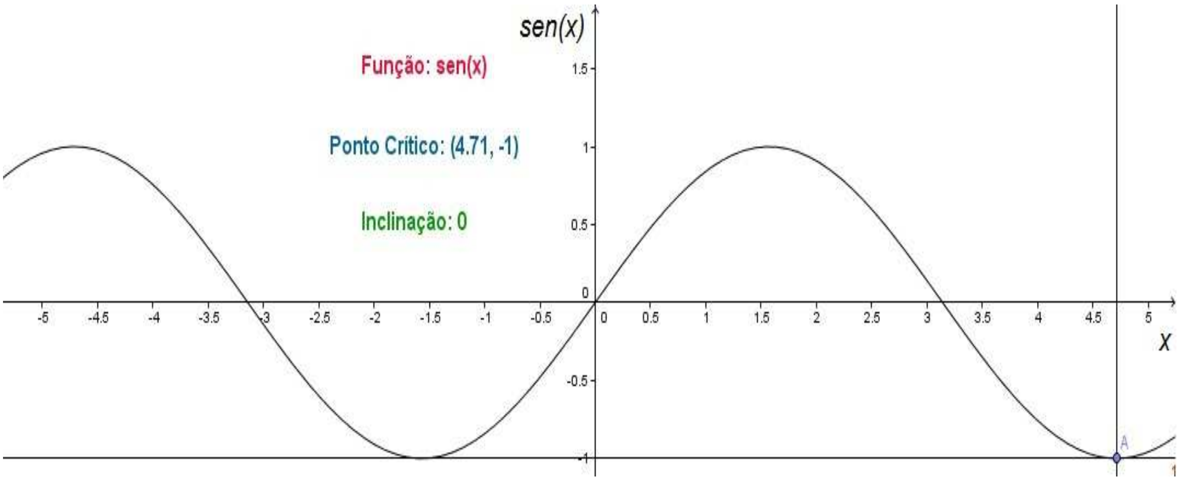


Figura 27: Função trigonométrica $sen(x)$ que possui inúmeros pontos críticos

#### 4.4.9 Descrição da Atividade 9

Quadro 10: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 9 - Minimização de Custo (Economia de Combustível)

| |
|---|
| **Atividade 9:** Minimização de Custo – Economia de Combustível. |
| **Proposta:** Nessa atividade, agora contextualizada, temos um veículo que possui uma certa curva de consumo *y* e procura-se saber a qual velocidade tal veículo economiza mais combustível, isto é, em qual velocidade o veículo deve se manter de forma que o combustível consumido seja o mínimo possível.<br>Contudo, como há relação da inclinação das retas tangentes em cada ponto convém que seria inviável calcular cada uma dessas velocidades (em cada ponto), logo o objetivo principal é perceber que esse valor mínimo será quando da ocorrência da inclinação for nula, ou seja, a reta paralela a abscissa do eixo.<br>E constam na atividade os valores tanto da velocidade quanto do gasto de combustível correspondente para haver a visualização comprovada do que se afirma acima. |

| |
|---|
| **Objetivo:** Utilizar as informações aprendidas até então para se obter as velocidades da curva, e assim, saber em qual velocidade o veículo economiza mais combustível. |
| **Pré-requisitos:** Relacionado com a atividade anterior (ponto máximo e mínimo, bem como a inclinação da reta). |

As Atividades 9 e 10 são aplicações contextualizadas de utilização direta do que foi aprendido através da Atividade 8, ou seja, encontrar pontos críticos de curvas a fim de responder questões cotidianas.

A Atividade 9 se apresenta com o problema de um veículo que tem uma relação de consumo de combustível de acordo a velocidade que o mesmo trafega. Assim, deseja-se saber qual a velocidade que o veículo deve manter para que consuma a menor quantidade de combustível possível.

A equação de consumo que o veículo tem é a seguinte:

$$y = 0{,}005x^2 - 0{,}6x + 26, \tag{23}$$

onde $x$ é a velocidade do móvel em $Km/h$ e $y$ é consumo de combustível em $l/Km$.

Observe que a função em questão é quadrática com a concavidade para cima, então pelo que vimos anteriormente essa função possui um único ponto mínimo, e é a abscissa deste ponto que queremos encontrar.

Costumeiramente no ensino médio para calcular esse ponto se utiliza o método algébrico que envolve fórmulas para os valores de $x$ e $y$ do vértice ($x_V$ e $y_V$), tais como:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}\,, \tag{24}$$

onde, $\Delta = b^2 - 4ac$ com $a, b, c$ elementos da equação de 2°grau $y = ax^2 + bx + c$.

Esse formato é visível na Figura 28, apesar de não ser o foco da atividade.

Apesar do cálculo algébrico, é preciso fazer o cálculo dos valores de $x_V$ e $y_V$ da forma de inclinações da reta tangente. E como se sabe, a inclinação no ponto crítico (mínimo para o caso) deve ser igual a zero, e para isso, essa atividade contem uma reta tangente auxiliar móvel, a qual é utilizada para verificar o valor da inclinação, e ao obter esse valor nulo, indica que a reta tangente é paralela ao eixo $0x$ e o ponto de tangência é o valor cuja ordenada é o mínimo da função.

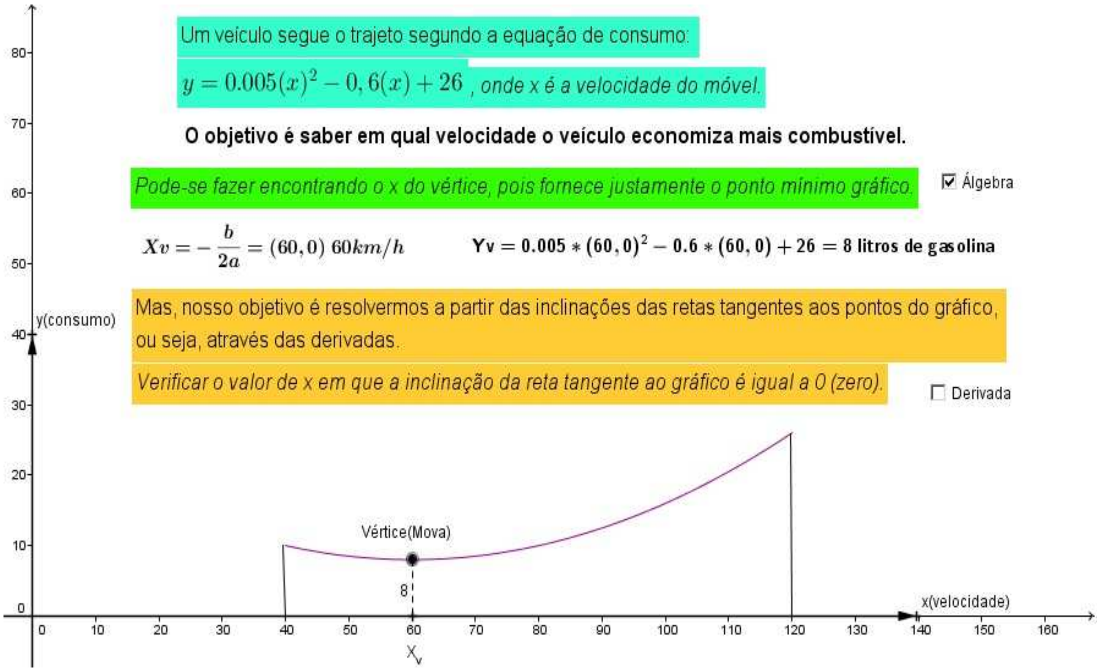


Figura 28: Visualização da resolução algébrica do ponto $(x_V, y_V)$

Uma vez que o ponto de tangência no GeoGebra é móvel, ao o movimentarmos, alteramos também a reta tangente auxiliar. Fazemos isso de forma a aproximar até o ponto requerido, conforme o processo visto na Figura 29.

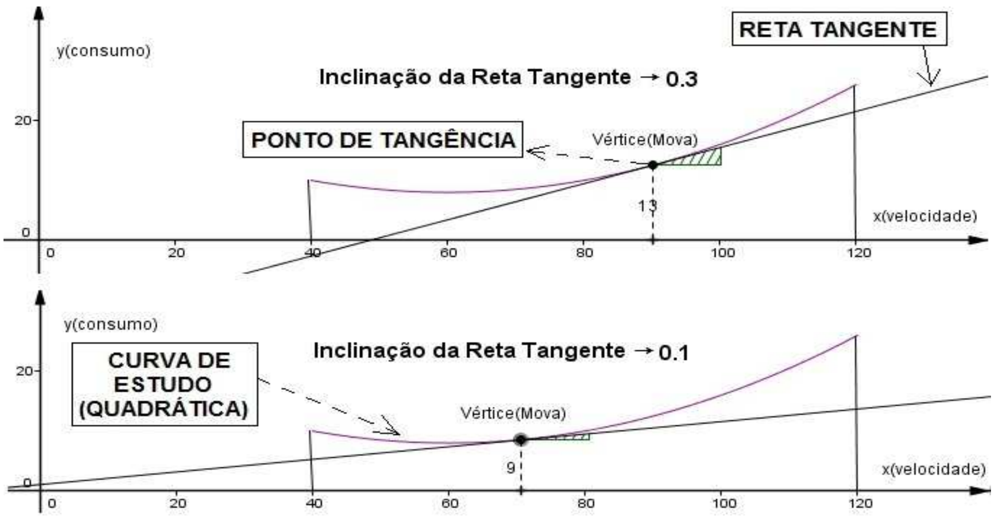


Figura 29: Comparação da inclinação da reta tangente ao aproximar do ponto crítico

Já quando a reta auxiliar chega ao ponto mínimo, ela se apresenta como na Figura 30, onde se vê também a igualdade dos valores algébricos de $x_V$, pelo simples fato de esse ponto ser o mínimo, e único. Contudo, o método visual e intuitivo oferece mais ênfase ao tema, buscando cada vez mais intensamente o interesse do aluno.

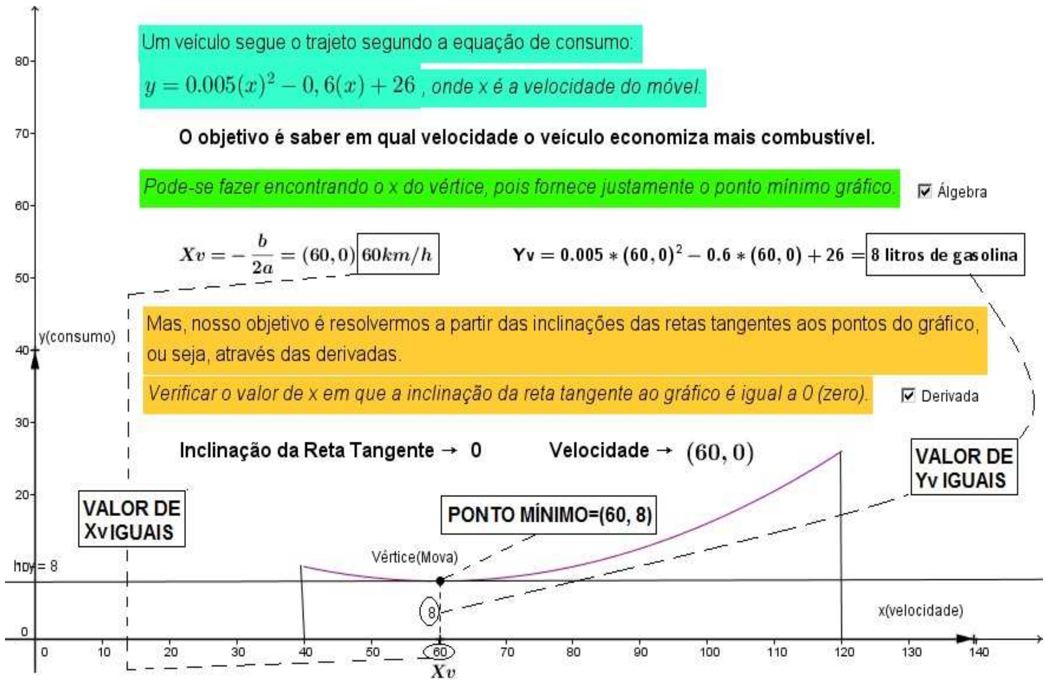


Figura 30: Ponto mínimo da equação consumo $y$ através da inclinação igual a zero

O fato da reta de inclinação zero fornecer exatamente o menor valor da função é possível obter o valor de $x_V$, e este representa exatamente a velocidade de tráfego do veículo que o faz economizar o máximo de combustível.

Respondendo a questão da atividade, obtemos que a velocidade que o veículo deve seguir para o menor consumo de combustível é de $60\ Km/h$.

Faz-se necessário realizar uma observação com respeito da função quadrática ser um bom exemplo para esse tipo de objetivo, e assim, poder optar pela realização apenas do cálculo algébrico sem maiores problemas, contudo a utilização das fórmulas (24) serve apenas para equações quadráticas. E se a curva que se queira estudar for algo mais complexo e difícil de delinear? Para essas ocorrências que o estudo das derivadas é uma das ferramentas mais adequadas, devido a possibilidade de se traçar as retas tangentes de quaisquer dessas curvas, perfazendo o restante da análise conforme explanado.

### 4.4.10 Descrição da Atividade 10

Quadro 11: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 10 - Minimização de Custo (Perímetro x Área)

| |
|---|
| **Atividade 10:** Minimização de Custo – Perímetro x Área. |
| **Proposta:** Tem um terreno de área retangular de valor fixo. Contudo as dimensões dos lados são variáveis e se pretende colocar redes de proteção ao redor desse terreno de forma que se tenha o menor custo financeiro. Fixou-se o preço do metro da rede em questão no valor de R$ 3,00. |
| **Objetivo:** Observar que o perímetro do retângulo está vinculado ao valor do custo e com isso obter o inter-relacionamento das funções custo e área do retângulo, percebendo inclusive que pelo método da reta tangente ao gráfico do custo para responder ao questionamento de minimização de custo é necessário encontrarmos o ponto onde a inclinação da reta é igual a zero. |
| **Pré-requisitos:** Cálculo de área do retângulo, cálculo do perímetro do retângulo, gráficos, inclinação da reta e ponto mínimo. |

Na Atividade 10 tem-se outra aplicação contextualizada para se justificar encontrar pontos críticos de uma curva. Agora, foi concebido que há um retângulo $ABCD$ que simula um terreno cuja área é fixa de 100$m^2$, porém o perímetro do mesmo pode ter suas medidas modificadas. Acontece que se deseja cercar o terreno de modo que se minimize o custo de colocação de uma rede de proteção que custa R$ 3,00 por metro. Pergunta-se: quais as dimensões dos lados do terreno com essas características?

A primeira vista pode-se não notar a interligação do questionamento com o tema estudado, entretanto, devemos realizar o tratamento adequado para compreender que podemos alterar perfeitamente as dimensões de comprimento desse terreno mesmo mantendo a área fixada.

Por meio de ideias iniciais de área de um retângulo, temos que:

$$Área\ (ABCD) = base \times altura \Leftrightarrow Área\ (ABCD) = \overline{AD} \times \overline{AB} = 100m^2. \qquad (25)$$

E o perímetro do retângulo:

$$Perímetro\ (ABCD) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}. \tag{26},$$

Como em um retângulo os lados paralelos são de mesmo comprimento, então:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ e } \overline{BC} = \overline{AD}. \tag{27}$$

Substituindo (27) na relação (26), segue:

$$Perímetro\ (ABCD) = 2 \times (\overline{AD} + \overline{AB}). \tag{28}$$

E como a relação de custo da rede proteção está diretamente envolvida com a medida do perímetro (28), é notável que o custo é igual a 3 (três) vezes o valor do perímetro, pois o preço dessa rede é de R$ 3,00 por metro, logo:

$$Custo\ da\ rede = 3 \times Perímetro\ (ABCD)\ \Leftrightarrow Custo\ da\ rede = 6 \times (\overline{AD} + \overline{AB}) \tag{29}$$

A Figura 31 foi extraída da tela do GeoGebra que mostra como foram apresentadas no *software* todas essas informações para os alunos.


Figura 31: Apresentação inicial da Atividade 10 no GeoGebra

Para contribuir com o fim intuitivo foi criado um retângulo $ABCD$ no *software* onde é possível alterar as dimensões desse polígono mantendo fixa a área, e ainda interagir com a atividade podendo visualizar o que de fato acontece.

O ponto $D$ (um dos vértices do retângulo) tem característica de ser móvel, e através disso todo o retângulo se adéqua alterando as medidas dos seus lados sem modificar a relação (25).

Voltando ao caso do custo, vimos que é necessário minimizar a relação (29). Contudo, é preciso que inter-relacionemos as medidas de área e perímetro (que afeta diretamente no custo). Para tanto, de (25), temos:

$$\overline{AD} \times \overline{AB} = 100m^2 \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{100}{\overline{AD}}\,. \tag{30}$$

E aplicando (30) em (29) segue:

$$Custo\ da\ rede = 6 \times (\overline{AD} + \overline{AB}) \Longrightarrow Custo\ da\ rede = 6 \times \left(\overline{AD} + \frac{100}{\overline{AD}}\right)$$

$$Custo\ da\ rede = 6 \times \left(\frac{\overline{AD}^2 + 100}{\overline{AD}}\right) \Longrightarrow\ Custo\ da\ rede = \frac{6\overline{AD}^2 + 600}{\overline{AD}} \tag{31}$$

E o que significa isso? Significa que temos a representação do custo da rede de proteção relacionado com o valor de uma das medidas de comprimento do terreno, mantendo o valor fixo da área.

Com posse da função a minimizar, foi posto o gráfico na atividade e traçado a reta tangente móvel de forma a auxiliar na visualização. Veja como foi executado esse gráfico na Figura 32, bem como perceber as relações de minimização a partir disso.

Como já se sabe que a inclinação no ponto crítico (mínimo para o caso) deve ser igual a zero, ao obter esse valor nulo, indica que a reta tangente é paralela ao eixo $0x$ e o ponto de tangência é o valor cuja ordenada é o mínimo da função.

Ao alterar o ponto $D$, já mencionado, a reta tangente se desloca pelo gráfico fornecendo sempre um valor diferente de inclinação, e através da proposta de minimização do custo buscamos a inclinação zero e temos imediatamente o custo mínimo, que se refere ao valor da ordenada no ponto em questão.

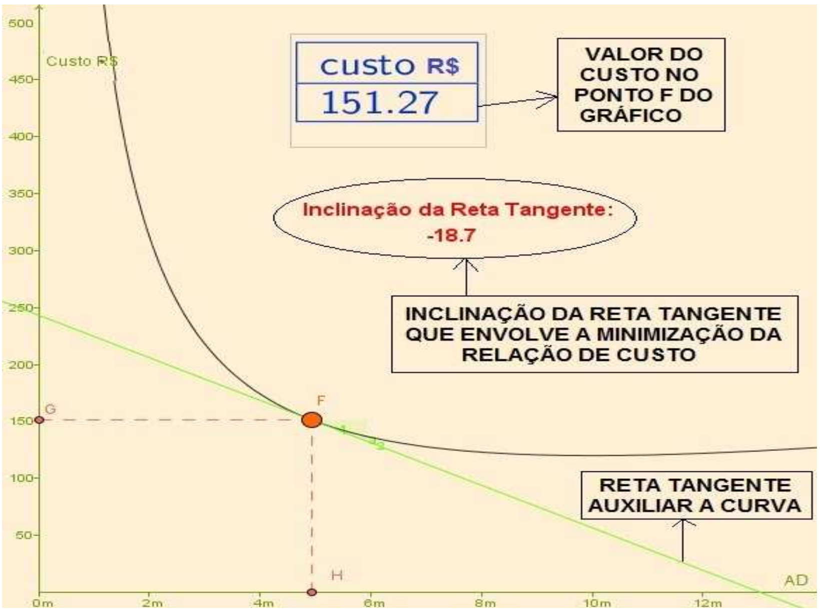


Figura 32: Gráfico de Custo da rede *versus* Comprimento $\overline{AD}$ do terreno

É possível verificar que próximo a esse ponto determinado, o valor do custo apenas aumenta, seja para um lado, seja para o outro, e não há valor menor do que o encontrado naquele ponto.


Figura 33: Custo mínimo relacionado com a função do gráfico

Veja na Figura 34, por exemplo, quando o ponto de tangência da reta está a esquerda do ponto indicado como mínimo, então a inclinação dessa reta é negativo e o custo relativo ao preço da rede é maior que os R$ 120,00 informado. Por outro lado, quando o ponto de tangência da reta está à direita do mesmo ponto, então a inclinação dessa reta é positiva e, ainda assim, o custo relativo ao preço da rede também é maior que os R$ 120,00.

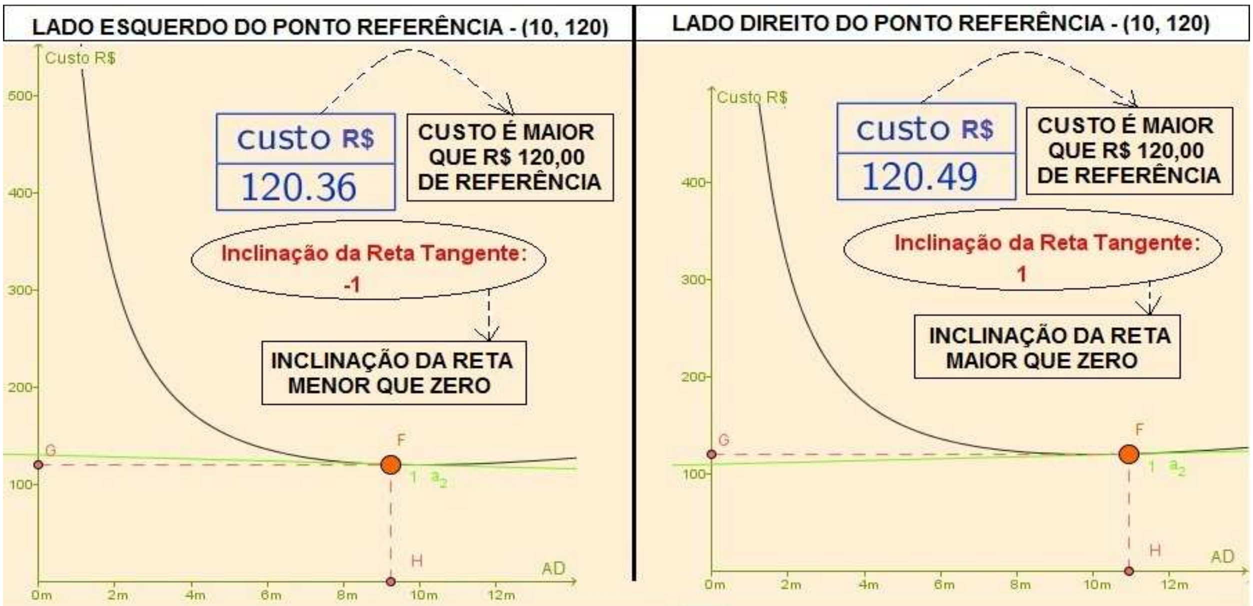


Figura 34: Comparação das inclinações da reta tangente do lado esquerdo e direito do ponto de referência

E uma última observação que merece ser mencionada, é o fato de quando o ponto $F$ atinge o mínimo, o retângulo que simula o terreno oferece uma característica bem interessante: todos os seus lados possuem o mesmo comprimento, logo, o custo mínimo é obtido através de um quadrado. Isso acontece, pois como o ponto mínimo tem coordenadas $(10, 120)$, então o valor de $\overline{AD} = 10\ m$, e a fim de manter a relação (25), logo $\overline{AB} = 10\ m$, confirmando a igualdade das dimensões, respondendo ao questionamento feito no início da atividade.

Observe o polígono obtido quando se move o vértice $D$ até o ponto de minimização da função custo.

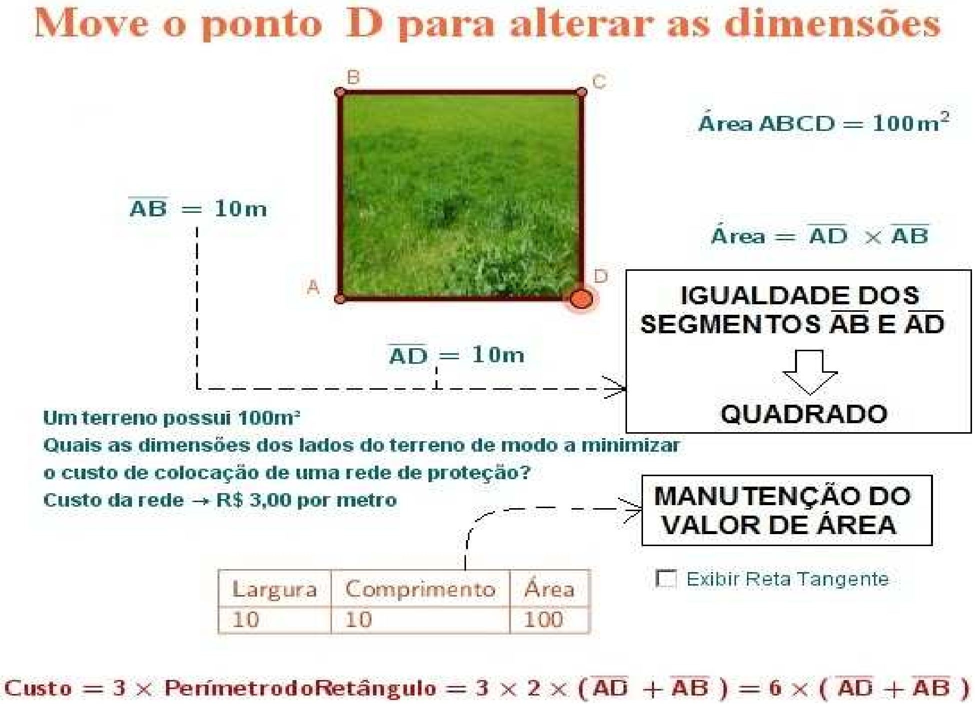


Figura 35: Polígono $ABCD$ quadrado $10 \times 10$ $(cm)$ no valor mínimo de custo

### 4.4.11 Descrição da Atividade 11

Quadro 12: Proposta, objetivos e pré-requisitos da Atividade 11 - Noções de Integral

| |
|---|
| **Atividade 11:** Noções de Integral |
| **Proposta:** Realizar cálculos de área de figuras não regulares, ou mesmo abaixo de gráficos quaisquer. A estratégia é construir retângulos com bases congruentes por excesso ou por falta e aumentar o número de retângulos. Dessa forma, o valor calculado se tornar cada vez mais próximo da área da figura, ou gráfico proposto inicialmente. |
| **Objetivo:** Calcular a área hachurada pela aproximação de retângulos inscritos por cima e por baixo da curva e notar que as relações limites de Soma Superior e Soma Inferior convergem para esse valor de área (Soma de *Riemann*[17]).<br>E um dos fatos culminantes é que o aluno teve a noção de integral sem mesmo saber os conceitos formais de tal variação do Cálculo Diferencial e Integral. |
| **Pré-requisitos:** Conhecimentos de áreas simples e o que representam; entender o que são gráficos da forma mais genérica (pontos que formam o gráfico). |

Essa é a última atividade da proposta e é única que menciona um escopo inicial do que se tratam as integrais definidas. Após o tratamento dado aos demais tópicos, buscou-se um fim mais útil para demonstrar o quanto as integrais são importantes para a matemática, e como as aplicações podem ser mais envolventes que o esperado.

Se fosse apresentado um gráfico como o que aparece abaixo, e lhe perguntasse o valor da área hachurada (inferior a curva $f(x) = -0{,}5(x + 0{,}24)^3 + 2(x + 0{,}24)^2 - (x + 0{,}24) + 1{,}76$ no intervalo $[A, B]$). Qual seria a resposta?

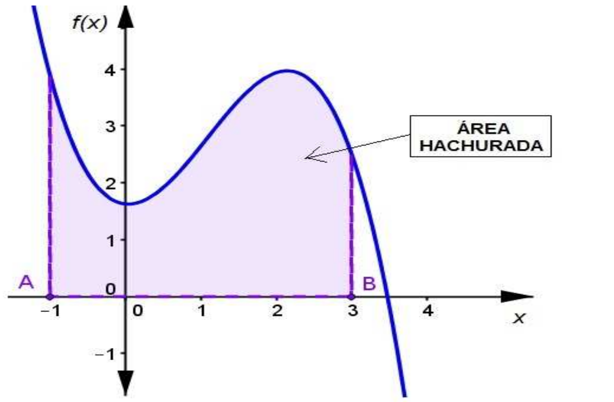


Figura 36: Área hachurada abaixo do gráfico da função $f(x)$ no intervalo $[A, B]$

Numericamente aparenta ser difícil obter uma resposta, mas a ideia é aprender como se ter um meio de calcular. Pois até então os alunos de ensino médio somente conhecem áreas de polígonos diversos e circunferências, ou no máximo um misto dessas formas. Logo, o pensamento é utilizar aproximações com o valor de áreas conhecidas de modo que possamos obter valores de áreas com a característica da curva.

A partir disso, é que se inserem retângulos de mesma base na extensão do eixo $0x$ de maneira a completar a figura. Existem 2 (dois) modos de fazer isso: altura do retângulo por cima da curva, ou por baixo da curva.

Vamos ao exemplo da Figura 36 para analisarmos a diferença desses dois tipos. Consideraremos o gráfico da Figura 37, onde iniciaremos com 3 retângulos na

[17] *Georg Friedrich Bernhard Riemann* foi um matemático alemão do século XIX tal que iniciou o processo de soma de áreas de retângulo para obter aproximação da área total inferior à curva. (AYRES JR., 1994).

extensão de comprimento $d(A,B)$[18]:

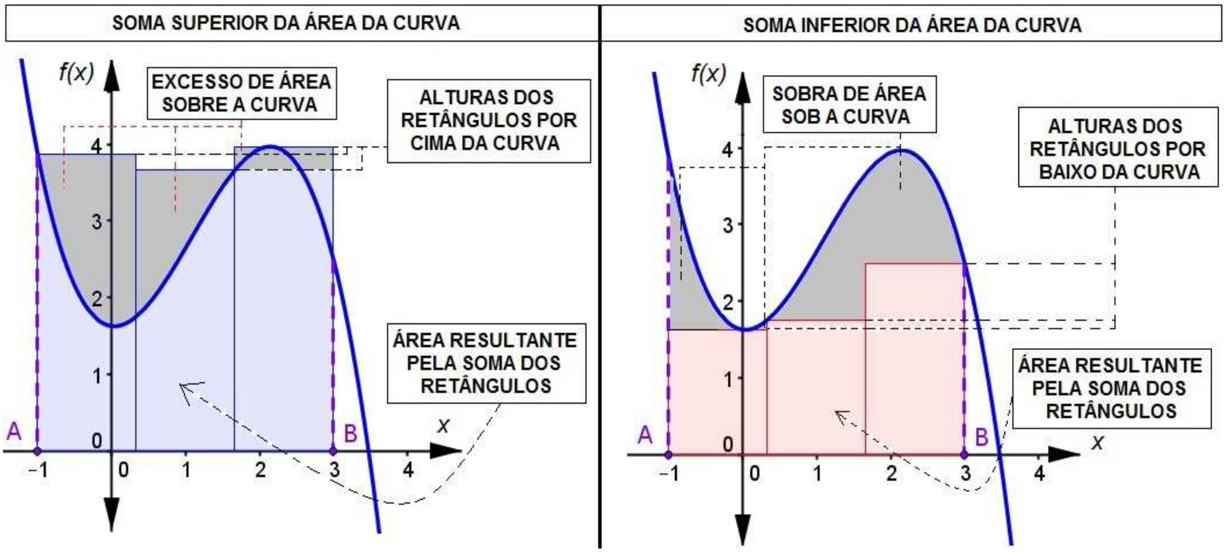


Figura 37: Representação da Soma Superior e Inferior com 3 retângulos

Observemos que quando as alturas tangenciam a curva por cima temos um excesso de área, logo a aproximação é sempre maior que a área da curva propriamente dita, e chamamos isso de *Soma Superior da Área da Curva*, já quando as alturas dos retângulos tangenciam a curva por baixo temos um sobra de área, e então a aproximação é sempre menor que a área da curva a qual denominamos de *Soma Inferior da Área da Curva*.

A partir dessas informações, o que será que ocorre quando o número de retângulos aumenta? Novamente, há duas ocorrências. Quando se trata da Soma Superior, ao aumentarmos o número de retângulos, a base deles fica menor e as alturas se adaptam a curva reduzindo o seu valor de área, logo o valor da soma das áreas tende a diminuir. Por outro lado, no segundo caso, a Soma Inferior, ao aumentarmos o número de retângulos, a base deles fica menor e as alturas se adaptam a curva aumentando o seu valor de área, logo o valor da soma das áreas tende a aumentar.

Vejamos isso, fazendo o mesmo estudo para 30 retângulos inseridos sob a curva. Dessa maneira é possível verificar que as áreas dos retângulos em ambos os casos tendem a se aproximar da área hachurada.

[18] A notação $d(A,B)$ representa a distância entre os pontos $A$ e $B$.

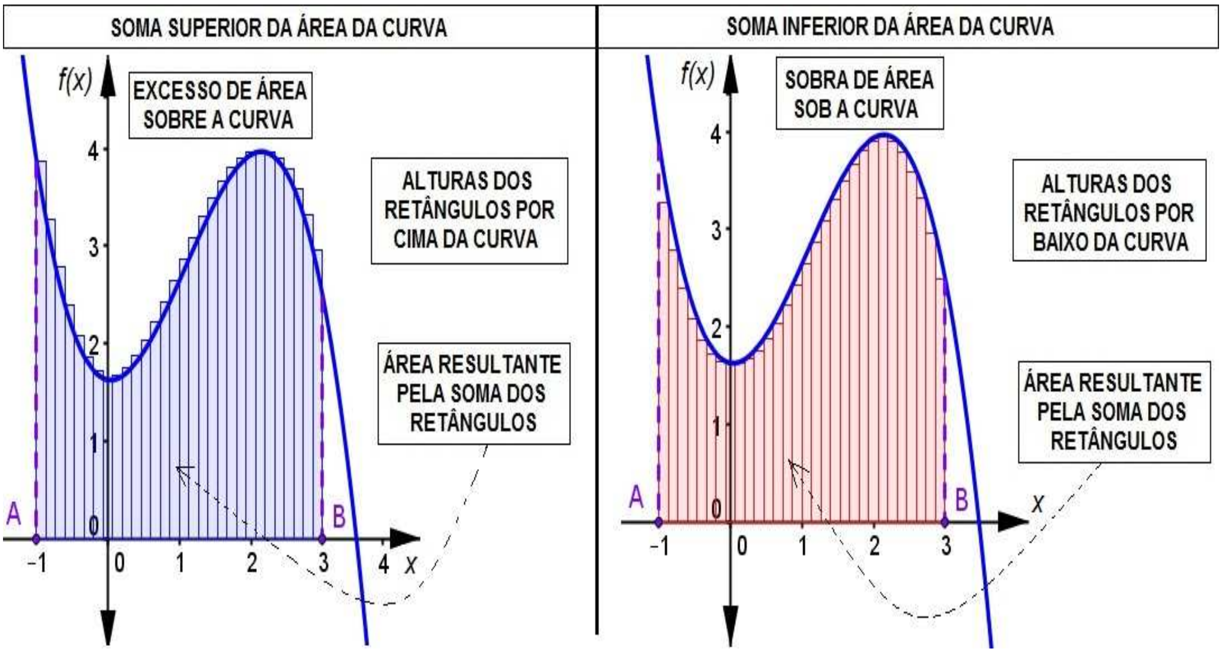


Figura 38: Representação da Soma Superior e Inferior com 30 retângulos

Na atividade realizada no GeoGebra foi colocado um “controle deslizante” que varia o número de retângulos $n$ inseridos na figura, trazendo de modo visual e intuitivo as noções de áreas relativas a curva, bem como foi colocado os valores numéricos das áreas da Soma Superior e Soma Inferior de modo que eles sejam comparados com o valor de área da curva.

Sendo assim, o controle deslizante foi configurado de $3 \leq n \leq 500$, para visualizarmos o aumento da Soma Inferior e diminuição da Soma Superior de forma gradativa. Vejamos essa situação quando $n = 500$ na Figura 39.

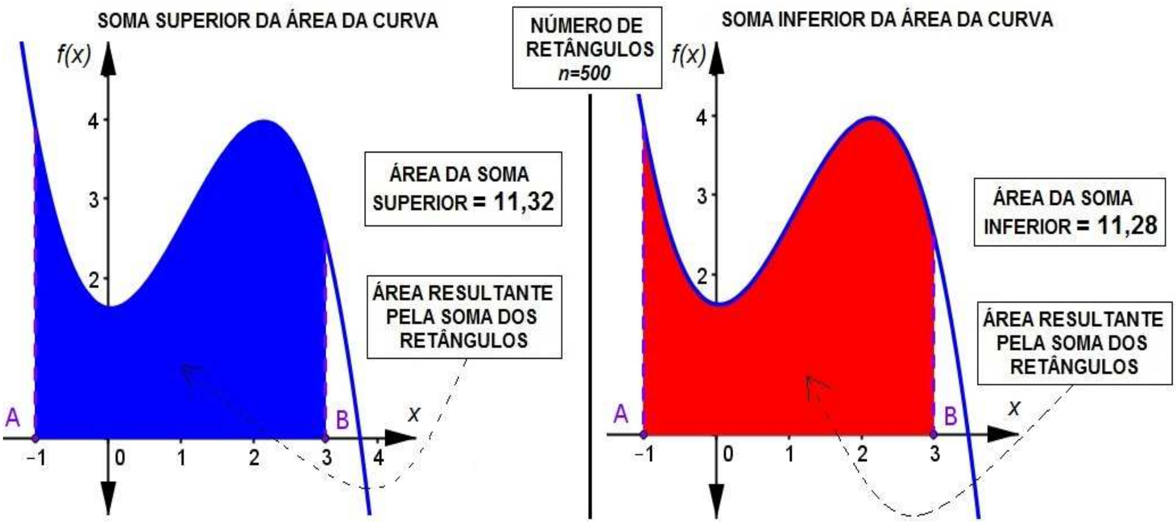


Figura 39: Representação da Soma Superior e Inferior com 500 retângulos

Como o valor numérico da Soma Superior é de $11{,}32$ e da Soma Inferior é de $11{,}28$, quando $n = 500$, e pelo preenchimento visto nos dois casos, aparentemente a área da curva é completamente ocupada, contudo sabe-se que há diferenças mínimas. Portanto, essa informação tende a ser muito relevante quando utilizamos a ideia anterior vista em limites. Isto é observar o resultado dessa análise quando $n$ tender ao infinito ($n \to +\infty$).

Pode-se aumentar o quanto quiser o número de retângulos inseridos, e a cada aumento se perceberá a aproximação. Logo ao aplicar limites a Soma Superior e a Soma Inferior, é verdade que:

$$\lim_{n \to +\infty} Soma\ Superior = Área\ Hachurada\ sob\ a\ curva \tag{32}$$
$$\lim_{n \to +\infty} Soma\ Inferior = Área\ Hachurada\ sob\ a\ curva \tag{33}$$

De acordo com as eqs. (32) e (33), verificamos que ambos tendem ao mesmo valor que é exatamente a área da curva estudada (área igual a $11{,}3$, calculada pelo programa). Esse valor numérico de área representa a integral definida da curva quando limitada pelos pontos de abscissas $A$ e $B$.

Visualize na Figura 40 os valores da Soma Superior, Soma Inferior, a diferença existente entre eles, bem como a Área da Curva que exibe os módulos da atividade no *software* GeoGebra.

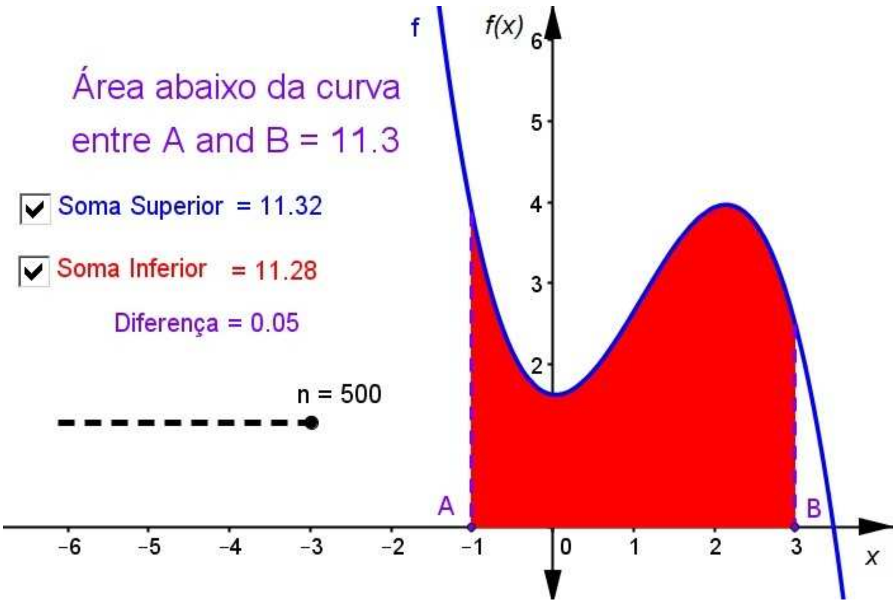


Figura 40: Valores da Soma Superior, Inferior e a Área da Curva para $n = 500$

A partir dessas ideias pode-se trazer a intuição para diversas outras curvas, figuras, entre outras coisas que mereçam o destaque, desde que para cada caso se realize a devida adequação para estímulo do aprendizado do tema.

# 5 APLICAÇÃO DO MÉTODO

Como indicado anteriormente, o método aqui apresentado consiste em exibir aos alunos da 2° e 3° série do ensino médio, tópico s de Cálculo Diferencial e Integral por meio de atividades em um *software* matemático utilizando apenas o escopo de visualização e intuição. Tais atividades foram formuladas de maneira lógica e fizeram uso de conhecimentos matemáticos que alunos daqueles níveis de ensino deveriam saber. Após, foi verificado se havia consistência no processo demonstrado para aplicação em turmas regulares do ensino médio para benefício do próprio discente.

Correspondentemente houve necessidade de encontrar uma instituição adequada e decidida em participar de forma a contribuir com o experimento elaborado. Com o termo “adequada” quer-se dizer: uma instituição onde os alunos possuam cronologicamente os conhecimentos ofertados pelo currículo nacional, voltado para a matemática, o qual o ensino seja realmente realizado e acompanhado de acordo com cada série/ano de estudo, e isso no Brasil, infelizmente, sabe-se que é difícil de encontrar.

Em contrapartida, pela razão de não trabalhar diretamente com docência, o processo de encontrar a instituição de aplicação não foi um dos mais fáceis. Na verdade, foi feito contato com algumas escolas particulares de ensino médio por intermédio da direção/coordenação para expor o método.Porém, essas entidades se mostraram muito distantes ou muito preocupadas em cumprir o próprio cronograma, já que as séries solicitadas possuíam alunos que, na época, realizariam o ENEM e o calendário de aulas e provas estavam muito intensos. Devido a essa restrição, buscou-se alunos apenas do 2° ano, e então durante a preparação do trabalho e em meio a essa busca, um colega do Mestrado ofereceu 2 (duas) turmas de 2° ano do ensino médio no local onde ele leciona. Após ele explicar o nível das turmas, as mesmas foram aceitas de imediato para aplicar a metodologia.

## 5.1 LOCAL DA PESQUISA

A instituição em foco foi o *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano* (IF-Sertão) nas turmas de 2° ano do Médio Integrado nos cursos de Informática e Edificações. Com fim de facilitar a comunicação durante o trabalho as citarei como TURMA 1 e TURMA 2, respectivamente.

Assim, tendo o público alvo formalizado, adequei as atividades propostas a partir de um cronograma de aulas, o qual me foram disponibilizadas 4 (quatro) aulas para cada uma das turmas, as quais seguiram metodologicamente segundo os calendários criados que se encontram nos APÊNDICES B e C.

Seguindo o escopo inicial, o Professor conversou com ambas as turmas para comunicar que seriam lecionadas as aulas experimentais como citado. Ainda com essa ideia, foi solicitado um horário em separado para que fosse realizada uma breve apresentação sobre o método para cada uma das turmas. Essa exposição ocorreu em 1 (uma) aula de 45 (quarenta e cinco) minutos em que foram abordados os objetivos e a justificativa do trabalho, bem como mostradas aos alunos as aplicações do cálculo em várias áreas científicas (astrologia, comunicação, engenharia bélica, geografia, biologia, engenharia de tráfego, civil, economia, física, dentre outras) e a partir disso, informar a contribuição existente para o aprendizado de toda a matemática. Foi explanada a necessidade de se ter um conhecimento prévio de alguns temas citados nos “Pontos de Revisão” do item 4.3 para o acompanhamento das atividades no *software* GeoGebra, utilizado como ferramenta auxiliar da aplicação da proposta. A apresentação se encontra no APÊNDICE A do trabalho em estrutura de tópicos montado em um arquivo *Microsoft Power Point* com o nome *Apresentação de Palestra_Alunos.pptx*

Após essa breve explanação, os discentes foram informados que essa proposta advém de um experimento que ao ser aplicado necessita ser avaliado, e para tanto foram criados 2 (dois) questionários. O primeiro com objetivo de coletar informações gerais sobre o ensino da matemática e de abordagem dos conhecimentos dos “Pontos de Revisão”, e o outro questionário com intuito de ser aplicado após todas as atividades da metodologia com o fim de avaliar todo o contexto e obter sugestões de melhoria do procedimento das atividades exploratórias que possibilitem aos estudantes a ampliação dos conceitos utilizados, por meio de problemas que envolvam a aplicação, a experimentação e a visualização.

O primeiro questionário (APÊNDICE D) foi entregue para cada um dos alunos nesse mesmo dia da apresentação do método. O questionário inicial foi recolhido ao passo que os acadêmicos concluíam o preenchimento.

### 5.1.1 Sujeitos da Pesquisa

Dentre as questões solicitadas foi possível saber o perfil dos alunos, bem como as relações deles com a disciplina de matemática. E através desses dados temos que as turmas de aplicação do método foram compostas da seguinte forma:

- Turma do 2° ano do Médio Integrado nos cursos de Informática (TURMA 1) - por 11 alunos, sendo 10 do sexo masculino e 1 do sexo feminino, com idades entre 16 e 20 anos, os quais foram identificados como alunos $I_w$, onde $w$ varia de 1 a 11, e
- Turma do 2° ano do Médio Integrado nos cursos de Edificações (TURMA 2) – por 18 alunos, sendo 10 do sexo masculino e 8 do sexo feminino, com idades entre 14 e 17 anos, que foram mencionados como alunos $E_m$, onde $m$ varia de 1 a 18.

### 5.1.2 Estrutura Disponível

A aplicação das atividades foi realizada nas próprias salas de aula das turmas mencionadas e nos horários previstos das aulas de matemática que os alunos participantes tinham na semana por facilitar a assiduidade de todas as turmas e também por não prejudicar os demais afazeres do dia a dia estudantil. Ainda, em decorrência desse fato o Instituto Federal (IF-Sertão) possui uma estrutura adequada em sala de aula que favorece a aplicação desse tipo de atividade. A instituição disponibiliza em cada sala de aula, uma televisão de 40’’ com todas as conexões atuais disponíveis (USB, HDMI, Cartões de Memória, etc.), suspensa ao quadro branco que favorece a visualização dos alunos, além de haver um ótimo espaço para o professor ministrar sua aula. A Figura 41 ilustra o que foi dito.

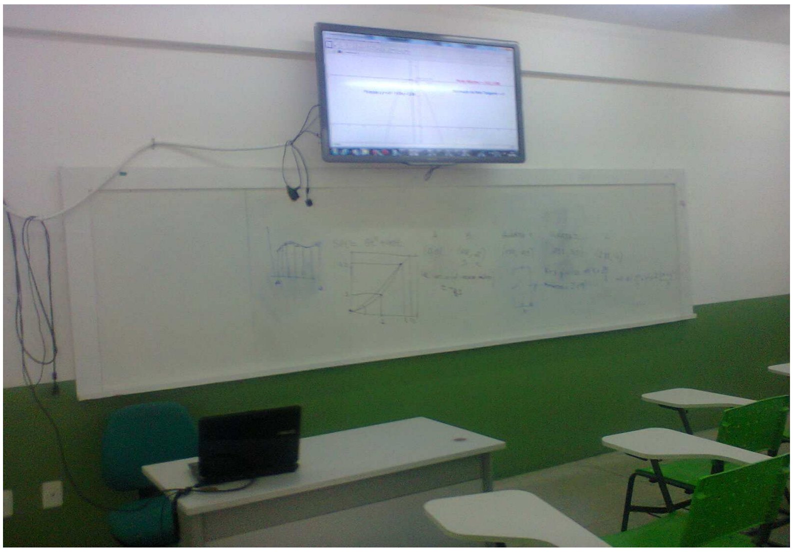

Figura 41: Estrutura utilizada na aplicação das aulas no IF-Sertão

No primeiro encontro foi relembrado aos alunos que para execução do processo seria solicitada apenas a atenção deles para acompanhar as atividades que seriam demonstradas no GeoGebra que por sua vez haveria necessidade de participação, interação, e as dúvidas existentes fossem expostas para tratamento. Após, essa breve conversa foram distribuídas as Fichas “CLASSIFICAÇÃO DAS ATIVIDADES PELOS ALUNOS PARTICIPANTES” (APÊNDICE F) com finalidade de coletar a classificação individual dos alunos das 11 (onze) atividades propostas após a apresentação. Para maior efetividade, essa ficha foi dividida em duas partes: uma contendo classificação das atividades 1 a 6, relacionada ao cronograma das duas primeiras aulas; e a outra contendo classificação das atividades 7 a 11, relacionada ao cronograma  das duas últimas aulas.

A descrição da organização, da distribuição e dos objetivos das atividades, apresentada nos quadros do Capítulo 4 destaca a proposta desse trabalho: a inserção orientada das ideias intuitivas e visuais do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio com o auxílio do *software* GeoGebra.

Após a aplicação das atividades, foram analisados os registros feitos pelos estudantes nos materiais disponibilizados que nessa primeira análise convém em avaliar o desempenho dos estudantes nas atividades aplicadas, deixando em evidência se os objetivos estabelecidos foram alcançados. Assim, na sequência do trabalho, será destacado o que se esperava de cada uma das atividades e as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante a aplicação de cada proposta.

De maneira geral, o estímulo da ferramenta de apoio GeoGebra advém muitas funções que contribuem para a interação das atividades os quais constam em todas as atividades envolvidas, tais como: animações (ajuda visual com a ferramenta seletora), visibilidade condicional (exibir e esconder objetos), interface *JavaScript* (comando de botões), e as entradas algébricas e geométricas. Logo, é um ótimo ambiente controlado para o ensino e aprendizado em matemática das formas mais surpreendentes possíveis.

## 5.2 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Nessa seção será descrita com os detalhes necessários a forma de aplicação e o que foi tratado em cada uma das atividades propostas. Como foram desenvolvidas na própria sala de aula, também buscou citar as dúvidas mais iminentes e as dificuldades apresentadas pelos alunos participantes reforçadas por alguns comentários anotados durante as aulas.

Dentre as interpelações existentes, em alguns casos é descrita a forma como os discentes se comportaram em virtude da utilização (aprendizado intuitivo e visual) da nova mídia mostrada em campo, o GeoGebra.

### 5.2.1 Atividade 1: Polígonos Inscritos

Especificamente, nos pré-requisitos dessa atividade se pediu conhecimentos básicos de polígonos inscritos em uma circunferência e a ideia intuitiva de áreas de polígonos e da circunferência no contexto de apresentar aos alunos que o crescimento do lado $n$ (que varia de $3$ a $500$) mostrada na Figura 2, resulta que a área do polígono ($P_a$) tende ao valor de área da circunferência ($A_C$), como indica a eq. (2).

Mas no processo de "aumento" do valor de $n$ houve questionamentos se a relação (1) era sempre mantida, o qual só houve dúvidas a esse respeito quando o valor de $n$ foi exibido como muito grande. Para essa e outras questões foram colocados a vista os valores numéricos das áreas, que garantiam sempre aquela relação, portanto, para os que não perceberam, como o aluno $I_3$ da turma de informática mencionou *"apenas isso garante o resultado?"* De fato, seria muito algébrico dizer que sim. Ao invés disso, utilizamos o próprio programa ao nosso favor, pois através da visualização minuciosa houve possibilidade de perceber que o polígono possuía área menor que a da circunferência. Esse detalhamento foi obtido pelo *zoom* (aplicado a uma escala de 1:1000) como descrito na atividade e através disso, não houve dúvidas das "sobras de área".

Apesar disso, situações de dúvidas apareceram. *"E se tivéssemos número de lado* $n = 1.000.000$*, isso realmente acontece?"*, disse o aluno $I_7$. E mesmo estando fora do escopo da atividade, o GeoGebra foi configurado com $n = 1.000.000$ e demonstrado para o aluno que o fato se repetia. Naquele momento foi notado que a maioria dos estudantes realmente acreditaram na tendência evidenciada, e a partir de então, foi possível continuar a definição intuitiva de ∞ e dos conceitos de limites.

Proeminentemente, alguns estudantes pareceram distantes, mas outros demonstraram um pouco mais de entusiasmo.

Apesar de todo esse passo a passo, houve espanto ao verificar os pré-requisitos dessa atividade obtidos no questionário inicial, onde apenas 18,18% da TURMA 1 afirmou conhecer polígonos inscritos em uma circunferência, a medida que a TURMA 2 nos retornou 22,22% dos estudantes; em contrapartida 54,55% da TURMA 1 conhecia a respeito de áreas e perímetros de polígonos e da circunferência, contra 50% da TURMA 2.

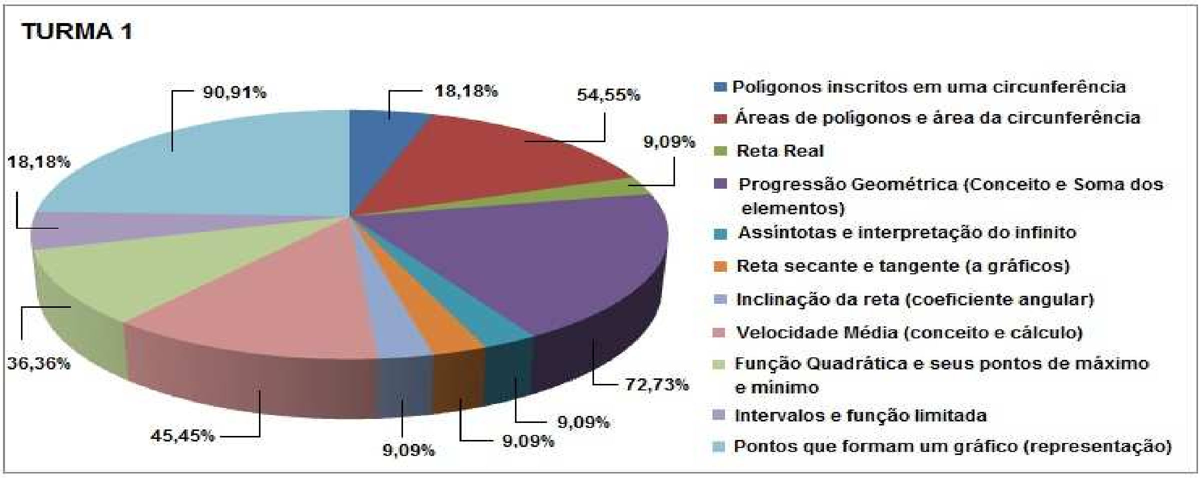


Figura 42: Percentuais da TURMA 1 dos pré-requisitos das atividades aplicadas

Os dados percentuais dos pré-requisitos para todas as atividades foram extraídos do questionário inicial e estão evidenciados nas Figuras 42 e 43 (relativas a TURMA 1 e TURMA 2 respectivamente).

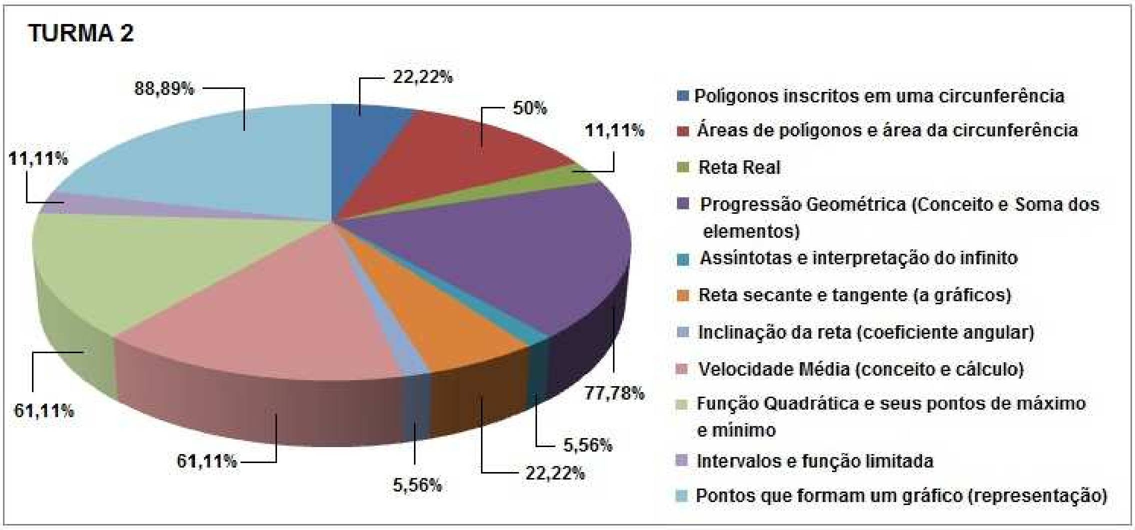


Figura 43: Percentuais da TURMA 2 dos pré-requisitos das atividades aplicadas

### 5.2.2 Atividade 2: Soma de Progressão Geométrica – P.G.

**- Parte 1:** $\boldsymbol{razão, r > 1}$

Como mencionado na descrição da atividade no item 4.4.2, ela possui 2 partes que contém pontos comuns, mas as diferenças buscadas nos objetivos são cruciais para o entendimento inicial sobre limites.

No contato com os alunos de ambas as turmas, foi conhecido o fato de que eles tinham recentemente visto as progressões geométricas, e sabiam aparentemente o necessário para se atingir o fim que se desejava: conceitos e formação das sequências.

Através dos números dos pré-requisitos (observados nas Figuras 42 e 43) foi obtido que 72,73% dos acadêmicos da TURMA 1 teriam conhecimento de Progressão Geométrica. A TURMA 2 teve 77,78% do total.

O interesse no uso de P.G. foi relevante talvez pela razão de verem aplicação em algo que acabaram de aprender. Aliado a isso, o *software* pareceu ser importante para o aprendizado.

Ao manipular as sequências formadas com razão maior que 1, o estudante teve a clara ideia de crescimento acelerado a medida que se aumentava o número de elementos $n$. E como o aluno $E_7$ da TURMA 2 disse: *“Esse $n$ cresce até onde?”*. Essa resposta foi imaginada pelo discente $E_9$ - *“deve ir pra o infinito também”*. Esses comentários despertaram o que aconteceria com a soma das sequencias de acordo com o aumento de $n$, e exatamente o valor numérico da soma posto na atividade que forneceria a resposta tão esperada.

A ferramenta seletora estava configurada de forma que $n = 1100$ fosse o valor máximo, o qual foi o suficiente para demonstrar o crescimento da sequência para uma razão $r = 2$, pois a partir de $n = 1035$ a soma já é vista como sendo ∞, de acordo a Figura 6. Confirmada a relação (4), foi questionado o caso de se utilizar razões maiores. Para esses casos específicos, foi mostrado no GeoGebra exemplos que voltaram a nos fornecer o resultado da relação (4), diferenciando apenas a rapidez ou demora de se chegar ao valor muito grande, chamado de ∞.

**- Parte 2: $\boldsymbol{0 < raz\tilde{a}o\ (r) < 1}$**

Para a segunda parte foi utilizada a forma da soma genérica de uma P.G., dada pela eq. (6) e assim adaptá-la a sequência exposta na atividade.

Essa foi uma das maiores dificuldades dos alunos, especificamente perceber a relação $r^n \to 0$, com o crescimento de $n$. O aluno $I_2$ indagou *“como assim, zero?”*. Outros alunos se manifestaram nessa pergunta, não convencidos, e assim, foi lembrado a eles que essa nova sequência geométrica tinha razão entre 0 e 1, e como os elementos $n$ continuam aumentando, eles tendem ao infinito, logo teríamos um número pequeno elevado a um número muito grande, nos levando a ter $r^n \to 0$.

Resolvido esse impasse os discentes viram na relação (8) um valor adquirido da soma de uma sequência decrescente, tomando cada vez elementos menores que os primeiros, e independentemente de $n$ tinha-se sempre esse valor de soma limite. A Figura 9 auxiliou bastante a visualização dos alunos.

O comentário final do aluno participante $E_{12}$ da TURMA 2 foi bem interessante: *“é impressionante ver o que ocorre a uma coisa que aprendemos a calcular, mas sem saber o que é direito”* – ao se referir a casos não concretos, onde exige dos alunos a aplicação de fórmulas sem mais explicações.

### 5.2.3 Atividade 3: Retas Assintóticas

Essa atividade foi uma das mais desafiadoras da proposta, pois quase a totalidade das turmas afirmaram não ter o conhecimento de assíntotas de gráficos e interpretação do infinito, que tiveram os dados de 9,09% da TURMA 1 e 5,56% da TURMA 2. Ainda àqueles que marcaram saber, na verdade tinham vaga noção e não conseguiram dizer nada sobre o assunto.

O desafio maior foi conseguir definir retas assíntotas a um gráfico, e ficou melhor especificado no momento que o fiz através de desenho. No quadro branco desenhei o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, o qual os estudantes de ambas as turmas identificaram visualmente. Também citando que o domínio de $f$ não possuía os pontos em que $x = 0$, representado pela própria reta $x = 0$, chamada agora de assíntota vertical de $f(x)$, com essa rápida explicação alguns alunos disseram que sabiam o que era assíntota, só não sabiam a denominação. Ainda para $f(x) = \frac{1}{x}$, exibi que também existia a assíntota horizontal, ou seja, a reta $y = 0$ também não participa dos valores de $f(x)$.

A partir desses conhecimentos preliminares foi possível iniciar a atividade no GeoGebra, como descrito anteriormente no item 4.4.3. O ponto $C$ foi movido pelo gráfico da função $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ e assim foi perceptível aos alunos os fatos colocados na proposta. Os questionamentos que se seguiram foram a respeito da garantia de o ponto $C$ não "tocar" de forma alguma as retas citadas, como, por exemplo, realizado pelo Aluno $\mathrm{E}_4$ - *"Como você tem certeza que essas retas não são encostadas pelo ponto?"*. Além da garantia do próprio domínio, foi utilizada a ferramenta visual de *Mover Janela de Visualização* para movimentar para qualquer ponto da tela e também aplicado o *zoom* nos casos mais difíceis de distinguir que pareciam "tocar" na reta. Após essa movimentação pelo gráfico em busca de visualizações mais específicas, os estudantes mais incrédulos, ficaram mais satisfeitos.

E para conclusão, a obtenção das relações (10), (11), (12) e (13) foi facilmente compreendida pelos discentes, os quais passaram a ter mais conhecimentos do significado de limites.

### 5.2.4 Atividade 4: Reta tangente e Limite

Para essa atividade foram marcados como pré-requisitos conhecimentos de retas secantes e tangentes (a gráficos) e inclinação da reta (coeficiente angular) que apontaram na TURMA 1 um total de 9,09%, em ambos conhecimentos, e para a TURMA 2 tivemos dados de 22,22% e 5,56% dos alunos.

Apesar de haver percentuais baixos com referência aos conhecimentos, os resultados retirados foram bem positivos em relação aos objetivos traçados. Em decorrência aos conceitos de reta secante e tangente o discente $\mathrm{E}_{11}$ da TURMA 2 de pronto afirmou que *“a secante toca em dois ou mais pontos* e *tangente toca em apenas um ponto do gráfico”*. Ele disse que respondeu a partir das posições relativas de retas em uma circunferência. Parabenizei esse aluno pela iniciativa e completei a informação de que com certeza aquela informação é válida para as demais curvas no plano, com ressalvas, pois em uma curva qualquer não é possível garantir o número de interseções com a reta, conforme a Figura 44.

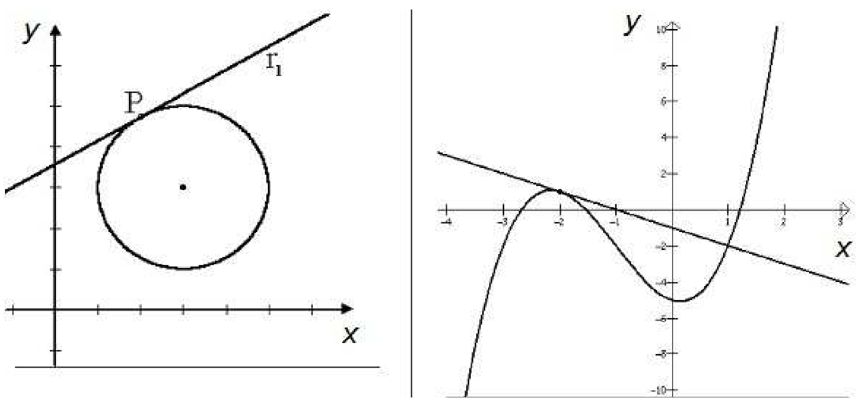


Figura 44: Exemplificações de retas tangentes a uma curva

Já sobre a inclinação da reta nenhum aluno soube dizer o significado. E no quadro branco, desenhei duas retas no plano ($r_1$ e $r_2$) e conceituei inclinação da reta como a medida do menor ângulo que o eixo $0x$ deve “girar”, no sentido anti-horário, para coincidir com a reta $r_1$ e $r_2$, e o coeficiente angular da reta foi definido como a tangente trigonométrica da inclinação. E o fato principal é que mesmo conceituando da melhor maneira possível, os alunos não precisam se ater aos cálculos por trás de toda a atividade, pois o programa se encarrega de realizá-los.

Possuindo os conceitos de todos os elementos da atividade, a descrição de que a aproximação da reta secante à reta tangente à curva ao passo que o ponto $b$ se aproximava do ponto $c$, parece ter sido facilmente entendida por todos. Inclusive nas Figuras 14 e 15 que relacionam os dois lados do ponto de referência (projeção do ponto de tangência $c$) que sempre na aproximação das inclinações das retas, as próprias retas tendem a ser a mesma, pelo fato de terem o mesmo ponto de tangência.

A relação dessa atividade trouxe interesse aos alunos, por eles relembrarem conhecimentos anteriores e ainda estarem aprendendo algo novo e de maneira interativa, e de acordo com as palavras da aluna $\mathrm{E}_8$ da TURMA 2 - *"consegui compreender sem dúvidas, gostei da explicação, pois além de aprender alguns detalhes novos, revisei assuntos já vistos".*

Por fim, depois de todas as minúcias da atividade consolidada, os alunos foram informados que esse conteúdo visto continha a parte fundamental do início do conceito de derivadas, a partir da solução realizada por *Fermat* do "*Problema da Tangente*"[19].

### 5.2.5 Atividade 5: Coeficiente Angular e Tangentes

Para a continuação do processo de inserir os conhecimentos dos tópicos de cálculo diferencial e integral no ensino médio com o auxílio do GeoGebra é necessário adequá-los.

Os conhecimentos mínimos para acompanhar essa atividade são as mesmas vistas na Atividade 4, além de saber sobre pontos de um gráfico (construção em plano cartesiano), que teve quase unanimidade dos alunos em 90,91% (TURMA 1) e 88,89% (TURMA 2), vistos nas Figuras 42 e 43. Essa noção de construção é deveras crucial, pois como dito na descrição da atividade é necessário que a partir de uma função $f(x)$ se determine a função correta que aparece na Janela de Visualização 2, a chamada função derivada de $f(x)$.

A primeira dificuldade era obviamente obter os pontos da nova função, mas

[19] problema tratado de forma diferente por *Fermat* e Descartes no século XVII, visto como um dos antecedentes mais importantes do Cálculo Diferencial. (AYRES JR., 1994).

isso, o “rastro” do gráfico já cumpre, mas uma pergunta já era esperada – *“vai ser preciso calcular todas as inclinações de todos os pontos, isso é impossível. O que fazer?”* (Aluno $I_5$ da TURMA 1). Na verdade a marcação do “rastro” nos dá uma boa intuição da função descrita, mas a escolha da função a ser estudada deve ser escolhida com cuidado, ainda mais para um contato inicial. Por esse fato, tentou-se realizar do modo mais didático possível, aplicando em funções constantes e retas no plano, com o fim de facilitar a visualização e também orientar o caminho das funções derivadas existentes a partir de $f(x)$, e nesse caso, com os conhecimentos dos coeficientes angulares das retas tangentes.

Apesar do entusiasmo e do possível entendimento, alguns alunos não conseguiram responder qual era a função derivada obtida, que evidenciam um baixo conhecimento na construção de gráficos simples no plano cartesiano, um fato a ser tratado melhor no ensino médio.

### 5.2.6 Atividade 6: Velocidade Média

Essa é efetivamente a primeira atividade que envolve um pouco de aplicação, pois a partir de conhecimentos físicos nos faz compreender um pouco mais sobre a matemática.

Para essa atividade era necessário o conhecimento anterior de coeficiente angular, além de saber um pouco sobre velocidade média (conceito e cálculo) que adentra no ramo da Física Cinemática. Esse último item foi respondido pelos alunos por saberem na proporção de 45,45% pela TURMA 1 e por 61,11% pela TURMA 2.

Antes de habilitar a atividade do GeoGebra perguntei as duas turmas o que eles sabiam sobre velocidade média. As respostas mais condizentes de cada turma foram:

-*“é a divisão da variação do espaço pelo tempo gasto” (Aluno $I_6$ da TURMA 1);* e

-*“indica a média da velocidade de um corpo percorrendo um trajeto especifico tendo os pontos de saída e chegada” (Aluno $\mathrm{E}_9$ da TURMA 2).*

Os conceitos fornecidos superaram a expectativa, contribuindo ainda mais com a aplicação do método. Conforme descrito nas ocorrências da atividade, ela foi recebida com simplicidade e aparente facilidade na compreensão. Mas a comparação da fórmula (16) com o cálculo do coeficiente angular trouxe certa surpresa para alguns discentes, por talvez, não conhecerem a relação (14), que corroboram os números do APÊNDICE D - Parte III - questão 7, nos conhecimentos sobre inclinação da reta (exibida na aplicação da Atividade 4), além da fala do acadêmico $\mathrm{E}_4$ – *“que fórmula é essa?”*, ao ver a fórmula (14).

Por outro lado, ao serem devidamente apresentadas, as relações de igualdade entre a inclinação do trecho $AB$ e o valor da velocidade média obtida no mesmo trecho foi logo percebida, e eles captaram o que fora solicitado nos objetivos da atividade.

É importante citar que o comentário do aluno $\mathrm{E}_1$ da TURMA 2 indicou que essa atividade precisa de uma melhoria, pois os conhecimentos informados não fez muito uso dos recursos do GeoGebra. Foi dito - *“falta mais interação”*.

### 5.2.7 Atividade 7: Velocidade Média e Instantânea

Todo o aparato da atividade causou bastante entusiasmo, e compunha de suporte para responder as quatro questões voltadas as velocidades de um determinado veículo de acordo uma equação de posição dada.

Com vias disso, sabemos calcular a velocidade média de um corpo em determinada distância dentro de uma variação de tempo, mas também se sabe que esta velocidade não nos dá a informação precisa sobre a velocidade em cada instante do movimento no intervalo de tempo $t_1$ e $t_2$, por exemplo. Para obtermos a velocidade instantânea do corpo no instante $t_1$ é necessário calcular a velocidade média em intervalos de tempos cada vez menores, ou seja, quando $t_1 + \Delta t \to t_1$, logo $\Delta t \to 0$.

As questões 1 e 4 não trouxeram novidades para os alunos já que se solicitou apenas o cálculo da velocidade média em pontos fornecidos, porém as questões 2 e 3 apresentaram certa dificuldade de entendimento, pois voltou-se a falar em limites de valores, só que agora em relação a velocidade média quando a variação de tempo é quase zero, isto é, $\Delta t \to 0$. Evidente que a pergunta ocorreu – *“Por que?”*. No quadro expliquei que conforme obtido na Atividade 6, a velocidade média de dois extremos é igual ao coeficiente angular da reta desses mesmos pontos extremos, assim se tivermos uma curva como $s(t)$ qualquer e calcularmos o coeficiente da reta tangente a essa curva no ponto de tangência cuja abscissa é justamente o tempo que se quer saber a velocidade, teremos a velocidade instantânea.

Após algumas repetições e desenhos feitos no quadro, coloquei as perguntas 2 e 3 do GeoGebra para serem respondidas de acordo com a proposta. Ao ver o gráfico das Figuras 22 e 23 os alunos parecem que renovaram o entendimento em algo mais simples do que estavam imaginando. E como o programa já realiza o cálculo do coeficiente e desenha a reta suporte quando se escolhe a atividade, os discentes têm apenas o trabalho de interpretar o resultado e a percepção da utilização do tema para a vida cotidiana.

Facilmente, eles compreenderam o propósito da atividade e responderam prontamente as questões, contribuindo com a consecução dos objetivos. Devido a isso, o aluno $\mathrm{E}_8$ da TURMA 2 pareceu mais interessado e questionou – *“como se sabe a equação da reta tangente, e como apareceu esse valor do coeficiente?”*. Como se pediu visualização e intuição, não há validade em apresentar fórmulas, mas informei a este aluno que há uma composição de fórmulas e regras para as derivadas que são demonstráveis, contudo não seria necessário apresentá-las, pois fugiria da metodologia proposta. Quanto ao valor do coeficiente, quando $t = 2{,}5$, este foi conseguido através da substituição desse valor na equação da reta tangente obtida.

Não se solicitou conhecimentos extras para o acompanhamento dessa atividade, apenas o entendimento da atividade anterior.

### 5.2.8 Atividade 8: Máximos e Mínimos em Função Quadrática

Basicamente, essa atividade visa relacionar os pontos críticos[20] de uma função de acordo com a inclinação da reta tangente nesses pontos. Pela facilidade de ensino e da captação da informação pelos alunos, optou-se em realizar esse estudo com funções quadráticas por terem características peculiares quanto aos pontos críticos: apenas um desses pontos aparece em cada função.

---

[20] também chamado de ponto estacionário é um ponto no domínio de uma função onde a primeira derivada é nula ou inexistente. Os pontos críticos serão sempre pontos de máximos ou mínimos relativos ou pontos de inflexão. (Fonte: Gazeta de Matemática n°140 – Janeiro 2001).

Tendo isso em vista, foi estipulado que os alunos para acompanhar convenientemente essa atividade, deveriam conhecer funções quadráticas (gráfico), no que diz respeito aos pontos de máximo e mínimo que corresponderam a 36,36% da TURMA 1 e com 61,11% da TURMA 2. Vislumbrou-se a necessidade também de os estudantes terem noção de intervalos e de função limitada, que por sua vez foi registrado por 18,18% da TURMA 1 e por 11,11% da TURMA 2.

Pela verificação dos dados deveria se esperar que essa atividade fosse uma das mais complicadas de se assimilar, contudo a prática demonstrou o contrário, pois foram percebidos interesse e facilidade na interpretação do que se desejava.

Na verdade, ao mostrar os gráficos das funções quadráticas (concavidade para baixo e para cima) os alunos sabiam identificar quais eram os pontos críticos existentes em cada uma das funções (máximo ou mínimo), porém para a identificação do ponto propriamente dito, só sabiam dizer se o mesmo fosse calculado pelo vértice da parábola.

Realizado o procedimento da atividade de mover a reta tangente pelo gráfico, foi possível observar o valor de inclinação da referida reta de forma que quando se aproximava dos pontos críticos se perguntava o que estava havendo com o valor de inclinação, e em ambas as turmas alguns alunos responderam – *"está perto de zero"*. E depois o valor da inclinação se afastava novamente de zero.

Notando certa surpresa pelo resultado, o aluno $\mathrm{E}_{10}$ da TURMA 2 indagou - *"quer dizer que toda vez que a inclinação anular o ponto é um máximo ou mínimo?"* Agradeci a pergunta, pois esse estudante conseguiu captar o objetivo da atividade, apesar de um pequeno detalhe, devido a existência de outros pontos críticos sem necessariamente serem pontos de máximo ou de mínimo, como por exemplo, ponto de inflexão[21].

Contudo, a relação que se queria foi compreendida e pôde-se afirmar que essa ideia de inclinação nula é possível de ser aplicada em quaisquer funções, inclusive nas mais complexas. Diante dos conhecimentos vistos e descritos, expus um exemplo de uma função trigonométrica $f(x) = senx$, visto na Figura 27, cujos pontos críticos são inúmeros em todo o domínio.

[21] usualmente associada a uma mudança do sentido da concavidade do gráfico de uma função. (Fonte: Gazeta de Matemática n° 140 – Janeiro 2001) .

*“Então basta sabermos em quais pontos a inclinação é zero para se ter esses pontos?”* - questionou a aluna $I_5$ da TURMA 1. *“Exatamente”* – respondi. Matematicamente calculamos a derivada da função e a igualamos a zero para a obtenção dos pontos críticos.

### 5.2.9 Atividade 9: Minimização de Custo – Economia de Combustível

Essa atividade, como foi dita na descrição do tópico 4.4.9, é uma aplicação contextualizada da Atividade 8, tendo em vista fazer que os alunos percebam as interpretações cotidianas do que se aprendeu.

Tendo um objetivo simples de discriminar o ponto que minimiza a função de consumo de combustível de acordo com a velocidade que o mesmo trafega, o estudante $\mathrm{E}_7$ comentou – *“e não é a mesma coisa?”*, respondi – *“Sim”*. Tendo a noção que matematicamente só se queria saber o ponto mínimo da função que representa a velocidade, a qual o veículo deve manter para consumir a menor quantidade de combustível possível.

Executado o método algébrico do cálculo do vértice da parábola por $x_v$ e $y_v$, e também pela a inclinação nula da reta tangente ao gráfico, foi possível verificar que ambos os resultados são idênticos, e não poderia ser diferente, pois modificamos apenas o método de obtenção dos valores.

*“Então continua valendo, se achar outras inclinações iguais a zero?”* – ouviu-se o aluno $\mathrm{E}_6$ da TURMA 2 quando citou a aplicação da atividade em funções não quadráticas. Expliquei que se houvesse outra função que aparecesse diferentes valores de inclinação nula (dois ou mais), deveria haver uma interpretação para se determinar o consumo mínimo, pois dentre esses pontos poderia haver pontos que fossem máximos, por exemplo, e nesse caso há necessidade de comparar os valores de $y$ de cada um desses pontos.

Percebeu-se que a partir dessa atividade as perguntas e comentários dos discentes tinham um aspecto diferenciado de apenas uma dúvida, correspondiam referencialmente ao desejo de saber mais sobre o tema que estavam gradativamente se familiarizando.

### 5.2.10 Atividade 10: Minimização de Custo – Perímetro x Área

Com a aplicação da Atividade 9, a menção a vida cotidiana prossegue em outro contexto com relação a máximos e mínimos de uma função.

Conforme detalhado na atividade o aluno é levado a pensar em interconectar o perímetro de um retângulo com a sua área, de modo que o valor numérico desse último é fixo, ou seja, dessa vez antes de minimizar a função e encontrar o que se pede, deve-se saber qual é essa função. E como explicitado, a função custo está relacionada diretamente com o perímetro do retângulo, que por sua vez tem envolvimento com a área fixada de $100\,m^2$, conforme a lógica exibida nas eqs. (29), (30) e (31).

As manipulações algébricas foram vistas por alguns alunos com dificuldades, tanto na TURMA 1 quanto na TURMA 2. Assim, no quadro branco foi realizado todo o processo com cuidado para que cada passo fosse compreendido da maneira mais clara possível. Apareceram dúvidas de matemática básica, mas nada que não pudessem ser superadas com relativa facilidade, inclusive quanto a identificação do perímetro e da área do polígono.

Esse foi um bom exemplo pelo motivo de a função custo possuir características distintas das já vistas até aqui. E já conhecendo a função a ser trabalhada, eq. 31, o procedimento realizado nas atividades 9 e 10 se repete para conseguirmos encontrar o mínimo dessa função.

Depois de perceber que a maioria dos alunos estavam envolvidos com o tema mostrado, começaram a surgir os comentários:

- *"Até aqui dá pra entender, mas como foi desenhado o gráfico dessa função?"* – perguntou o aluno $\mathrm{E}_2$ da TURMA 2, o qual foi respondido da seguinte maneira: para não se preocupar com construções de gráficos que não fossem os já aprendidos por ele, pois os demais, o *software* se encarregaria de realizar, apesar de ser muito bom o interesse demonstrado.

- *"A ideia de traçar a reta tangente é legal, parece ser bem usual, pelo menos no programa"* – comentário feito pela aluna $I_5$ da TURMA 1 que transmitiu confiança para os demais da turma, e de certa forma motiva trabalhos como este.

- *"Acho interessante a interação do programa quando se move o ponto pelo gráfico"* – mencionou a aluna $\mathrm{E}_{15}$ em relação a visualização do preço de custo ser modificado de acordo com a alteração que se fazia do ponto de tangência ao gráfico e também ao verificar que a inclinação da reta quando é zero oferece justamente o valor desejado.

Enfim, de todos os questionamentos e comentários feitos, a maioria deles foi bem colocado, favorecendo o ambiente de estudo do Cálculo Diferencial e Integral que detém diversas outras aplicações, além de fornecer indícios de que esse ensino pode ser inserido e tratado no ensino médio, desde que adequadamente.

### 5.2.11 Atividade 11: Noções de Integral

A ideia dessa atividade era apenas demonstrar aos alunos do nível de ensino analisado a possibilidade de se calcular áreas de figuras diversas, e dentre elas, a da área hachurada da Figura 36. Como já dito, foi um dos modos de apresentar intuitivamente as integrais definidas, que muitas vezes são descartadas do ensino do cálculo até no ensino superior.

A atividade foi descrita através da Soma de *Riemann*. Os estudantes naturalmente entenderam a técnica aplicada de se aumentar o número de retângulos por cima e por baixo da curva de modo que utilizaram o que fora aprendido nas atividades de limites sem se darem conta que estavam diante de um novo conteúdo.

Essa atividade pareceu ser interessante para demonstrar que o Cálculo Integral tem uma característica bem peculiar no cunho geométrico do ponto de vista intuitivo. Já quanto a visão algébrica dos cálculos, os alunos foram informados que do mesmo modo como existem fórmulas das funções derivadas, também existem métodos de se calcular a integral de uma função, bem como características e propriedades intrínsecas, tanto que essa informação respondeu o questionamento do estudante $\mathrm{E}_{11}$ da TURMA 2 referenciando a Figura 40 – *"como se sabe que é exatamente* $11{,}3$ *o valor dessa área?"*.

Esses conhecimentos propiciam um estímulo para a continuação e ampliação desse estudo, de forma que possam contribuir com a matemática.

## 5.3 CONEXÃO DOS TEMAS ESTUDADOS ANTERIORMENTE

Ao traçar o panorama sobre o ensino da matemática no Brasil, uma das barreiras escolares comuns é o fato de os conteúdos matemáticos serem tratados de forma isolada, apresentados exaustivamente num único momento, e quando retomados, geralmente não se estabelecem as devidas conexões. São apresentados apenas como ferramentas para a compreensão de novas noções. Na compreensão de superação desse fato há como relacioná-los à ideia das representações conexas, como afirmado nos Parâmetros Curriculares Nacionais em que “de modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.” (BRASIL, 1998, p. 22-23).

Um dos objetivos gerais para o ensino da matemática é destacado nos PCNs como “estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares” (BRASIL, 1998, p. 48). Nesse objetivo, observa-se um forte pressuposto para o trabalho com as representações interconectadas dos objetos matemáticos, pois a partir das diferentes representações do mesmo objeto, poderão estar sendo realizadas as interligações entre os campos temáticos considerados nos PCNs.

A utilização da interação com os alunos, bem como a inserção de temas matemáticos vistos em outras épocas corrobora com a intenção do ensino que não se limita a uma simples integração ou sobreposição de conteúdos, mas sim a uma síntese, ou seja, uma formação de um novo produto através dessas “trocas de informações” que como afirma Japiassú (1976) devem acontecer de forma tão intensa que permitam, por exemplo, reinterpretações de conceitos de uma área em outra, sendo capaz, inclusive, de gerar novos métodos de trabalho e de pesquisa que atendam a todas as disciplinas envolvidas no processo.

Nesse sentido, Fonseca (2005) ressalta que o aprendiz, em relação ao ensino da Matemática, estabelece uma vinculação utilitária, dando sentido atual e interpretando suas aplicações. Em vista disso, “as situações de ensino-aprendizagem da Matemática permitem os momentos particularmente férteis de construção de significados realizados conscientemente pelo aluno” (*Ibid*., 2005, p. 24-25). É possível, portanto, aceitar e reconhecer no adulto uma maior perspicácia na aprendizagem, já que dispõe de vivências culturais que servem de interface ao saber legitimado, além de dispor do trabalho para aplicar conhecimentos formais adquiridos, mas não invalida a adaptação desse método para alunos de todas as idades. Consequentemente, é constatável que no trabalho também se consiga o aprimoramento de distintos conhecimentos através da relação prática e aplicativa que ele propõe. Também há a oportunidade de aplicar e testar conhecimentos formais que foram adquiridos em período escolar os quais sustentam os valores, os saberes, as competências, a subjetividade e o trabalho em grupo que colocam à prova no trabalho.

Através dessa perspectiva, Fonseca (2005) cita que alunos ditos inteligentes são aqueles os quais conseguem aprender sem estabelecer uma ligação de significação com a vivência cotidiana, pois têm mais facilidade para desenvolver o raciocínio lógico-matemático. E, conjuntamente, existem os considerados não tão inteligentes, que não conseguem aprender sem relacionar a significação daquilo que é lecionado na escola com o que é presenciado no dia-a-dia. Esses últimos, não aprendem com tanta facilidade como os primeiros. Nesse contexto, há um pequeno grupo que vê a Matemática positivamente e atribui a ela finalidade e objetivo. Infelizmente, em muitas escolas o ensino da Matemática ainda é tido como um instrumento excludente e disciplinador. A maioria dos professores tem como único objetivo ensinar a matéria, sem se preocupar em transmitir ao aluno um conhecimento matemático significativo.

Por conseguinte, as críticas que se levantam contra os vários aspectos e resultados do ensino da Matemática vêm ocasionando debates, os quais levam os profissionais da área a repensarem o seu papel e a procurarem novas estratégias didáticas. Ocorre assim, a busca por atividades matemáticas que sejam realmente educativas, e não meramente uma repetição sem sentido para o aluno. Se o professor conseguir trabalhar nessa linha, a Matemática será um ótimo recurso para educar o indivíduo. E mais, ela será um instrumento incisivo para trabalhar sua formação.

Assim, só é possível provocar ideias matemáticas na mente de alguém, se esse alguém for colocado diante de uma situação envolvente, idealizadora, interessante, desafiante e, ao mesmo tempo, que seja capaz de estimulá-lo a aprender. Não são situações decoradas, ou apenas explanadas verbalmente, citadas, ou mesmo expostas no quadro branco pelo professor. A situação deverá despontar o aluno, fazendo com que ele consiga aprender por completo. Contudo, algumas escolas e professores não estão preparados para isso.

Portanto, o conhecimento matemático deve ser formado pelo aluno através de atividades que lhe despertem o interesse em aprender, construindo relações do que ele vê dentro da escola com o que ele já conhece fora dela. Assim, o aluno associa o que aprende ao seu convívio sociocultural. Diversos professores de Matemática não envolvem os estudantes utilizando atividades com materiais concretos em sala de aula. Assim, ou desconhecem que há maior eficácia quando os alunos conseguem estabelecer relações entre aquilo que a escola ensina e o que eles conhecem do mundo, ou simplesmente não há estímulos para tanto.

## 5.4 TRABALHOS ANTERIORES RELACIONADOS AO TEMA

Ao se realizar um trabalho como este, há de se indicar os estudos anteriores realizados com respeito ao tema. Adiante, seguem alguns dos principais autores, bem como a proposta de trabalho de cada um deles, que serviram de suporte para a teoria defendida na metodologia aqui colocada.

- *ROCHA, M. D. Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: Estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação, UFOP-MG, 2010:* pesquisa realizada em laboratório computacional com manipulação de *software* matemático com uma turma formada por alunos repetentes do 1° semestre de Cálculo de diversos cursos superiores;
- *MOLON, J. Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra, UFSM-RS, 2013:* estudo voltado a verificar a inserção do ensino do Cálculo Diferencial e Integral em um ambiente de aprendizagem matemática, destinado a alunos do primeiro ano do ensino médio;

- *SIGUENÃS, L. E. B. A utilização do software GeoGebra no ensino da derivada, UNIFRA-RS, 2009:* convém em destacar o conceito de derivada por meio de pesquisas bibliográficas e interação com o *software* GeoGebra. Não menciona o público estudado;

- *MELO, A. L. F. A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: um estudo com alunos do 4° Ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânica do IFPI Campus Floriano, UFPI, 2013:* defende a integração deste tópico de matemática no currículo do Ensino Médio através de um estudo de caso com alunos do 4° Ano do Ensino Médio Integrado utilizando tópicos da Matemática relacionados com a Física;

- *ÓRFÃO, R. B.; COSTA, N. M. L.; FRANT, J. B. Ensino do cálculo infinitesimal na educação básica: reflexões com base prática, UNIBAN, 2011:* trabalho com reflexões sobre o ensino de algumas ideias básicas do Cálculo Infinitesimal através de um estudo clássico e experiências práticas para resolução de problemas envolvendo soma infinita, a área do círculo, velocidade e aceleração.

# 6 MÉTODO AVALIATIVO

Para a verificação geral do método proposto, a parte avaliativa foi dividida em 2 (duas) partes: análise da coleta das informações a respeito da qualidade das atividades aplicadas (realizada durante o processo das aulas experimentais), e na conferência do nível de aceitação propriamente da metodologia tendo em vista a relevância do ensino com as TICs (realizada após o término da aplicação).

## 6.1 COLETA DE DADOS RELATIVA ÀS ATIVIDADES

Os dados principais para a análise da validação do método foram coletados a partir de todos os documentos criados no trabalho de maneira a facilitar a justa responsividade da pesquisa qualitativa[22] e quantitativa[23], pela necessidade de uma perspectiva integrada.

Sendo assim, os dados dessa pesquisa foram recolhidos utilizando como instrumento o questionário do APÊNDICE F, os quais forneceram dados classificatórios das 11 (onze) atividades trabalhadas em sala de aula com o método proposto. Os dados que se fizeram importantes avaliam cada uma das atividades de acordo uma gradação que varia em: Excelente, Boa, Regular, Ruim e Péssima. E, também a avaliação do nível de entendimento dos alunos participantes em termos de: Sim, totalmente; Sim, parcialmente; e Não.

Após a verificação das fichas respondidas de acordo com a amostra de cada turma foram elaborados 2 quadros através dos dados numéricos computados, que se encontram no Quadro 13 (referente aos dados classificatórios das atividades pelas duas turmas) e Quadro 14 (relaciona os níveis de compreensão das atividades pelas duas turmas), com a finalidade de analisar pontualmente as atividades, e dentro de cada uma delas fazer a relação comparativa das 2 turmas pesquisadas.

---

[22] É necessário captar o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes;

[23] Convém em aclarar algum aspecto da questão investigada, e pretende estabelecer comparações. (Fonte: Revista de Administração de Empresas (RAE), v. 35 n°3 – Mai/Jun 1995).

Quadro 13: Dados classificatórios das 11 atividades pelas TURMAS 1 e 2

| Atividades | Turmas | Classificação | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Excelente | Boa | Regular | Ruim | Péssima |
| 1 | TURMA 1 | 63,64% | 36,36% | 0% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 38,89% | 55,56% | 5,56% | 0% | 0% |
| 2 | TURMA 1 | 27,27% | 27,27% | 45,45% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 44,44% | 38,89% | 16,67% | 0% | 0% |
| 3 | TURMA 1 | 18,18% | 72,73% | 9,09% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 27,78% | 38,89% | 27,78% | 5,56% | 0% |
| 4 | TURMA 1 | 36,36% | 45,45% | 18,18% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 55,56% | 27,78% | 16,67% | 0% | 0% |
| 5 | TURMA 1 | 36,36% | 45,45% | 18,18% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 38,89% | 50% | 5,56% | 5,56% | 0% |
| 6 | TURMA 1 | 36,36% | 54,55% | 9,09% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 27,78% | 72,22% | 0% | 0% | 0% |
| 7 | TURMA 1 | 27,27% | 63,64% | 9,09% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 33,33% | 50% | 16,67% | 0% | 0% |
| 8 | TURMA 1 | 18,18% | 72,73% | 9,09% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 33,33% | 44,44% | 16,67% | 5,56% | 0% |
| 9 | TURMA 1 | 18,18% | 45,45% | 36,36% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 38,89% | 55,56% | 5,56% | 0% | 0% |
| 10 | TURMA 1 | 45,45% | 45,45% | 9,09% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 55,56% | 33,33% | 11,11% | 0% | 0% |
| 11 | TURMA 1 | 72,73% | 27,27% | 0% | 0% | 0% |
| | TURMA 2 | 66,67% | 22,22% | 11,11% | 0% | 0% |

Quadro 14: Percentuais de compreensão das 11 atividades pelas TURMAS 1 e 2

| Atividades | Turmas | Compreensão | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim, totalmente | Sim, parcialmente | Não |
| 1 | TURMA 1 | 90,91% | 9,09% | 0% |
| | TURMA 2 | 88,89% | 11,11% | 0% |
| 2 | TURMA 1 | 36,36% | 63,64% | 0% |
| | TURMA 2 | 72,22% | 27,78% | 0% |
| 3 | TURMA 1 | 45,45% | 54,55% | 0% |
| | TURMA 2 | 16,67% | 77,78% | 5,56% |
| 4 | TURMA 1 | 63,64% | 36,36% | 0% |
| | TURMA 2 | 50% | 50% | 0% |
| 5 | TURMA 1 | 45,45% | 54,55% | 0% |
| | TURMA 2 | 38,89% | 55,56% | 5,56% |
| 6 | TURMA 1 | 63,64% | 36,36% | 0% |
| | TURMA 2 | 61,11% | 38,89% | 0% |
| 7 | TURMA 1 | 0% | 100% | 0% |
| | TURMA 2 | 55,56 | 44,44% | 0% |
| 8 | TURMA 1 | 81,82% | 18,18% | 0% |
| | TURMA 2 | 72,22% | 27,78% | 0% |
| 9 | TURMA 1 | 36,36% | 63,64% | 0% |
| | TURMA 2 | 50% | 44,44% | 5,56% |
| 10 | TURMA 1 | 81,82% | 18,18% | 0% |
| | TURMA 2 | 72,22% | 27,78% | 0% |
| 11 | TURMA 1 | 81,82% | 18,18% | 0% |
| | TURMA 2 | 66,67% | 33,33% | 0% |

## 6.2 COLETA DE DADOS RELATIVA AO MÉTODO

Após realização desses encontros para se avaliar o método descrito, foi solicitado aos alunos participantes que preenchessem um questionário com o objetivo de se fazer uma análise do trabalho e da aceitação ou não da metodologia.

O referido questionário se encontra no APÊNDICE E os quais conferem perguntas objetivas e simples sobre o GeoGebra, a respeito da compreensão do método, bem como a opinião sobre a abordagem baseada na visualização e intuição utilizando a ferramenta tecnológica. Ao final se questionou sobre a relevância do ensino do Cálculo Diferencial no Ensino Médio avaliado por meio das aulas experimentais realizadas.

Já que o estudo foi efetuado com duas turmas experimentais houve a necessidade de apresentar os dados em separado para cada uma delas, já que as interações das atividades estudadas foram executadas de maneiras distintas. Sendo assim, as respostas obtidas nos questionários foram analisadas através das marcações das questões objetivas 12, 13, 14, 15 e 16. As Tabelas 2 e 3 exibem as respostas às questões dos alunos da TURMA 1 e TURMA 2, respectivamente.

Tabela 2: Respostas da TURMA 1 às questões 12, 13, 14, 15 e 16 (APÊNDICE E)

<table>
<tr><td rowspan="2">12. Você compreendeu todas as atividades propostas no trabalho de acordo com cada objetivo?</td><td>Sim</td><td colspan="3">Meio Termo</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">5</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13. Você já conhecia o software Geogebra?</td><td colspan="2">Sim</td><td colspan="3">Não</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14. Qual sua opinião a respeito da abordagem de um novo tema em matemática através de uma visualização dos conceitos apresentados em sala de aula por meio do software Geogebra?</td><td>Excelente</td><td>Boa</td><td>Regular</td><td>Ruim</td><td>Péssima</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15. Em sua opinião, a atitude de atrair o ensino da matemática através de uma ferramenta tecnológica pode ser facilitadora para o aprendizado e interesse do aluno?</td><td colspan="2">Sim</td><td colspan="3">Não</td></tr>
<tr><td colspan="2">11</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16. O objetivo geral do trabalho de transmitir conhecimentos do cálculo diferencial e integral, em sua opinião, foi alcançado?</td><td>Sim</td><td colspan="3">Meio Termo</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3">4</td><td>0</td></tr>
</table>

Tabela 3: Respostas da TURMA 2 às questões 12, 13, 14, 15 e 16 (APÊNDICE E)

<table>
<tr><td rowspan="2">12. Você compreendeu todas as atividades propostas no trabalho de acordo com cada objetivo?</td><td>Sim</td><td colspan="3">Meio Termo</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">9</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13. Você já conhecia o software Geogebra?</td><td colspan="2">Sim</td><td colspan="3">Não</td></tr>
<tr><td colspan="2">16</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14. Qual sua opinião a respeito da abordagem de um novo tema em matemática através de uma visualização dos conceitos apresentados em sala de aula por meio do software Geogebra?</td><td>Excelente</td><td>Boa</td><td>Regular</td><td>Ruim</td><td>Péssima</td></tr>
<tr><td>9</td><td>8</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15. Em sua opinião, a atitude de atrair o ensino da matemática através de uma ferramenta tecnológica pode ser facilitadora para o aprendizado e interesse do aluno?</td><td colspan="2">Sim</td><td colspan="3">Não</td></tr>
<tr><td colspan="2">18</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16. O objetivo geral do trabalho de transmitir conhecimentos do cálculo diferencial e integral, em sua opinião, foi alcançado?</td><td>Sim</td><td colspan="3">Meio Termo</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">8</td><td>0</td></tr>
</table>

De acordo com os dados dessas tabelas foi possível perceber que de maneira geral tanto a TURMA 1 quanto a TURMA 2 tiveram aproveitamento muito bom na aplicação realizada, a qual foi potencializada com os atributos do GeoGebra que proporcionou um ambiente interativo e dinâmico ao ensino e esses fatores são cruciais para obtenção de resultados mais atraentes para o processo da aprendizagem. Além disso, as atividades propostas e a forma de abordagem se mostraram de certa forma, eficientes, devido ao interesse observado nos discentes através das perguntas e comentários durante a aplicação.

Ainda dentre as informações das Tabelas 2 e 3, observou-se que boa parte dos estudantes conhecia o *software* utilizado de experiências anteriores e muitos deles captaram que o GeoGebra ou outra ferramenta pode e deve ser utilizado a favor do ensino de temas matemáticos com o fim de oferecer conhecimentos aplicativos e responder o porquê de algumas situações e para quê serve certos assuntos.

## 6.3 VISÃO DOS DISCENTES PARTICIPANTES

Apesar das noções advindas do trabalho terem transparecido aspectos técnicos e opiniões a respeito da metodologia adotada, da ferramenta, e até da forma de abordagem, o fato de maior relevância para a validade do método proposto são os comentários e a classificação pelos próprios alunos participantes.

Então, com fins de registro, as opiniões dos estudantes acerca das atividades através dos recursos utilizados foram coletadas por meio dos materiais de apoio respondidos por eles: o questionário final (APÊNDICE E) e a ficha de classificação de atividades (APÊNDICE F). A avaliação no ponto de vista dos estudantes foi realizada pela perspectiva da relevância da matemática através dos conhecimentos adquiridos cujas informações apresentadas advieram da questão 20 do questionário final, a qual os estudantes foram incentivados a realizar comentários, sugestões de todo o processo, bem como expressar as expectativas anteriores aos encontros em sala de aula e se elas foram atingidas. Vejamos alguns desses comentários:

"*As aulas foram dinâmicas e com maior interação entre professor e aluno*". (Aluno $I_4$)

"*A minha expectativa era conhecer um assunto em que já ouvi várias pessoas falando que é difícil. Achei as atividades muito interessantes*". (Aluno $E_2$)

"*Foi bem legal e bem introdutória ao que aprenderei mais a frente na escola. Não sabia o que esperar do minicurso, mas valeu a pena*". (Aluno $E_{13}$)

"*Foi bom, e acho que o professor deve estar bem preparado para esse tipo de trabalho*". (Aluno $E_5$)

"*Eu esperava que o programa facilitasse o desenvolvimento dos cálculos, e foi o que aconteceu*". (Aluno $E_{17}$)

"*Estava curioso para saber sobre o tema, e gostei bastante*". (Aluno $I_{10}$)

"*Mesmo de forma sucinta, foi possível a assimilação do conteúdo de modo geral. O que leva a crer que seria interessante inserir na grade curricular do ensino médio*". (Aluna $E_{15}$)

"*Achei que seria apenas mais uma aula de matemática, mas foi diferente e interessante*". (Aluno $I_8$)

A partir desses comentários e da própria interação nos dias das aulas é possível perceber que a abordagem relacionada ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral pode ser acrescida a outros tópicos dentro da matemática com objetivo de ampliar a visão dos estudantes, fazendo-os aprender de maneira mais concreta cada novo conceito nos futuros estudos, seja na área de ciências exatas, ou não.

# 7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

De modo geral, as respostas obtidas nos formulários de apoio ofereceram indícios que os estudantes aproveitaram de certa forma a ocasião para enriquecer seus conhecimentos matemáticos os quais se destacam pelas aplicações dos conteúdos trabalhados em sala de aula, assim como pelo interesse surgido na capacidade e na gama de possibilidades do *software* apresentado.

Quanto às análises dos números coletados e dos gráficos gerados é possível afirmar de maneira pragmática o funcionamento das atividades e do processo como um todo. Sendo assim, a partir da classificação e do nível de aprendizado de cada atividade, é possível hierarquizar a relevância das atividades para o método.

Após realizar a verificação das interações em sala de aula e dos Quadros 13 e 14, observaram-se os seguintes resultados:

- **Atividade 1:** Vista de alta relevância para as duas turmas pois trouxe a plena noção de infinito, o qual foi tema base para todo o restante das atividades. Essa virtude da tarefa foi percebida por quase a totalidade dos estudantes das TURMAS 1 e 2 que apresentaram classificações de “Excelente” e “Boa” por 100% da TURMA 1 e 94,45% da TURMA 2.

Em relação ao nível de aprendizado, todos os alunos disseram ter compreendido todo o assunto que podem ser expostos em alguns comentários justificados na classificação das atividades (APÊNDICE F):

“*atividade bem apresentada, explicada, onde a explicação estava coerente com o conteúdo exposto*”. (Aluno $E_7$)

“*pois explicou e comprovou que qualquer que seja o polígono, a sua área nunca atingirá o valor da área da circunferência e sim tende a ele*”. (Aluno $E_4$)

“*atividade extremamente interativa*”. (Aluna $I_5$)

“*a visualização ajudou muito*”. (Aluno $E_{17}$)

Desse jeito é factível a importância do GeoGebra na aplicação em questão, bem como a interação para algo mais concreto, pois se fez uso de noções de polígonos, circunferência e áreas para alcançar o objetivo inicial para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

- **Atividade 2:** Como foi visto na descrição desse exercício, as turmas tinham recentemente estudado progressões geométricas, fato que demonstrou mais interesse pelos discentes.

O entendimento foi tido como unânime pelos alunos participantes, e a classificação obtida por eles também foi muito positiva, tendo em vista que 54,54% da TURMA 1 e 83,33% da TURMA 2 afirmaram que a atividade é de “Excelente” ou “Boa” relevância.

Considerando os comentários relacionados a essa atividade, citam-se as seguintes:

“*não fixei bem o assunto. Acho que exercícios poderiam ajudar a fixar melhor*”. (Aluno $E_{13}$)

“*Além de já ter visto o assunto, o professor explicou bem*”. (Aluno $I_9$)

“*fica bem mais fácil de entender visualizando*”. (Aluno $E_1$)

Pode se constatar que a falta de maiores detalhamentos e exercícios são pontos a serem corrigidos na aplicação da metodologia, mas isso é decorrente do exíguo tempo disponível como já foi dito. Outro ponto que se destaca novamente é a ferramenta interativa, a qual trouxe elucidações mais diretas para os alunos.

- **Atividade 3:** O assunto das assíntotas foi o que trouxe maior insegurança aos participantes, e mesmo eles tendo classificado em maioria como uma boa atividade, foi perceptível que alguns estudantes estavam atônitos com a novidade.

Relativo a classificação foi a atividade que iniciou com a qualificação de “Ruim”, mesmo sendo uma pequena parcela (5,56% da TURMA 2), é um indicio de que algo deve ser observado. Ainda mais quando se notou que nos índices de compreensão, 5,56% da TURMA 2 disse não ter entendido a atividade. Contudo, os demais discentes consideraram a atividade positiva e de acordo com o que se propôs.

Verificando alguns comentários, seguem:

"*a explicação foi um pouco confusa*". (Aluno $E_3$)

"*o exemplo gráfico ajudou muito*". (Aluno $I_6$)

"*o GeoGebra ajudou a ilustrar na prática o problema, mas acho que questões poderiam fixar o tema*". (Aluno $E_{12}$)

Os pontos tratados são bem parecidos com os das atividades anteriores: o elogio à forma que o *software* aborda os aspectos matemáticos e a falta de exemplificação em exercícios simplesmente pela ausência de tempo de exposição. Porém dessa vez ocorreu a necessidade de se explanar um conteúdo não apenas pela intuição devido aos estudantes não possuírem o pré-requisito adequado conforme especificado, fato que intensificou a dificuldade no aprendizado.

- **Atividade 4:** Apesar de os alunos informarem inicialmente que sabiam pouco do assunto a ser tratado nessa tarefa, eles se saíram bem nas concepções, indagações e comentários.

Com a funcionalidade do GeoGebra os estudantes conseguiram captar os objetivos que originou em unanimidade de compreensão pelas turmas, já quanto a classificação, a maioria voltou a ver como "Excelente" e "Boa" a qual resultou em 81,81% da TURMA 1 e 83,34% da TURMA 2.

Segundo a abordagem dos comentários para essa atividade, citam-se:

"*a ilustração permitiu uma boa aprendizagem no exemplo citado no GeoGebra*". (Aluno $E_2$)

"*interativo e simples*". (Aluno $E_{11}$)

"*consegui compreender sem dúvidas, gostei da explicação, pois além de aprender alguns detalhes novos, revisei assuntos já vistos*". (Aluno $I_8$)

"*fiquei com certa dúvida*". (Aluno $E_{13}$)

Observa-se nesse momento que aparecem discursos sobre aplicação de assuntos já conhecidos dos alunos para embasar novos conteúdos de modo a facilitar a conexão dos entendimentos anteriores com os conhecimentos atuais, de acordo com as recomendações dos PCNs.

Em conformidade com as dúvidas, é importante dizer que no momento das aulas foram deixados os alunos plenamente livres para perguntar, questionar, ou seja, tirar suas dúvidas, porque isso engrandeceria e contribuiria com o método, e durante as ocorrências de incertezas, todas elas foram respondidas e a pronta resposta é que fora entendido. Logo, as indicações de dúvidas podem ser de alguns que não se manifestaram, ou mesmo de aqueles os quais não compreenderam completamente quando respondidos.

➢ **Atividade 5:** Esse item é de alta relevância para o estudo que se pretendeu inclusive para turmas mais avançadas que podem servir de suporte até mesmo para estudantes do ensino superior. A adequação dessa atividade com o aprendizado das atividades anteriores é crucial por razão de abordar os principais conceitos iniciais de derivada de uma função, e ainda assim, os alunos envolvidos classificaram a tarefa em 81,81% da TURMA 1 e 88,89% da TURMA como “Excelente” ou “Boa”.

Já quanto ao nível de compreensão, 5,56% da TURMA 2 afirmou o não entendimento, onde se verificou ser os mesmos indivíduos que não entenderam completamente a Atividade 3. Mesmo assim, não se perde a validade da aplicação desse item, o qual depende de conhecimentos mais aprofundados para alunos do Ensino Médio. Os comentários que se seguiram foram:

“*os exemplos ajudaram a uma boa compreensão*”. (Aluno $I_7$)

“*não entendo muito esse assunto, acho complicado*”. (Aluno $E_{10}$)

“*a abordagem é interessante, mas é preciso de mais tempo de estudo para ter melhor aproveitamento*”. (Aluno $E_4$)

Vê-se que o passo a passo de se aplicar inicialmente funções constantes e depois retas afins de modo a ser suficiente para se entender o processo que se realizava, juntamente com as dúvidas que surgiam e eram imediatamente respondidas. Nesse passo, o comentário sobre a complicação da matéria é especificado pela dificuldade encontrada em perceber as inclinações das retas tangentes quando construídas, problema individual, que haveria necessidade de estudos específicos por esses alunos para acompanhar plenamente o tema.

E por último, houve novamente a observação do tempo de aplicação da proposta o qual se sugere estender mais para casos de trabalhos futuros.

- **Atividade 6:** Para início das tarefas aplicativas, esse exercício obteve uma boa consideração para embasamento sobre conexões de temas distintos, como inclinação de reta e velocidade média. O relacionamento existente prepara o aluno para a concepção de aproximação de valores e o uso de intervalos numéricos cada vez menores, resultando em algo mais inusitado: o aprendizado intuitivo de como calcular velocidade média sobre o aspecto de limites das funções de inclinações das retas tangentes.

Classificadamente, essa atividade foi considerada de forma relevante por 90,91% pela TURMA 1 e 100% pela TURMA 2, cujos estudantes responderam como “Excelente” ou “Boa”. E para os entendimentos dos participantes, todos os alunos de ambas as turmas confirmaram não terem dúvidas. Dessa maneira, expõem-se os comentários a respeito disso.

“*a intuição e a noção do que se queria passar aconteceu normalmente*”. (Aluno $E_{14}$)

“*a explicação foi boa e bem entendida*”. (Aluno $I_2$)

“*boa apresentação, mas falta mais interação*”. (Aluno $E_1$)

Dos comentários acima, é importante pontuar as fases mais marcantes, tais como: a apresentação da atividade e a percepção dos discentes a respeito da importância da intuição no aprendizado. Assim, a abordagem do GeoGebra novamente se sobrepôs como ferramenta metodológica, porém nessa atividade há a necessidade de reformulação do ponto de vista interativo com o fim de obter a atenção dos participantes, não prejudicando a compreensão e os objetivos focados.

- **Atividade 7:** Como já foi citado, essa atividade complementa o inicio das aplicações da tarefa anterior, e por justiça, o faz adequadamente, e por relevância, a atividade obteve uma classificação de 90,91% da TURMA 1 e de 83,33% da TURMA 2, além de considerar a unanimidade vista na compreensão dos alunos.

Desdobrando esses valores, é necessário frisar que a TURMA 1 teve 100% de entendimento parcial, o qual o motivo primordial captado pelas anotações e respostas dos questionários foi a dificuldade da forma de obter velocidades instantâneas através da aproximação $\Delta t \to 0$ de forma contínua pela representação da função da velocidade média. Essa dificuldade foi confirmada na interação da aula conquanto foi necessária a repetição da explicação da meta da atividade antes mesmo de iniciá-la, porém o interesse foi correspondido quando se apresentou pelo método da intuição do *software* com todo o suporte visual.

Enumerando os comentários válidos, segue:

"*consegui compreender sem dúvidas após ver o resultado do GeoGebra*". (Aluno $E_9$)

"*me proporcionou um melhor entendimento com este programa*". (Aluno $I_{11}$)

"*o suporte da ferramenta é quase essencial para completar o conhecimento*". (Aluno $E_{18}$)

O problema da não compreensão foi solucionado, sem dúvida, após a visualização da atividade interativa que trouxe a validade da modificação de parâmetros em tempo real que aconteciam de acordo com o que era explanado.

Apesar das dificuldades existentes na aplicação, esse exercício foi verificado como de muita utilidade para a fixação do novo conhecimento que se iniciou na mente desses alunos. Ele busca o saber aplicado ao que se aprendeu, e esse fato é uma dificuldade no ensino brasileiro, seja por razão de origem epistemológica do legado ensino/aprendizagem, seja pela ausência de novas aplicações e metodologias para se corrigir essa desconexão.

- **Atividade 8:** A análise dessa atividade se torna complexa por ter resultados um pouco contraditórios. Devido à descomplicação da atividade e do objetivo que se traçou, os alunos pareciam reconhecer facilmente os pontos críticos das funções exemplos, e alguns desses estudantes pareceram captar a ideia da atividade, mas na classificação coletada teve um resultado de 5,56% na TURMA 2 como a atividade sendo "Ruim", porém não foi justificado, e assim, supõe-se que foi justamente por essa simplicidade.

Os valores de relevância da atividade de respostas “Excelente” e “Boa” foi determinado por 90,91% da TURMA 1 e 77,77% da TURMA 2. E, novamente, o entendimento foi completo pelas turmas participantes.

Mostram-se os comentários ofertados:

“*o programa é legal e dá pra interpretar facilmente*”. (Aluno $I_8$)

“*consegui entender sem dúvidas e acho o assunto muito interessante*”. (Aluna $I_5$)

“*os exemplos demonstrados ajudaram a uma boa compreensão*”. (Aluno $E_{13}$)

As citações são precisas quanto a qualidade da ferramenta e tornam-se indícios de um bom resultado de ensino quando adequadamente colocado. Essa atividade foi uma das mais simples de aplicar e mostrar para os alunos, pois o posicionamento deles era de clara certeza sobre o que se falava, e as perguntas se dirigiam diretamente para o escopo da atividade. Por esse motivo houve a surpresa da marcação “Ruim” da tarefa.

- **Atividade 9:** Analiticamente essa atividade é vinculada com a anterior e mesmo de forma comparativa é possível confrontar os resultados. Basicamente, como houve o interesse pela abordagem aplicativa dos pontos de máximo e mínimo os alunos tiraram o maior proveito da atividade ao localizar esses pontos através da inclinação da reta tangente. Por esse ponto de vista classificou-se a atividade como “Excelente” e “Boa” por 63,63% da TURMA 1 e 94,45% da TURMA 2.

A compreensão dessa atividade foi considerada numericamente adequada, apesar de 5,56% da TURMA 2 dizer não tê-la entendido. Isso ocorreu por intermédio do exíguo tempo existente no exercício que inclusive foi um dos fatores citados pelos discentes.

“*consegui compreender sem dúvidas, apesar de nunca ter visto o assunto antes, e consegui compreender*”. (Aluno $I_8$)

“*o exemplo utilizado foi bem compreendido, mas o pouco tempo não ajudou a fixação do tema*”. (Aluno$E_4$)

“*não dá pra aprender direito em uma aula*”. (Aluno $E_{12}$)

Um dos aspectos mais perceptíveis na análise atual diz respeito que mesmo possuindo uma altíssima relevância para a TURMA 2, uma parcela de seus integrantes não compreenderam a atividade, contudo pelos meios disponíveis (questionários e percepção das aulas) foi possível determinar que a razão absoluta disso deveu-se a falta de tempo de aplicação para poder explorar os conteúdos existentes na atividade.

A aplicação exemplificada corrobora o intuito de atrair ensino de tópicos de matemática através dos assuntos vistos de maneira diferenciada. E para a proposta em voga utilizou-se esse processo para desmitificar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral durante os anos do Ensino Médio.

- **Atividade 10:** Por ser outra aplicação vista da Atividade 8, ela foi recebida pelos alunos de forma mais exemplificativa, a qual se mostrou com um índice de aceitabilidade maior que a atividade anterior. Obteve-se um resultado de 90,90% da TURMA 1 e 88,89% da TURMA 2 para os índices de marcação "Excelente" e "Boa", e, também, o entendimento seguiu a mesma proporção de consideração pois além de atingir os 100% das duas turmas, a maioria das respostas foram para o "Sim, Totalmente" que representaram 81,82% da TURMA 1 e 72,22% da TURMA 2.

Internamente, surgiu o questionamento se esses valores altos para a atividade foram conseguidos apenas por ela ser o segundo exemplo de máximos e mínimos, onde os alunos já tinham adquirido experiência durante a Atividade 9, ou simplesmente pela qualidade da tarefa abordada? Infelizmente, essa indagação não poderá ser respondida diretamente, pois é caracterizado por diversos fatores, porém um fato é certo, a classificação de ambas as atividades é positiva e muito convidativa para utilização em sala de aula para o ensino proposto.

Dentre os comentários para esse exercício, destacam-se os seguintes:

"*nunca havia estudado o assunto, mas graças à visualização e a explicação do professor, compreendi sem dúvidas*". (Aluno $I_{11}$)

"*não conhecia o assunto e pude ter uma boa noção*". (Aluno $E_5$)

"*o exemplo prático ajudou em uma boa compreensão*". (Aluno $E_{13}$)

O que foi exposto reforça a validade da atividade mesmo que um aluno não tivesse visto a anterior. Quanto aos comentários, estão envolvidos os fatores principais: ferramenta tecnológica, qualidade de aula do professor instrutor e aplicação de temas matemáticos relacionados com situações cotidianas.

- **Atividade 11:** Indubitavelmente essa atividade trouxe informações surpreendentes. Como se achava antes de começar a atividade que os estudantes teriam dificuldades em relação a novidade abordada, o interesse havido e a perspicácia foi deveras envolvente, e os números da classificação confirmaram, pois 100% da TURMA 1 e 88,89% da TURMA 2 marcaram como “Excelente” ou “Boa”, e além disso, 81,82% da TURMA 1 e 66,67% da TURMA 2 tiveram um entendimento completo da tarefa, uma das maiores porcentagens dentre todas as aplicações feitas.

Os comentários para esta atividade foram os seguintes:

“*aproximar retângulos é um modo legal de obter áreas de qualquer polígono*”. (Aluno $E_9$)

“*o exemplo citado quando apresentado no GeoGebra permitiu uma excelente compreensão*”. (Aluna $E_{15}$)

“*a intenção de calcular áreas diversas é inovador pra mim, mas a maneira de calcular ainda me deixou com dúvidas*”. (Aluno $I_4$)

“*ver a interação do programa atrai o aprendizado e já responde a muitas perguntas*”. (Aluno $I_2$)

A ideia de integral definida parece ter ficado muito clara para os discentes que participaram da atividade. Com a noção da soma de *Riemann* do preenchimento dos espaços de áreas com retângulos foi possível os alunos entenderem o processo exibido a partir das impressões de aproximação já citadas diversas vezes em outros momentos. Assim a menção do aprendizado desse novo assunto para alunos do ensino médio é mais uma confirmação da viabilidade de aplicação do ensino de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral para esse nível de ensino, e utilizando métodos adequados para esse fim a realização desse feito pode ser considerada cada vez mais plausível.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal do trabalho se relaciona com a possibilidade de inserir o Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio por meio da noção intuitiva do tema. Apesar de se ter trabalhado apenas com turmas de 2° ano, isso não impede de realizar a aplicação de atividades correlacionadas de forma adequada desde o primeiro ano do ensino médio, pois é uma ótima maneira de ampliar o conhecimento dos discentes e de exibir a aplicação dos conceitos matemáticos contidos no currículo escolar.

As atividades aplicadas são referentes para todo o Ensino Médio, as quais foram construídas em sua maioria com conteúdos voltados para este nível de ensino consoante os Parâmetros Curriculares Nacionais. As abordagens dos conteúdos favorecem os alunos em um ensino relacionado com a intuição, a visualização, através da aplicação das teorias estudadas com a utilização do *software* GeoGebra.

Com respeito ao objetivo geral do trabalho acredita-se que a transmissão dos conhecimentos da maneira proposta, apesar dos percalços havidos, foi uma experiência muito gratificante e uma oportunidade de os alunos aguçarem o próprio senso crítico, pois eles foram instigados a refletirem e levantarem indagações sobre questões e aprenderem a partir delas, mesmo que de maneira superficial, temas normalmente não vistos no Ensino Secundário: noções de limites, derivadas e integrais definidas.

No que concerne as atividades trabalhadas em sala de aula, tentou-se relacionar os conhecimentos de umas com as outras buscando o processo lógico dos pensamentos iniciais de limites e infinito, necessários para realizar a aproximação de retas secantes a reta tangente em um ponto e obter a velocidade instantânea por meio da aproximação da velocidade média formando as ideias iniciais de derivadas. Após, ocorreu a aplicação das tendências de áreas de infinitos retângulos para conseguir a aproximação do valor de área de uma curva qualquer o qual permearam a iniciação das definições básicas de integral definida no contexto proposto. Expõe-se abaixo um esquema desse pensamento lógico.

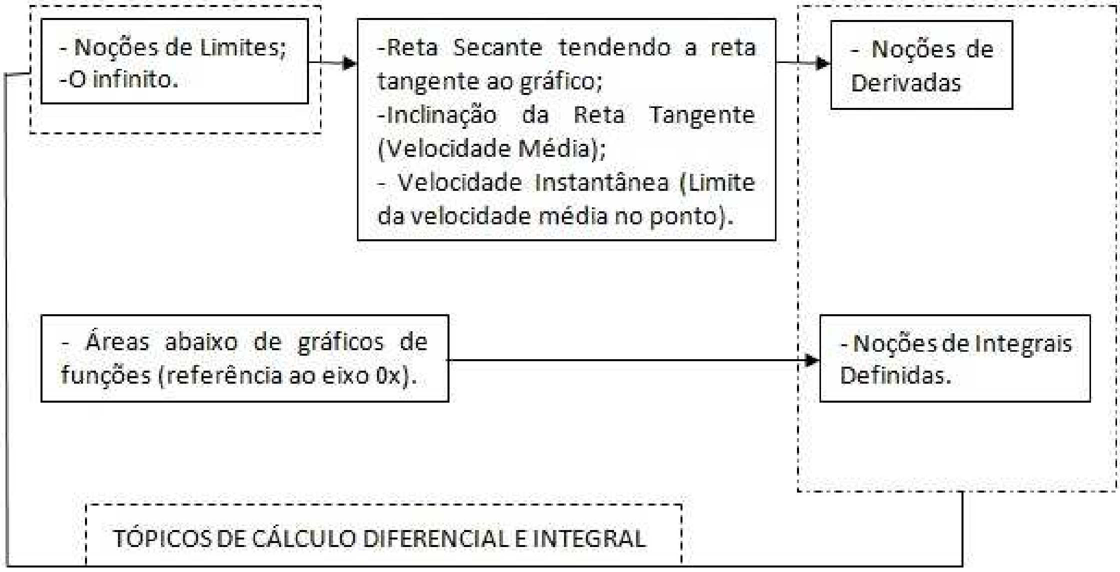


Figura 45: Esquema lógico das atividades aplicadas

Assim, é factível que ao deixar de trabalhar essas ideias, ainda no ensino médio, se perde uma ótima chance de aumentar o conhecimento dos estudantes e de exibir a aplicação de conceitos matemáticos pertencentes ao currículo desse grau de ensino. Logo, as atividades aplicadas, podem ser objeto de desenvolvimento dos programas de ensino atuais, adequando o tratamento dos assuntos de forma a aplicar os conteúdos aos alunos em um processo que ressalta a intuição e a visualização com base na aplicação das teorias estudadas.

Outro fator que pode contribuir com esse tipo de abordagem se refere ao preparo do instrutor que além de conhecer a matemática envolvida nas aulas, deve dominar os meios disponíveis para o desenvolvimento e aplicações das atividades que enfatizem as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio.

Finalmente, supõe-se que através do interesse observado, os alunos participantes pareceram interessados e entusiasmados ao verem a aplicação das atividades através do *software*, fato que demonstra a relevância do trabalho executado ao tentar inserir o Cálculo no Ensino Médio.

## 8.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS POSTERIORES

O presente trabalho procurou associar conhecimentos do Cálculo Diferencial de acordo com uma metodologia didática específica com fins aplicativos no Ensino

Médio. Conquanto nessa pesquisa, coexistem fatores de aprendizagem que proporcionam sugestões para trabalhos posteriores nessa linha, de modo a complementar diversos pontos tratados bem como a superação das dificuldades encontradas. Ao analisar os resultados apresentados no questionário respondido pelos discentes, procurou-se investigar tópicos que pudessem identificar as potencialidades e obstáculos no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. São eles:

- **Tempo de Aplicação:** o trabalho com os alunos pode ser executado de forma mais longa, onde se abordaria mais detalhes teóricos, mesmo que de forma intuitiva. Com isso possibilitaria a criação ou adaptação de mais atividades com este ou outros *softwares* de modo a se obter um melhor desempenho e interesse dos alunos durante uma aula de matemática;

- **Uso da tecnologia em favor do Ensino:** a utilização do auxílio das TICs mostrou um desempenho eficaz, pois é uma ferramenta que já se demonstra capaz de obter resultados excelentes com alunos de Ensino Fundamental, Médio ou mesmo Superior. Assim, o ensino da matemática em geral ganharia em qualidade ao ser aplicada adequadamente por quem saiba o que está sendo feito;

- **Aplicação do método em laboratório de Informática:** seria interessante a realização dos testes feitos em sala de aula, ou testes experimentais parecidos no âmbito de um laboratório de informática com toda a estrutura e adequação. Apesar disso já ter sido realizado no trabalho de Molon (2013), o fato de o aluno trabalhar junto com o professor instrutor induz que o discente cria seu próprio conhecimento ao passo que manipula o *software* e o conhece mais intimamente. E isto corrobora ainda mais com a visualização e intuição;

- **Análise de bibliografia específica:** pode se verificar alguns livros de Cálculo Diferencial e Integral voltados ao ensino superior e se descrever as boas e as más colocações possivelmente existentes. Assim, através desses dados, realizar as devidas adaptações de modo a traçar a possibilidade de se utilizar esses livros para o ensino médio, conforme descreveu Ávila (1991, p. 5).

As sugestões feitas se baseiam em parte pela experiência vivenciada nesse trabalho e também pela análise dos questionários mencionados, os quais possuem respostas que indicam a habituação dos estudantes com o *software* e o favorecimento da aprendizagem dos conceitos intuitivos de limites, derivadas e integrais definidas. Dessa maneira, é possível favorecer o processo de ensino-aprendizagem de modo a melhorar a qualidade do ensino de matemática no Ensino Médio, inclusive com a inserção de um recurso computacional de alta pertinência e aplicabilidade como se mostrou o GeoGebra.

# REFERÊNCIAS

ALBERTIN, A. L. **Comércio Eletrônico: modelo, aspectos e contribuições de sua aplicação.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2010, 318 p.

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2° grau. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), n° 18, p. 1-9, 1991.

ÁVILA, G. **Cálculo Funções de uma Variável, Vol. 1.** Editora Livros Técnicos e Científicos, 4ª edição, 1981.

AYRES JR., F. A. **Cálculo diferencial e integral.** 3ª edição. Trad. A. Zumpano. São Paulo: Makron, 1994.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 1999, 195 p.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001, 98 p.

BRASIL. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental.** Brasília: Ministério da Educação, 1998.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil.** Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 08 set. 2014.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Brasília, 2000.

BURIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Estudos da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.

CARNEIRO, J. P. Q.; MORGADO, A. C. Coleção Matemática 2 Grau (Giovanni e Bonjorno) - Volume 3 - Unidades 10 a 12. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 221 – 226, 2001.

CARVALHO, P. C. P.; CARVALHO, J. B. P. Matemática (Bianchini e Paccola) – volume 3 - Unidades 8 a 10. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 104 – 105, 2001.a.

CARVALHO, P. C. P.; CARVALHO, J. B. P. Coleção Matemática para o segundo grau (Gentil *et al.*) – volume 3 - Unidades 7 a 9. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 162 – 164, 2001.b.

CARVALHO, P. C. P.; CARVALHO, J. B. P. Coleção Matemática (Manoel Paiva) – Volume 3 - Unidades 23 a 35. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 342 – 345, 2001.c.

DIEUDONNÉ, J. A. Should We Teach "Modern" Mathematics?. **American Scientist** Publicação: Sigma Xi, The Scientific Research Society, Vol. 61, N° 1, p. 16 – 19 (January - February), 1973.

DUCLOS, R. C. Cálculo do 2° grau. **Revista do Professor de Matemática**, n° 20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), p. 26 – 30, 1992.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

JAPIASSÚ, H. **Interdisciplinaridade e Patologia do Saber**. Rio de Janeiro, Ed. Imago, 1976.

JÚDICE, E. D., GOMES, M. L. M. Curso Prático de Matemática (Paulo Bucchi) – volume 3. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 457 – 460, 2001.

LACHINI, J.; LAUDARES J. B. (orgs). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.** Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 78 – 79, 2001, 467p.

LIMA, E. L., WAGNER, E. Matemática, aula por aula (Barreto Filho e Silva) – Volume 3. In: _____. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 78 – 79, 2001.a.

LIMA, E. L., WAGNER, E. Matemática, Contexto e Aplicações (Dante) – volume 3 - Unidades 7 e 8. In: _____. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 309 – 312, 2001.b.

MELO, A. L. F. **A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: um estudo com alunos do 4° Ano do Ensino Méd io Integrado ao Técnico de Eletromecânica do IFPI Campus Floriano**. UFPI - Teresina, 2013.

MOLON, J. **Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013, 195 p.

MORAN, J. M. **A Educação que desejamos novos desafios e como chegar lá.** Campinas: Papirus, 2007.

NÁPOLES, S. M. O que é um ponto de Inflexão? **Gazeta de Matemática**, n° 140. Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais – CMAF-UL, p. 1, Janeiro 2001.

OLIVEIRA, M. A. M.; VALLADARES, R. C. C. **O uso da informática na sala de aula: caminhos e (des)caminhos. Presença Pedagógica.** V. 5, n° 26 – Mar/Abr. 1999.

ÓRFÃO, R. B.; COSTA, N. M. L.; FRANT, J. B. **Ensino do cálculo infinitesimal na educação básica: reflexões com base prática**. UNIBAN, 2011.

PALMA FILHO, J. C. **Política educacional brasileira. Educação brasileira numa década de incerteza (1990-2000): avanços e retrocessos.** São Paulo: CTE Editora, 2005.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, M. C. R., NASSER, L. (orgs). **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza - Epistemológica.** Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: FE-USP, 2003.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: Estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.** UFOP – Ouro Preto, 2010.

SIGUENÂS, L. E. B., **A Utilização do Software GEOGEBRA no ensino da Derivada.** Trabalho Final de Curso. Santa Maria-RS, UNIFRA, 2009.

WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Matemática (Iezzi *et al.*) - Vol 3 - Unidades 6 a 9. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 134 – 136, 2001.a.

WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Matemática (Smole e Kiyukawa) – Volume 3. In: LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro, p. 265 – 266, 2001.b.

ZUIN, E. S. L. Cálculo uma abordagem histórica. In: LACHINI, J. e LAUDARES, J. B. (orgs). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.** Belo Horizonte: FUMARC, p. 13-36, 2001.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A- Apresentação aos Alunos – Estrutura de Tópicos

**06/09/2014**

1 **Estímulo do Ensino da Matemática**
Proposta do Ensino do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio

2 **PROPOSTA**
- Experimento acadêmico em Matemática;
- Abordagem do Ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio (Tópicos de Limites, Derivadas e Integrais);
- Metodologia experimental com o suporte de *Software* o qual se baseará apresentação dos assuntos em forma de atividades específicas.

3 **OBJETIVOS**
- Motivar os alunos no aprendizado em Matemática;
- Demonstrar a importância da Matemática em diversas áreas científicas (exatas e não exatas).

4 **JUSTIFICATIVAS**
- O principal foco para a motivação dos discentes é apresentação das aplicações.

  As aplicações são diversas, contudo para a apresentação apenas algumas delas serão descritas.

5 **APLICAÇÕES**
- Determinação de órbitas de astros, satélites mísseis (Astrologia, comunicação, física, engenharia bélica);
- Análise de crescimento de populações (Geografia, biologia);
- Medida de fluxos (Engenharia de tráfego, civil, outras);
- Determinar quantidades ideais de produção que minimizam custos, quais as que maximizam lucros (Economia);
- Determinar o melhor caminho de modo a minimizar o tempo de percurso (Física);
- Dentre outras.

6 **CONTRIBUIÇÃO DA ESCOLA**
- Disponibilidade de alunos do 3º ano do Ensino Médio para uma apresentação de uma metodologia a ser testada para o Ensino do Cálculo Diferencial e Integral;
- Contribuição para a continuidade da vida acadêmica;
- Havendo interesse por parte da escola e dos alunos serão definidos encontros para apresentação da metodologia e posterior análise.

7 **CONTRIBUIÇÃO PARA ESCOLA**
- Nova visão para o aluno do aprendizado da matemática inclusive para temas já conhecidos.

8 **SOLICITAÇÕES AOS DISCENTES**
- Preenchimento de uma ficha de controle para coleta e análise de dados quanto ao nível de interesse e pontos de revisão que possuem para avaliação estatística;
- Turmas pequenas são ideais;
- Atenção, foco no entendimento e retirada de dúvidas dos novos conhecimentos ofertados.

9 **PONTOS DE REVISÃO**
- Necessidade de pontuar temas que já devem ser conhecidos pelos alunos nesse nível de ensino com fins de auxiliar na explanação das atividades.

**1 de 2**

06/09/2014

10 **PONTOS DE REVISÃO**

- Polígonos inscritos em circunferência;
- Áreas de polígonos e da circunferência;
- Reta real;
- P.G. (conceito e soma dos elementos);
- Assíntotas e interpretação do infinito;
- Reta secante e tangente (a gráficos);
- Inclinação da reta (coeficiente angular);
- Velocidade média (conceito e cálculo);
- Função quadrática, ponto máximo e mínimo;
- Intervalos e função limitada;
- Pontos que formam um gráfico (representação).

11 **METODOLOGIA**

- Não há rigores;
- Sem apelos conceituais exagerados;
- Uso do *Software Geogebra* como ferramenta principal;
- Apresentação dos assuntos em forma de atividades no *software*;
- Foco na visualização das atividades.

12 **AVALIAÇÃO METODOLÓGICA**

- Após às apresentações se fará necessário que os participantes preencham outra ficha em que deverão ser obtidas opiniões com relação ao método e aos pontos ministrados, bem como a sua eficácia;
- Verificações por parte dos alunos quanto:
  - A importância do cálculo no Ensino Médio; e
  - Aumento de interesse da matemática e afins para este nível de ensino.

13

DÚVIDAS?

14 Grato pela contribuição!!

Tudo aquilo que as maiores inteligências, ao longo dos séculos, têm realizado em relação à compreensão das formas, por meio de conceitos preciosos, está reunido numa grande ciência - a matemática.
(Herbart)

## APÊNDICE B - Calendário de aulas – Cronograma de aplicação do método proposto para TURMA 1

| TURMA DE 2° ANO DO ENSINO MÉDIO (INFORMÁTICA) | |
|---|---|
| **AULAS** | **CONTEÚDO** |
| APRESENTAÇÃO<br>24/09/2014<br>10:00 – 10:45 | - EXPLANAÇÃO DO MÉTODO;<br>- APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO INICIAL |
| 1ª AULA<br>29/09/2014<br>09:00 – 09:45 | - APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 1)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 1;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 2<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 2)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 2;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 3<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 3)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 3; |
| 2ª AULA<br>29/09/2014<br>10:00 – 10:45 | - APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 4<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 4)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 4;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 5<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 5)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 5;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 6<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 6)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 6; |
| 3ª AULA<br>06/10/2014<br>09:00 – 09:45 | - RECAPITULAÇÃO RÁPIDA DA AULA ANTERIOR;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 7<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 7)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 7;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 8<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 8)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 8;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 9<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 9)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 9; |
| 4ª AULA<br>06/10/2014<br>10:00 – 10:45 | - APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 10<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 10)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 10;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 11<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 11)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 11;<br>- APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO FINAL. |

**APÊNDICE C - Calendário de aulas – Cronograma de aplicação do método proposto para TURMA 2**

| TURMA DE 2° ANO DO ENSINO MÉDIO (EDIFICAÇÕES) | |
|---|---|
| **AULAS** | **CONTEÚDO** |
| APRESENTAÇÃO<br>24/09/2014<br>10:45 – 11:30 | - EXPLANAÇÃO DO MÉTODO;<br>- APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO INICIAL |
| 1ª AULA<br>29/09/2014<br>10:45 – 11:30 | - APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 1)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 1;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 2<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 2)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 2;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 3<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 3)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 3; |
| 2ª AULA<br>29/09/2014<br>11:30 – 12:15 | - APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 4<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 4)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 4;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 5<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 5)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 5;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 6<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 6)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADES 6; |
| 3ª AULA<br>06/10/2014<br>10:45 – 11:30 | - RECAPITULAÇÃO RÁPIDA DA AULA ANTERIOR;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 7<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 7)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 7;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 8<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 8)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 8;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 9<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 9)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 9; |
| 4ª AULA<br>06/10/2014<br>11:30 – 12:15 | - APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 10<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 10)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 10;<br>- APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 11<br>ESPAÇO PARA DÚVIDAS (ATIVIDADE 11)<br>AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 11;<br>- APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO FINAL. |

## APÊNDICE D – Questionário Inicial

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

**EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**Dissertação de Mestrado:** “Proposta de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via GeoGebra”.

**Prof.:** Everton Alves de Araujo.

**DADOS DOS ALUNOS PARTICIPANTES DO EXPERIMENTO ACADÊMICO QUE COMPÕEM O TRABALHO**

---

### PARTE I: DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

1. Idade: ______ anos
2. Sexo: Masculino ( ) Feminino ( )

### PARTE II: OPINIÕES A RESPEITO DA DISCIPLINA MATEMÁTICA

3. Você gosta de matemática?

Sim ( ) Meio termo ( ) Não ( )

Justifique sua resposta: ____________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

4. Você normalmente compreende os conteúdos matemáticos que lhe é ensinado?

Sim (  ) Meio termo (  ) Não (  )

Justifique sua resposta: ___________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

5. Qual o maior problema no processo ensino/aprendizagem na disciplina matemática em sua opinião?

______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

6. Marque as alternativas que deveriam ser alteradas para se obter melhores resultados no aprendizado de matemática. (Marque ao menos um dos itens):
   (  ) Preparação dos professores;
   (  ) Reformulação das ementas de Ensino Fundamental e Médio;
   (  ) Interesse de aprendizado dos alunos;
   (  ) Aulas voltadas a aplicações em mais casos reais.

Justifique sua resposta: ___________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

**PARTE III: NÍVEL DE CONHECIMENTO DOS PONTOS DE REVISÃO PELAS ALUNOS PARTICIPANTES**

7. Marque(m) o(s) item(ns) o(s) qual(is) consta(m) assunto(s) de matemática de séries/anos anteriores em que você possui convicção que sabe utilizá-lo (de alguma forma):

( ) Polígonos inscritos em circunferência;

( ) Áreas e perímetros de polígonos e área da circunferência;

( ) Reta real;

( ) P.G. (conceito e soma finita e infinita dos elementos);

( ) Assíntotas de gráficos e interpretação do infinito;

( ) Retas secantes e tangentes (a gráficos);

( ) Inclinação da reta (coeficiente angular);

( ) Velocidade média (conceito e cálculo) – Física Cinemática;

( ) Função quadrática (gráfico), ponto máximo e mínimo;

( ) Intervalos e função limitada;

( ) Pontos de um gráfico (representação em coordenadas $X \times Y$).

8. Você já ouviu falar no assunto que está preste a aprender (Cálculo Diferencial e Integral)?

Sim ( ) Não ( )

9. Você tem algum conhecimento sobre o assunto: Cálculo Diferencial e Integral?

Sim ( ) Não ( )

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

**APÊNDICE E – Questionário Final**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

**EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**Dissertação de Mestrado:** “Proposta de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via GeoGebra”.

**Prof.:** Everton Alves de Araujo.

**INFORMAÇÕES PARA AVALIAÇÃO METODOLÓGICA DO TRABALHO**

---

**PARTE I: DADOS DE IDENTIFICAÇÃO**

10. Idade: ______ anos

11. Sexo: Masculino ( )        Feminino ( )

**PARTE II: SOBRE AS ATIVIDADES**

12. Você compreendeu todas as atividades propostas no trabalho de acordo com cada objetivo?

Sim ( )        Meio termo ( )        Não ( )

Justifique sua resposta: ________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

## PARTE III: SOBRE A METODOLOGIA (*SOFTWARE*)

13. Você já conhecia o *software GeoGebra*?

Sim ( )    Não ( )

14. Qual sua opinião a respeito da abordagem de um novo tema em matemática através de uma visualização dos conceitos apresentados em sala de aula por meio do *software GeoGebra* ?

Excelente ( )    Boa ( )    Regular ( )    Ruim ( )    Péssima ( )

Justifique sua resposta: ________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

15. Em sua opinião, a atitude de atrair o ensino da matemática através de uma ferramenta tecnológica pode ser facilitadora para o aprendizado e interesse do aluno?

Sim ( )    Não ( )

Justifique sua resposta: ________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

## PARTE IV: CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS

16. O objetivo geral do trabalho de transmitir conhecimentos do cálculo diferencial e integral, em sua opinião, foi alcançado?

Sim ( )    Meio termo ( )    Não ( )

Justifique sua resposta: ________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

17. Que sugestões você daria para melhorar a organização do trabalho, de modo a facilitar o entendimento dos conceitos desenvolvidos durante as atividades?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**PARTE V: RELEVÂNCIA DA MATEMÁTICA PARA A VIDA**

18. Você acha que o aprendizado acadêmico em matemática lhe será útil em algum momento em sua vida? Se sim, qual?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

19. Dentre as aplicações vistas com a ferramenta do cálculo diferencial e integral, alguma delas em particular lhe chamou mais atenção?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

20. Faça comentários (fique a vontade para expressar sua opinião: críticas, sugestões, elogios, etc.) acerca das atividades que você participou, depois responda: Qual era sua expectativa acerca desse “minicurso”? As atividades desenvolvidas atenderam suas expectativas? Explique.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## APÊNDICE F - Classificação das atividades pelos alunos participantes

| |
|---|
| Atividade 1: Polígonos Inscritos<br>Excelente (  )  Boa (  )  Regular (  )  Ruim (  )  Péssima (  )<br><br>A atividade foi compreendida?<br>Sim, totalmente (  )  Sim, parcialmente (  )  Não (  )<br>Justifique sua resposta: ____________________<br>____________________<br>____________________<br>____________________ |
| Atividade 2: Soma de Progressão Geométrica<br>Excelente (  )  Boa (  )  Regular (  )  Ruim (  )  Péssima (  )<br><br>A atividade foi compreendida?<br>Sim, totalmente (  )  Sim, parcialmente (  )  Não (  )<br>Justifique sua resposta: ____________________<br>____________________<br>____________________<br>____________________ |
| Atividade 3: Retas Assintóticas<br>Excelente (  )  Boa (  )  Regular (  )  Ruim (  )  Péssima (  )<br><br>A atividade foi compreendida?<br>Sim, totalmente (  )  Sim, parcialmente (  )  Não (  )<br>Justifique sua resposta: ____________________<br>____________________<br>____________________<br>____________________ |
| Atividade 4: Reta Tangente e Limite<br>Excelente (  )  Boa (  )  Regular (  )  Ruim (  )  Péssima (  )<br><br>A atividade foi compreendida?<br>Sim, totalmente (  )  Sim, parcialmente (  )  Não (  )<br>Justifique sua resposta: ____________________<br>____________________<br>____________________<br>____________________ |
| Atividade 5: Coeficiente Angular e Tangentes<br>Excelente (  )  Boa (  )  Regular (  )  Ruim (  )  Péssima (  )<br><br>A atividade foi compreendida?<br>Sim, totalmente (  )  Sim, parcialmente (  )  Não (  )<br>Justifique sua resposta: ____________________<br>____________________<br>____________________<br>____________________ |

Atividade 6: Velocidade Média
Excelente ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Péssima ( )

A atividade foi compreendida?
Sim, totalmente ( ) Sim, parcialmente ( ) Não ( )
Justifique sua resposta: ____________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Atividade 7: Velocidade Média e Instantânea
Excelente ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Péssima ( )

A atividade foi compreendida?
Sim, totalmente ( ) Sim, parcialmente ( ) Não ( )
Justifique sua resposta: ____________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Atividade 8: Máximos e Mínimos em Função de 2°grau
Excelente ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Péssima ( )

A atividade foi compreendida?
Sim, totalmente ( ) Sim, parcialmente ( ) Não ( )
Justifique sua resposta: ____________________________________________

____________________________________________________________

Atividade 9: Minimização de Custo – Economia de Combustível
Excelente ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Péssima ( )

A atividade foi compreendida?
Sim, totalmente ( ) Sim, parcialmente ( ) Não ( )
Justifique sua resposta: ____________________________________________

____________________________________________________________

Atividade 10: Minimização de Custo – Perímetro x Área
Excelente ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Péssima ( )

A atividade foi compreendida?
Sim, totalmente ( ) Sim, parcialmente ( ) Não ( )
Justifique sua resposta: ____________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Atividade 11: Ideia de Integral Definida
Excelente ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim ( ) Péssima ( )

A atividade foi compreendida?
Sim, totalmente ( ) Sim, parcialmente ( ) Não ( )
Justifique sua resposta: ____________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________