Universidade Federal do ABC

PROFMAT

FRANKLIN MONTEIRO MOLITOR

O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Santo André, 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

FRANKLIN MONTEIRO MOLITOR

O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Orientador: Prof. Dr. JERÔNIMO CORDONI PELLEGRINI

Dissertação apresentada ao
Centro de Matemática, Computação e Cognição
para obtenção do título de Mestre .

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO FRANKLIN MONTEIRO MOLITOR,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. JERÔNIMO CORDONI PELLEGRINI.

SANTO ANDRÉ, 2015

Dedico este trabalho ao meu pai, Joaquim, que sempre me ensinou com seu exemplo, que com trabalho e esforço sempre podemos atingir nossos objetivos. E à minha mãe, Ana Augusta, que me ensinou que com fé e perseverança, conseguimos superar nossos obstáculos.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é dar uma visão bem ampla do triângulo aritmético.

Primeiramente esse texto tem um caráter histórico, a partir do texto original de 1654, é apresentado um estudo da visão que Pascal tinha do triângulo e onde ele o aplicava. Seu texto foi colocado numa linguagem mais moderna que o original, mas mantendo toda a sua linha de raciocínio.

Além disso, esse texto reúne e demonstra suas propriedades e usos. Cada ideia é exposta de uma maneira diferente ou mais detalhada do que encontramos na literatura. Algumas propriedades são bem conhecidas, enquanto outras normalmente não estão associadas ao triângulo aritmético, como partição de combinações, matrizes de Pascal incluindo forma quadrática e também o plano aritmético, que expande o triângulo aritmético.

Por fim, temos uma visão de como o triângulo pode ser usado dentro da sala de aula numa linguagem que será útil tanto para os professores quanto para os alunos.

Palavras-chave: triângulo aritmético, combinatória, Blaise Pascal

ABSTRACT

The objective of this paper is to provide a very broad view on the arithmetic triangle.

First off, this text has a historic character. Based upon the original text of Pascal from 1654, a study of Pascal's view on the triangle and where he applied it is set forth. Despite the fact that the text was converted into a more modern language than the original, the entire author's stream of thought was preserved.

Furthermore, this text gathers and demonstrates its properties and usages. Each idea is put across in a different manner or in a more detailed form than we find in the literature. Some properties are well known, while others are not commonly associated with the arithmetic triangle, as partitioning of combinations, Pascal Matrixes including the quadratic form and also the arithmetic plane, which expands the arithmetic triangle.

Finally, we have an insight on how the triangle can be used inside the classroom, in a language which will be useful both for the teachers and for the students.

Keywords: arithmetic triangle, combinatorial, Blaise Pascal

CONTEÚDO

1

UM POUCO DE HISTÓRIA.

Neste capítulo tratamos da história do triângulo aritmético e de Blaise Pascal [6] [7].

O triângulo aritmético já foi objeto de estudo séculos antes de Pascal escrever seu tratado e muitos perguntam porque creditamos a ele o nome do triângulo. Isso se deve ao fato de ele dar uma abordagem mais completa e de ter encontrado mais propriedades que não eram conhecidas até aquele momento. Para a época, seu tratado foi um documento de grande importância.

Porém ele não foi o pioneiro, o triângulo aritmético já era conhecido, pelo menos, na China, Índia, Arábia e outros países da Europa antes de Pascal escrever seu tratado na França.

1.1 SOBRE O TRIÂNGULO ARITMÉTICO.

Na antiga China, temos Chia Hsien, que viveu no reinado (aproximadamente 1022-1064) do imperador Renzong da dinastia Song e foi pupilo do matemático e astrônomo Chu Yan, que serviu no Imperial Astronomical Bureau na metade do século XI. Ele tinha um método de extração de raízes de polinômios de grau maior que três e com o seu *triângulo de Chia Hsien* se conseguia os coeficientes binomiais para equações até o sexto grau.

Grande parte de trabalho de Chia foi incorporado por Yang-Hui (aproximadamente 1261-1275) cuja obra *O Espelho Precioso* tem os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência. Yang se referia ao triângulo como um “diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores” dizendo ter copiado da obra de Chia Hsien.

Depois disso, Chuh Shih-Chieh, em sua obra *Ssu-yüan yü-chien* (precioso espelho dos quatro elementos) de 1303, traz métodos para calcular as dimensões de figuras geométricas usando barras de contagem para representar polinômios e equações. O Precioso Espelho traz em seu frontispício a representação do triângulo como a "Figura do velho método dos sete quadrados multiplicadores" e tabula os coeficientes binomiais até a oitava potência.

Na Arábia, o astrônomo, poeta e matemático Omar Khayyam (cerca de 1050-1122) escreveu que tinha descoberto um método para encontrar as potências mais altas que as sextas de um binômio, mas essa obra se perdeu. Khayyam foi um dos grandes cientistas de sua época, e deu uma excelente aproximação para o período exato de um ano, um dos mais exatos de sua época.

Temos também al-Kashi, por volta de 1436, que traz em sua obra *A chave da aritmética* o triângulo até a linha 9 e os princípios aditivos e multiplicativos de combinatória.

Uma grande parte do conhecimento matemático chegou até a Europa através da Arábia, por exemplo o sistema de numeração que na verdade é indiano, por isso os europeus diziam números arábicos, o que foi impreciso. Ao perceberem isso mais tarde começaram a chamá-los de número indo-arábicos. Na Europa, Pascal não foi o primeiro a estudar o triângulo aritmético e nunca alegou ter sido.

Em cerca de 1407, uma edição de *Arithmetica* de Jordanus contém uma representação do triângulo aritmético até a linha 7 com alguns algarismos distintos dos indo-arábicos.

Na Itália, temos Nicolo Fontana de Brescia (aproximadamente 1500-1557), mais conhecido como Tartaglia. Tinha esse apelido, que significa *gago*, devido às sequelas de ferimentos faciais graves que o deixaram com um problema de fala aos 12 anos de idade. Tartaglia publicou a generalização dos números figurados e em 1557 publicou o *Tratado geral de números e medidas* no qual o triângulo aritmético aparece em forma de uma tabela retangular com 8 linhas para se calcular o primeiro dia da quaresma usando combinações. Tartaglia ficou conhecido também por formular a resolução de equações de terceiro grau, ele queria publicá-la posteriormente num tratado de álgebra, porém mostrou sua solução a Gerônimo Cardano (1501-1576) que fez um juramento de nunca revelar o segredo. Apesar disso, Cardano a publicou em sua obra

Ars Magna de 1545. Em 1570, na obra *Opus Novum*, Cardano publicou o triângulo aritmético até a linha 12, também baseado na obra de Tartaglia.

Na Alemanha também se estudou o triângulo aritmético. Este foi impresso na página de rosto da obra *Rechnung* (1527), uma aritmética comercial de Peter Apian. Outra obra *Arithmetica integra* de Michael Stifel (cerca de 1487-1567) tem o triângulo publicado, porém dá o crédito ao trabalho de Cardano, sendo esta obra a mais importante de todas as álgebras alemãs do século dezesseis. Em 1545 Scheubelius publica também uma versão do triângulo ligando-o ao problema de extração de raízes, o grande problema não resolvido da época em sua forma mais geral.

Já na França em 1591, François Viète deu nomes às primeiras diagonais do triângulo aritmético em latim; "numeri trianguli" e "triangulo-pyramidales", que significam números triangulares e piramidais triangulares , respectivamente. Estes nomes foram também utilizados por Pierre de Fermat, o principal correspondente de Pascal na resolução do problema dos pontos.

Em 1636, Padre Marin Mersenne (1588-1648), em sua obra *Harmonicorum Libri XII*, publica uma grande tabela de 25 linhas por 12 colunas com números de até 10 dígitos, cujos elementos são iguais aos do triângulo aritmético em forma de tabela, assim como fez Tartaglia. Em sua vida, Mersenne se encontrou com Pascal e com seu pai Etienne, os quais tiveram acesso à obra do padre.

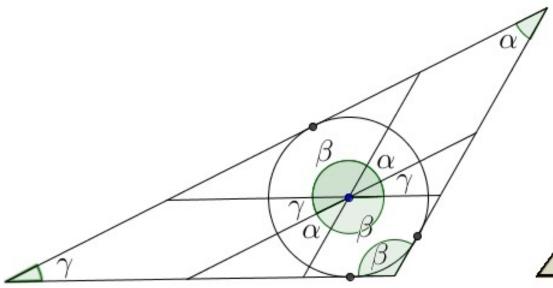
Somente em 1654, na França, Pascal escreveu seu tratado do triângulo aritmético, que foi publicado somente em 1665.

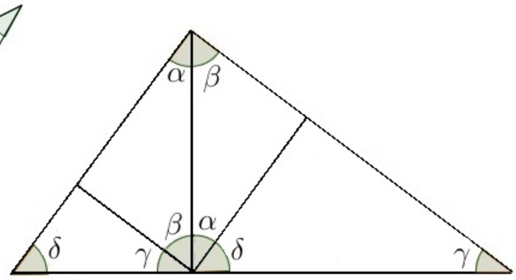
1.2 SOBRE BLAISE PASCAL.

Blaise Pascal nasceu em 19 de junho de 1623 em Clermont, França. Ele foi um prodígio na matemática. Seu pai Etienne Pascal também tinha essa inclinação, seu principal estudo foi o "limaçon de Pascal", ou $r = a + b\cos\theta$, também chamado de "a conchóide do círculo".

Etienne era juiz local em Clermont e, inicialmente, não quis que seu filho estudasse matemática, encorajando-o a desenvolver outros interesses, principalmente em línguas. Em 1631, mudou-se para Paris, em parte para processar seus próprios estudos científicos, em parte para continuar a educação de seu único filho, que já havia apresentado excepcional capacidade.

Aos 12 anos, o menino perguntou ao seu tutor em que consistia a geometria. Este respondeu que era a ciência da construção de números exatos e de determinar as proporções entre as suas diferentes partes. Pascal abriu mão de seu tempo livre e, em poucas semanas, redescobriu várias propriedades geométricas, em particular a que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, de duas maneiras distintas. A primeira foi transportando os ângulos internos de um triângulo no centro do círculo inscrito a ele e vê-se que o dobro da soma dos três ângulos é igual a 360°, portanto eles são iguais a 180°. A segunda maneira é tomando-se o pé da perpendicular do maior ângulo, dividindo-o em duas partes e traçando segmentos paralelos aos outros lados do triângulo, vê-se que a soma dos ângulos é igual a 180°.





Seu pai impressionado deu-lhe um exemplar dos Elementos de Euclides, um livro que rapidamente Pascal dominou. Aos 14 anos, Pascal, junto com seu pai, já participava de reuniões informais na Academia com o Padre Marin Mersenne em Paris e dois anos depois publicou um *Ensaio para as cônicas* de uma só página, porém uma das mais fecundas da história. Nele há dois resultados importantes sobre a geometria das cônicas. O primeiro é conhecido como *Teorema de Pascal*, diz que para um hexágono inscrito em uma cônica, os pontos de intersecção dos lados opostos estarão em uma linha reta. O segundo é uma relação entre as medidas num quadrilátero inscrito numa cônica.

Aos 18 anos, projetou e construiu uma máquina de calcular. Nos anos seguintes, construiu e vendeu umas cinquenta máquinas. Aos 25 anos, em 1648, se interessou pela hidrostática e, com a célebre experiência no vulcão inativo Puy-de-Dôme, confirmou o peso do ar e a experiência sobre a pressão dos fluídos, que esclareceu o processo hidrostático.

Em 1653, ele teve que administrar os bens de seu pai e voltou-se à matemática, fez diversas experiências sobre a pressão exercida pelos gases e líquidos e trabalhou em dois projetos não relacionados. Uma que nunca foi impressa, a *Obra completa sobre cônicas*, cujos manuscritos foram lidos por Leibniz, sendo suas notas tudo o que restou dessa obra. A outra foi o *Magna problema* na qual se coloca uma cônica dada num cone de revolução dado. O tratado usava métodos sintéticos, pois Pascal nunca adquiriu facilidade no uso da álgebra simbólica, nem viu o papel que boas notações desempenham na descoberta da matemática. Nisto ele estava bastante atrasado em relação a seu tempo.

Durante o trabalho de *As cônicas*, escreveu a Fermat sobre como se dividiriam apostas num jogo que fosse interrompido, o famoso problema dos pontos. Enquanto isso, Pascal havia avançado bastante no estudo das probabilidades com o triângulo aritmético, descobrindo novas propriedades. A partir daí, ficou conhecido como triângulo de Pascal.

Numa parte de seu texto, deu uma explanação do método de indução matemática, que já havia sido dado por outros autores, mas pela grande habilidade de Pascal em esclarecer seus conceitos, ele partilhou do desenvolvimento do raciocínio por recorrência.

Na noite de 23 de dezembro de 1654, ele estava em uma carruagem de quatro cavalos com seus amigos quando os cavalos se assustaram e correram por cima do parapeito da ponte em Neuilly. A carruagem se destacou e ficou pendurada à borda da ponte. Pascal e seus amigos conseguiram sair da carruagem, mas ele aterrorizado, desmaiou e ficou longo tempo inconsciente. Sempre um pouco místico, ele considerou este evento uma intimação para abandonar o mundo, então escreveu um relato sobre o acidente em um pequeno pedaço de pergaminho, e para o resto de sua vida, usou-o ao lado de seu coração para lembrá-lo de sua aliança. Depois disso, abandonou a ciência e a matemática para se dedicar à teologia e só por um breve período, de 1658 a 1659, ele voltou à matemática. Tratando da integração em seu *Tratado sobre os senos num quadrante de um círculo* chegou notavelmente perto da descoberta do cálculo.

Algumas soluções de Pascal foram efetuadas pelo método de indivisíveis e são semelhantes àquela que um matemático moderno daria com o auxílio de cálculo integral. Ele obteve, por somatórias, valores equivalentes a algumas integrais senoidais. Ele também investigou a geometria da espiral de Arquimedes. De acordo com D'Alembert, formam um elo entre a geometria de Arquimedes e o cálculo infinitesimal. Leibniz ao ler essa obra, escreveu que uma luz subitamente jorrou sobre ele.

A partir de 1659, Pascal passa a produzir menos por causa de sua saúde frágil e, após alguns anos, passa a residir na casa de sua irmã Gilberte. O tratamento não surte efeito e ele morre em 19 de agosto de 1662, aos 39 anos.

2

TRIÂNGULO ARITMÉTICO SEGUNDO PASCAL

Neste capítulo faremos um estudo sobre a obra original de Blaise Pascal de 1654. Não farei uma tradução totalmente fiel de sua obra, pois a linguagem que ele usou é bem diferente da que usamos hoje. Usarei a linguagem matemática atual, mas suas ideias básicas estão todas incluídas aqui.

Pascal dividiu seu tratado basicamente em quatro partes:

- Tratado do triângulo aritmético, no qual explicou sua montagem, fez definições e escreveu 19 consequências das definições e mais um problema prático.
- Uso do triângulo aritmético com o gerador unidade, no qual escreveu sobre ordens numéricas e combinações.
- Uso do triângulo aritmético para determinar divisões de apostas, no qual duas pessoas jogavam várias rodadas e desejavam interromper o jogo, dividindo as apostas conforme suas chances de ganho.
- Uso do triângulo aritmético para encontrar potências de binômios, no qual mostrou um método para se encontrar coeficientes de binômios.

Quanto às 19 consequências do seu tratado, elas podem ser reordenadas e até reduzidas, no entanto, irei enunciá-las na mesma ordem que Pascal fez, dando apenas demonstrações mais modernas.

2.1 MONTAGEM

A montagem que Pascal usou em seu tratado foi bem diferente da que vemos nos livros didáticos atuais.

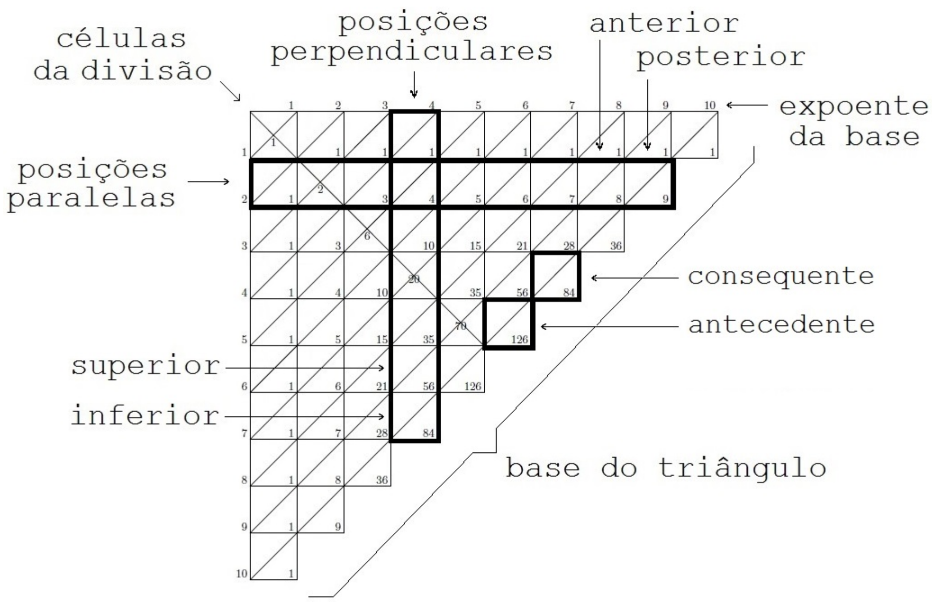
Inicialmente tomavam-se duas semi-retas perpendiculares, uma para a direita e outra para baixo, que eram as extremidades do triângulo aritmético. A partir de sua intersecção, faziam-se subdivisões regulares nas duas semi-retas numerando-as desde o número 1 até um n qualquer. A diagonal formada pelas células que ligavam a enésima célula à direita e a enésima célula para baixo era chamada de *base* n, sendo que n era chamado de *expoente da base*.

Em seguida, juntavam-se os pontos das semi-retas conforme a numeração, formando assim triângulos retângulos isósceles. Traçavam-se também linhas paralelas às duas semi-retas formando quadrados que eram chamados de *células*.

Tomava-se a bissetriz interna de suas extremidades, que dividia o triângulo aritmético em duas partes iguais; as células que passavam pela bissetriz eram chamadas de *células da divisão*.

As células que estavam numa mesma linha da esquerda para a direita tinham a mesma *posição paralela* e as que estavam numa mesma coluna de cima para baixo tinham a mesma *posição perpendicular*. Numa mesma posição paralela, duas células contíguas estão uma à esquerda e outra à direita e são chamadas de *anterior* e *posterior* respectivamente. Numa mesma posição perpendicular, duas células contíguas estão uma acima e outra abaixo e são chamadas de *superior* e *inferior* respectivamente.

Duas células contíguas de uma base estão uma abaixo à esquerda e outra acima à direita e são chamadas de *antecedente* e *consequente* respectivamente.



Pascal nomeava as células com letras dos alfabetos latino e grego, mas para uma melhor compreensão das consequências, vamos usar dois índices para cada célula. $p_{l,c}$ representa o termo do triângulo de Pascal que está na linha l e na coluna c. Em qualquer célula, a soma dos índices supera em uma unidade os expoentes de suas bases.

Pascal definia como células de *mesma base* as que estavam na base de um dos triângulos isósceles. Para pertencer à mesma base os índices l e c deviam ter soma constante. No caso base$(p_{l,c}) = l + c - 1$.

Chamava-se de células *recíprocas* às de uma mesma base com mesma distância das extremidades, no caso a célula $p_{l,c}$ era recíproca à célula $p_{c,l}$.

Preenchiam-se as células da seguinte maneira:

- A célula $p_{1,1}$ era preenchida com qualquer valor que era chamado de *gerador do triângulo*. Usualmente usava-se a unidade como gerador.
- Cada célula das linhas posteriores era igual à célula que a precedia na sua posição perpendicular somada à célula que a precedia em sua posição paralela. Isso preenchia todo o triângulo aritmético. No caso $p_{l,c} = p_{l-1,c} + p_{l,c-1}$.

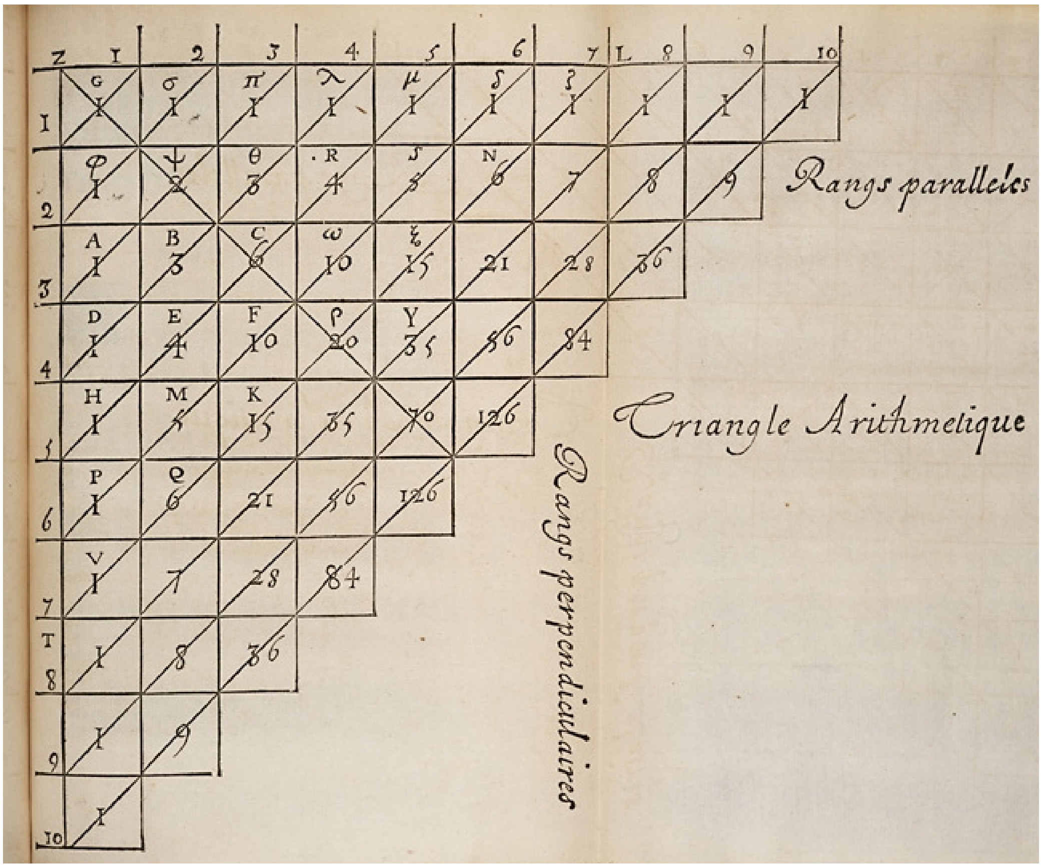
Muitas consequências provaremos usando o princípio da indução. Pascal o citou somente na décima segunda consequência, que envolvia proporções. As provas de Pascal se baseavam mais em mostrar alguns exemplos e verificar uma generalização para todas as outras células e linhas de maneira intuitiva. Para se ter uma ideia de como era sua escrita, vamos antecipar o enunciado e a demonstração de uma dessas consequências para ver como ele usava o princípio da indução.

Décima segunda consequência: Em cada triângulo aritmético, duas células contíguas numa mesma base, o antecedente está para o consequente assim como o número de células deles até as extremidades da base respectivamente.

Vamos usar o triângulo de seu tratado para ver como ele nomeou as células.

Sejam E e C duas células contíguas de uma mesma base. Eu digo que:

$\underbrace{E}$ está para	$\underbrace{C}$ como	2 está para	3
antecedente	consequente	porque existem duas células de E até H.	porque existem três células de C até μ.



Embora esta proposição tenha um número infinito de casos, a demonstração é bem simples se supormos dois lemas.

O primeiro evidente por si só, é que esta proporção é encontrada na base 2, pois é muito claro que ϕ está para σ assim como 1 está para 1.

O segundo é que, se esta proporção é encontrada em qualquer base, então será encontrada necessariamente na base seguinte.

Daí vê-se isto necessariamente em todas as bases: se é encontrada na segunda base pelo primeiro lema, então pelo segundo lema será encontrada na terceira base e portanto na quarta e ao infinito.

É necessário, por conseguinte, apenas para provar o segundo lema. Se esta proporção é encontrada em qualquer uma das bases, como na quarta que vai de D até λ, ou seja, D está para B assim como 1 está para 3, B está para θ assim como 2 está para 2 e θ está para λ assim como 3 está para 1. Digo que a mesma proporção será encontrada na base seguinte que vai de H até μ, e que, por exemplo, E está para C assim como 2 está para 3.

$$\begin{array}{llll} \text{Portanto} & \underbrace{D+B}_{E} \ \text{está para } B \text{ assim como} & \underbrace{1+3}_{4} & \text{está para 3.} \\ & E \ \text{está para } B \text{ assim como} & 4 & \text{está para 3.} \end{array}$$

Da mesma forma B está para θ assim como 2 está para 2, pela hipótese.

$$\begin{array}{llll} \text{Portanto} & \underbrace{B+\theta} \ \text{está para } B \text{ assim como} & \underbrace{2+2} & \text{está para 2.} \\ & C \ \text{está para } B \text{ assim como} & 4 & \text{está para 2.} \\ \text{mas} & B \ \text{está para } E \text{ assim como} & 3 & \text{está para 4.} \end{array}$$

Portanto, por estas proporções, C está para E assim como 3 está para 2.

O que foi necessário para demonstrar.

Isto será provado de forma semelhante para todo o resto, uma vez que esta prova se baseia apenas nesta proporção ser encontrada na base anterior, e cada célula ser igual à sua anterior somada ao seu superior, o que é verdade em todos os lugares. ■

Na verdade Pascal provou um caso particular e chamou a atenção para o fato de que, em qualquer outro caso, a prova seria semelhante. Na matemática moderna, o princípio de indução finita consegue nos dar a prova para todos os números inteiros seguindo os lemas usados por Pascal. Como usaremos recorrentemente esse princípio no texto, vamos enunciá-lo.

Princípio de Indução Finita: Se quisermos provar que uma propriedade é válida para os números naturais, devemos seguir dois passos:

1 Verificamos que a propriedade é verdadeira para algum n em particular. Geralmente se usa $n = 1$.

2 Provamos que, se a propriedade é verdadeira para $n = k$, o que chamamos de *hipótese da indução*, então será verdadeira também para $n = k + 1$.

2.2 CONSEQUÊNCIAS DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO

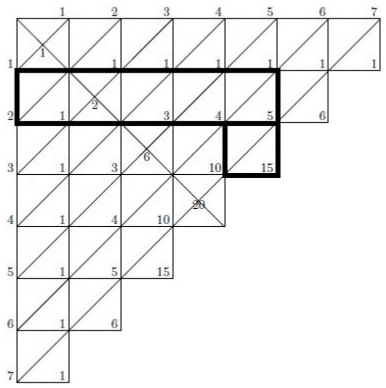
Vamos agora às 19 consequências e o problema prático enunciados por Pascal.

- Primeira consequência: *Em todo triângulo aritmético, os elementos da primeira linha e da primeira coluna são iguais ao gerador.*

Demonstração. Cada célula é igual à célula que a precede na sua posição perpendicular somada à célula que a precede em sua posição paralela. Porém na primeira linha não há antecessor perpendicular, logo devemos considerá-lo igual a zero. O mesmo para a primeira coluna com os antecessores perpendiculares. Logo $p_{1,1} = p_{1,n}$ e $p_{1,1} = p_{n,1}$, para $\forall n \in \mathbb{N}$. No caso do gerador unidade $p_{1,n} = p_{n,1} = 1$. ■

- Segunda consequência: *Em todo triângulo aritmético, cada célula é igual à soma de todas as células com posição paralela precedente, da primeira até a sua posição perpendicular.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que a quinta célula da terceira linha é igual às cinco primeiras células da segunda linha, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.



Usaremos o princípio da indução finita para provar tal consequência. O primeiro passo é verificar se esta igualdade vale para a segunda coluna, ou seja, $c = 2$.

$$p_{l,2} = p_{l-1,2} + p_{l,1} = p_{l-1,2} + p_{l-1,1}$$

Portanto é verdadeira.

O segundo passo é a hipótese de indução, no caso a igualdade $p_{l,c} = \sum_{i=1}^{c} p_{l-1,i}$

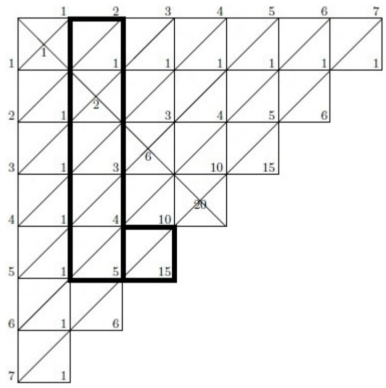
Queremos provar que, se esta igualdade vale para c, também valerá para $c + 1$, portanto acrescentando um termo aos dois lados da equação, temos

$$p_{l,c} + p_{l-1,c+1} = \sum_{i=1}^{c} p_{l-1,i} + p_{l-1,c+1}$$
$$p_{l,c+1} = \sum_{i=1}^{c+1} p_{l-1,i}$$

Sabemos que a consequência vale para $c = 2$ e que se vale para um número, também vale para o seu sucessor, então a consequência é verdadeira para todos os números inteiros maiores ou iguais a 2, ou seja, para todas as outras colunas. ■

- Terceira consequência: *Em todo triângulo aritmético, cada célula é igual à soma de todas as células com posição perpendicular precedente, da primeira até a sua posição paralela.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que a quinta célula da terceira coluna é igual às cinco primeiras células da segunda coluna, ou seja, $1+2+3+4+5 = 15$.



A prova desta consequência é análoga à prova da consequência anterior, portanto usaremos o mesmo método para sua prova. O primeiro passo é verificar se esta igualdade vale para a segunda linha, ou seja, $l = 2$.

$$p_{2,c} = p_{2,c-1} + p_{1,c} = p_{2,c-1} + p_{1,c-1}$$

Portanto é verdadeira.

O segundo passo é a hipótese de indução, no caso a igualdade $p_{l,c} = \sum_{j=1}^{l} p_{j,c-1}$

Queremos provar que se esta igualdade vale para l, também valerá para $l+1$, portanto acrescentando um termo aos dois lados da equação, temos

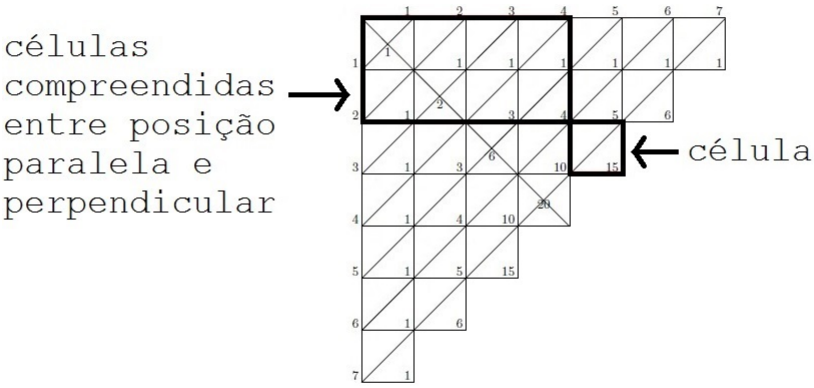
$$p_{l,c} + p_{l+1,c-1} = \sum_{j=1}^{l} p_{j,c-1} + p_{l+1,c-1}$$
$$p_{l+1,c} = \sum_{j=1}^{l+1} p_{j,c-1}$$

Sabemos que a consequência vale para $l = 2$ e que se vale para um número também vale para o seu sucessor, então a consequência é verdadeira para todos os números inteiros maiores ou iguais a 2, ou seja, para todas as outras linhas. ■

- Quarta consequência: *Em todo triângulo aritmético, cada célula subtraída do elemento gerador é igual à soma de todas as células compreendidas entre sua posição paralela e sua posição perpendicular exclusivamente.*

Demonstração. Vamos verificar um exemplo com o gerador unidade. Para a célula $p_{3,5}$ temos que

$$p_{3,5} - 1 = p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} + p_{1,4} + p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} + p_{2,4}$$
$$15 - 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 \quad = \quad 14$$



Para provar para $p_{l,c}$ vamos usar a segunda consequência que diz que $p_{l,c} = \sum_{i=1}^{c} p_{l-1,i}$ juntamente com a terceira que diz que $p_{l,c} = \sum_{j=1}^{l} p_{j,c-1}$, portanto $p_{j+1,c-1} = \sum_{i=1}^{c-1} p_{j,i}$, logo

$$p_{l,c} = \sum_{j=1}^{l} p_{j,c-1}$$
$$p_{l,c} = p_{1,c-1} + \sum_{j=2}^{l} p_{j,c-1}$$
$$p_{l,c} - p_{1,c-1} = \sum_{j=1}^{l-1} p_{j+1,c-1}$$
$$p_{l,c} - 1 = \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=1}^{c-1} p_{j,i}$$

O que prova a consequência. ■

- Quinta consequência: *Em todo triângulo aritmético, cada célula é igual à sua recíproca.*

Demonstração. Para a primeira linha e coluna é evidente, pois todas as suas células são iguais ao gerador.

Para a segunda linha, temos pela segunda consequência que $p_{2,c} = \sum_{i=1}^{c} p_{1,i} = \sum_{i=1}^{c} 1 = c$.

Para a segunda coluna, temos pela terceira consequência que $p_{l,2} = \sum_{j=1}^{l} p_{j,1} = \sum_{j=1}^{l} 1 = l$.

Portanto se $l = c$, é verdadeira para a segunda linha e coluna.

Queremos provar que se esta igualdade vale para l, também valerá para $l+1$.

A hipótese de indução é que $p_{l,c} = p_{c,l}$ para uma linha l. Como vale para todos os elementos dessa linha, então $\sum_{i=1}^{c} p_{l,i} = \sum_{i=1}^{c} p_{i,l}$, o que pela segunda e terceira consequência são equivalentes a $p_{l+1,c} = p_{c,l+1}$, que são elementos da linha $l+1$.

O que prova a consequência. ■

- Sexta consequência: *Em todo triângulo aritmético, posições paralelas e posições perpendiculares com mesmo expoente são compostas por células todas iguais umas às outras.*

Demonstração. Esta consequência tem uma prova quase direta já que posições paralelas e perpendiculares com mesmo expoente são formados por elementos recíprocos.

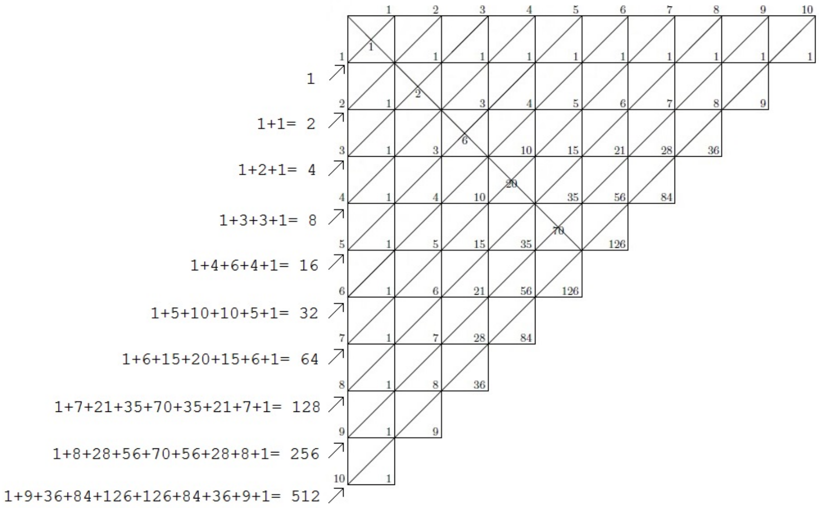
O enésimo termo de uma linha l será $p_{l,n}$ e o enésimo termo de uma coluna c será $p_{n,c}$, pela quinta consequência $p_{l,n} = p_{n,l}$ e se $l = c$ temos então que $p_{l,n} = p_{n,l} = p_{n,c}$.

O que prova a consequência. ■

- Sétima consequência: *Em todo triângulo aritmético, a soma das células de cada base é o dobro da soma das células da base anterior.*

Demonstração. As células de uma mesma base possuem a soma de seus índices $l + c$ constantes e iguais a $n + 1$. Logo a soma de todas as células de uma base n será $\sum_{i=1}^{n} p_{n-i+1,i}$.

Com o gerador unidade temos:



Como queremos provar que a soma das células da base $n+1$ será o dobro, tomemos duas vezes esta somatória.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_{n-i+1,i} + \sum_{i=1}^{n} p_{n-i+1,i} &= p_{n,1} + \sum_{i=2}^{n} p_{n-i+1,i} + \sum_{i=1}^{n-1} p_{n-i+1,i} + p_{1,n} \\ &= p_{n,1} + \sum_{i=2}^{n} p_{n-i+1,i} + \sum_{i=2}^{n} p_{n-i+2,i-1} + p_{1,n} \\ &= p_{n,1} + \sum_{i=2}^{n} \left(p_{n-i+1,i} + p_{n-i+2,i-1}\right) + p_{1,n} \\ &= p_{n+1,1} + \sum_{i=2}^{n} p_{n-i+2,i} + p_{1,n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} p_{n-i+2,i}.\end{aligned}$$

Que é a soma das células da base $n+1$.

O que prova a consequência. ■

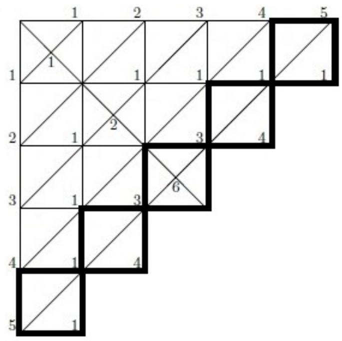
- Oitava consequência: *Em todo triângulo aritmético, a soma das células de cada base é um número da dupla progressão com primeiro elemento igual ao gerador. O expoente da razão desta progressão é o antecessor da base.*

Demonstração. A dupla progressão a que Pascal se refere é a progressão geométrica de razão igual a 2, logo $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$. O que é se deduz diretamente da sétima consequência, que diz que cada soma da base é o dobro da base anterior. Como a soma da primeira base é igual ao gerador G, a soma da segunda base será $G \cdot 2$, a da terceira será $G \cdot 2 \cdot 2$. Logo a soma dos elementos de uma base n será $S_n = G \cdot 2^{n-1}$. ■

- Nona consequência: *Em todo triângulo aritmético, a soma das células de uma base diminuída pelo gerador é igual à soma de todas as células das bases anteriores.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos a soma das células da base 5 diminuída de 1 é igual a soma de todas as células das bases de 1 a 4, ou seja,

$$\begin{aligned}(1+4+6+4+1)-1 &= (1)+(1+1)+(1+2+1)+(1+3+3+1)\\ 16-1 &= 1+2+4+8\\ 16-1 &= 15\end{aligned}$$



Isso é uma propriedade da dupla progressão. Se $S_n = G \cdot 2^{n-1}$ então

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} G \cdot 2^{i-1} = G \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = G\left(2^n - 1\right) = G \cdot 2^n - G = S_{n+1} - G.$$

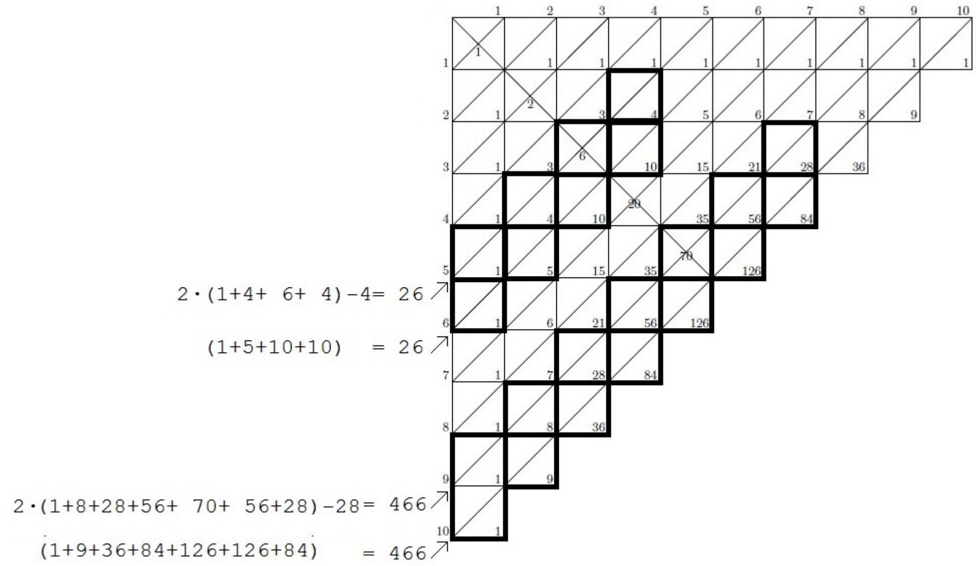
O que prova a consequência. ■

- Décima consequência: *Em todo triângulo aritmético, a soma de um número desejado de células contíguas de uma base, começando com uma extremidade, é igual ao dobro do mesmo número de células da base anterior subtraída do último.*

Demonstração. Vejamos dois exemplos com o gerador unidade:

4 células da base 6 é igual ao dobro de 4 células da base 5 menos a última e

7 células da base 10 é igual ao dobro de 7 células da base 9 menos a última.



Esta consequência se refere a uma quantidade de células contíguas não contando a sua totalidade, já que, se quiséssemos calcular a soma de todas as células de uma base, usaríamos a oitava consequência.

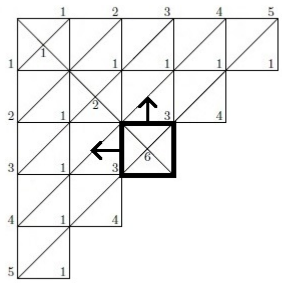
Portanto, para uma base n, devemos calcular uma quantidade m de células, sendo $m < n$, que se escreve como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} p_{n-i+1,i} &= p_{n,1} + \sum_{i=2}^{m} p_{n-i+1,i} \\
&= p_{n,1} + \sum_{i=2}^{m} \left(p_{n-i,i} + p_{n-i+1,i-1}\right) \\
&= p_{n-1,1} + \sum_{i=2}^{m} p_{n-i,i} + \sum_{i=2}^{m} p_{n-i+1,i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_{n-i,i} + \sum_{i=1}^{m-1} p_{n-i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_{n-i,i} + \sum_{i=1}^{m-1} p_{n-i,i} + p_{n-m,m} - p_{n-m,m} \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_{n-i,i} + \sum_{i=1}^{m} p_{n-i,i} - p_{n-m,m} \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} p_{n-i,i} - p_{n-m,m}
\end{aligned}$$

O que prova a consequência. ■

- Décima primeira consequência: *Em todo triângulo aritmético, cada célula da divisão é o dobro da célula que a precede em sua posição paralela ou perpendicular.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que a terceira célula da divisão, que é igual a 6, é o dobro da célula que a precede em sua posição paralela ou perpendicular, que é igual a 3.



Como explicado anteriormente, célula da divisão são as células contidas na bissetriz interna do triângulo aritmético. Somente as bases ímpares contém células de divisão e estas se encontram no ponto médio das bases. Numa base n a célula de divisão é $p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}$ que é igual a $p_{\frac{n+1}{2}-1,\frac{n+1}{2}} + p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}-1}$ cujas células são recíprocas, logo $p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}} = 2 \cdot p_{\frac{n+1}{2}-1,\frac{n+1}{2}}$ ou $p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}} = 2 \cdot p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}-1}$. ■

- Décima segunda consequência: *Em todo triângulo aritmético, tome duas células contíguas de mesma base. O antecedente está para o consequente na mesma proporção em que a distância horizontal do antecedente está para a distância vertical do consequente.*

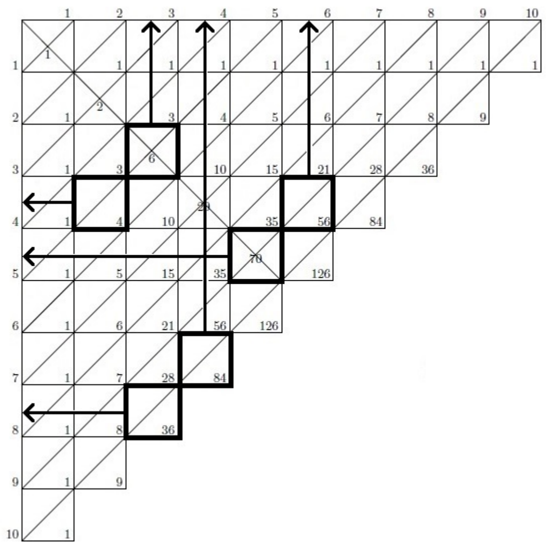
Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que

na base 4, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, na base 8, $\frac{70}{56} = \frac{5}{4}$ e na base 9, $\frac{36}{84} = \frac{3}{7}$.

Para usar o princípio de indução, precisamos primeiramente provar para todas as células da base 2, pois é necessário ter pelo menos dois elementos. Vamos definir aqui como $\text{dist}_H(p)$ como *distância horizontal de p* o que será equivalente à sua coluna e $\text{dist}_V(p)$ como *distância vertical de p* o que será equivalente à sua linha.

Na segunda base, a consequência é evidente, pois só temos dois elementos iguais ao gerador G, logo

$$\frac{p_{2,1}}{p_{1,2}} = \frac{\text{dist}_H(p_{2,1})}{\text{dist}_V(p_{1,2})} \Longrightarrow \frac{G}{G} = \frac{1}{1}$$



Usaremos regras de proporção em que para valores a, b, c e d quaisquer temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

e também que se $$\frac{a}{b} = p \ \ e \ \ \frac{c}{b} = q \ \ \Rightarrow \ \ \frac{a}{c} = \frac{p}{q}.$$

Agora temos que provar que, se a consequência é válida para uma base $l + c$, ela também valerá para uma base $l + c + 1$.

Numa base $l + c$ qualquer, isso significa que $\dfrac{p_{l,c}}{p_{l-1,c+1}} = \dfrac{\text{dist}_H(p_{l,c})}{\text{dist}_V(p_{l-1,c+1})} = \dfrac{c}{l-1}$

Então temos que

$$\frac{p_{l,c}}{p_{l-1,c+1}} = \frac{c}{l-1}$$
$$\frac{p_{l,c}}{p_{l,c} + p_{l-1,c+1}} = \frac{c}{c+l-1}$$
$$\frac{p_{l,c}}{p_{l,c+1}} = \frac{c}{c+l-1}$$
$$(p_{l,c+1}) \cdot c = p_{l,c} \cdot (l+c-1)$$

Temos também que

$$\frac{p_{l+1,c-1}}{p_{l,c}} = \frac{c-1}{l}$$
$$\frac{p_{l+1,c-1} + p_{l,c}}{p_{l,c}} = \frac{l+c-1}{l}$$
$$\frac{p_{l+1,c}}{p_{l,c}} = \frac{l+c-1}{l}$$
$$(p_{l+1,c}) \cdot l = p_{l,c} \cdot (l+c-1)$$

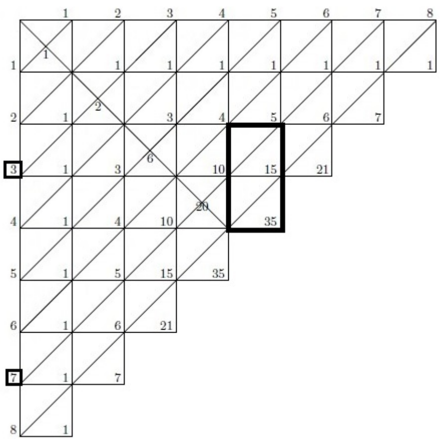
Portanto

$$(p_{l+1,c}) \cdot l = (p_{l,c+1}) \cdot c$$
$$\frac{p_{l+1,c}}{p_{l,c+1}} = \frac{c}{l}$$
$$\frac{p_{l+1,c}}{p_{l,c+1}} = \frac{\text{dist}_H(p_{l+1,c})}{\text{dist}_V(p_{l,c+1})}$$

Então a consequência se estenderá para a próxima base. ∎

• Décima terceira consequência: *Em todo triângulo aritmético, duas células contíguas na mesma posição perpendicular, o superior está para o inferior assim como a posição paralela do superior está para o expoente de sua base.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que na quinta posição perpendicular, duas células contíguas, 15 e 35, estão na mesma proporção que a posição paralela de 15 e a base em que está o 15, ou seja, $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.



O que temos que provar é que $\frac{p_{l,c}}{p_{l+1,c}} = \frac{\text{dist}_V(p_{l,c})}{\text{base}(p_{l,c})}$.

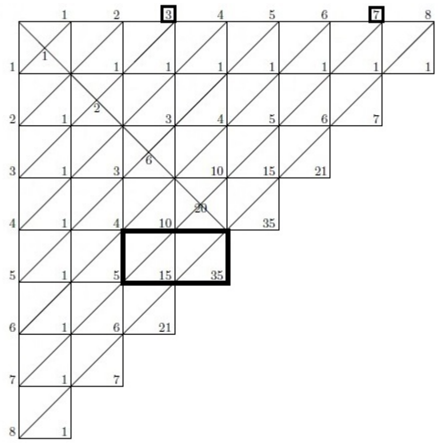
Pela consequência anterior temos que

$$\frac{p_{l+1,c-1}}{p_{l,c}} = \frac{\text{dist}_H(p_{l+1,c-1})}{\text{dist}_V(p_{l,c})}$$
$$\frac{p_{l+1,c-1}}{p_{l,c}} = \frac{c-1}{l}$$
$$\frac{p_{l,c} + p_{l+1,c-1}}{p_{l,c}} = \frac{l+c-1}{l}$$
$$\frac{p_{l+1,c}}{p_{l,c}} = \frac{\text{base}(p_{l,c})}{\text{dist}_V(p_{l,c})}$$

O que prova a consequência. ■

- Décima quarta consequência: *Em todo triângulo aritmético, duas células contíguas na mesma posição paralela, o anterior está para o posterior assim como a posição perpendicular do anterior está para o expoente de sua base.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que na quinta posição paralela, duas células contíguas, 15 e 35, estão na mesma proporção que a posição perpendicular de 15 e a base em que está o 15, ou seja, $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

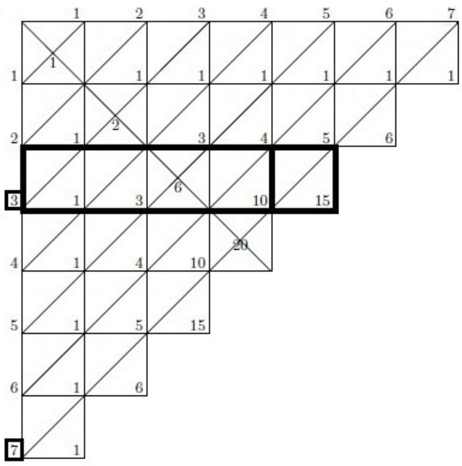


Como são elementos recíprocos à consequência anterior, a demonstração segue de forma análoga. ■

- Décima quinta consequência: *Em todo triângulo aritmético, a soma das células de qualquer posição paralela está para a última célula assim como o expoente de sua base está para sua posição paralela.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que na terceira linha, a soma das cinco primeiras células, que dá 35, está para a última, que é igual a 15, assim como a base da célula igual a 15 está para sua posição paralela, ou seja, $\frac{35}{15} = \frac{7}{3}$.

O que se quer provar é que $\dfrac{\sum_{i=1}^{c} p_{l,i}}{p_{l,c}} = \dfrac{\text{base}(p_{l,c})}{\text{dist}_V(p_{l,c})}$



Pela segunda consequência, a soma das células de qualquer posição paralela é igual à célula inferior da última célula desta soma, o que resulta na décima terceira consequência.

$$\frac{\sum_{i=1}^{c} p_{l,i}}{p_{l,c}} = \frac{p_{l+1,c}}{p_{l,c}} = \frac{\text{base}(p_{l,c})}{\text{dist}_V(p_{l,c})} \qquad \blacksquare$$

- Décima sexta consequência: *Em todo triângulo aritmético, sejam duas células contíguas de uma base qualquer, a razão da soma das células de mesma posição paralela do antecedente está para a mesma soma do consequente assim como a posição perpendicular do antecedente está para sua posição paralela.*

Demonstração. Pela segunda consequência, temos que uma célula é igual à soma de todas as células com posição paralela precedente, da primeira até a sua posição perpendicular, logo as somas envolvidas são iguais às duas células contíguas da base seguinte. Pela décima segunda consequência, temos a mesma proporção. ■

- Décima sétima consequência: *Em todo triângulo aritmético, qualquer célula adicionada a todas as células da sua posição perpendicular está para a mesma célula adicionada a todas as células da sua posição paralela, assim como sua posição perpendicular está para sua posição paralela.*

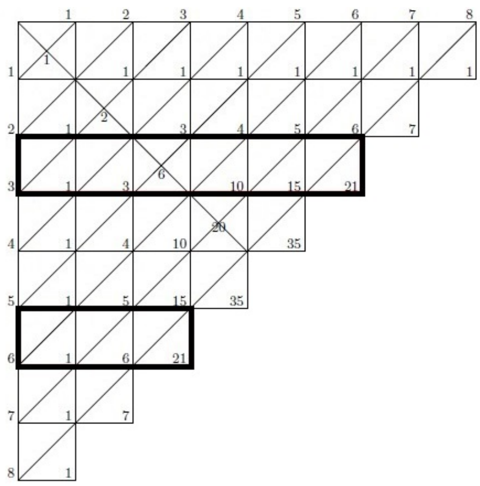
Demonstração. Sua prova decorre imediatamente da décima segunda consequência, pois sabemos que qualquer célula adicionada a todas as células da sua posição perpendicular é igual ao seu elemento diretamente à direita pela terceira consequência. Também sabemos que qualquer célula adicionada a todas as células da sua posição paralela é igual ao seu elemento inferior pela segunda consequência. Logo teremos a proporção desejada. ■

- Décima oitava consequência: *Em todo triângulo aritmético, sejam duas células de uma base com mesma distância de suas extremidades, a soma de uma delas com suas células de mesma posição paralela está para a mesma soma da outra célula, assim como a quantidade de suas células estão uma para a outra respectivamente.*

Demonstração. Esta consequência diz que a soma das células de uma linha até elementos recíprocos estão na mesma proporção que as quantidades de células envolvidas.

Por exemplo, com o gerador unidade temos

$$\frac{p_{3,1} + p_{3,2} + p_{3,3} + p_{3,4} + p_{3,5} + p_{3,6}}{p_{6,1} + p_{6,2} + p_{6,3}} = \frac{56}{28} = \frac{6}{3}$$

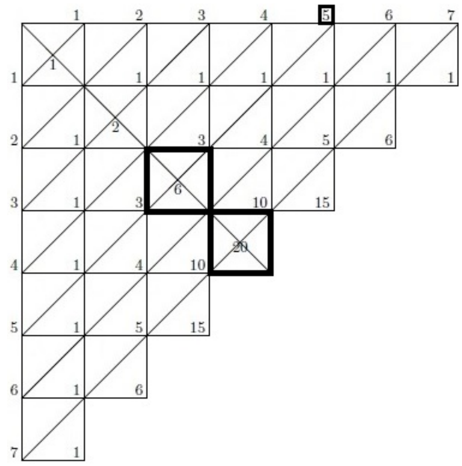


As somatórias envolvidas são $\frac{\sum_{i=1}^{m} p_{l,i}}{\sum_{j=1}^{l} p_{m,j}} = \frac{p_{l+1,m}}{p_{m+1,l}} = \frac{p_{m,l+1}}{p_{m+1,l}}$.

Vemos que esta fração são de células contíguas de uma mesma base e, pela décima segunda consequência, temos a proporção desejada. ■

- Décima nona consequência: *Em todo triângulo aritmético, duas células contíguas da divisão, o inferior está para o quádruplo do seu superior, assim como o expoente da base do superior está para seu sucessor.*

Demonstração. Por exemplo, com o gerador unidade, temos que a quarta célula da divisão, igual a 20, está para o quádruplo da terceira, igual a 6, assim como o expoente da terceira célula da divisão, igual a 5, está para 5+1, ou seja, $\dfrac{20}{4 \cdot 6} = \dfrac{5}{5+1}$.



Queremos provar que $\dfrac{p_{\frac{n+3}{2},\frac{n+3}{2}}}{4 \cdot p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}} = \dfrac{n}{n+1}$.

Pela décima primeira consequência, a célula de divisão é o dobro da célula que a precede, resultando em uma fração de células contíguas perpendicularmente. Pela décima terceira consequência, há uma relação entre estas células, logo

$$\frac{p_{\frac{n+3}{2},\frac{n+3}{2}}}{4 \cdot p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}} = \frac{2 \cdot p_{\frac{n+3}{2},\frac{n+1}{2}}}{4 \cdot p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}} = \frac{\text{base}(p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}})}{2 \cdot \text{dist}_V(p_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}})} = \frac{n}{\frac{2(n+1)}{2}} = \frac{n}{n+1}. \qquad \blacksquare$$

- Problema: *Dados os expoentes perpendiculares e paralelos de uma célula, encontre o valor da célula sem o triângulo aritmético.*

Demonstração. Primeiramente, Pascal dá um exemplo. Com o gerador unidade, vamos encontrar a célula da terceira linha e quinta coluna, ou seja, $p_{3,5}$.

Tome o antecessor do valor da coluna, logo será 4. Calcule os 4 primeiros números naturais e multiplique-os, o que dá 24. Calcule também os 4 números naturais consecutivos começando pelo valor da linha, que são 3, 4, 5 e 6, e multiplique-os, o que dá 360. O quociente deste produto com o anterior será o valor da célula $\dfrac{360}{24} = 15$.

Vamos procurar a proporção de $\dfrac{p_{3,5}}{p_{7,1}}$ que vamos igualar a $\dfrac{p_{3,5}}{p_{4,4}} \cdot \dfrac{p_{4,4}}{p_{5,3}} \cdot \dfrac{p_{5,3}}{p_{6,2}} \cdot \dfrac{p_{6,2}}{p_{7,1}}$

Usando a décima segunda consequência temos.

$$\frac{p_{3,5}}{p_{7,1}} = \frac{p_{3,5}}{p_{4,4}} \cdot \frac{p_{4,4}}{p_{5,3}} \cdot \frac{p_{5,3}}{p_{6,2}} \cdot \frac{p_{6,2}}{p_{7,1}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{360}{24} = 15.$$

Como $p_{7,1} = 1$, temos que $p_{3,5} = 15$.

Sabemos que células recíprocas são iguais, se calcularmos para $p_{5,3}$ teremos

$$\frac{p_{5,3}}{p_{7,1}} = \frac{p_{5,3}}{p_{6,2}} \cdot \frac{p_{6,2}}{p_{7,1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{30}{2} = 15.$$

Temos que provar que o denominador do quociente é a produtória de 1 até $(c-1)$ e o numerador é a produtória de l até o antecessor de l somado com o antecessor de c, logo irá até $(l + c - 2)$.

$$p_{l,c} = \frac{p_{l,c}}{p_{l+c-1,1}} = \frac{p_{l,c}}{p_{l+c-1,1}} \cdot \frac{\prod_{i=2}^{c-1} p_{l+c-i,i}}{\prod_{i=2}^{c-1} p_{l+c-i,i}} = \frac{\prod_{i=2}^{c} p_{l+c-i,i}}{\prod_{i=1}^{c-1} p_{l+c-i,i}} = \frac{\prod_{i=1}^{c-1} p_{l+c-1-i,i+1}}{\prod_{i=1}^{c-1} p_{l+c-i,i}} = \prod_{i=1}^{c-1} \frac{p_{l+c-1-i,i+1}}{p_{l+c-i,i}}$$

Pelo inverso da fração da décima segunda consequência

$$p_{l,c} = \prod_{i=1}^{c-1} \frac{\text{dist}_V(p_{l+c-1-i,i+1})}{\text{dist}_H(p_{l+c-i,i})} = \prod_{i=1}^{c-1} \frac{l+c-1-i}{i} = \frac{\prod_{i=1}^{c-1} l+c-1-i}{\prod_{i=1}^{c-1} i}$$

Multiplique o contador da produtória acima por (-1) e depois some $(l + c - 1)$.

$$p_{l,c} = \frac{\prod_{i=-c+1}^{-1} l+c-1+i}{\prod_{i=1}^{c-1} i} = \frac{\prod_{i=l}^{l+c-2} l+c-1+i-(l+c-1)}{\prod_{i=1}^{c-1} i} = \frac{\prod_{i=l}^{l+c-2} i}{\prod_{i=1}^{c-1} i}$$

O que termina a demonstração. ■

Se o gerador não for a unidade, multiplique o quociente pelo gerador.

2.3 PARA AS ORDENS NUMÉRICAS

Neste capítulo, Pascal estudou diferentes sequências numéricas.

Chamou de *números da primeira ordem* a sequência das simples unidades que aparecem na primeira linha e coluna do triângulo aritmético:

1, 1, 1, 1, 1, 1, etc

Chamou de *números de segunda ordem* a sequência dos números naturais que aparecem na segunda linha e coluna do triângulo aritmético:

1, 2, 3, 4, 5, 6, etc

Chamou de *números de terceira ordem* a sequência da soma dos primeiros números naturais, que são chamados triangulares e que aparecem na terceira linha e coluna do triângulo aritmético:

1, 3, 6, 10, 15, 21, etc

Chamou de *números de quarta ordem* a sequência da soma dos primeiros números triangulares, que são chamados piramidais e que aparecem na quarta linha e coluna do triângulo aritmético:

1, 4, 10, 20, 35, 56, etc

Chamou de *números de quinta ordem* a sequência da soma dos primeiros números piramidais que aparecem na quinta linha e coluna do triângulo aritmético:

1, 5, 15, 35, 70, 126, etc

Chamou de *números de sexta ordem* a sequência da soma dos primeiros números de quinta ordem que aparecem na sexta linha e coluna do triângulo aritmético:

1, 6, 21, 56, 126, 252, etc

E assim por diante   1, 7, 28, 84, etc

1, 8, 36, 120, etc

Estas sequências numa tabela têm uma semelhança com o triângulo aritmético:

Unidades	Ordem 1:	1	1	1	1	1	etc
Naturais	Ordem 2:	1	2	3	4	5	etc
Triangulares	Ordem 3:	1	3	6	10	15	etc
Piramidais	Ordem 4:	1	4	10	20	35	etc

2.4 PARA COMBINAÇÕES

Nesta seção, Pascal relacionou os valores do triângulo aritmético com o resultado de todas as combinações possíveis.

Vamos usar o exemplo das combinações de 4 objetos, sejam eles: A, B, C e D. Tomando-os 2 a 2, ou seja, quantos conjuntos de dois objetos distintos podemos formar a partir destes 4. Vamos chamar esse cálculo de combinação de 4 para 2 e sua notação será $C_{4,2}$. Contando-os temos 6 possibilidades que são:

$$A \text{ e } B,\ A \text{ e } C,\ A \text{ e } D,\ B \text{ e } C,\ B \text{ e } D,\ C \text{ e } D$$

Na combinação não se contam as repetições como A e A, e também não se diferenciam A e B com B e A, pois são os mesmos objetos.

Pascal separou em lemas e proposições suas ideias sobre as combinações.

Lema 2.1. *Não é possível uma combinação de n objetos para um número maior que n.*

Lema 2.2. *Uma combinação de n objetos para n objetos sempre será 1.*

Lema 2.3. *Uma combinação de n objetos para 1 objeto sempre será n.*

Lema 2.4. *Sejam dois números consecutivos e um outro maior ou igual a eles, isto é, sejam $m, m+1$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $m+1 \leqslant n$. Temos a seguinte relação de combinações:*

$$C_{n,m} + C_{n,m+1} = C_{n+1,m+1}.$$

Demonstração. Vamos usar a seguinte ideia, o resultado de $C_{n+1,m+1}$ é a quantidade de conjuntos de $m+1$ objetos distintos que podemos formar a partir destes $n+1$ objetos. Tome um elemento qualquer dos $n+1$ objetos, seja ele k.

Divida este resultado em duas partes disjuntas, uma parte são os conjuntos com contém o elemento k e a outra parte são os conjuntos com não contém o elemento k.

Como a primeira parte contém k e é formado por $m+1$ objetos, se retirarmos k destes conjuntos, teremos combinações de m objetos sendo escolhidos entre n objetos. Logo será igual a $C_{n,m}$.

Como a segunda parte não contém k e é formado por $m+1$ conjuntos, é como se tivéssemos retirado o elemento k do conjunto de $n+1$ objetos, ou seja, escolhido entre n objetos, logo será igual a $C_{n,m+1}$.

Portanto $C_{n,m} + C_{n,m+1} = C_{n+1,m+1}$. O que justifica o lema 2.4. ■

Proposição 1. Em cada triângulo aritmético, o valor de qualquer célula é igual à combinação do antecessor do expoente de sua base para o antecessor da sua posição perpendicular.

Vamos provar a seguinte fórmula $p_{l,c} = C_{l+c-2,c-1}$ sendo sua base $n = l + c - 1$.

Para $l = 1$ e c qualquer, $p_{1,n} = C_{n-1,n-1} = 1$. O que é verdadeiro.

Para $c = 1$ e l qualquer, $p_{n,1} = p_{1,n} = 1$. O que é verdadeiro.

Vamos provar por indução para n que é a base do triângulo. Para as bases 1 e 2 é imediato, pois seus elementos são $p_{1,1}, p_{1,2}$ e $p_{2,1}$. Supondo que vale para uma base n, tomemos dois elementos contíguos de sua base que são $p_{l,c}$ e $p_{l-1,c+1}$, então

$$p_{l,c+1} = p_{l,c} + p_{l-1,c+1} = C_{l+c-2,c-1} + C_{l+c-2,c} = C_{l+c-1,c} = C_{l+(c+1)-2,(c+1)-1}.$$

Portanto também vale para base $n + 1$.

Observe que a fórmula também é valida para a posição paralela, logo $p_{l,c} = C_{l+c-2,l-1}$.

Proposição 2. Em cada triângulo aritmético, a soma das células de qualquer posição paralela é igual à combinação do expoente do triângulo para sua posição paralela.

O que queremos provar é que $\sum_{i=1}^{n} p_{l,i} = C_{base(p_{l,n}),l}$

Seja qualquer triângulo, por exemplo, o de base 4. A soma das células de qualquer posição paralela, por exemplo, o segundo, $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3}$, é igual à $C_{4,2}$. Assim, a soma das células da quinta posição paralela do triângulo de base 8 é igual à $C_{8,5}$, etc.

Pela segunda consequência $\sum_{i=1}^{n} p_{l,i} = p_{l+1,n} = p_{n,l+1} = C_{l+n-1,l} = C_{base(p_{l,n}),l}$.

Proposição 3. Há duas maneiras de, dados dois números quaisquer a e b, descobrir o valor da combinação de a para b pelo triângulo aritmético.

Primeira maneira: Tome a soma da primeira até a b-ésima célula da base no triângulo de base(a).

Segunda maneira: Tome a $(b + 1)$-ésima célula da base no triângulo de base($a + 1$).

2.5 PARA DETERMINAR DIVISÕES ENTRE DOIS JOGADORES

Nesta seção, Pascal enunciou regras para se fazer divisões de apostas num jogo de várias rodadas. Se, em determinado momento, os jogadores quiserem parar de jogar sem terminar todas as rodadas, deve ser feita uma divisão proporcional à chance que cada um tem de ganhar.

Se os jogadores estão em iguais condições de ganhar e quiserem parar de jogar, eles devem dividir o dinheiro apostado pela metade.

O interessante no texto de Pascal é que ele aposta pistolas e não dinheiro. Poderia se pensar que isso é para se trabalhar com números inteiros, porém em alguns casos a divisão das pistolas nem sempre é inteira. Preferi manter este detalhe do texto original.

Lema 2.5. *Se há dois jogadores com a condição de que numa rodada, se o primeiro vence, uma certa quantia será restaurada a ele e se ele perde, uma quantia menor será restaurada a ele; se quiserem interromper o jogo, o primeiro toma o que lhe é restaurado em caso de perda mais a metade da diferença entre o que seria restaurado em caso de ganho e perda. Seja G a quantia recebida em caso de ganho da rodada e P em caso de perda, cada um deve receber* $P + \dfrac{G-P}{2}$.

Observe que podemos substituir a expressão por $\dfrac{G+P}{2}$.

É fácil observar que num jogo de 2 rodadas, se o placar é de 1 a 0, eles estão na mesma condição de ganhar do que num jogo de 5 rodadas se o placar estiver 4 a 3 ou ainda num jogo de 12 rodadas se o placar estiver 11 a 10. Isso porque as chances de ganho e perda só dependem do restante de rodadas.

Pascal explicou alguns casos antes de dar o método de cálculo das divisões. Vamos enunciá-los.

- *Primeiro caso: Para o primeiro não faltam rodadas e para o segundo faltam.*

O primeiro venceu o jogo e leva toda a aposta.

- *Segundo caso: Para o primeiro e para o segundo falta 1 rodada.*

Os dois jogadores estão em mesma condição de ganhar, logo dividirão pela metade.

- *Terceiro caso: Para o primeiro falta 1 rodada e para o segundo faltam 2.*

Por exemplo, num jogo de 5 rodadas, o primeiro tem 4 pontos e o segundo tem 3 pontos com 16 pistolas como aposta. Se o primeiro ganhar a rodada, ele ganha o jogo, logo deve receber o total. Se ele perder, cada jogador terá 8 pistolas. Portanto, para o primeiro jogador, em caso de ganho, ele tem 16 pistolas e em caso de perda, tem 8 pistolas, portanto deve receber $8 + \dfrac{16-8}{2} = 12$.

Já o segundo jogador, se ele ganhar, tem direito à metade e se perder, não tem direito a nada, portanto ele deve receber $0 + \dfrac{8-0}{2} = 4$.

- *Quarto caso: Para o primeiro falta 1 rodada e para o segundo faltam 3.*

Se o primeiro ganhar a rodada, ele ganha o jogo, logo deve receber o total. Se ele perder, vamos para o terceiro caso, portanto receberá 12 pistolas. Logo ele deve receber $12 + \frac{16-12}{2} = 14$. Já o segundo receberá $0 + \frac{4-0}{2} = 2$.

- *Quinto caso: Para o primeiro falta 1 rodada e para o segundo faltam 4.*

Se o primeiro ganhar a rodada, ele ganha o jogo, logo deve receber o total. Se ele perder, vamos para o quarto caso, portanto receberá 14 pistolas. Logo ele deve receber $14 + \frac{16-14}{2} = 15$. Já o segundo receberá $0 + \frac{2-0}{2} = 1$.

- *Sexto caso: Para o primeiro falta 1 rodada e para o segundo faltam 5.*

Em seu texto, Pascal diz que pode-se seguir o procedimento anterior até o infinito.

- *Sétimo caso: Para o primeiro faltam 2 rodadas e para o segundo faltam 3.*

Se o primeiro ganhar a rodada vamos para o quarto caso, portanto receberá 14 pistolas. Se ele perder, os dois jogadores ficam em iguais condições, portanto recebem 8 pistolas. Logo ele deve receber $8 + \frac{14-8}{2} = 11$. Já o segundo receberá $2 + \frac{8-2}{2} = 5$.

Para se calcular qualquer divisão, podemos usar o triângulo aritmético. Para isso precisamos do seguinte lema:

Lema 2.6. *Para se fazer a divisão entre dois jogadores que decidem parar de jogar deve-se, para cada jogador, tomar a soma das frações que lhe cabem em caso de ganho e perda e dividi-la por 2.*

Toma-se o triângulo aritmético com base igual à soma das quantidades de rodadas que faltam para terminar o jogo para cada jogador. Se faltam k rodadas para um jogador, a fração devida para ele é a soma das k primeiras células dessa base, dividida pela soma de todas as células dessa base.

Vamos tomar o sétimo caso como exemplo. Faltam 2 rodadas para o primeiro e 3 para o segundo, logo faltam 5 rodadas no total e usaremos a base 5 do triângulo aritmético composta pelas células 1, 4, 6, 4 e 1.

Para o primeiro jogador temos a fração $\frac{1+4+6}{1+4+6+4+1} = \frac{11}{16}$ de 16 pistolas, logo receberá 11. Para o segundo jogador temos a fração $\frac{4+1}{1+4+6+4+1} = \frac{5}{16}$ de 16 pistolas, logo receberá 5.

2.6 PARA POTÊNCIAS DE BINÔMIOS

Nesta seção, Pascal mostrou como se consegue os coeficientes de binômios a partir do triângulo aritmético. Ele não escreveu nenhuma demonstração pois alegou que outros já trataram do assunto e também porque era evidente em si mesmo.

Primeiro, ele encontrou um método para se encontrar o quadrado-quadrado de um número. Para $(a+1)$ ele combinou a base 5 do triângulo aritmético com as potências de a. Chegando em

$$1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 + 6 \cdot a^2 + 4 \cdot a + 1.$$

Para $a = 4$ temos o quadrado-quadrado de 5.

$$1 \cdot 4^4 + 4 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 1 = 256 + 256 + 96 + 16 + 1 = 625.$$

Este método não é tão prático, pois para se encontrar o quadrado-quadrado de 5 temos que calcular o quadrado-quadrado de 4, portanto não se economiza muitas contas.

Depois disso ele fez para $(a+2)$ multiplicando os coeficientes pelas potências de 2.

$$\begin{array}{lllll} 1a^4+ & 4a^3+ & 6a^2+ & 4a+ & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline 1a^4+ & 8a^3+ & 24a^2+ & 32a+ & 16 \end{array}$$

Para $(a+3)$ de maneira semelhante para as potências de 3.

$$\begin{array}{lllll} 1a^4+ & 4a^3+ & 6a^2+ & 4a+ & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ \hline 1a^4+ & 12a^3+ & 54a^2+ & 108a+ & 81 \end{array}$$

Em seu texto, Pascal diz que segue-se assim até o infinito.

Pascal escreveu também que teríamos que usar o triângulo de base 6 se desejássemos o quadrado-cubo e assim por diante para as outras potências. E que se desejássemos as potências de $(a-1)$ em vez de $(a+1)$ isso era obtido alternando os sinais dos coeficientes. Por exemplo, o quadrado-quadrado de $(a-1)$ é

$$1 \cdot a^4 - 4 \cdot a^3 + 6 \cdot a^2 - 4 \cdot a + 1.$$

3

PROPRIEDADES

O triângulo aritmético está repleto de padrões e propriedades, mesmo ele tendo uma definição bem simples, nem sempre é fácil de se explicar essas propriedades. Por isso, vamos aqui enunciá-las e demonstrá-las. Além das propriedades expostas aqui, o livro "Generalized Pascal Triangles and Pyramids" de Boris A. Bondarenko [2] é uma excelente fonte de outras abordagens do triângulo aritmético.

Para entender as propriedades do triângulo aritmético, primeiramente precisamos definir sua montagem que nos servirá de ponto de partida para nossos cálculos. Sua montagem é bem simples, primeiramente precisamos de um elemento gerador, usualmente é a unidade mas pode-se usar qualquer número natural. Cada linha terá um elemento a mais que a anterior e cada elemento será a soma dos dois elementos logo acima dele, se não houver dois elementos ele será igual ao gerador. As linhas são numeradas começando pelo zero de cima para baixo.

Podemos continuar esta montagem iterativamente.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&\\
&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&\\
&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&\\
&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&\\
&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&\\
1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1
\end{array}
$$

Para todas as propriedades usaremos $n, p, k \in \mathbb{N}$ e o gerador igual à unidade.

3.1 FÓRMULA DA COMBINAÇÃO

Cada elemento do triângulo de Pascal é numericamente igual a algum resultado da fórmula da Combinação de n para p termos:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}$$

Pelo texto de Pascal, o teorema a seguir se refere à seção 2.4.

Teorema 1. Para encontrar $C_{n,p} = \binom{n}{p}$, toma-se o $(p+1)$-ésimo elemento da linha n.

Por exemplo, para encontrar $C_{5,2}$ toma-se o terceiro elemento da linha 5, que será igual a 10.

Demonstração. Pela definição, o primeiro e o último elemento de cada linha do triângulo aritmético é igual a 1.

$$C_{n,0} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$
$$C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Pela definição, também temos que a soma de dois elementos consecutivos de uma linha é numericamente igual ao elemento logo abaixo no triângulo, logo:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-(p+1))!} \\
&= \frac{(p+1)}{(p+1)} \cdot \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \cdot \frac{(n-p)}{(n-p)} \\
&= \frac{n! \cdot (p+1)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} + \frac{n! \cdot (n-p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n! \cdot (p+1+n-p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot ((n+1)-(p+1))!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula da combinação segue o mesmo princípio do triângulo aritmético.

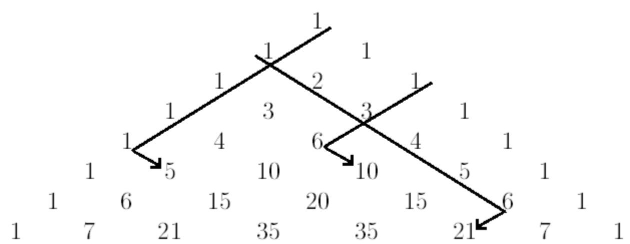
$\blacksquare$

A propriedade $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ também é conhecida como *relação de Stifel*, em referência a Michael Stifel (cerca de 1487-1567), matemático alemão que em sua obra *Arithmetica integra* (1544) inclui o triângulo aritmético um século antes de Pascal.

3.2 RELAÇÃO DAS DIAGONAIS

Toma-se um primeiro ou último elemento de qualquer linha e segue-se numa diagonal percorrendo uma quantidade finita de elementos. A soma desses elementos é igual ao elemento da linha seguinte, espelhando-se essa diagonal.

Vejamos alguns exemplos:



$$
\begin{aligned}
1+1+1+1+1 = 5 &\longrightarrow \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{3}{0} + \binom{4}{0} = \binom{5}{1} \\
1+2+3+4+5+6 = 21 &\longrightarrow \binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3} + \binom{5}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5} \\
1+3+6 = 10 &\longrightarrow \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3}
\end{aligned}
$$

Pelo texto de Pascal, o teorema a seguir se refere à segunda e terceira consequência da seção 2.2.

Teorema 2. Para a soma de $(k+1)$ elementos de uma diagonal, temos que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{p+i}{i} = \binom{p+k+1}{k} \text{ ou } \sum_{i=0}^{k} \binom{p+i}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}.$$

Demonstração. Suponha que valha a igualdade $\sum_{i=0}^{k} \binom{p+i}{i} = \binom{p+k+1}{k}$.

Acrescente uma mesma somatória aos dois lados da equação.

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{p+i}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{p+1+i}{i} = \binom{p+k+1}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{p+1+i}{i}$$

$$\binom{p}{0} + \sum_{i=1}^{k} \binom{p+i}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{p+1+i}{i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{p+1+i}{i}$$

$$\binom{p}{0} + \sum_{i=1}^{k} \binom{p+i}{i} + \sum_{i=1}^{k} \binom{p+i}{i-1} = \binom{p+1}{0} + \sum_{i=1}^{k} \binom{p+1+i}{i}$$

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{p+i+1}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{p+1+i}{i}$$

Como esta igualdade é verdadeira, a hipótese também é verdadeira. ■

3.3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na Itália, temos Leonardo de Pisa (aproximadamente 1180-1250), conhecido como Fibonacci ou “filho de Bonaccio”. Seu pai, natural de Pisa era comerciante e viajou pelo Egito, Síria e Grécia, nisso Fibonacci conheceu os números indo-arábicos (na Itália se usavam os números romanos).

Fibonacci escreveu o *Liber abaci* ou livro do ábaco (1202), mas que na verdade se tratava sobre métodos e problemas algébricos, principalmente para se calcular câmbio de moedas, nos quais se recomenda o uso dos numerais indo-arábicos, que são as 9 cifras indianas juntamente com o símbolo 0, que não há semelhante na numeração romana. Este símbolo é chamado de *zephirum* em árabe, de onde se derivam nossas palavras “cifra” e “zero”. No entanto sua obra não foi muito popular em sua época, por ser muito avançada para seus contemporâneos.

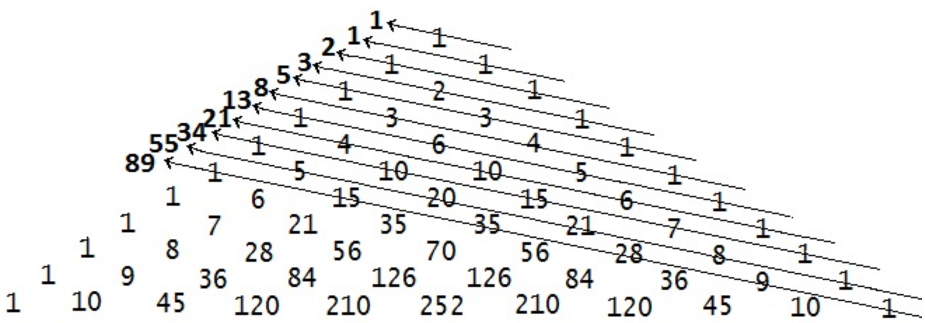
Um problema contido no *Liber abaci*, que inspirou os futuros matemáticos foi o seguinte:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Este problema dá origem à famosa "sequência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. Os dois primeiros termos serão iguais a 1 e cada termo seguinte será igual à soma dos dois anteriores. Esta sequência tem muitas propriedades, por exemplo, que quaisquer dois termos sucessivos são primos entre si e que o limite da razão destes termos é igual à razão áurea, ou seja, se dividirmos um termo pelo próximo da sequência, quanto mais avançarmos, esta razão se aproximará de $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Para mais detalhes, vá ao capítulo 6 ou consulte o livro "História da Matemática" de Carl B. Boyer [6].

Para se encontrar a sequência de Fibonacci no triângulo aritmético, deve-se tomar retas menos inclinadas que as diagonais do triângulo. Nessa reta, a cada linha abaixo, toma-se o elemento adjacente ao que estaria em sua diagonal. A soma dos elementos nos quais esta reta passa, corresponde à sequência de Fibonacci.



Calculando a sequência temos

$F_1 = \binom{0}{0} = 1$

$F_2 = \binom{1}{1} = 1$

$F_3 = \binom{1}{0} + \binom{2}{2} = 1+1=2$

$F_4 = \binom{2}{1} + \binom{3}{3} = 2+1=3$

$F_5 = \binom{2}{0} + \binom{3}{2} + \binom{4}{4} = 1+3+1=5$

$F_6 = \binom{3}{1} + \binom{4}{3} + \binom{5}{5} = 3+4+1=8$

$F_7 = \binom{3}{0} + \binom{4}{2} + \binom{5}{4} + \binom{6}{6} = 1+6+5+1=13$

$F_8 = \binom{4}{1} + \binom{5}{3} + \binom{6}{5} + \binom{7}{7} = 4+10+6+1=21$

Para se calcular F_n, olhando a soma de trás para frente, toma-se $\binom{n-1}{n-1}$ e vai-se diminuindo uma unidade do número acima e duas unidades do número abaixo da combinação.

Teorema 3. O enésimo elemento da sequência de Fibonacci é igual a

$$F_n = \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \binom{n-1-i}{n-1-2i} \text{ se } n \text{ é par e } F_n = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n-1-i}{n-1-2i} \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

Demonstração. Já verificamos para os primeiros termos da sequência, então para verificar se esta é a sequência de Fibonacci, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ deve ser verdadeiro. Vamos separar em dois casos, quando n é par ou ímpar.

- Se n é par:

Na equação abaixo, separe o primeiro elemento da primeira somatória e acrescente 1 ao contador da segunda.

$$\begin{aligned}
F_{n+1} + F_n &= \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n-i}{n-2i} + \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \binom{n-1-i}{n-1-2i} \\
&= \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n-i}{n-2i} + \sum_{i=1}^{(n)/2} \binom{n-i}{n+1-2i} \\
&= \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{n/2} \left[\binom{n-i}{n-2i} + \binom{n-i}{n+1-2i} \right] \\
&= \binom{n+1}{n+1} + \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n+1-i}{n+1-2i} \\
&= \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n+1-i}{n+1-2i} \quad = \quad F_{n+2}
\end{aligned}$$

- Se n é ímpar:

Na equação abaixo, separe o primeiro elemento da primeira somatória e o último da segunda.

$$\begin{aligned}
F_{n+1} + F_n &= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{n-2i} + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n-1-i}{n-1-2i} \\
&= \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{n-2i} + \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \binom{n-1-i}{n-1-2i} + \binom{(n-1)/2}{0} \\
&= \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{n-2i} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{n+1-2i} + \binom{(n-1)/2}{0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \left[\binom{n-i}{n-2i} + \binom{n-i}{n+1-2i} \right] + \binom{(n-1)/2}{0} \\
&= \binom{n+1}{n+1} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n+1-i}{n+1-2i} + \binom{(n+1)/2}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{(n+1)/2} \binom{n+1-i}{n+1-2i} \quad = \quad F_{n+2}
\end{aligned}
$$

Como é válido para n par e ímpar, a propriedade é verdadeira. ■

3.4 SINAIS ALTERNADOS

Tomando-se os elementos de qualquer linha do triângulo aritmético com os sinais alternados, exceto a linha 0 que possui só um elemento, vemos que a soma sempre será nula.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & +1 & & -1 & & = 0 & & & & & \\
 & & & & +1 & & -2 & & +1 & & = 0 & & & & \\
 & & & +1 & & -3 & & +3 & & -1 & & = 0 & & & \\
 & & +1 & & -4 & & +6 & & -4 & & +1 & & = 0 & & \\
 & +1 & & -5 & & +10 & & -10 & & +5 & & -1 & & = 0 & \\
+1 & & -6 & & +15 & & -20 & & +15 & & -6 & & +1 & & = 0
\end{array}
$$

Teorema 4. Para $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} = 0$.

Demonstração. Para uma linha $n+1$ qualquer temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} &= (-1)^0 \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} \\
&= (-1)^0 \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \\
&= (-1)^{n+1} \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} + (-1)^0 \binom{n}{0} \\
&= -(-1)^n \binom{n}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \\
&= -(-1)^n \binom{n}{n} - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \\
&= -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \quad = \quad 0.
\end{aligned}
$$

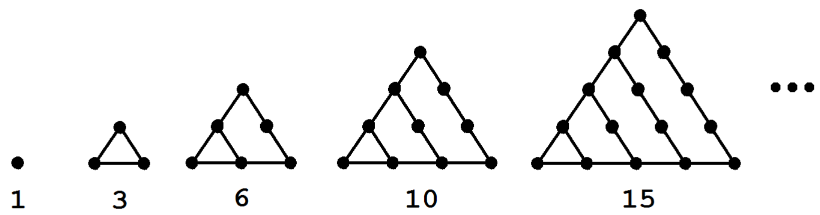
■

3.5 NÚMEROS FIGURADOS

Os números figurados expressam a quantidade de pontos em certas representações geométricas bidimensionais. Eram muito estudados pelos matemáticos contemporâneos à Pitágoras de Samos (580-600 a.C. aproximadamente) [6]. Nesta seção estudaremos os números figurados triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais.

3.5.1 *Números Triangulares*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada lado do triângulo em uma medida.



Pelo texto de Pascal, o teorema a seguir se refere aos números de terceira ordem da seção 2.3.

Teorema 5. No triângulo aritmético, os números triangulares são iguais ao enésimo elemento de sua terceira diagonal.

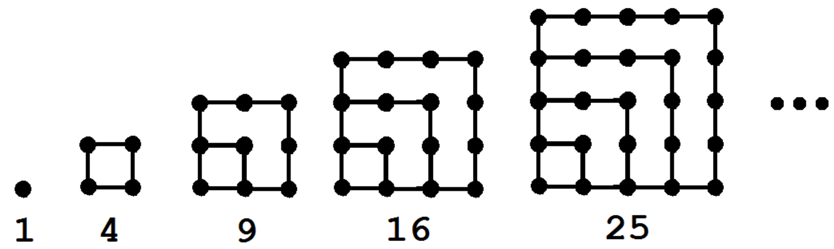
Demonstração. Esses números representam a soma dos n primeiros números naturais, pois a cada passo se acrescenta o sucessor do números de pontos do lado desse triângulo, logo $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$.

Como $\binom{n}{1} = n$ podemos falar que $T_n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + ... + \binom{n}{1}$.

Pela relação das diagonais da seção 3.2, temos que $T_n = \binom{n+1}{2}$, o que corresponde ao enésimo elemento da terceira diagonal do triângulo aritmético. ■

3.5.2 *Números Quadrados*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada lado do quadrado em uma medida.

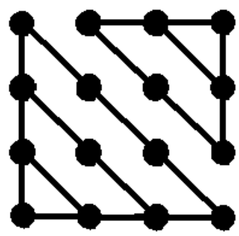


Teorema 6. No triângulo aritmético, os números quadrados são iguais ao enésimo elemento de sua terceira diagonal somado com seu antecessor.

Demonstração. Esses números representam a soma dos n primeiros números ímpares naturais, pois a cada passo, se acrescenta dois pontos a mais do que foi adicionado anteriormente. Ela será uma progressão aritmética de razão igual a 2, logo

$$Q_n = 1+3+5+7+.....+(2n-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = \frac{(2n)n}{2} = n^2.$$

Os números quadrados podem ser decompostos facilmente em dois números triangulares, conforme a figura

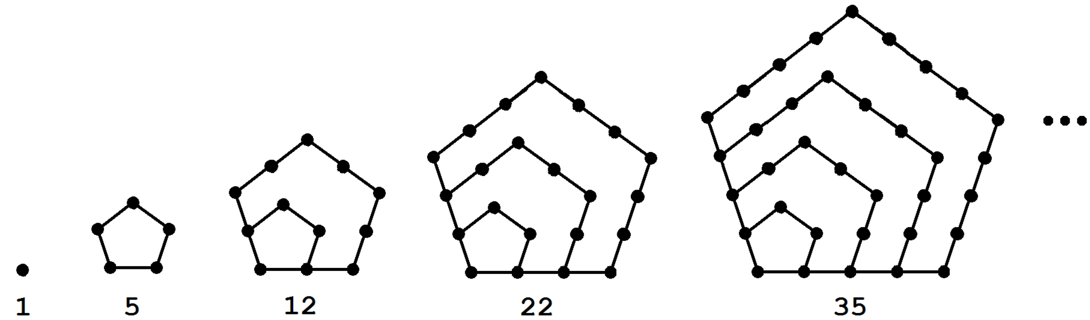


Para $n > 1$, temos que $Q_n = T_n + T_{n-1}$ ou $Q_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2}$.

$$\begin{aligned} Q_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} &= \frac{(n+1)!}{2!\,(n+1-2)!} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} \\ &= \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} \\ &= \frac{2n^2}{2} \;=\; n^2. \end{aligned}$$ ■

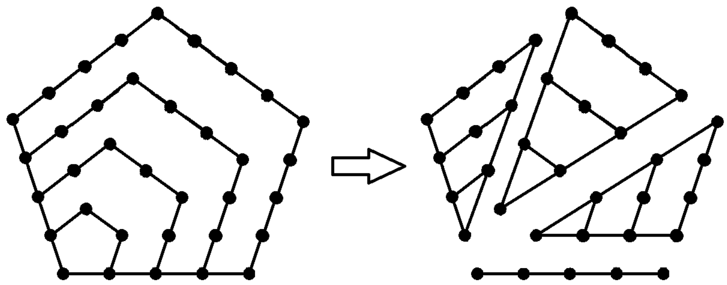
3.5.3 *Números Pentagonais*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada lado de um pentágono em uma medida.



Teorema 7. No triângulo aritmético, os números pentagonais são iguais ao enésimo elemento de sua terceira diagonal somado com o dobro do seu antecessor.

Demonstração. Os matemáticos gregos já haviam enunciado este problema como "O enésimo termo pentagonal é igual a n mais o triplo do $(n-1)$-ésimo número triangular." [6]



O que seria igual a $P_n = n + 3T_{n-1} = n + 3 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2n + 3n^2 - 3n}{2} = \dfrac{3n^2 - n}{2}$.

Se quisermos calcular o $(n+1)$-ésimo número pentagonal a partir do enésimo basta acrescentarmos $3n - 2$, o que corresponde aos seus três lados menos 2 elementos em comum, logo por indução para $n > 1$.

Para $n = 1$, $P_1 = \dfrac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Para $n = 2$, $P_2 = \dfrac{3 \cdot 2^2 - 2}{2} = \dfrac{12-2}{2} = 5$.

Se vale para n deve valer para $n+1$, portanto

$$\begin{aligned}
P_n + 3(n+1) - 2 &= \frac{3n^2 - n}{2} + 3n + 1 \\
&= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 6n + 3 - n - 1}{2} \\
&= \frac{3(n^2 + 2n + 1) - (n+1)}{2} \\
&= \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2} \quad = \quad P_{n+1}
\end{aligned}$$

■

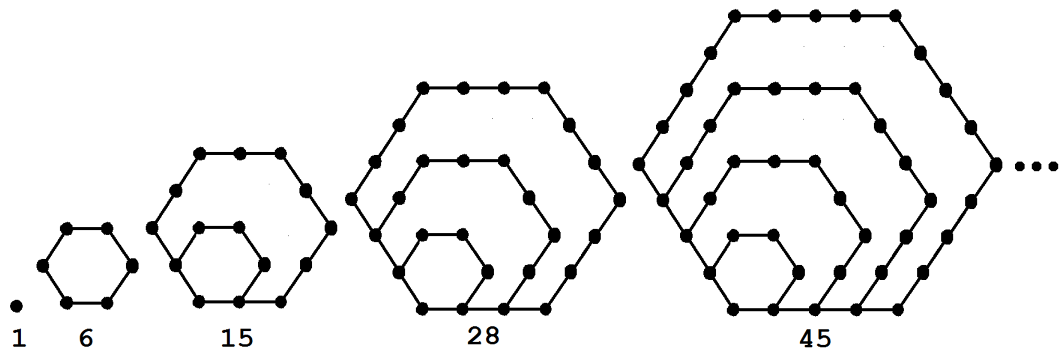
Podemos escrever isso de outra maneira mais prática.

Como $n = \binom{n}{1}$ e $T_{n-1} = \binom{n}{2}$ então $n + T_{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$.

Portanto $P_n = n + 3T_{n-1} = n + T_{n-1} + 2T_{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n}{2}$.

3.5.4 *Números Hexagonais*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada lado de um hexágono em uma medida.



Teorema 8. No triângulo aritmético, os números hexagonais são iguais ao $(2n-1)$-ésimo elemento de sua terceira diagonal, ou seja, estão de duas em duas.

Demonstração. Esta é a diagonal onde se encontram os números triangulares, então podemos escrever

$$H_n = T_{2n-1} = \binom{2n-1+1}{2} = \binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-2)!} = 2n^2 - n.$$

Se quisermos calcular o $(n+1)$-ésimo número hexagonal a partir do enésimo basta acrescentarmos $4n-3$, o que corresponde aos seus quatro lados menos 3 elementos em comum. Vamos provar novamente por indução.

Para $n=1$, $H_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$.

Se vale para n deve valer para $n+1$, portanto

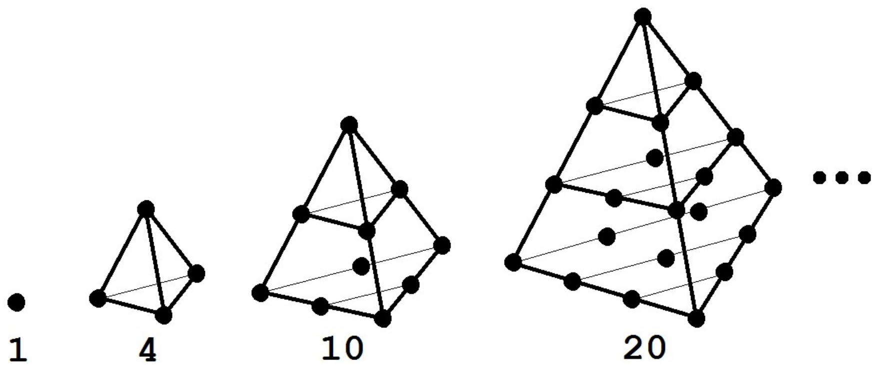
$$\begin{aligned} H_n + 4(n+1) - 3 &= 2n^2 - n + 4(n+1) - 3 \\ &= 2n^2 - n + 4n + 4 - 3 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - n + 2 - 3 \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) - n - 1 \\ &= 2(n+1)^2 - (n+1) \qquad = H_{n+1} \end{aligned}$$ ■

3.6 NÚMEROS PIRAMIDAIS

Esses números expressam a quantidade de pontos em certas representações geométricas tridimensionais. No caso os números piramidais com base triangular, quadrada e pentagonal.

3.6.1 *Números Tetraédricos ou Piramidais Triangulares*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada aresta da pirâmide triangular em uma medida.



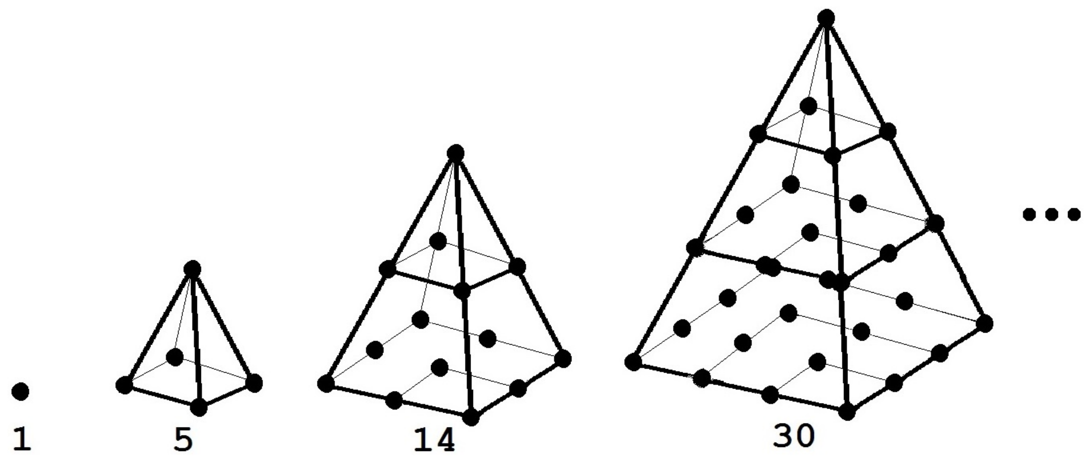
Pelo texto de Pascal, o teorema a seguir se refere aos números de quarta ordem da seção 2.3.

Teorema 9. No triângulo aritmético, os números piramidais triangulares são iguais ao enésimo elemento de sua quarta diagonal.

Demonstração. A cada passo, vai se somando um número triangular, logo $PT_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+1}{2} = \sum_{i=0}^{n} T_n$ e, pela relação das diagonais da seção 3.2, temos que $PT_n = \binom{n+1}{3}$, o que corresponde ao enésimo elemento da quarta diagonal do triângulo aritmético. ■

3.6.2 *Números Piramidais Quadrados*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada aresta da pirâmide quadrada em uma medida.



Teorema 10. No triângulo aritmético, os números piramidais triangulares são iguais ao enésimo elemento de sua quarta diagonal somado com seu antecessor.

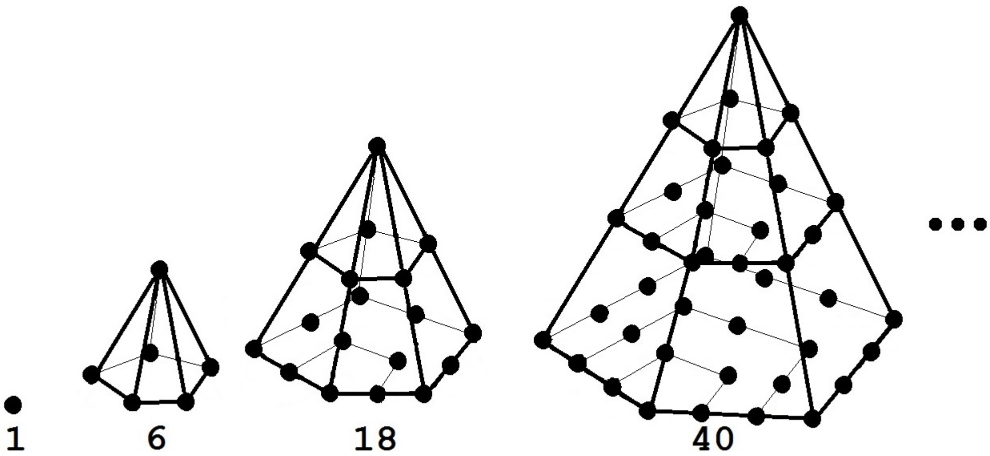
Demonstração. A cada passo, vai se somando um número quadrado, portanto para $n > 1$, $PQ_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i$ e, pela relação das diagonais da seção 3.2, temos que $\sum_{i=0}^{k} \binom{p+i}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}$ para $(k+1)$ elementos, ou $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+k}{p+1}$ para k elementos, logo

$$PQ_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i = Q_1 + \sum_{i=2}^{n} \left[\binom{i+1}{2} + \binom{i}{2} \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{i=2}^{n} \binom{i+1}{2} + \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} \\
&= \binom{2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i+2}{2} + \sum_{i=0}^{n} \binom{i+2}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+2}{2} + \sum_{i=0}^{n} \binom{i+2}{2} \\
&= \binom{2+(n-1)}{2+1} + \binom{2+n}{2+1} \\
&= \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.6.3 *Números Piramidais Pentagonais*

São os números de pontos que obtemos aumentando-se cada aresta da pirâmide pentagonal em uma medida.



Teorema 11. No triângulo aritmético, os números piramidais triangulares são iguais ao enésimo elemento de sua quarta diagonal somado com o dobro do seu antecessor.

Demonstração. A cada passo vai se somando um número pentagonal, portanto para $n > 1$, $PP_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$ e pela relação das diagonais da seção 3.2, sabemos que $\sum_{i=0}^{k} \binom{p+i}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}$ para $(k+1)$ elementos, ou $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+k}{p+1}$ para k elementos, logo

$$
\begin{aligned}
PP_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + \sum_{i=2}^{n} P_i &= 1 + \sum_{i=2}^{n} \binom{i+1}{2} + 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} \\
&= \binom{2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i+2}{2} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} \binom{i+2}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+2}{2} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} \binom{i+2}{2} \\
&= \binom{2+n}{2+1} + 2 \cdot \binom{2+n-2+1}{2+1} \\
&= \binom{n+2}{3} + 2 \cdot \binom{n+1}{3}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.7 POTÊNCIA DE BINÔMIOS

Nesta seção, vamos estudar uma das utilidades mais antigas do triângulo aritmético, como vimos na seção 1.1, que é o cálculo de coeficientes de potência de binômios.

O cálculo de potência de binômios pode se tornar muito trabalhoso fazendo várias distributivas sucessivas. Vejamos alguns casos para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)\,(x+y) \\
&= 1x^2 + 1xy \\
&\qquad + 1xy + 1y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)\left(x^2 + 2xy + y^2\right) \\
&= 1x^3 + 2x^2y + 1xy^2 \\
&\qquad + 1x^2y + 2xy^2 + 1y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right) \\
&= 1x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + 1xy^3 \\
&\qquad + 1x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + 1y^4 \\
&= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

O triângulo aritmético nos dá um método prático para determinarmos essas potências sem a necessidade de calcular todas essas distributivas. Primeiramente devemos saber quantos termos terá a conta final. Se temos um binômio elevado a n, somando-se as potências de x e y de cada termo elas terão grau n, portanto para $x^a y^b$, temos que $(a+b) = n$, portanto temos $(n+1)$ combinações, logo, se a potência for n, o número de termos será $(n+1)$, ou seja, $x^n, x^{n-1}y^1, x^{n-2}y^2, \ldots, x^2y^{n-2}, x^1y^{n-1}, y^n$.

Os coeficientes desses termos serão iguais aos elementos da linha n do triângulo aritmético. No caso serão $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

Pelo texto de Pascal, o teorema a seguir se refere à seção 2.6.

Teorema 12. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

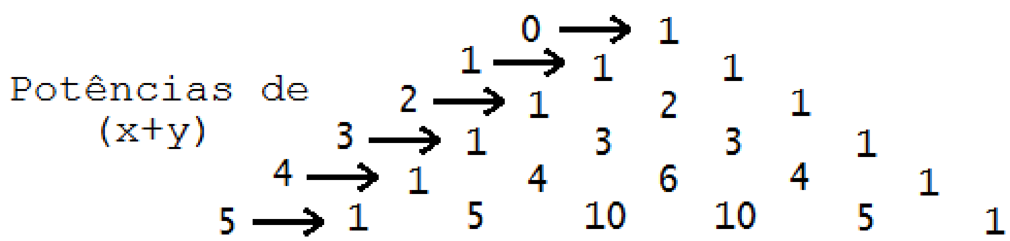
$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

ou, $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}y^i$.

Por exemplo, para $n = 5$, as potências de x vão de 5 até 0 e as de y vão de 0 a 5, logo os termos serão x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5. Temos que a linha 5 do triângulo aritmético é 1 , 5, 10, 10, 5, 1. Logo, $(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$.

Note que o triângulo aritmético surge conforme se aumenta a potência.

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= 1x + 1y \\
(x+y)^2 &= 1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
(x+y)^3 &= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\
(x+y)^4 &= 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \\
(x+y)^5 &= 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5
\end{aligned}$$



Demonstração. Usando o princípio de Indução, temos por hipótese que

$$\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^{i}\right](x+y)=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^{i}$$

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}x^{1-i}y^{i}\right](x+y) &= \left[\binom{1}{0}x^{1-0}y^{0}+\binom{1}{1}x^{1-1}y^{1}\right](x+y)\\ &=(x+y)(x+y)\\ &=x^2+2xy+y^2\\ &=\binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}xy+\binom{2}{2}y^2 \quad = \quad \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}x^{2-i}y^{i}\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^{i}\right](x+y) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n+1-i}y^{i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^{i+1}\\ &=\binom{n}{0}x^{n+1-0}y^{0}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n+1-i}y^{i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}x^{n-i}y^{i+1}+\binom{n}{n}x^{n-n}y^{n+1}\\ &=\binom{n}{0}x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n+1-i}y^{i}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}x^{n-(i-1)}y^{(i-1)+1}+\binom{n}{n}y^{n+1}\\ &=\binom{n}{0}x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]x^{n+1-i}y^{i}+\binom{n}{n}y^{n+1}\\ &=\binom{n+1}{0}x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^{i}+\binom{n+1}{n+1}y^{n+1}\\ &=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^{i}\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

3.7.1 *Potências de base 2*

Seguindo-se a numeração de cada linha começando-se do zero, temos que a soma de todos os elementos de cada linha corresponde à sua potência de base 2. Pelo texto de Pascal, isso se refere à oitava consequência da seção 2.2.

$$
\begin{array}{l}
1 \longrightarrow 1 = 2^0 \\
1 \quad 1 \longrightarrow 2 = 2^1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \longrightarrow 4 = 2^2 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \longrightarrow 8 = 2^3 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \longrightarrow 16 = 2^4 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \longrightarrow 32 = 2^5 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \longrightarrow 64 = 2^6 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \longrightarrow 128 = 2^7 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \longrightarrow 256 = 2^8 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \longrightarrow 512 = 2^9 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \longrightarrow 1024 = 2^{10}
\end{array}
$$

Há uma maneira intuitiva de se chegar a tal conclusão. Cada elemento será usado duas vezes para formar a próxima linha, portanto a soma dos elementos de uma linha abaixo será o dobro da anterior. Como a linha 0 é igual a $2^0 = 1$, então a soma dos elementos de cada linha irá coincidir com as potências de base 2.

Usando o fato de que o triângulo aritmético nos dá os coeficientes dos binômios, vamos usar o binômio $(1+1)^n$.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \\
(1+1)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i \\
2^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.
\end{aligned}
$$

3.7.2 *Potências de base 11*

Vamos calcular algumas potências de 11.

$$
\begin{aligned}
11^0 &= 1 \\
11^1 &= 11 \\
11^2 &= 121 \\
11^3 &= 1.331 \\
11^4 &= 14.641
\end{aligned}
$$

Podemos notar que as potências de base 11 estão formando o triângulo aritmético com seus algarismos. Isso se dá ao fato de que se usarmos o binômio $(10+1)^n$, vamos obter

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \\
(10+1)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 10^{n-i} 1^i \\
11^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 10^{n-i}.
\end{aligned}
$$

Portanto os coeficientes do desenvolvimento do binômio vão multiplicar uma potência de base 10, logo serão os algarismos das potências.

Por exemplo $11^4 = 14641 = 1 \cdot 10.000 + 4 \cdot 1.000 + 6 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 1$.

Porém, temos que fazer um acerto quando os elementos passam a ter mais que 1 algarismo. Por exemplo, $11^5 = 161.051$, $11^6 = 1.771.561$, que não são linhas do triângulo. Então vamos fazer o seguinte. Cada dezena de um elemento vai ser somado ao elemento à sua esquerda, pois ele deve conter somente um algarismo.
linha 5 $\Rightarrow$ 1 5 10 10 5 1 $\longrightarrow$ 1 5 11 0 5 1 $\longrightarrow$ 1 6 1 0 5 1.
linha 6 $\Rightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1 $\longrightarrow$ 1 6 15 21 5 6 1 $\longrightarrow$ 1 6 17 1 5 6 1 $\longrightarrow$ 1 7 7 1 5 6 1.

Fazendo-se esse acerto a linha n do triângulo aritmético irá corresponder à 11^n.

De modo análogo podemos calcular potências de 101, 1001, 10001, etc.

3.8 POTÊNCIA DE TRINÔMIOS

Se o cálculo de potência de binômios já é trabalhoso, o de trinômios será ainda mais, mas o triângulo aritmético também nos dá um método prático para o cálculo de $(x+y+z)^n$ [2].

Para o desenvolvimento de multinômios, ou seja, potência de somas com mais de três variáveis, consultar apêndice A.1

Vamos calcular para $n = 4$. Primeiramente vamos ver quais serão os termos. Cada termo da conta final terá que ter grau 4, no caso para $x^a y^b z^c$, temos que $(a+b+c) = 4$. Para isso toma-se todos os números de até três algarismos num sistema de numeração base 4 e coloque-os em ordem decrescente.

No caso serão os números 400, 310, 301, 220, 211, 202, 130, 121, 112, 103, 040, 031, 022, 013 e 004. Esses serão os valores de a, b e c. Portanto os termos serão:

$x^4y^0z^0$, $x^3y^1z^0$, $x^3y^0z^1$, $x^2y^2z^0$, $x^2y^1z^1$, $x^2y^0z^2$, $x^1y^3z^0$, $x^1y^2z^1$, $x^1y^1z^2$, $x^1y^0z^3$, $x^0y^4z^0$, $x^0y^3z^1$, $x^0y^2z^2$, $x^0y^1z^3$, $x^0y^0z^4$.

Ou seja, x^4, x^3y, x^3z, x^2y^2, x^2yz, x^2z^2, xy^3, xy^2z, xyz^2, xz^3, y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, y^4.

Para os coeficientes, precisamos do triângulo completo até a linha 4 e vamos multiplicar cada linha n pelo enésimo elemento da linha 4.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \end{array} \quad \bullet \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ 4\quad 4 \\ 6\quad 12\quad 6 \\ 4\quad 12\quad 12\quad 4 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \end{array}$$

Juntando-se os coeficientes com os termos, chegamos em

$$(x+y+z)^4 = x^4 + 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 + 12x^2yz + 6x^2z^2 + 4xy^3 + 12xy^2z + 12xyz^2 + 4xz^3 + y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + y^4.$$

Formalizamos isto no teorema a seguir.

Teorema 13. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$(x+y+z)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^i.$$

Demonstração. Usando o princípio de indução, vamos verificar se é válido para $n = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{1-j} y^{j-i} z^i &= \binom{1}{0} \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{1-0} y^{0-i} z^i + \binom{1}{1} \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^{1-1} y^{1-i} z^i \\ &= \binom{0}{0} x^{1-0} y^{0-0} z^0 + \binom{1}{0} x^{1-1} y^{1-0} z^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^{1-1} z^1 \\ &= x+y+z \end{aligned}$$

Para ser válido para $n+1$ devemos verificar se

$$\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^i\right](x+y+z) = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^i.$$

Portanto vamos verificar a hipótese

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^i\right](x+y+z) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^i + \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^i + \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^{i+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i+1} z^{i}$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^{i+1} + \binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} z^{i+1}$$

Rearranjando os termos, vamos separá-los em partes A, B e C.

$$A \to \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i}$$
$$B \to \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^{i+1}$$
$$C \to \binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} z^{i+1}$$

• Parte A

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i} = \binom{n}{0} \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{n+1} y^{-i} z^{i} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i}$$
$$= \binom{n+1}{0} \binom{0}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i}$$

• Parte B

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^{i+1}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left[\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^{i+1} \right]$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left[\binom{j}{0} x^{n-j} y^{j+1} + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i} z^{i+1} + \binom{j}{j} x^{n-j} z^{j+1} \right]$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left[\binom{j}{0} x^{n-j} y^{j+1} + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i-1} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \binom{j}{j} x^{n-j} z^{j+1} \right]$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left[\binom{j}{0} x^{n-j} y^{j+1} + \sum_{i=1}^{j} \left[\binom{j}{i} + \binom{j}{i-1} \right] x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \binom{j}{j} x^{n-j} z^{j+1} \right]$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left[\binom{j+1}{0} x^{n-j} y^{j+1} + \sum_{i=1}^{j} \binom{j+1}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} + \binom{j+1}{j+1} x^{n-j} z^{j+1} \right]$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left[\sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} x^{n-j} y^{j-i+1} z^{i} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tbinom{n}{j-1} \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i}$$

- Parte C

$$\binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} z^{i+1}$$
$$= \binom{n}{n}\binom{n}{0} y^{n+1} + \binom{n}{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} y^{n-i} z^{i+1} + \binom{n}{n}\binom{n}{n} z^{n+1}$$
$$= \binom{n}{n}\binom{n}{0} y^{n+1} + \binom{n}{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n}{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n}{n}\binom{n}{n} z^{n+1}$$
$$= \binom{n}{n}\binom{n}{0} y^{n+1} + \binom{n}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n}{n}\binom{n}{n} z^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{n+1}\binom{n+1}{0} y^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} y^{n-i+1} z^{i} + \binom{n+1}{n+1}\binom{n+1}{n+1} z^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} y^{n-i+1} z^{i}$$

- Soma das partes A, B e C

$$\binom{n+1}{0}\binom{0}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i} + \binom{n+1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} y^{n-i+1} z^{i}$$

$$= \binom{n+1}{0}\binom{0}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i} + \binom{n+1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} y^{n-i+1} z^{i}$$

$$= \binom{n+1}{0}\binom{0}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i} + \binom{n+1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} y^{n-i+1} z^{i}$$
$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^{n-j+1} y^{j-i} z^{i}$$

O que conclui a demonstração. ∎

3.9 PARTIÇÃO DE COMBINAÇÕES

Esta propriedade envolve um associação entre dois triângulos aritméticos invertidos entre si verticalmente. Ela se trata da visualização da convolução de Chuh-Vandermonde [5] devido a um artigo escrito por Alexandre Vandermonde no século XVIII, porém ela já era conhecida em 1303 pelo chinês Chuh-Shih-Chieh, que já mencionamos na seção 1.1.

Vamos tomar uma associação como exemplo. Primeiramente, tome um triângulo aritmético e, em uma determinada linha, por exemplo a linha 6, associe uma outra linha qualquer, por exemplo a linha 4. Associe todos os elementos desta nova linha a alguém da linha anterior. Neste exemplo, os elementos da linha 4 poderão estar associados desta maneira com os da linha 6:

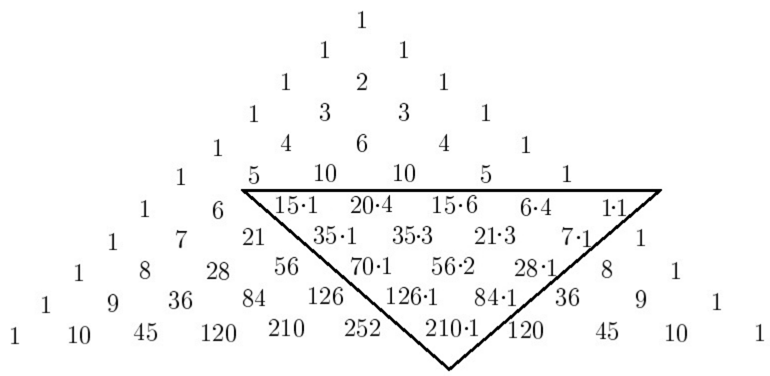
$$15 \cdot 1 \quad + \quad 20 \cdot 4 \quad + \quad 15 \cdot 6 \quad + \quad 6 \cdot 4 \quad + \quad 1 \cdot 1$$

A somatória destes produtos é 210 que é igual a $C_{10,6}$.

Tome dois triângulos aritméticos invertidos verticalmente. O menor deles deve estar ao contrário da maneira que costumamos usar.

```
                              1
                            1   1
                          1   2   1
                        1   3   3   1
                      1   4   6   4   1
                    1   5  10  10   5   1
                  1   6  15  20  15   6   1              1   4   6   4   1
                1   7  21  35  35  21   7   1              1   3   3   1
              1   8  28  56  70  56  28   8   1              1   2   1
            1   9  36  84 126 126  84  36   9   1              1   1
          1  10  45 120 210 252 210 120  45  10   1              1
```

Agora, associe os elementos destes dois triângulos, como na figura a seguir.



A somatória dos elementos associados em cada linha será constante. Neste exemplo temos:

$$15 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 210$$
$$35 \cdot 1 + 35 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 210$$
$$70 \cdot 1 + 56 \cdot 2 + 28 \cdot 1 = 210$$
$$126 \cdot 1 + 84 \cdot 1 = 210$$
$$210 \cdot 1 = 210$$

Chamaremos esta propriedade de partição de combinações, devido a uma definição de teoria dos conjuntos e a um problema prático.

Definição 3.1. Uma partição de um conjunto X é uma coleção $X_1, X_2, ..., X_k$ de subconjuntos não vazios de X tal que cada elemento de X pertence a um, e apenas um, X_i. Cada X_i é um elemento ou bloco da partição.

O problema prático é o seguinte. Se temos uma situação simples em que temos 10 pessoas e queremos saber quantos grupos distintos de 6 pessoas podemos formar, é um simples caso de combinação em que a solução é $\binom{10}{6} = 210$. Porém, e se dissermos que este grupo de 10 são formados por 6 mulheres e 4 homens. A solução ainda é a mesma, mas quantos destes 210 grupos têm 4 mulheres e 2 homens, quantos têm 3 mulheres e 3 homens, assim por diante. Teríamos que subdividir o problema em vários casos e calcular cada um deles, mas usando o triângulo aritmético a resposta está praticamente pronta.

Este problema se resolve subdividindo em 5 casos:
- 2 mulheres e 4 homens,
- 3 mulheres e 3 homens,

- 4 mulheres e 2 homens,
- 5 mulheres e 1 homem,
- 6 mulheres.

Que são calculados com as seguintes combinações.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\text{2M e 4H} & & \text{3M e 3H} & & \text{4M e 2H} & & \text{5M e 1H} & & \text{6M} & & \\
\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{4} & + & \binom{6}{3}\cdot\binom{4}{3} & + & \binom{6}{4}\cdot\binom{4}{2} & + & \binom{6}{5}\cdot\binom{4}{1} & + & \binom{6}{6}\cdot\binom{4}{0} & & \\
15\cdot 1 & + & 20\cdot 4 & + & 15\cdot 6 & + & 6\cdot 4 & + & 1\cdot 1 & & \\
15 & + & 80 & + & 90 & + & 24 & + & 1 & & = 210
\end{array}$$

Portanto, cada produto formado pelas associações que fazemos no triângulo aritmético, nos dá todas as partições possíveis do total de 210 grupos.

As outras linhas nos dão as soluções se os números de homens e mulheres forem diferentes.

Se tivermos 7 mulheres e 3 homens teremos:

$$\begin{array}{contentsccccccccc}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{3M e 3H} & & \text{4M e 2H} & & \text{5M e 1H} & & \text{6M} & & \\
\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{3} & + & \binom{7}{4}\cdot\binom{3}{2} & + & \binom{7}{5}\cdot\binom{3}{1} & + & \binom{7}{6}\cdot\binom{3}{0} & & \\
35\cdot 1 & + & 35\cdot 3 & + & 21\cdot 3 & + & 7\cdot 1 & & \\
35 & + & 105 & + & 63 & + & 7 & & = 210
\end{array}$$

Se tivermos 8 mulheres e 2 homens teremos:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{4M e 2H} & & \text{5M e 1H} & & \text{6M} & & \\
\binom{8}{4}\cdot\binom{2}{2} & + & \binom{8}{5}\cdot\binom{2}{1} & + & \binom{8}{6}\cdot\binom{2}{0} & & \\
70\cdot 1 & + & 56\cdot 2 & + & 28\cdot 1 & & \\
70 & + & 112 & + & 28 & & = 210
\end{array}$$

Se tivermos 9 mulheres e 1 homem teremos:

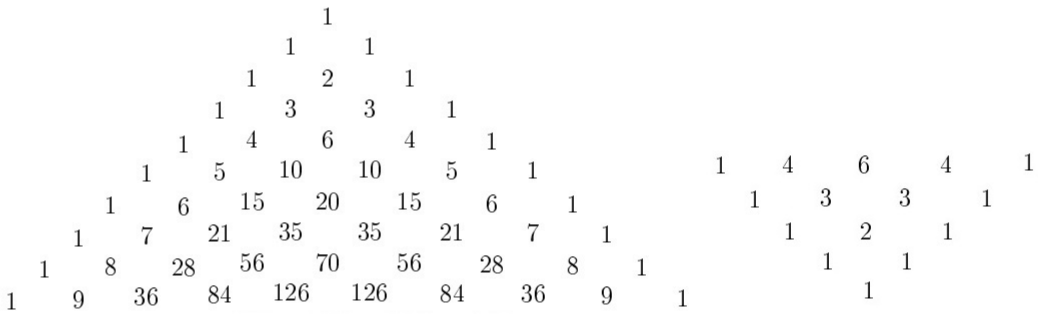
$$\begin{array}{ccccc}
\text{5M e 1H} & & \text{6M} & & \\
\binom{9}{5}\cdot\binom{1}{1} & + & \binom{9}{6}\cdot\binom{1}{0} & & \\
126\cdot 1 & + & 84\cdot 1 & & \\
126 & + & 84 & & = 210
\end{array}$$

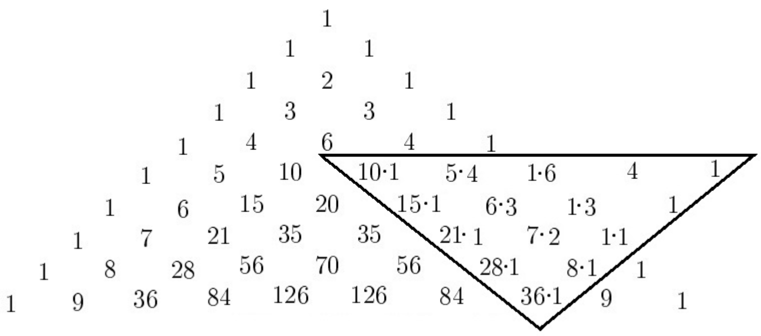
E finalmente, se tivermos 10 mulheres:

$$\begin{array}{cc}
\text{6M} & \\
\binom{10}{6}\cdot\binom{0}{0} & \\
210\cdot 1 & = 210
\end{array}$$

▲

Esta propriedade também vale quando a linha menor não tem todos os seus elementos associados a alguém da linha maior. Por exemplo, vamos associar a linha 4 com a linha 5 de modo que alguns elementos não se associem a ninguém.





A somatória dos elementos associados em cada linha ainda será constante se considerarmos que os elementos que não estiverem associados a ninguém forem multiplicados por zero. Neste exemplo temos:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 &= 36 \\ 15 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 &= 36 \\ 21 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 &= 36 \\ 28 \cdot 1 + 8 \cdot 1 &= 36 \\ 36 \cdot 1 &= 36 \end{aligned}$$

Um problema prático para este exemplo é o que temos 9 pessoas e queremos saber quantos grupos distintos de 7 pessoas podemos formar quando temos 5 mulheres e 4 homens, separando suas partições conforme a quantidade de homens e mulheres.

Este problema se resolve subdividindo em 3 casos:
- 3 mulheres e 4 homens,

- 4 mulheres e 3 homens,
- 5 mulheres e 2 homens.

Que são calculados com as seguintes combinações.

3M e 4H		4M e 3H		5M e 2H	
$\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{4}$	$+$	$\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{3}$	$+$	$\binom{5}{5} \cdot \binom{4}{2}$	
$10 \cdot 1$	$+$	$5 \cdot 4$	$+$	$1 \cdot 6$	
10	$+$	20	$+$	6	$= 36$

As outras linhas nos dão as soluções se os números de homens e mulheres forem diferentes.

Se tivermos 6 mulheres e 3 homens teremos:

4M e 3H		5M e 2H		6M e 1H	
$\binom{6}{4} \cdot \binom{3}{3}$	$+$	$\binom{6}{5} \cdot \binom{3}{2}$	$+$	$\binom{6}{6} \cdot \binom{3}{1}$	
$15 \cdot 1$	$+$	$6 \cdot 3$	$+$	$1 \cdot 3$	
15	$+$	18	$+$	3	$= 36$

Se tivermos 7 mulheres e 2 homens teremos:

5M e 2H		6M e 1H		7M	
$\binom{7}{5} \cdot \binom{2}{2}$	$+$	$\binom{7}{6} \cdot \binom{2}{1}$	$+$	$\binom{7}{7} \cdot \binom{2}{0}$	
$21 \cdot 1$	$+$	$7 \cdot 2$	$+$	$1 \cdot 1$	
21	$+$	14	$+$	1	$= 36$

Se tivermos 8 mulheres e 1 homem teremos:

6M e 1H		7M	
$\binom{8}{6} \cdot \binom{1}{1}$	$+$	$\binom{8}{7} \cdot \binom{1}{0}$	
$28 \cdot 1$	$+$	$8 \cdot 1$	
28	$+$	8	$= 36$

E finalmente, se tivermos 9 mulheres:

7M	
$\binom{9}{7} \cdot \binom{0}{0}$	
$36 \cdot 1$	$= 36$

▲

Esta propriedade vale inclusive para o caso degenerado, ou seja, quando os dois triângulos não se interceptam, neste caso todos os elementos estarão associados a algum zero e a soma será sempre nula. A seguir vamos formalizar esta propriedade.

Teorema 14. [Convolução de Chuh-Vandermonde] Dados $m, n, b \in \mathbb{N}$, para um conjunto de $m+n$ objetos, escolhendo b objetos temos que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} = \binom{m+n}{b}$.

Demonstração. Como agora há duas variáveis envolvidas, m e n, o princípio de indução envolve três passos, primeiro verificar para $m = 1$ e $n = 1$, depois verificar que se uma propriedade vale para m então ela valerá para $m+1$, e por último que se uma propriedade vale para n então ela valerá para $n+1$.

Para $m = 1$ e $n = 1$.

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \cdot \binom{1}{b-i} = \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{b} + \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{b-1} = \binom{1}{b} + \binom{1}{b-1} = \binom{2}{b}.$$

O que é verdadeiro.

Devemos verificar que se uma propriedade vale para m então ela valerá para $m+1$.

Supondo que seja verdadeiro que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} = \binom{m+n}{b}.$$

Para $m+1$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m+1}{b-i} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \left[\binom{m}{b-i-1} + \binom{m}{b-i} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i-1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} \\
&= \binom{m+n}{b-1} + \binom{m+n}{b} \\
&= \binom{m+n+1}{b}.
\end{aligned}$$

Por fim verifiquemos que se uma propriedade vale para n então ela valerá para $n+1$.

Supondo que seja verdadeiro que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} = \binom{m+n}{b}.$$

Para $n+1$ temos

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot \binom{m}{b-i} = \binom{n+1}{0} \cdot \binom{m}{b} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \cdot \binom{m}{b-i} + \binom{n+1}{n+1} \cdot \binom{m}{b-n-i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} \cdot \binom{m}{b} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] \cdot \binom{m}{b-i} + \binom{n}{n} \cdot \binom{m}{b-n-i} \\
&= \binom{n}{0} \cdot \binom{m}{b} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} \cdot \binom{m}{b-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} + \binom{n}{n} \cdot \binom{m}{b-n-i} \\
&= \binom{n}{n} \cdot \binom{m}{b-n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i-1} + \binom{n}{0} \cdot \binom{m}{b} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i-1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{b-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \left[\binom{m}{b-i-1} + \binom{m}{b-i} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m+1}{b-i} \\
&= \binom{n+m+1}{b}.
\end{aligned}
$$

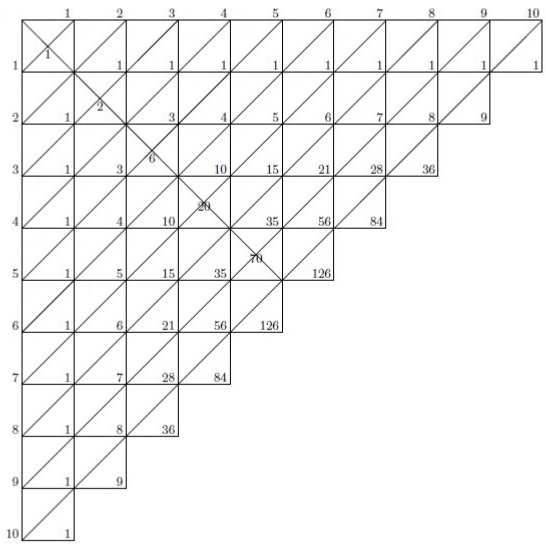
O que conclui a demonstração. ■

4

MATRIZ DE PASCAL

Neste capítulo, olharemos para o triângulo de Pascal como uma matriz e veremos alguns fatos importantes relacionados a isso. Faremos uma exposição mais simples e detalhada de resultados já conhecidos. Mais detalhes se encontram no texto de Edelman e Strang [4] para demonstrações envolvendo potências, inversas e logaritmos dessas matrizes e o texto de Lunnon [3] para demonstrações de álgebra linear.

Blaise Pascal em seu tratado, montava o triângulo aritmético de uma maneira semelhante a uma matriz, porém na forma de um triângulo retângulo isósceles. Podemos completá-lo para que se torne uma matriz quadrada, e com isso fazermos vários cálculos de álgebra linear que não eram conhecidos no tempo de Pascal. Vamos analisar como esta matriz se comporta, calculando seus determinantes, inversas, produtos de matrizes, autovalores, autovetores e polinômios característicos.



Vamos chamar de Matriz de Pascal de ordem n à matriz quadrada em que seus elementos sejam iguais aos do triângulo montado originalmente, com o gerador igual à unidade. Vejamos alguns exemplos.

Matriz de Pascal de ordem 1: $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

Matriz de Pascal de ordem 2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz de Pascal de ordem 3: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz de Pascal de ordem 4: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

Matriz de Pascal de ordem 5: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$

4.1 TIPOS DE MATRIZES DE PASCAL

Vamos definir três tipos de Matrizes de Pascal [4]. Lembrando que na fórmula de combinação $\binom{n}{p}$, se $n < p$ ou $p < 0$, o resultado será nulo.

- P_n com os termos $p_{l,c} = \binom{l+c-2}{c-1} = \binom{l+c-2}{l-1}$.

  Exemplo:$P_3 = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

- B_n com os termos $b_{l,c} = \binom{l-1}{c-1} = \binom{l-1}{l-c}$.

$$\text{Exemplo:} B_3 = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- C_n com os termos $c_{l,c} = \binom{c-1}{l-1} = \binom{c-1}{c-l}$.

$$\text{Exemplo:} C_3 = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando o gerador não for a unidade, para $\forall g \in \mathbb{Z}$, temos que as matrizes em questão serão respectivamente gP_n, gB_n e gC_n.

4.2 DETERMINANTES

Como estamos analisando o triângulo de Pascal como uma matriz, nada mais natural que calcular o valor dos determinantes de B_n, C_n e P_n.

4.2.1 *Determinantes de B_n e C_n [4]*

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal. Logo é imediato verificar que $\det B_n = 1^n = 1$ e $\det C_n = 1^n = 1$, portanto seus determinantes sempre serão iguais à 1.

Quando o gerador for igual a g, temos que $\det(gB_n) = g^n$ e $\det(gC_n) = g^n$.

4.2.2 *Determinantes de P_n [4]*

Para o cálculo dos determinantes de P_n, vamos usar o teorema de Jacobi repetidas vezes para o seu escalonamento.

Teorema de Jacobi: Seja A uma matriz quadrada. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) pelo mesmo número e somarmos os resultados aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), formando uma matriz B, então $\det A = \det B$.

A cada passo, substituímos uma linha da matriz por ela mesma subtraída da linha acima, e depois que ela estiver toda triangularizada, fazemos o produto dos elementos de sua diagonal principal.

Ordem 1: $\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1$

Ordem 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ordem 3: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ordem 4: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ordem 5: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

O escalonamento de P_n gera outra matriz cujos elementos são iguais aos de P_n a partir da diagonal principal para à direita.

Nos cálculos vemos que a cada passo as linhas se deslocam uma casa para à direita. Isso sempre irá acontecer pois a cada duas linhas consecutivas temos:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{2} & \cdots \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{2} & \cdots \\ \binom{n+1}{0} - \binom{n}{0} & \binom{n+2}{1} - \binom{n+1}{1} & \binom{n+3}{1} - \binom{n+2}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{2} & \cdots \\ 0 & \binom{n+1}{0} & \binom{n+2}{1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Como acontece esse deslocamento, as triangularizações sempre acarretarão em uma diagonal principal com elementos iguais a 1. Na verdade $\det P_n = \det C_n$, portanto, os determinantes de P_n serão iguais a 1 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Esse argumento também é válido para algumas submatrizes quadradas de Pascal. No caso uma que contenha a primeira linha ou coluna constante igual a 1. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \\ 1 & 6 & 21 & 56 \\ 1 & 7 & 28 & 84 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 7 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quando o gerador for igual a g, temos que $\det(gP_n) = g^n$.

4.2.3 *Determinantes de $P_n + k$*

$P_n + k$, $B_n + k$ e $C_n + k$ são as matrizes de Pascal com todos os seus elementos somados a uma constante k. Elas serão casos particulares de um teorema mais abrangente.

Teorema 15. Seja k um escalar, M uma matriz quadrada com uma linha ou coluna qualquer igual a uma constante não-nula escalar c e $\det M = d$. Então $\det(M + k) = \dfrac{d(c + k)}{c}$.

Demonstração. Para provar para uma linha ou coluna igual a c, basta provarmos para uma linha pois a $\det M = \det M^t$.

Sabemos que $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = d.$

E queremos calcular $\det(M+k)$, logo

$$\det(M+k) = \begin{vmatrix} a_{11}+k & a_{12}+k & \cdots & a_{1n}+k \\ a_{21}+k & a_{22}+k & \cdots & a_{2n}+k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+k & c+k & \cdots & c+k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+k & a_{n2}+k & \cdots & a_{nn}+k \end{vmatrix}$$

$$= (c+k)\begin{vmatrix} a_{11}+k & a_{12}+k & \cdots & a_{1n}+k \\ a_{21}+k & a_{22}+k & \cdots & a_{2n}+k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+k & a_{n2}+k & \cdots & a_{nn}+k \end{vmatrix}$$

Para qualquer outra linha que não seja a constante, por exemplo a primeira, podemos fazer a seguinte separação

$$(c+k)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+k & a_{22}+k & \cdots & a_{2n}+k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+k & a_{n2}+k & \cdots & a_{nn}+k \end{vmatrix} + (c+k)\begin{vmatrix} k & k & \cdots & k \\ a_{21}+k & a_{22}+k & \cdots & a_{2n}+k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+k & a_{n2}+k & \cdots & a_{nn}+k \end{vmatrix}$$

Como o segundo determinante possui linhas proporcionais, uma constante igual a k e outra constante igual a 1, então este determinante é nulo e obtemos

$$(c+k)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+k & a_{22}+k & \cdots & a_{2n}+k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+k & a_{n2}+k & \cdots & a_{nn}+k \end{vmatrix}$$

Portanto a cada separação como a anterior, o determinante da matriz com a linha constante igual a k será nulo, logo ficaremos somente com

$$\begin{aligned}(c+k)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (c+k)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{c}{c} & \frac{c}{c} & \cdots & \frac{c}{c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(c+k)}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(c+k)\cdot d}{c} \end{aligned}$$ ■

Para as matrizes de Pascal, vê-se claramente que são casos particulares do teorema anterior.

Corolário 1. Seja P igual a $P_n + k$, $B_n + k$, $C_n + k$ ou uma submatriz de Pascal que contenha uma linha ou coluna constante igual a 1 somada a uma constante k. Então $\det P = 1 + k$.

Demonstração. Usando o teorema anterior, sabemos que o determinante de qualquer matriz de Pascal é igual a 1 e que eles possuem uma linha ou coluna constante igual a 1. Logo

$$\det(P+k) = \frac{1(1+k)}{1} = 1+k.$$ ■

Corolário 2. Seja gP igual a $gP_n + k$, $gB_n + k$, $gC_n + k$ ou uma submatriz de Pascal com gerador igual a g que contenha uma linha ou coluna constante igual a g somada a uma constante k. Então $\det gP = g^n \left(1 + \frac{k}{g}\right)$.

Demonstração. Usando o teorema anterior, temos que $d = g^n$ e $c = g$, logo

$$\det(gP + k) = \frac{g^n(g+k)}{g} = g^n \left(1 + \frac{k}{g}\right). \qquad \blacksquare$$

4.3 MATRIZ INVERSA DE P_n

Vamos procurar um padrão para as matrizes inversas de P_n [3]. Calculando-as até ordem 5 temos:

- Inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ -10 & 30 & -35 & 19 & -4 \\ 10 & -35 & 46 & -27 & 6 \\ -5 & 19 & -27 & 17 & -4 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Percebemos que a inversa possui alguns padrões:

(i) Seus sinais estão alternados nas linhas e nas colunas.

(ii) A primeira linha e a primeira coluna, em valores absolutos, é a linha n do triângulo aritmético sem o primeiro elemento.

(iii) A última linha e a última coluna, em valores absolutos, é a linha $n-1$ do triângulo aritmético.

(iv) A soma dos elementos da primeira linha ou coluna é igual a 1.

(v) A soma dos elementos das demais linhas e colunas é igual a 0.

Provaremos cada um deles mais adiante.

Primeiramente, para calcular os determinantes, vamos escalonar as matrizes inversas. Sabemos que o produto dos determinantes de duas matrizes inversas devem ser iguais a 1. Como o determinante de uma matriz de Pascal é igual a 1, o determinante de sua inversa também deve ser 1.

Escalonando as inversas temos:

- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ -10 & 30 & -35 & 19 & -4 \\ 10 & -35 & 46 & -27 & 6 \\ -5 & 19 & -27 & 17 & -4 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

Vemos que escalonando as inversas chegamos em matrizes com elementos iguais à matriz de Pascal B_n com sinais alternados tanto nas linhas quanto nas colunas, como a diagonal principal é positiva, seu determinante será igual a 1. Porém até agora vimos que isso é uma tendência, não necessariamente essas propriedades valerão para qualquer ordem. Cabe a nós provarmos algumas coisas antes de enunciá-las como uma propriedade.

Para procurar um padrão vamos fazer o cálculo do escalonamento da matriz inversa na ordem contrária, usando as combinações como seus elementos.

Para ordem 4, por exemplo, usando o teorema de Jacobi com as combinações temos:

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 \\ -\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} - \left[-\binom{1}{0}\right] & -\binom{1}{1} & 0 & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 \\ -\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} & -\binom{1}{1} - \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 \\ -\binom{1}{0} - 2\binom{2}{0} & \binom{1}{1} - 2\left[-\binom{2}{1}\right] & -2\binom{2}{2} & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 \\ -\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} - \left[-\binom{3}{0}\right] & -\binom{1}{1} - \binom{2}{1} - \binom{3}{1} & \binom{2}{2} - \left[-\binom{3}{2}\right] & -\binom{3}{3} \\ -\binom{1}{0} - 2\binom{2}{0} + 3\left[-\binom{3}{0}\right] & \binom{1}{1} - 2\left[-\binom{2}{1}\right] + 3\binom{3}{1} & -2\binom{2}{2} + 3\left[-\binom{3}{2}\right] & 3\binom{3}{3} \\ \binom{2}{0} - 3\left[-\binom{3}{0}\right] & -\binom{2}{1} - 3\binom{3}{1} & \binom{2}{2} - 3\left[-\binom{3}{2}\right] & -3\binom{3}{3} \\ -\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} \end{vmatrix}$$

o que, pelos seus coeficientes, pode ser reescrito como

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0}\binom{0}{0} + \binom{1}{0}\binom{1}{0} + \binom{2}{0}\binom{2}{0} + \binom{3}{0}\binom{3}{0} & -\binom{1}{0}\binom{1}{1} - \binom{2}{0}\binom{2}{1} - \binom{3}{0}\binom{3}{1} & \binom{2}{0}\binom{2}{2} + \binom{3}{0}\binom{3}{2} & -\binom{3}{0}\binom{3}{3} \\ -\binom{1}{1}\binom{1}{0} - \binom{2}{1}\binom{2}{0} - \binom{3}{1}\binom{3}{0} & \binom{1}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{3}{1} & -\binom{2}{1}\binom{2}{2} - \binom{3}{1}\binom{3}{2} & \binom{3}{1}\binom{3}{3} \\ \binom{2}{2}\binom{2}{0} + \binom{3}{2}\binom{3}{0} & -\binom{2}{2}\binom{2}{1} - \binom{3}{2}\binom{3}{1} & \binom{2}{2}\binom{2}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{2} & -\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\ -\binom{3}{3}\binom{3}{0} & \binom{3}{3}\binom{3}{1} & -\binom{3}{3}\binom{3}{2} & \binom{3}{3}\binom{3}{3} \end{vmatrix}$$

O que sugere que a fórmula para o elemento da matriz inversa seja

$$p_{l,c}^{-1} = (-1)^{l+c} \sum_{i=\max(l,c)-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}\binom{i}{c-1}.$$

Portanto precisamos verificar se o produto dela pela matriz de Pascal resulta na matriz identidade, e para isso é necessário provar o seguinte lema.

Lema 4.1. *Para* $\forall A, B, n \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i}(-1)^i = (-1)^{n-1}\binom{A}{B-n+1} \qquad \textit{[3].}$$

Demonstração. Usando o princípio da indução, vamos verificar para $n = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} \binom{A+i}{B}\binom{0}{i}(-1)^i &= (-1)^0\binom{A}{B-1+1} \\ \binom{A}{B} &= \binom{A}{B} \end{aligned}$$

Supondo que vale para n, vamos analisar para $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{A+i}{B}\binom{n}{i}(-1)^i &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\binom{n}{i}(-1)^i + \binom{A+n}{B}\binom{n}{n}(-1)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right](-1)^i + \binom{A+n}{B}\binom{n}{n}(-1)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i}(-1)^i + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i-1}(-1)^i + \binom{A+n}{B}\binom{n-1}{n-1}(-1)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i}(-1)^i + \sum_{i=0}^{n}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i-1}(-1)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i}(-1)^i + \binom{A}{B}\binom{n-1}{-1}(-1)^0 + \sum_{i=1}^{n}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i-1}(-1)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i}{B}\binom{n-1}{i}(-1)^i + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{A+i+1}{B}\binom{n-1}{i}(-1)^{i+1} \\
&= \binom{A}{B-n+1}(-1)^{n-1} + \binom{A+1}{B-n+1}(-1)^{n-1}(-1) \\
&= (-1)^{n-1}\left[\binom{A}{B-n+1} - \binom{A+1}{B-n+1}\right] \\
&= (-1)^{n}\left[\binom{A+1}{B-n+1} - \binom{A}{B-n+1}\right] \\
&= (-1)^{n}\binom{A}{B-n}
\end{aligned}$$

O que prova o lema. ∎

Teorema 16. O elemento da matriz inversa de P_n é

$$p^{-1}_{l,c} = (-1)^{l+c} \sum_{i=\max(l,c)-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}\binom{i}{c-1}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos multiplicar P_n à esquerda e P_n^{-1} à direita.

Vamos variar a coluna em $p_{l,c} = \binom{l+c-2}{l-1}$ então à esquerda vamos variar j de 1 até n em $\binom{l+j-2}{l-1}$ e vamos variar a linha em $p^{-1}_{l,c} = (-1)^{l+c} \sum_{i=\max(l,c)-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}\binom{i}{c-1}$ então à direita vamos também variar j de 1 até n em $(-1)^{j+c} \sum_{i=\max(l,c)-1}^{n-1} \binom{i}{j-1}\binom{i}{c-1}$.

Neste contador i, podemos substituir $(\max(l,c)-1)$ por zero pois nesses novos valores, as combinações serão sempre nulas.

Usando o lema anterior, podemos verificar a inversa de P_n.

$$
\begin{aligned}
P_n \cdot P_n^{-1} &= \sum_{j=1}^{n} \binom{l+j-2}{l-1} \left[(-1)^{j+c} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{j-1} \binom{i}{c-1} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{l+j-1}{l-1} \left[(-1)^{j+1+c} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{j} \binom{i}{c-1} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{c-1} (-1)^{c+1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \binom{l+j-1}{l-1} \binom{i}{j} (-1)^{j} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{c-1} (-1)^{c-1} \left[\binom{l-1}{l-1-i} (-1)^{i} \right] \\
&= (-1)^{c-1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{c-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{i} \\
&= (-1)^{c-1} \binom{0}{c-l} (-1)^{l-1} \\
&= \binom{0}{c-l} (-1)^{l+c-2}
\end{aligned}
$$

O que será igual a 1 se $l = c$ e igual a 0 se $l \neq c$, portanto, a matriz identidade. Logo verifica-se que as matrizes são inversas. ■

Agora que temos uma expressão para o elemento da matriz inversa, podemos ir às demonstrações que estavam faltando. Vê-se que ela é simétrica, logo o que vale para a enésima linha também vale para a enésima coluna.

(i) Seus sinais estão alternados nas linhas e nas colunas.

Demonstração. Isso é evidente pelo termo $(-1)^{l+c}$ da matriz inversa que alterna o sinal dos elementos da matriz. ■

(ii) A primeira linha e a primeira coluna, em valores absolutos, é a linha n do triângulo aritmético sem o primeiro elemento.

Demonstração. Os elementos da primeira linha têm $\max(l, c) = c$ e $l = 1$, portanto

$$
p_{1,c}^{-1} = (-1)^{1+c} \cdot \sum_{i=c-1}^{n-1} \binom{i}{0} \binom{i}{c-1} = (-1)^{1+c} \cdot \sum_{i=c-1}^{n-1} \binom{i}{c-1}
$$

diminuindo $(c-1)$ no contador da somatória obtemos

$$
(-1)^{1+c} \cdot \sum_{i=0}^{n-c} \binom{(c-1)+i}{c-1} = (-1)^{1+c} \cdot \sum_{i=0}^{n-c} \binom{(c-1)+i}{i}
$$

e pela relação das diagonais da seção 3.2 obtemos

$$(-1)^{1+c} \cdot \binom{(c-1)+(n-c)+1}{n-c} = (-1)^{1+c} \cdot \binom{n}{n-c} = (-1)^{1+c} \cdot \binom{n}{c}$$

cujo valor absoluto é a linha n do triângulo sem o primeiro elemento $\binom{n}{0}$. ■

(iii) A última linha e a última coluna, em valores absolutos, é a linha $n-1$ do triângulo aritmético.

Demonstração. Os elementos da última linha têm $l \geqslant c$ e $l = n$, portanto

$$p^{-1}_{n,c} = (-1)^{n+c} \sum_{i=n-1}^{n-1} \binom{i}{n-1}\binom{i}{c-1} = (-1)^{n+c}\binom{n-1}{n-1}\binom{n-1}{c-1} = (-1)^{n+c}\binom{n-1}{c-1}$$

cujo valor absoluto é a linha $(n-1)$ do triângulo aritmético. ■

(iv) A soma dos elementos da primeira linha ou coluna é igual a 1.

Demonstração. Pela propriedade dos sinais alternados da seção 3.4, a soma de todos os elementos de uma linha do triângulo aritmético é nula. Como a primeira linha da matriz inversa é uma linha do triângulo aritmético sem o primeiro elemento com sinal negativo pois os sinais estão alternados, o elemento que está faltando para completar esta linha é -1. Portanto a soma de todos os elementos desta linha é igual a 1. ■

(v) A soma dos elementos das demais linhas e colunas é igual a 0.

Demonstração. A última linha é evidente pela propriedade dos sinais alternados da seção 3.4. Quanto às outras linhas, vemos que quando a matriz está triangularizada, elas também são nulas pela propriedade dos sinais alternados. No cálculo do escalonamento vemos que as demais linhas, pelo teorema de Jacobi, são somas de uma combinação destas linhas, logo todas as demais linhas serão formadas por somas de linhas de soma nula, portanto também serão nulas. ■

Quando o gerador for igual a g, temos que $(gP_n)^{-1} = g^{-1}P_n^{-1}$.

4.4 MATRIZ INVERSA DE B_n E C_n

Vamos definir a matriz D_n como a matriz identidade com sinais alternados em sua diagonal principal começando com o sinal positivo.

Algebricamente a matriz D_n, se multiplicada pela esquerda de uma matriz, inverte todos seus sinais das linhas pares e, se multiplicada pela direita de uma matriz ela inverte todos seus sinais das colunas pares. Portanto, se multiplicarmos uma matriz tanto pela esquerda quanto pela direita ela terá seus sinais alternados tanto nas linhas quantos nas colunas.

Por exemplo $D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, sendo que $d_{l,c} = (-1)^{c+1}\binom{0}{c-l}$.

Vamos agora mostrar qual é a inversa de B_n.

Teorema 17. $B_n^{-1} = D_n B_n D_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$ [4]

Para $n = 4$, temos B_4^{-1} igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Demonstração. Primeiro vamos calcular $D_n B_n$. Temos que variar a coluna da matriz D_n e a linha da matriz B_n, logo $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{0}{i-l} \binom{i-1}{c-1}$ só terá valores não-nulos se $i = l$, então chegamos em $(-1)^{l+1} \binom{l-1}{c-1}$.

Agora, vamos elevar ao quadrado este resultado para obtermos $D_n B_n D_n B_n$. Vamos variar primeiro as colunas e depois as linhas para obtermos a somatória. Como a linha l do produto só terá l elementos não-nulos, podemos variar a somatória até l.

$$
\begin{aligned}
D_nB_nD_nB_n &= \sum_{i=1}^{l}(-1)^{l+1}\binom{l-1}{i-1}(-1)^{i+1}\binom{i-1}{c-1} \\
&= (-1)^{l+1}\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}(-1)^{i+2}\binom{i}{c-1} \\
&= (-1)^{l+1}(-1)^{l-1+2}\binom{0}{c-l} \qquad \text{(lema4.1)} \\
&= (-1)^{2l+2}\binom{0}{c-l}
\end{aligned}
$$

O que será igual a 1 positivo se $l = c$ e nulo se $l \neq c$, ou seja, a matriz identidade.

Portanto

$$
\begin{aligned}
I_d &= D_nB_nD_nB_n \\
I_dB_n^{-1} &= D_nB_nD_nB_nB_n^{-1} \\
B_n^{-1} &= D_nB_nD_n
\end{aligned}
$$
■

Numa demonstração análoga temos que $C_n^{-1} = D_nC_nD_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, para $n = 4$, temos C_4^{-1} igual a

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Quando o gerador for igual a g, temos que $(gB_n)^{-1} = g^{-1}B_n^{-1}$ e $(gC_n)^{-1} = g^{-1}C_n^{-1}$.

4.5 PRODUTOS B_nC_n E C_nB_n

Nesta seção vamos estudar algumas relações interessantes entre as matrizes de Pascal B_n, C_n e P_n.

Proposição 4. $B_n \cdot C_n = P_n$ [4].

Exemplo:
$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}
$$

Ao fazermos a multiplicação $B_n \cdot C_n$ como elas são matrizes transpostas temos que cada elemento será igual a $\sum_{i=0}^{\min(l,c)-1} \binom{l-1}{i}\binom{c-1}{i}$. Supondo que $l \leqslant c$ e alterando a segunda combinação, chegamos em $\sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i}\binom{c-1}{c-1-i}$.

Pelo teorema de partição de combinações 14, temos que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{b-i} = \binom{m+n}{b}$. Seja $n = l-1$ e $m = b = c-1$, temos $\sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i}\binom{c-1}{c-1-i} = \binom{l+c-2}{c-1}$, o que é igual ao termo de P_n.

Proposição 5. $C_n \cdot B_n$ é igual à P_n^{-1} com seus valores absolutos. [3]

$$\text{Exemplo: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Demonstração. O produto $C_n \cdot B_n$ será igual a $r_{l,c} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{l-1}\binom{i}{c-1}$, o que é igual à inversa de P_n sem a potência de (-1). ■

Quando o gerador for igual a g, temos que

$$\begin{aligned}
(gB_n)C_n &= g(B_nC_n) = gP_n \\
B_n(gC_n) &= g(B_nC_n) = gP_n \\
(gB_n)(gC_n) &= g^2(B_nC_n) = g^2P_n \\
(gC_n)B_n &= g(C_nB_n) = gP_n^{-1} \text{ com seus valores absolutos} \\
C_n(gB_n) &= g(C_nB_n) = gP_n^{-1} \text{ com seus valores absolutos} \\
(gC_n)(gB_n) &= g^2(C_nB_n) = g^2P_n^{-1} \text{ com seus valores absolutos}
\end{aligned}$$

4.6 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Vamos calcular autovalores e autovetores de P_n [3]. Para uma matriz de ordem n, um autovalor λ e um autovetor não-nulo $v = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ devem satisfazer a propriedade: $P_n \cdot v = \lambda \cdot v$ e consequentemente $|P_n - \lambda \cdot Id| = 0$.

Esta igualdade define o polinômio característico cujas raízes serão os autovalores da matriz. Vamos calcular alguns valores.

- Para ordem 2 temos: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

que é igual a $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ cujas raízes são $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Já os autovetores devem satisfazer a igualdade com estes autovalores.

Se $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ cuja solução é $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x_1$,

logo $(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x_1 \right) = x_1 \cdot \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$.

Se $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ cuja solução é $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x_1$,

logo $(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x_1 \right) = x_1 \cdot \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Portanto os resultados são

Autovalor:	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
Autovetor:	$\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Reparamos que os autovalores são inversos entre si e que os valores dos autovetores são conjugados entre si.

- Para ordem 3: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

que é igual a $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 1 = 0$.

Os resultados são

Autovalor:	1	$4+\sqrt{15}$	$4-\sqrt{15}$
Autovetor:	$(2, 1, -1)$	$\left(\frac{5-\sqrt{15}}{5}, \frac{-5+2\sqrt{15}}{5}, 1\right)$	$\left(\frac{5+\sqrt{15}}{5}, \frac{-5-2\sqrt{15}}{5}, 1\right)$

- Para ordem 4 temos $\lambda^4 - 29\lambda^3 + 72\lambda^2 - 29\lambda + 1 = 0$ com autovalores

$$\frac{29}{4} - \frac{\sqrt{561}}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{693 - 29\sqrt{561}}{2}} \quad \text{e} \quad \frac{29}{4} + \frac{\sqrt{561}}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{693 + 29\sqrt{561}}{2}}.$$

- Para ordem 5 temos $-\lambda^5 + 99\lambda^4 - 626\lambda^3 + 626\lambda^2 - 99\lambda + 1 = 0$ com autovalores

$$1 \ , \quad \frac{49 - 25\sqrt{3} \pm \sqrt{4272 - 2450\sqrt{3}}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{49 + 25\sqrt{3} \pm \sqrt{4272 + 2450\sqrt{3}}}{2}.$$

- Para ordem 6 temos $\lambda^6 - 351\lambda^5 + 6084\lambda^4 - 13869\lambda^3 + 6084\lambda^2 - 351\lambda + 1 = 0$ com autovalores reais próximos de 0,003004389574741 ; 332,8463154070 ; 0,06429432078606 ; 15,55347327375 ; 0,4893388287436 e 2,043573780089.

Pelos cálculos vemos que, até $n = 6$, os autovalores são inversos entre si e que os polinômios característicos são o que se chamam, polinômios palíndromos, ou seja, seus coeficientes em valores absolutos são os mesmos se vistos de trás para frente. Na próxima seção, vamos verificar se isso vale para qualquer n.

4.7 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Nesta seção verificaremos que o polinômio característico de P_n é palíndromo e que, consequentemente, um número é sua raiz, se e somente se, seu inverso também é sua raiz. Para isso precisamos de vários fatos. Vamos considerar todos os polinômios com coeficientes e raízes reais [3].

Teorema 18. $n+1$ pontos determinam um único polinômio de grau n.

Definição 4.2. Seja $p(x)$ um polinômio,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

O polinômio recíproco de $p(x)$ é $p^*(x) = x^n p(x^{-1})$, ou seja,

$$p^*(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}.$$

Isso é verdade pois $p^*(x) = x^n p(x^{-1}) = x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$.

Teorema 19. Seja $p(x)$ um polinômio e $p^*(x)$ seu recíproco. Para $r \neq 0$, então r é raiz de $p(x)$, se e somente se, r^{-1} é raiz de $p^*(x)$.

Demonstração. Para $r \neq 0$, se r é raiz de $p(x)$ então $p(r) = 0$ e

$$p^*(r^{-1}) = (r^{-1})^n p((r^{-1})^{-1}) = r^{-n} p(r) = r^{-n} 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Observe que esse teorema não vale para $r = 0$, pois 0 não possui inverso. No contra-exemplo $p(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, suas raízes são 0, 2 e 4. Seu polinômio recíproco é $p^*(x) = 0x^3 + 8x^2 - 6x + 1$, cujas raízes são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, que são os inversos das raízes não nulas de $p(x)$.

Teorema 20. Sejam $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ o polinômio característico de M e $q(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ o polinômio característico de M^{-1}. Seja também $\det M = 1$. Então $p^*(x) = q(x)$.

Demonstração. Sejam λ_i e η_i os autovalores de M e M^{-1}.

No polinômio característico de M, o coeficiente independente será igual ao determinante de M, neste caso $\alpha_0 = 1$. Junto com os autovalores temos $n + 1$ pontos determinando unicamente o polinômio $p(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ p(\lambda_1) &= 0 \\ p(\lambda_2) &= 0 \\ &\vdots \\ p(\lambda_n) &= 0. \end{aligned}$$

As raízes de $p^*(x)$ são os inversos dos autovalores de $p(x)$ que são λ_i^{-1}.

Se λ é autovalor e M, então λ^{-1} é autovalor de M^{-1}, então $\eta_i = \lambda_i^{-1}$. Logo $p^*(x)$ e $q(x)$ têm as mesmas raízes.

Temos que $\det M \cdot \det M^{-1} = 1$, então $\det M^{-1} = 1$. Logo $\beta_0 = 1$ no polinômio característico de M^{-1}. Junto com os autovalores temos $n + 1$ pontos determinando unicamente o polinômio $q(x)$.

$$\beta_0 = 1$$
$$q(\eta_1) = 0$$
$$q(\eta_2) = 0$$
$$\vdots$$
$$q(\eta_n) = 0.$$

Como possuem as mesmas raízes e um coeficiente em comum, $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, concluímos que $p^*(x) = q(x)$. ■

Queremos provar que o polinômio característico da matriz de Pascal é palíndromo.

Há uma fórmula para o polinômio característico de qualquer matriz A de ordem n.

$|A - \lambda I| = (-1)^n \left(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda^1 + c_n\right)$, sendo que

$c_0 = 1,$

$c_1 = -\operatorname{tr} A,$

$c_2 = -2^{-1}\left(c_1 \operatorname{tr} A + c_0 \operatorname{tr} A^2\right),$

$c_3 = -3^{-1}\left(c_2 \operatorname{tr} A + c_1 \operatorname{tr} A^2 + c_0 \operatorname{tr} A^3\right),$

$\vdots$

$c_n = -n^{-1}\left(c_{n-1} \operatorname{tr} A + c_{n-2} \operatorname{tr} A^2 + \cdots + c_1 \operatorname{tr} A^{n-1} + c_0 \operatorname{tr} A^n\right).$

Teorema 21. Para toda matriz quadrada A de ordem n, temos que $\sum\limits_{i=0}^{n} c_i . \operatorname{tr} A^{n-i} = 0.$

Demonstração. Primeiramente, o valor de $\operatorname{tr} A^0$ é o traço da matriz identidade cuja diagonal é composta de números iguais a 1, logo para $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{tr} A^0 = n$.

Calculando c_n.

$c_n = -n^{-1}\left(c_{n-1} \operatorname{tr} A + c_{n-2} \operatorname{tr} A^2 + \cdots + c_1 \operatorname{tr} A^{n-1} + c_0 \operatorname{tr} A^n\right)$

$c_n = -n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i \operatorname{tr} A^{n-i}$

$c_n . n = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i \operatorname{tr} A^{n-i}$

$c_n . \operatorname{tr} A^0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i \operatorname{tr} A^{n-i} = 0$

$\sum_{i=0}^{n} c_i \operatorname{tr} A^{n-i} = 0.$ ∎

Teorema 22. Seja a matriz de Pascal P_n, temos que $\operatorname{tr} P_n = \operatorname{tr} P_n^{-1}$.

Demonstração. O traço de P_n é igual a $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2i}{i}$ e para o traço de P_n^{-1} temos que cada elemento seu é igual a $(-1)^{l+c} \cdot \sum_{i=\max(l,c)-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}\binom{i}{c-1}$.

Como queremos os elementos de sua diagonal, então $l = c$ e seu elemento é igual a $(-1)^{2l} \cdot \sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}\binom{i}{l-1} = \sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}^2$. Portanto $\operatorname{tr} P_n^{-1} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}^2$.

Vamos mostrar por indução que $\operatorname{tr} P_n = \operatorname{tr} P_n^{-1}$, ou seja, $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}^2$.

Para $n = 2$:

$\sum_{i=0}^{1} \binom{2i}{i} = \binom{0}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$, e

$\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=l-1}^{1} \binom{i}{l-1}^2 = \binom{0}{0}^2 + \binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2 = 1 + 1 + 1 = 3.$

Pelo teorema 14 de partição de combinações, temos

$\binom{n+n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \Longrightarrow \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i}$,

para $i = l - 1$, temos que $\binom{2n}{n} = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1}^2$.

Agora, supondo que para n, $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}^2$ seja verdadeiro, vamos verificar para $n+1$.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n+1}\sum_{i=l-1}^{n} \binom{i}{l-1}^2 \qquad \text{separe } l = n+1$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n} \binom{i}{l-1}^2 + \sum_{i=n+1-1}^{n} \binom{i}{n+1-1}^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n} \binom{i}{l-1}^2 + \binom{n}{n}^2 \qquad \text{separe } i = n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}^2 + \binom{n}{l-1}^2\right] + \binom{n}{n}^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n-1} \binom{i}{l-1}^2 + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1}^2 + \binom{n}{n}^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2i}{i}+\binom{2n}{n}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n-1}\binom{i}{l-1}^2+\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}^2$$

pela igualdade anterior, fazemos o cancelamento e temos a hipótese de indução

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2i}{i}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=l-1}^{n-1}\binom{i}{l-1}^2.$$

Logo $\operatorname{tr} P_n = \operatorname{tr} P_n^{-1}$. ■

Teorema 23. Seja $p(x)$ o polinômio característico de P_n, temos que $p(x) = p^*(x)$.

Demonstração. Pelo teorema 22, o polinômio característico de P_n é igual ao o polinômio característico de P_n^{-1}, mas pelo teorema 20 o polinômio característico de P_n^{-1} é igual ao recíproco do polinômio característico de P_n. Portanto o polinômio característico de P_n é igual ao seu recíproco, logo é auto-recíproco ou palíndromo. ■

E temos como consequência do teorema 19 o seguinte

Teorema 24. Para $r \neq 0$ e $p(x)$ o polinômio característico de P_n, temos que r é raiz de $p(x)$, se e somente se, r^{-1} é raiz de $p(x)$.

4.8 FORMA QUADRÁTICA

Uma vez que podemos definir matriz de Pascal, não há porque não relacioná-la a uma forma quadrática. Até onde sabemos não houve tentativa anterior de fazê-lo.

Definição 4.3. Forma quadrática é uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = xMx^t$, para uma matriz quadrada M de ordem n e um vetor $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

Olharemos agora a matriz de Pascal P_n como uma forma quadrática. Vamos usar a matriz de Pascal P_4 por exemplo.

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\binom{0}{0}x_0^2+\left[\binom{1}{0}+\binom{1}{1}\right]x_0x_1+\left[\binom{2}{0}+\binom{2}{2}\right]x_0x_2+\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{3}\right]x_0x_3+\binom{2}{1}x_1^2+$$
$$\left[\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\right]x_1x_2+\left[\binom{4}{1}+\binom{4}{3}\right]x_1x_3+\binom{4}{2}x_2^2+\left[\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\right]x_2x_3+\binom{6}{3}x_3^2$$

O que sugere uma expressão para o polinômio da forma quadrática.

Teorema 25. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = xP_nx^t$, para uma matriz de Pascal P_n e um vetor $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, temos que $xP_nx^t = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{i+j}{i}x_ix_j$.

Demonstração. Usando o princípio de indução, vamos começar com $n = 2$.

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \binom{0}{0}x_0^2 + \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1}\right] x_0x_1 + \binom{2}{1}x_1^2 = x_0^2 + 2x_0x_1 + 2x_1^2.$$

Agora vamos mostrar que, se vale para n, também valerá para $n+1$.

Ao se acrescentar uma variável x_n à função quadrática, estamos acrescentando uma $(n+1)$-ésima coluna e uma $(n+1)$-ésima linha às matriz de Pascal e um $(n+1)$-ésimo termo ao vetor x, logo

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & & & \binom{n}{n} \\ \vdots & & & & \binom{n+1}{n} \\ & & & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} & \binom{2n}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{i+j}{i}x_ix_j + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i}{i}x_ix_n + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{n}x_nx_j \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{i+j}{i}x_ix_j + \binom{n+i}{i}x_ix_n\right] + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{n}x_nx_j \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{i}x_ix_j + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{n}x_nx_j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{i}x_ix_j.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

4.8.1 *Aplicação em vetores de potências*

Vejamos o que acontece quando a matriz P_n de Pascal é aplicada como uma forma quadrática ao vetor de potências $x = (1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1})$. Por exemplo para $n = 4$.

$$\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+x+x^2+x^3\\ 1+2x+3x^2+4x^3\\ 1+3x+6x^2+10x^3\\ 1+4x+10x^2+20x^3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llllllll}
= 1 & +x & +x^2 & +x^3 & & & \\
 & +x & +2x^2 & +3x^3 & +4x^4 & & \\
 & & +x^2 & +3x^3 & +6x^4 & +10x^5 & \\
 & & & +x^3 & +4x^4 & +10x^5 & +20x^6\\
= 1 & +2x & +4x^2 & +8x^3 & +14x^4 & +20x^5 & +20x^6
\end{array}$$

Reparamos que até o expoente da variável igual à metade do grau do polinômio, os coeficientes estão na forma 2^n. Intuitivamente vemos que, se n tender a infinito, a forma quadrática tende a $\sum_{i=0}^{\infty}(2x)^i$.

Vamos aqui definir função geradora.

Definição 4.4. Uma série de potências $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ é uma função geradora de uma sequência de números, quando esta sequência aparece nos coeficientes da série de potências. Em combinatória usamos muitas funções geradoras, que acabam tendo um papel importante.

Portanto a matriz de Pascal quando aplicada a um vetor infinito de potências $x = (1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...)$ é a função geradora de 2^n.

Quando n é finito, os coeficientes da função geradora são as soluções do seguinte problema de combinatória.

Problema: *Será feito um sorteio de p prêmios iguais para um grupo de $2p$ pessoas, sendo que nenhuma pessoa poderá ganhar mais de um prêmio. Se escolhermos ao acaso um número m de pessoas deste grupo, de quantas maneiras os prêmios podem estar distribuídos neste grupo?*

Vamos resolver este problema para 3 prêmios, logo terão 6 pessoas para serem sorteadas. Como podemos escolher de 0 a 6 pessoas, vamos separar este problema em vários casos:

• Ninguém é escolhido, portanto a solução vazia é o único caso a ser considerado.
0 prêmio para ninguém, logo $\binom{0}{0}$.
Solução: $\binom{0}{0} = 1$.

• Se escolhermos 1 pessoa, podemos ter até 1 pessoa sorteada.

0 prêmio para 1 pessoa, logo $\binom{1}{0}$.

1 prêmio para 1 pessoa, logo $\binom{1}{1}$.

Solução: $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$.

• Se escolhermos 2 pessoas, podemos ter até 2 pessoas sorteadas.

0 prêmio para 2 pessoas, logo $\binom{2}{0}$.

1 prêmio para 2 pessoas, logo $\binom{2}{1}$.

2 prêmios para 2 pessoas, logo $\binom{2}{2}$.

Solução: $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4$.

• Se escolhermos 3 pessoas, podemos ter até 3 pessoas sorteadas.

0 prêmio para 3 pessoas, logo $\binom{3}{0}$.

1 prêmio para 3 pessoas, logo $\binom{3}{1}$.

2 prêmios para 3 pessoas, logo $\binom{3}{2}$.

3 prêmios para 3 pessoas, logo $\binom{3}{2}$.

Solução: $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$.

• Se escolhermos 4 pessoas, pelo menos 1 pessoa foi sorteada.

1 prêmio para 4 pessoas, logo $\binom{4}{1}$.

2 prêmios para 4 pessoas, logo $\binom{4}{2}$.

3 prêmios para 4 pessoas, logo $\binom{4}{3}$.

Solução: $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 4 + 6 + 4 = 14$.

• Se escolhermos 5 pessoas, pelo menos 2 pessoas foram sorteadas.

2 prêmios para 5 pessoas, logo $\binom{5}{2}$.

3 prêmios para 5 pessoas, logo $\binom{5}{3}$.

Solução: $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$.

• Se escolhermos 6 pessoas, pelo menos 3 pessoas foram sorteadas, logo todas as pessoas foram sorteadas .

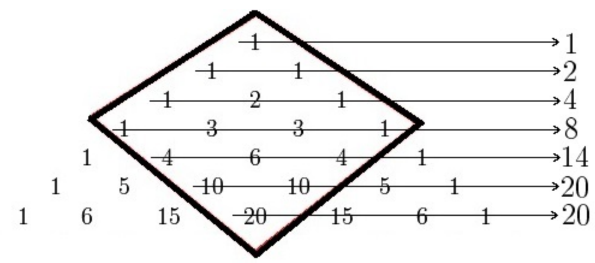
3 prêmios para 6 pessoas, logo $\binom{6}{3}$.

Solução: $\binom{6}{3} = 20$.

Logo temos todas as soluções.

Agora veremos como encontramos estes coeficientes no triângulo aritmético para qualquer p. Devemos tomar um triângulo até a base $2p$.

Faça um losango a partir do primeiro elemento que tome todos os elementos até a base p, onde estarão dois de seus vértices e depois complete-o até a base $2p$, como na figura a seguir:



A soma dos elementos de cada linha do losango será o coeficiente de cada termo da função geradora do problema anterior sendo que $n = p + 1$ e o grau da função será sempre $2(n-1)$.

Teorema 26. A expressão que define o problema anterior é $\sum_{i=0}^{n-1}(2x)^i + \sum_{i=n}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i$. A primeira parte representa as somas de cima até a metade do losango e a segunda representa as somas abaixo da metade do losango.

Demonstração. Vamos novamente usar a indução para esta demonstração.

Para $n = 2$:

$$\begin{pmatrix}1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+x\\ 1+2x\end{pmatrix} = 1 + 2x + 2x^2.$$

e temos também que

$$\sum_{i=0}^{1}(2x)^i + \sum_{i=2}^{2}\sum_{j=i-1}^{1}\binom{i}{j}x^i = (2x)^0 + (2x)^1 + \sum_{j=1}^{1}\binom{2}{j}x^2 = 1 + 2x + 2x^2.$$

Agora vamos mostrar que se vale para n também valerá para $n+1$.

Ao se acrescentar uma variável x^n à função quadrática estamos acrescentando uma $(n+1)$-ésima coluna e uma $(n+1)$-ésima linha às matriz de Pascal e um $(n+1)$-ésimo termo ao vetor x

$$\begin{pmatrix}1 & x & \cdots & x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\binom{0}{0} & \cdots & & \binom{n}{n}\\ \vdots & & & \binom{n+1}{n}\\ & & & \vdots\\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots \binom{2n-1}{n-1} & \binom{2n}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

o que implicará no acréscimo dos termos

$$\sum_{i=n}^{2n}\binom{i}{i-n}x^i+\sum_{i=n}^{2n-1}\binom{i}{n}x^i=\binom{n}{0}x^n+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\binom{i}{i-n}x^i$$
$$+\binom{2n-1}{n-1}x^{2n-1}+\binom{2n}{n}x^{2n}+\binom{n}{n}x^n+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\binom{i}{n}x^i+\binom{2n-1}{n}x^{2n-1}$$

Dos sete termos acima vamos somá-los aos poucos na hipótese de indução, primeiramente $\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{n}x^n$.

$$\sum_{i=0}^{n-1}(2x)^i+\sum_{i=n}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i+\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{n}x^n \qquad \text{separe } i=n$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(2x)^i+\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{n}x^n+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}x^n+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(2x)^i+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^n+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(2x)^i+2^nx^n+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i$$

Agora some $\sum_{i=n+1}^{2n-2}\binom{i}{i-n}x^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\binom{i}{n}x^i$

$$\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}x^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\binom{i}{i-n}x^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\binom{i}{n}x^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\left[\sum_{j=i-n+1}^{n-1}\binom{i}{j}+\binom{i}{i-n}+\binom{i}{n}\right]x^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n}^{n}\binom{i}{j}x^i$$

Agora some o restante $\binom{2n-1}{n-1}x^{2n-1}+\binom{2n-1}{n}x^{2n-1}+\binom{2n}{n}x^{2n}$

$$=\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n}^{n}\binom{i}{j}x^i+\binom{2n-1}{n-1}x^{2n-1}+\binom{2n-1}{n}x^{2n-1}+\binom{2n}{n}x^{2n}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n}^{n}\binom{i}{j}x^i+\sum_{j=n-1}^{n}\binom{2n-1}{j}x^{2n-1}+\sum_{j=n}^{n}\binom{2n}{j}x^{2n}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(2x)^i+\sum_{i=n+1}^{2n-2}\sum_{j=i-n}^{n}\binom{i}{j}x^i+\sum_{j=(2n-1)-n}^{n}\binom{2n-1}{j}x^{2n-1}+\sum_{j=2n-n}^{n}\binom{2n}{j}x^{2n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(2x)^i + \sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=i-n}^{n}\binom{i}{j}x^i$$

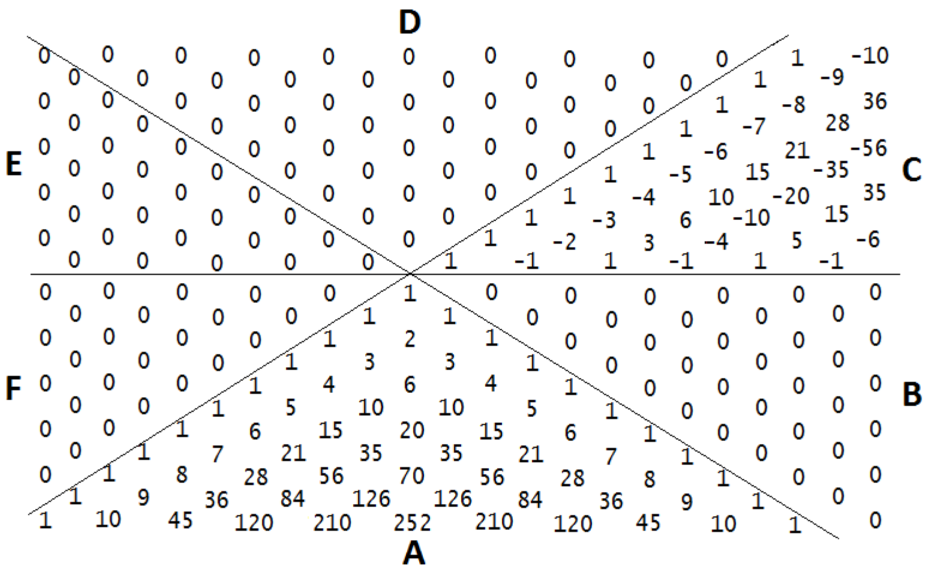
O que conclui a demonstração. ■

5

O PLANO ARITMÉTICO.

Neste capítulo, veremos que o triângulo aritmético, pode ser visto como parte de uma estrutura maior. Nossa intenção aqui é manter a propriedade ($p_{l-1,c} + p_{l,c-1} = p_{l,c}$) em todo o plano. Até onde sabemos não houve tentativa anterior de fazê-lo.

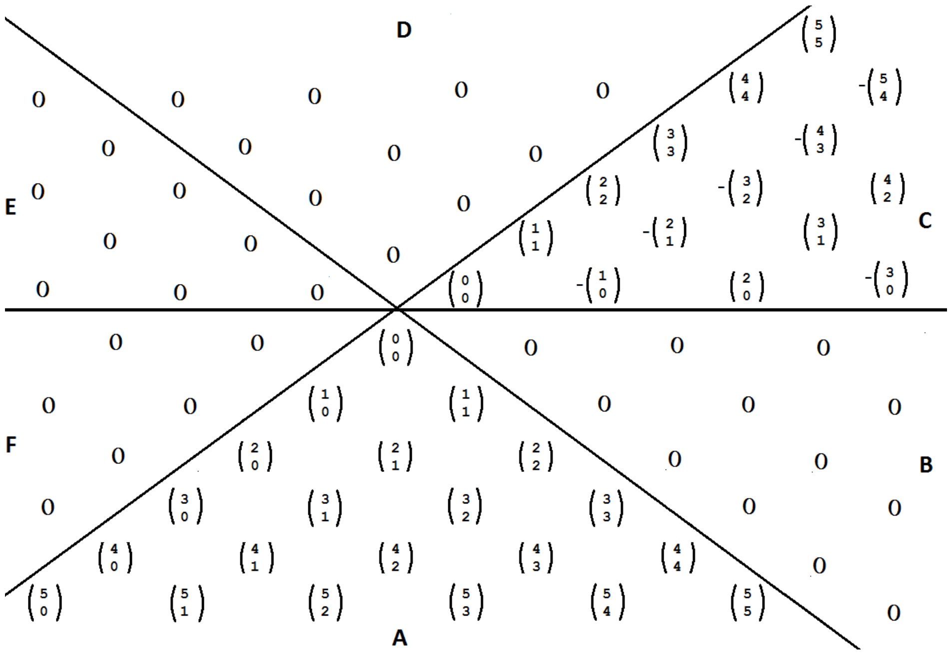
A ideia principal é expandirmos os valores do triângulo aritmético dos limites formados pelos elementos iguais a 1. Num primeiro momento pensamos que eles devem ser todos nulos, porém como o primeiro elemento, que chamamos de gerador, é formado? Mantendo a regra de formação do triângulo aritmético, que cada elemento é a soma dos dois elementos logo acima dele, sem perda de generalidade, podemos colocar os números 0 e 1 acima do gerador unidade, mantendo a regra de formação já que $0+1=1$, e com isso calculamos um novo conjunto de valores. Essa nova estrutura vamos chamar de *plano aritmético*.



O plano aritmético pode ser dividido em sextantes para uma melhor visualização dos seus valores. Os sextantes B, D, E e F serão todos nulos. Colocando o número 1 no vértice do sextante C, podemos calcular um novo conjunto de valores que ainda obedecerão à regra de formação. Qualquer elemento ainda é a soma dos dois elementos acima dele.

Por exemplo: $(-4) + 10 = 6$, $\quad 15 + (-35) = -20$, $\quad 21 + (-56) = -35$.

O sextante C será semelhante ao triângulo aritmético convencional porém com seus sinais alternados, como na figura seguinte



Os exemplos acima serão semelhantes a

$$-\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = \binom{4}{2}, \quad \binom{6}{4} - \binom{7}{4} = -\binom{6}{3} \quad \text{e} \quad \binom{7}{5} - \binom{8}{5} = -\binom{7}{4}$$

A regra de formação ainda valerá pois no sextante C

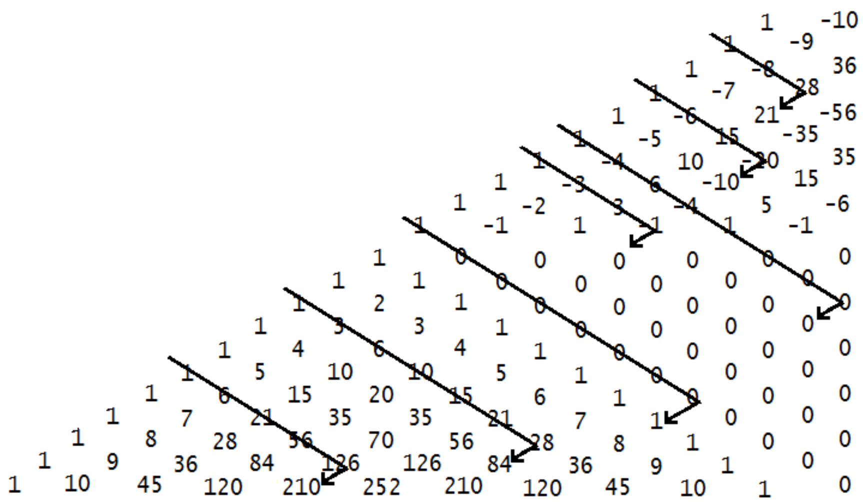
$$(-1)^k \binom{n}{p+1} + (-1)^{k+1} \binom{n+1}{p+1} = (-1)^{k+1} \binom{n}{p}$$

5.1 PROPRIEDADES.

O plano aritmético continuará com as propriedades que o triângulo aritmético já possuía. Podemos tomar somente os sextantes A, B e C, pois como os outros sextantes são todos nulos, eles não farão diferença nos cálculos dessas propriedades.

5.1.1 *Relação das diagonais e sinais alternados.*

A propriedade se mantém mesmo com os elementos com sinais alternados.



Se quisermos somar $(n+1)$ elementos na linha n do sextante C, a propriedade de sinais alternados da seção 3.4 nos mostra que esta soma será sempre nula, o que será igual a algum zero na primeira linha do sextante B. Com exceção da primeira linha de C que será igual a 1.

Precisamos provar para $k \leqslant n$, logo

Teorema 27. Na linha n do sextante C, sendo $k \leqslant n$, é válido que, para a soma de k elementos, $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{n}{n-i} = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{n-k}$.

Demonstração. As linhas do sextante C também se contam a partir do zero, portanto vamos usar o princípio de indução para $n = 1$.

Se $n = 1$, temos que $k = 1$, e é verdadeiro pois

$$\sum_{i=0}^{1-1}(-1)^i\binom{1}{1-i} = (-1)^0\binom{1}{1} = 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{1-1}\binom{1-1}{1-1} = (-1)^0\binom{0}{0} = 1.$$

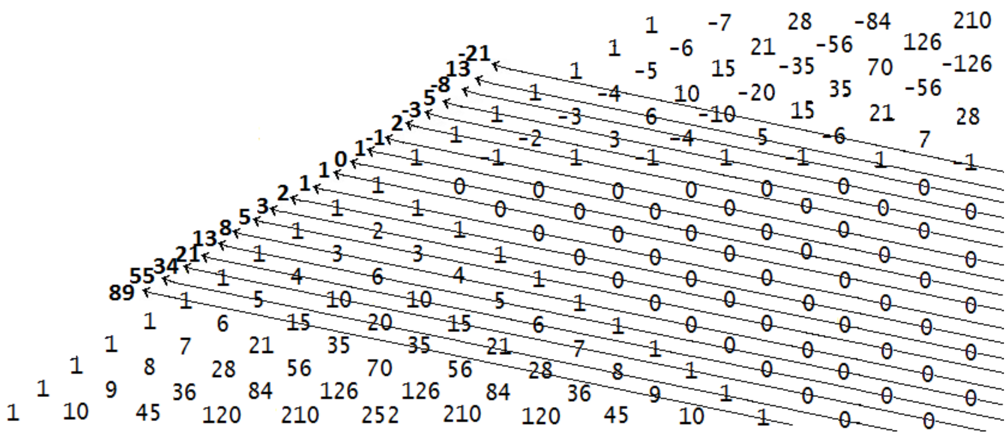
Pela hipótese de indução, é válido para n que $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n}{n-i} = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{n-k}$, então devemos provar para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n+1}{n+1-i} &= (-1)^0\binom{n+1}{n+1} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\binom{n+1}{n+1-i} \\
&= \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\binom{n}{n-i} + \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{i+1}\binom{n}{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n}{n-i} - \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\binom{n}{n-i} \\
&= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{n-k} + (-1)^{k-1}\binom{n-1}{n+1-k} \\
&= (-1)^{k-1}\binom{n}{n+1-k} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.1.2 *Sequência de Fibonacci.*

Podemos retroceder a sequência de Fibonacci usando números negativos:
$\cdots -144, 89, -55, 34, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \cdots$

Como na seção 3.3, toma-se retas menos inclinadas que as diagonais do triângulo, em que a cada linha abaixo, toma-se o elemento adjacente ao que estaria em sua diagonal. A soma dos elementos nos quais esta reta passa, corresponde à sequência de Fibonacci. Porém estas retas se estendem aos outros sextantes.



Retrocedendo a sequência temos

$F_{-6} = -\binom{3}{2} - \binom{4}{1} - \binom{5}{0} \quad = -3 - 4 - 1 = -8$

$F_{-5} = \binom{2}{2} + \binom{3}{1} + \binom{4}{0} \quad = 1+3+1=5$

$F_{-4} = -\binom{2}{1} - \binom{3}{0} \quad = -2 - 1 = -3$

$F_{-3} = \binom{1}{1} + \binom{2}{0} \quad = 1+1=2$

$F_{-2} = -\binom{1}{0} \quad = -1$

$F_{-1} = \binom{0}{0} \quad = 1$

$F_0 = \binom{0}{1} \quad = 0$

$F_1 = \binom{0}{0} \quad = 1$

$F_2 = \binom{1}{1} \quad = 1$

$F_3 = \binom{1}{0} + \binom{2}{2} \quad = 1+1=2$

$F_4 = \binom{2}{1} + \binom{3}{3} \quad = 2+1=3$

$F_5 = \binom{2}{0} + \binom{3}{2} + \binom{4}{4} \quad = 1+3+1=5$

$F_6 = \binom{3}{1} + \binom{4}{3} + \binom{5}{5} \quad = 3+4+1=8$

Para se calcular F_{-n}, olhando a soma de trás para frente, toma-se $\binom{n-1}{0}$ e vai-se diminuindo uma unidade do número acima e aumentando uma unidade do número abaixo da combinação.

Teorema 28. Para retroceder a sequência de Fibonacci, ou seja, calcular os elementos da sequência com índices não-positivos, temos que $F_0 = 0$ e para $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{-n} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \binom{n-1-i}{i}$ se n é par e $F_{-n} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n-1-i}{i}$ se n é ímpar.

Demonstração. Para se verificar se esta é a sequência de Fibonacci, deve-se verificar que $F_{-n} = F_{-n-1} + F_{-n-2}$. Vamos separar em dois casos, quando n é par ou ímpar.

- Se n é par:

Na equação abaixo, separe o primeiro elemento das duas somatórias.

$$\begin{aligned}
F_{-n-1} + F_{-n-2} &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n-i}{i} + (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n+1-i}{i} \\
&= \binom{n}{0} - \binom{n+1}{0} + (-1)^n \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n-i}{i} - (-1)^n \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n+1-i}{i} \\
&= 0 - (-1)^n \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n-i}{i-1} \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \binom{n-1-i}{i} \quad = \quad F_{-n}
\end{aligned}$$

• Se n é ímpar:

Na equação abaixo, separe o primeiro elemento das duas somatórias e o último da segunda.

$$F_{-n-1} + F_{-n-2} = (-1)^n \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{i} + (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{(n+1)/2} \binom{n+1-i}{i}$$

$$= -\binom{n}{0} + \binom{n+1}{0} + (-1)^n \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{i} - (-1)^n \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n+1-i}{i} + \binom{(n+1)/2}{(n+1)/2}$$

$$= 0 - (-1)^n \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \binom{n-i}{i-1} + \binom{(n+1)/2}{(n+1)/2}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \binom{n-1-i}{i} + \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n-1-i}{i} \quad = \quad F_{-n}$$

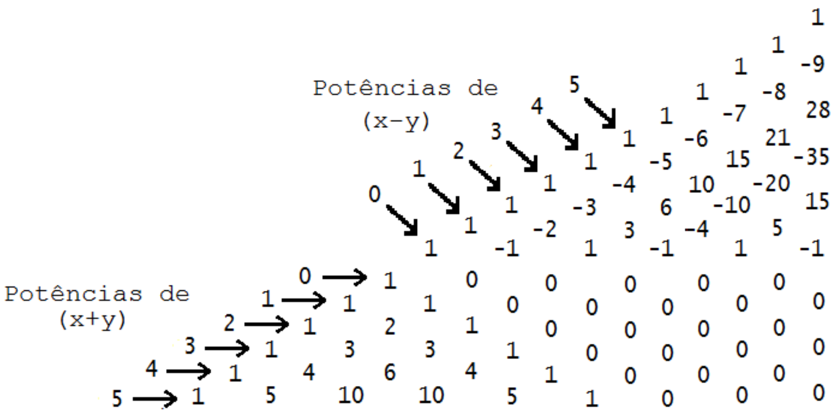
Como é válido para n par e ímpar, a propriedade é verdadeira. ■

5.1.3 *Potência de binômios.*

Teorema 29. A linha n do triângulo aritmético gera os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$. A linha n do triângulo do sextante C nos dará os coeficientes do desenvolvimento de $(x-y)^n$.

Fazendo alguns cálculos notamos os sinais alternados dos coeficientes.

$$(x-y)^5 = 1x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - 1y^5$$
$$(x-y)^4 = 1x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 1y^4$$
$$(x-y)^3 = 1x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 1y^3$$
$$(x-y)^2 = 1x^2 - 2xy + 1y^2$$
$$(x-y)^1 = 1x - 1y$$
$$(x-y)^0 = 1$$
$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$



O binômio $(x-y)^n$ será igual a $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i(-1)^i$.

5.1.4 *Potência de trinômios.*

Pelo teorema da seção 3.8 sobre trinômios, sabemos que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$(x+y+z)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}x^{n-j}y^{j-i}z^i.$$

O trinômio $(x+y+z)^n$ já tratamos anteriormente. Agora podemos tomar mais 3 tipos de trinômios, em relação aos sinais negativos de suas variáveis.

- Caso 1: $(x+y-z)^n$

$(x+y-z)^4 = 1x^4 + 4x^3y - 4x^3z + 6x^2y^2 - 12x^2yz + 6x^2y^2 + 4xy^3 - 12xy^2z + 12xyz^2 - 4xz^3 + 1y^4 - 4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 + z^4$.

Seus coeficientes são obtidos multiplicando a linha n do triângulo aritmético pelos elementos do sextante C do plano aritmético.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & -1 & & & \\
 & & 1 & & -2 & & 1 & & \\
 & 1 & & -3 & & 3 & & -1 & \\
1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \cdot\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ \\ \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 4 & & -4 & & & \\
 & & 6 & & -12 & & 6 & & \\
 & 4 & & -12 & & 12 & & -4 & \\
1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1
\end{array}$$

O trinômio $(x+y-z)^n$ será igual a

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}x^{n-j}y^{j-i}z^{i}(-1)^{i}.$$

- Caso 2: $(x-y+z)^n$

$(x-y+z)^4 = 1x^4 - 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 - 12x^2yz + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 12xy^2z - 12xyz^2 + 4xz^3 + 1y^4 - 4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 + z^4$.

Seus coeficientes são obtidos multiplicando a linha n do triângulo aritmético pelos elementos do sextante C do plano aritmético, porém suas diagonais com sinais negativos estão invertidas.

$$\begin{array}{l} 1 \\ -1 \quad 1 \\ 1 \quad -2 \quad 1 \\ -1 \quad 3 \quad -3 \quad 1 \\ 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \end{array} \quad \cdot \quad \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 1 \\ -4 \quad 4 \\ 6 \quad -12 \quad 6 \\ -4 \quad 12 \quad -12 \quad 4 \\ 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \end{array}$$

O trinômio $(x-y+z)^n$ será igual a

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}x^{n-j}y^{j-i}z^{i}(-1)^{j-i}.$$

- Caso 3: $(x-y-z)^n$

$(x-y-z)^4 = 1x^4 - 4x^3y - 4x^3z + 6x^2y^2 + 12x^2yz + 6x^2y^2 - 4xy^3 - 12xy^2z - 12xyz^2 - 4xz^3 + 1y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$.

Seus coeficientes são obtidos multiplicando a linha n sextante C do plano aritmético pelos elementos do triângulo aritmético.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array} \quad \cdot \quad \begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 1 \\ -4 \quad -4 \\ 6 \quad 12 \quad 6 \\ -4 \quad -12 \quad -12 \quad -4 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

O trinômio $(x-y-z)^n$ será igual a

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}x^{n-j}y^{j-i}z^{i}(-1)^{j}-i(-1)^{i}.$$

5.1.5 *Matrizes.*

Podemos também obter do plano aritmético, as matrizes P_n, B_n e C_n. Os sextantes do plano aritmético continuarão aparecendo na mesma ordem se vistos no sentido anti-horário, porém não com mesmo formato. Os sextantes B, D, E e F continuarão sendo nulos, o sextante A conterá os elementos do triângulo aritmético e o sextante C conterá os elementos do triângulo aritmético com sinais alternados.

Plano P_n

C

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	45	-120	210	-252	210	-120	45	-10	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-9	36	-84	126	-126	84	-36	9	-1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-6	15	-20	15	-6	1	0	0	0	
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-5	10	-10	5	-1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0	B
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	3	-1	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	A
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	

F

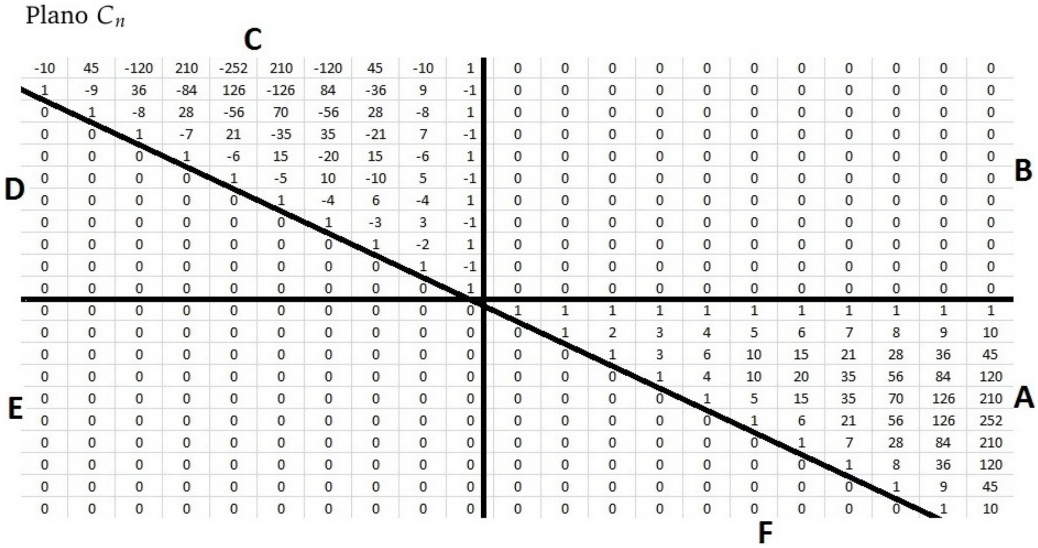
Plano B_n

D

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	C
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	B
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	

A

Plano C_n



-10	45	-120	210	-252	210	-120	45	-10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-9	36	-84	126	-126	84	-36	9	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	-6	15	-20	15	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	-5	10	-10	5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	-3	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10

Os determinantes das submatrizes quadradas de Pascal, que contenham a primeira linha ou coluna constante igual a 1, também serão iguais a 1 por preservarem a propriedade do triângulo aritmético.

Exemplo 5.1.
$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 21 & -35 \\ 1 & -6 & 15 & -20 \\ 1 & -5 & 10 & -10 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

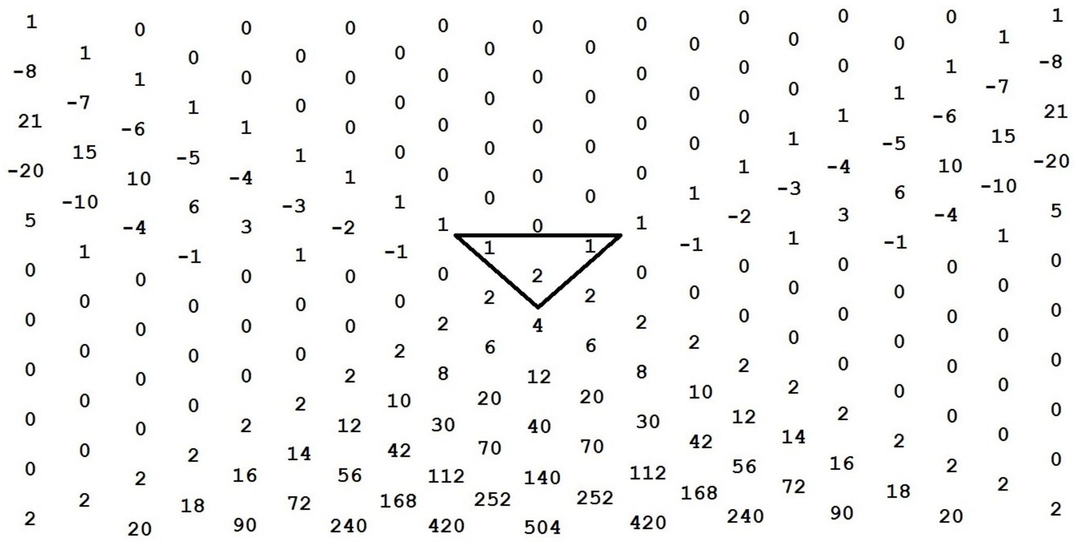
Exemplo 5.2.
$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 28 & -84 \\ 1 & -6 & 21 & -56 \\ 1 & -5 & 15 & -35 \\ 1 & -4 & 10 & -20 \end{vmatrix} = 1$$

5.2 ELEMENTOS GERADORES.

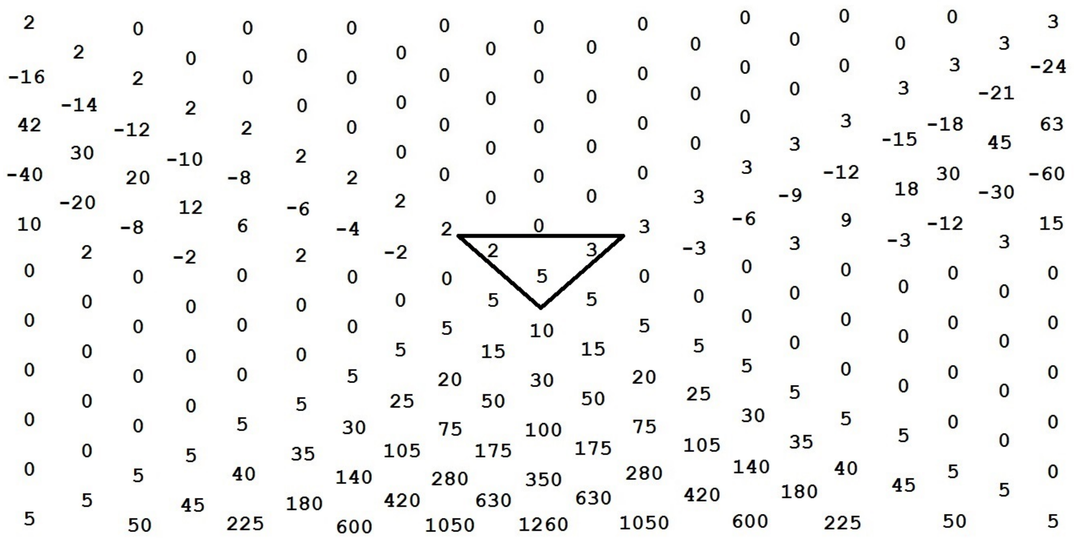
Assim como o triângulo aritmético se altera para cada elemento gerador que usamos, o plano aritmético também se alterará. Normalmente usamos a unidade como gerador do triângulo aritmético. Para o plano aritmético, usamos também os elementos 0 e 1 acima dele. Obedecendo a regra de que cada elemento é formado pela soma dos dois elementos logo acima dele. Porém, podemos usar quaisquer três elementos que obedecem esta regra. Também vamos considerar que todos os elementos ao lado dos elementos geradores serão todos iguais a zero.

Os sextantes não-nulos serão múltiplos do sextantes que possuem gerador igual à unidade.

Se usarmos os geradores 1, 1 e 2 teremos:



Se usarmos os geradores 2, 3 e 5 teremos:



Podemos até usar negativos. No caso 6, -2 e 4 teremos:

6		0		0		0		0		0		0		0		0		0		-2
	6		0		0		0		0		0		0		0		-2		14	
-48		6		0		0		0		0		0		0		-2		-2		16
	-42		6		0		0		0		0		0		-2		10		-30	
126		-36		6		0		0		0		0		-2		8		12		-42
	90		-30		6		6		0		0		-2		6		-12		20	
-120		60		-24		6		0		0		0		4		-6		-20		40
	-60		6		-18		-6		6		-2		2		-2		2		-2	
30		-24		18		-12		6		0		-2		0		0		8		-10
	6		-6		6		0		4		4		0		0		0		0	
0		0		0		0		0		4		0		0		0		0		0
	0		0		0		4		12		12		4		0		0		0	
0		0		0		0		4		8		4		4		0		0		0
	0		0		4		20		40		40		20		4		0		0	
0		0		0		4		16		24		16		4		0		0		0
	0		0		28		84		140		140		84		28		4		0	
0		0		4		24		60		80		60		24		4		0		0
	4		36		144		336		504		504		336		144		36		4	
0		4		32		112		224		280		224		112		32		4		0
4		40		180		480		840		1008		840		480		180		40		4

5.3 COEFICIENTES BINOMIAIS GENERALIZADOS.

Há uma definição para coeficientes binomiais com números negativos [2] [5].

Definição 5.1. Para $m, n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}, & \text{se } m \geqslant 0, n \geqslant 0 \text{ e } m \geqslant n; \\ 0, & \text{se } m \geqslant 0, n > 0 \text{ e } m < n; \\ 0, & \text{se } m \geqslant 0 \text{ e } n < 0; \\ (-1)^n \dbinom{n-m-1}{n}, & \text{se } m < 0 \text{ e } n \geqslant 0; \\ (-1)^{m-n} \dbinom{-n-1}{-m-1}, & \text{se } m < 0 \text{ e } n < 0. \end{cases}$$

Esta definição preserva propriedades binomiais. O apêndice A.2 mostra a generalização para os números complexos do conceito de fatorial e, consequentemente, do de coeficientes binomiais.

Demonstração. Vamos verificar que este teorema segue o modelo do triângulo de Pascal, se for válida a propriedade $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$. A primeira parte já provamos anteriormente. Vamos nos preocupar com as duas últimas igualdades do teorema.

Para $m < 0$ e $n \geqslant 0$, vamos calcular primeiro a igualdade

$$\begin{aligned}\binom{n-m-1}{n} + \binom{n-m-1}{n+1} &= \binom{n-m}{n+1}\\ \binom{n-m-1}{n+1} &= -\binom{n-m-1}{n} + \binom{n-m}{n+1}\end{aligned}$$

e com isso calculamos

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} =& (-1)^n \binom{n-m-1}{n} + (-1)^{n+1} \binom{n+1-m-1}{n+1}\\ =& (-1)^{n+1}\left[-\binom{n-m-1}{n} + \binom{n-m}{n+1}\right]\\ =& (-1)^{n+1}\binom{n-m-1}{n+1}\\ =& (-1)^{n+1}\binom{(n+1)-(m+1)-1}{n+1}\\ =& \binom{m+1}{n+1}\end{aligned}$$

Para $m < 0$ e $n < 0$, vamos calcular primeiro a igualdade

$$\begin{aligned}\binom{-n-2}{-m-1} + \binom{-n-2}{-m-2} &= \binom{-n-1}{-m-1}\\ \binom{-n-2}{-m-2} &= \binom{-n-1}{-m-1} - \binom{-n-2}{-m-1}\end{aligned}$$

e com isso calculamos

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} =& (-1)^{m-n} \binom{-n-1}{-m-1} + (-1)^{m-n-1} \binom{-n-2}{-m-1}\\ =& (-1)^{m-n}\left[\binom{-n-1}{-m-1} - \binom{-n-2}{-m-1}\right]\\ =& (-1)^{(m+1)-(n+1)}\binom{-n-2}{-m-2}\\ =& \binom{m+1}{n+1}\end{aligned}$$

■

Podemos interpretar algumas combinações com números negativos. Tomemos alguns exemplos.

Exemplo 5.3. O número $\binom{-2}{4}$ representa o número de combinações de quatro elementos que podemos escolher entre 2 elementos, porém eles podem se repetir. Tomemos as letras A e B. Teremos 5 combinações, que serão as seguintes:

AAAA AAAB AABB ABBB BBBB

Usando a fórmula teremos $\binom{-2}{4} = (-1)^4 \binom{4-(-2)-1}{4} = \binom{5}{4} = 5.$ ▲

Exemplo 5.4. O número $\binom{-4}{3}$ representa o número de combinações de três elementos que podemos escolher entre 4 elementos, porém eles podem se repetir. Tomemos as letras A, B, C e D. Teremos 20 combinações, que serão as seguintes:

AAA	AAB	AAC	AAD	ABB	ABC	ABD	ACC	ACD	ADD
BBB	BBC	BBD	BCC	BCD	BDD	CCC	CCD	CDD	DDD

Usando a fórmula teremos $\binom{-4}{3} = (-1)^3\binom{3-(-4)-1}{3} = -\binom{6}{3} = -20.$

Logicamente devemos tomar seu valor absoluto. ▲

Dividiremos o plano em 6 sextantes, nos quais para $\binom{m}{n}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}$, temos

-sextante A: $m, n \geqslant 0$ e $m \geqslant n$.

-sextante B: $m \geqslant 0, n > 0$ e $m < n$.

-sextante C: $m < 0, n \geqslant 0 \therefore m < n$.

-sextante D: $m, n < 0$ e $m < n$.

-sextante E: $m, n < 0$ e $m \geqslant n$.

-sextante F: $m \geqslant 0, n < 0 \therefore m > n$.

O sextante A será o triângulo aritmético convencional que estamos estudando. O sextante C será o triângulo aritmético com sinais alternados.

Vamos mostrar que os sextantes B, D, E e F só terão elementos nulos.

A primeira linha do sextante B são combinações do tipo $\binom{0}{a}$ para $a > 0$.

Para $a \geqslant 0$ temos que, $\binom{-1}{a} = (-1)^a\binom{a+1-1}{a} = (-1)^a\binom{a}{a} = (-1)^a$.

Portanto

$$\begin{aligned}
\binom{-1}{a} + \binom{-1}{a+1} &= (-1)^a + (-1)^{a+1} \\
\binom{0}{a+1} &= (-1)^a - (-1)^a \\
\binom{0}{a+1} &= 0
\end{aligned}$$

Como a primeira linha é toda nula, e os elementos que estão posicionados abaixo deles são formados com a soma desses elementos, conclui-se que as linhas inferiores do sextante B serão todas nulas.

Para os sextantes D, E e F, vamos calcular a diagonal dos elementos $\binom{a}{-1}$ para $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Temos que
$\binom{a}{0} = (-1)^0 \binom{0-a-1}{0} = \binom{-a-1}{0}$

Para $a \geqslant 0$, sabemos que $\binom{a}{0} = 1$, portanto pela igualdade anterior, também será para $-a-1 \geqslant 0$, que é igual a $a \leqslant -1$. Logo será igual a 1 para $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Portanto

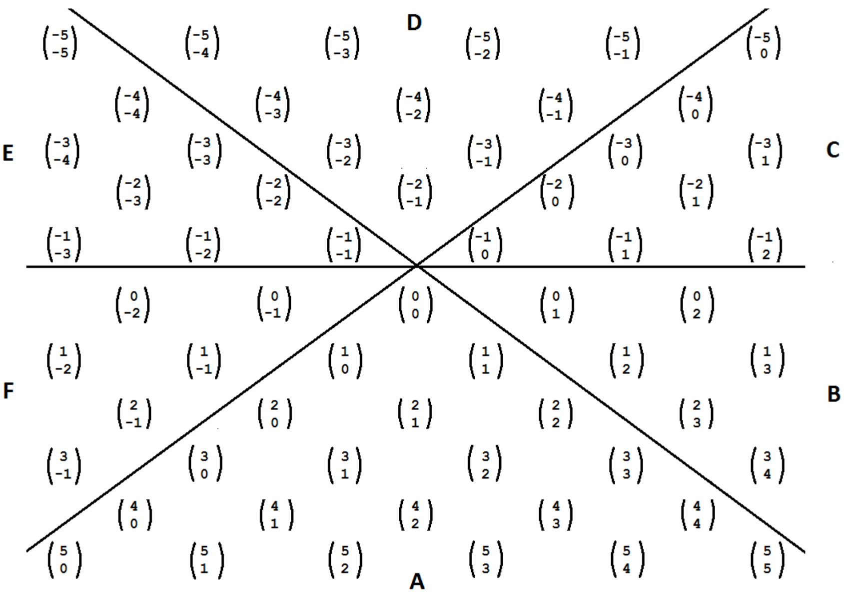
$$\begin{aligned} \binom{a}{-1} + \binom{a}{0} &= \binom{a+1}{0} \\ \binom{a}{-1} + 0 &= 0 \\ \binom{a}{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Como temos toda uma diagonal nula no plano aritmético, que é a extremidade dos sextantes D e F, todos os elementos acima desta diagonal também serão nulos. Logo, os sextantes D, E e F serão nulos.

5.4 PLANO COMBINATÓRIO.

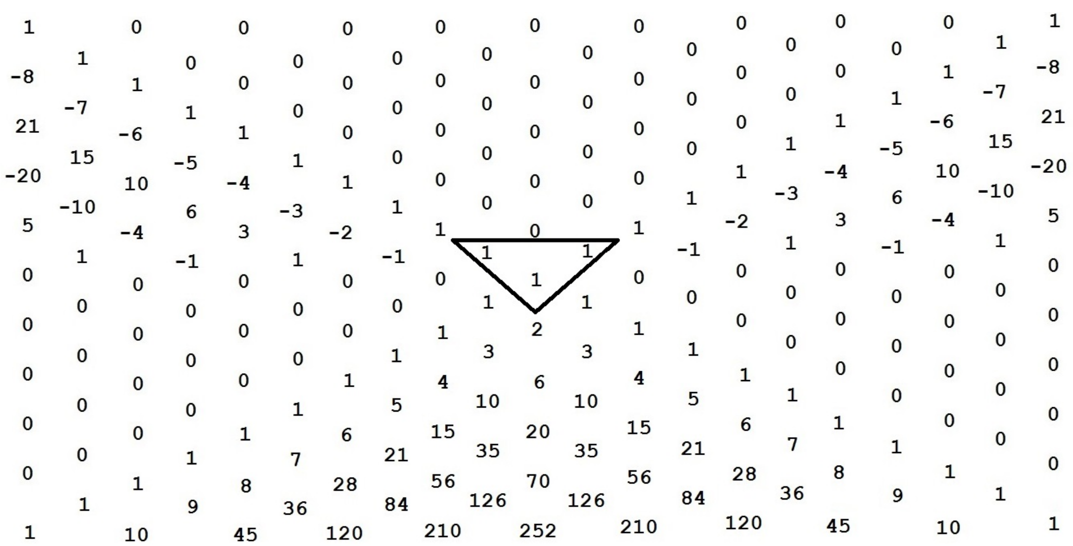
Segundo Bondarenko [2], os autores P. Hilton e J. Pederson definiram novas propriedades de coeficientes binomiais, e com isso construíram algo parecido com o plano aritmético, porém a regra de formação ($p_{l-1,c} + p_{l,c-1} = p_{l,c}$) não se mantém.

Podemos montar um plano contendo todos as combinações possíveis para m e n inteiros que chamaremos de plano combinatório, porém ele terá uma exceção em relação ao plano aritmético. Como a definição de combinação é diferente para positivos e negativos, há um único local do plano combinatório que a propriedade principal não funcionará. A propriedade de que cada elemento será a soma dos dois elementos logo acima dele.



Exceção: $\binom{-1}{-1} + \binom{-1}{0} \neq \binom{0}{0} \Longrightarrow 1 + 1 \neq 1.$

Fora esse caso, o plano combinatório funcionará como um plano aritmético, conforme a figura a seguir.



6

SALA DE AULA

Como que um objeto matemático tão simples de se definir pode conter tantas propriedades, tantos padrões, tantas coisas interessantes?

Neste capítulo vamos dar um roteiro de como expor o triângulo aritmético para uma sala de aula. A ideia é procurar e enunciar as propriedades e depois dar uma justificativa de cada uma delas sem usar muitos cálculos para que a aula fique bem dinâmica.

6.1 MONTAGEM CLARA

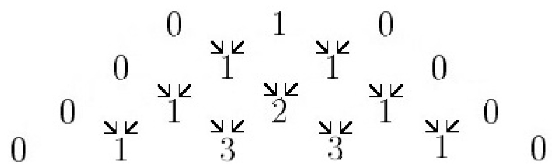
Primeiramente, a montagem tem que estar bem clara, o ponto de partida é fundamental para a explicação das propriedades. Se simplesmente definirmos cada elemento como a soma dos dois elementos acima dele, teremos problema para explicar os elementos da borda que só possuem 1 elemento acima dele. Isso pode gerar discussões se não for bem explicado.

Podemos falar que se não há outro elemento ele é igual a zero, o que pode gerar a discussão sobre se o conjunto vazio é igual a zero, o que não é verdade.

Pode-se ter a discussão também sobre como várias propriedades matemáticas surgem de algo que não está bem definido. Portanto dou aqui duas sugestões de como definir o triângulo aritmético, estas não são as únicas, e o professor pode muito bem alterá-las conforme seus objetivos em sala de aula.

Neste plano de aula usaremos o triângulo com gerador igual à unidade.

• **Montagem 1:** Queremos montar um triângulo aritmético, para isso começaremos com um elemento e cada linha posterior terá um elemento a mais. A primeira linha será formada somente pelo numero 1. Os elementos da linhas seguintes serão a soma dos dois elementos que se encontram acima dele, conforme a figura. Como o primeiro e o último elemento não possuem dois elementos acima dele, entende-se que no lugar em que está faltando o número, se encontra o zero, portanto é a soma de zero com o outro número, mas esse zero não faz parte do triângulo.



Podemos continuar esta montagem iterativamente.

• **Montagem 2:** Forma-se dois lados de um triângulo isósceles com números iguais a 1.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&&&&&1&&&& \\
&&&1&&&&&&&&1&&& \\
&&1&&&&&&&&&&1&& \\
&1&&&&&&&&&&&&1& \\
1&&&&&&&&&&&&&&1
\end{array}$$

Os elementos da linhas seguintes serão a soma dos dois elementos que se encontram acima dele, conforme a figura.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

Desta maneira se elimina o problema de como definir o primeiro e o último elemento de cada linha.

6.2 IDENTIFICAÇÃO DE PADRÕES

A principal característica do triângulo aritmético é a grande quantidade de padrões numéricos que vão se formando conforme se vai calculando suas linhas. Alguns podem ser bem elementares, principalmente para os professores e para os alunos mais avançados, mas não deixa de ser um bom ponto de partida mostrar esses padrões e questionar porque eles aparecem.

Passo 1: Explique a montagem e faça os alunos montarem o triângulo até uma determinada linha, por exemplo a linha 7. Explicite o fato de que o triângulo começa na linha 0, esta numeração é importante para as propriedades que serão enunciadas.

Passo 2: Nesse ponto já se pode perguntar à classe se eles estão observando algum padrão. Por mais simples que seja o que os alunos observarem, pergunte porque este padrão aparece e dê uma justificativa. Para algumas classes a explicação pode ser mais difícil dependendo do seu nível, se a justificativa não for suficiente é recomendável que se calcule alguns exemplos para se verificar a sua veracidade. Não é necessário inicialmente uma demonstração rigorosa, mas se for vontade do professor ou da classe não há problema nenhum.

Alguns exemplos que os alunos podem dar:

• *Os elementos da borda serão sempre igual 1.*

Justificativa: Se foi usada a definição 1 se argumenta que os elementos da borda sempre serão a soma de 1 com um espaço vazio que vamos convencionar igual a 0. Logo será sempre 1. Se foi usada a definição 2 este padrão já é direto.

• *Na segunda diagonal estão os números naturais.*

Justificativa: A cada linha se soma um elemento da segunda diagonal juntamente com um elemento da borda, que vimos que será sempre 1, logo a segunda diagonal constrói os números naturais.

Se a classe já está familiarizada com sequências, convém o professor ressaltar que é uma progressão aritmética.

• *O triângulo é simétrico.*

Justificativa: O início de sua construção gera um triângulo simétrico, mostre que as primeiras linhas serão palíndromas, ou seja, serão iguais invertendo a ordem de leitura. Depois isso mostre que a linha pode ser construída da esquerda para a direita ou vice-versa e que esse procedimento constrói a mesma sequência.

• *Relação das diagonais.*

Justificativa: Esta propriedade com alguns exemplos os alunos já se convencem de que ela é verdade. Vamos provar que o quarto elemento da linha 7 é igual à sua diagonal com os elementos 1, 3, 6, 10 e 15.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Mostre que o número 35 é 15 + 20, guarde o 15 e mostre que o 20 é 10 + 10, guarde um 10 e mostre que o outro 10 é 6 + 4, guarde o 6 e mostre que o 4 é 3 + 1, guarde o 3 e mostre que o 1 que sobrou, como é um elemento da borda, é igual ao outro 1 acima dele. Portanto 35 é igual aos elementos que guardamos neste processo, logo 35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.

Se os alunos forem mais avançados pode-se apresentar a demonstração da relação das diagonais da seção 3.2, porém isso pode desviar muito o assunto da aula. O ideal é não colocar muita álgebra para a aula ficar mais dinâmica.

Depois que os alunos não encontrarem mais nada, o professor deve mostrar as outras como:

• *A soma dos elementos de cada linha serão potências de 2.*

Justificativa: As primeiras somas controem as primeiras potências de 2. Depois, os elementos de cada linha serão formados somando-se duas vezes cada elemento da linha acima, pois cada elemento estará na soma de quem está abaixo à esquerda e à direita dele. Portanto será o dobro da soma anterior, o que gera a sequência das potências de 2.

Se a classe já está familiarizada com sequências convém o professor ressaltar que é uma progressão geométrica.

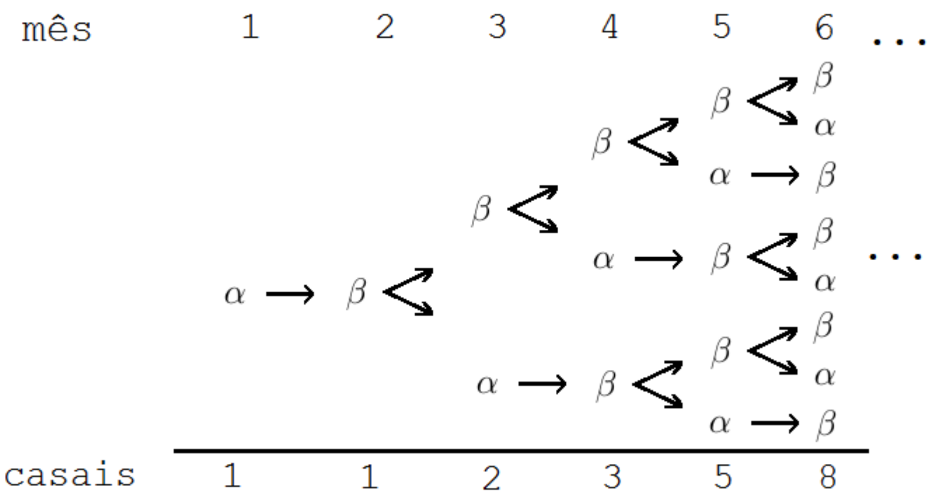
• *Os elementos de cada linha formam os algarismos das potências de 11.*

Justificativa: Com o triângulo montado, peça para os alunos calcularem a sequência das potências de 11. Não há problema se for na calculadora. Depois disso peça para eles procurarem esta sequência no triângulo, ela será muito evidente pois são os elementos da própria linha. Após a linha 5 descreva conforme a seção item 3.7.2.

• *Sequência de Fibonacci.* Justificativa: Primeiramente explique como é formada a sequência, conte um pouco da história de Fibonacci, contida na seção 3.3, e dê exemplos de crescimentos que seguem a sequência.

Exemplo 6.1. População de coelhos. Uma pessoa comprou um casal de coelhos filhotes. Vamos considerar que as coelhas têm uma gestação de 1 mês e desde o seu nascimento elas levam 1 mês para poderem começar a ter seus próprios filhotes. Vamos considerar também que a cada parto a coelha gera somente 1 casal de filhotes.

Represente por α um casal de coelhos filhotes e por β um casal de coelhos adultos. Comece hoje com um casal de coelhos filhotes, a cada mês um casal de coelhos filhotes ficam adultos. Pelos símbolos, após um mês, α se transformará em β. Após um mês um casal de coelhos adultos geram um casal de coelhos filhotes, pelos símbolos, cada β gerará β mais α. A sequência será a seguinte:

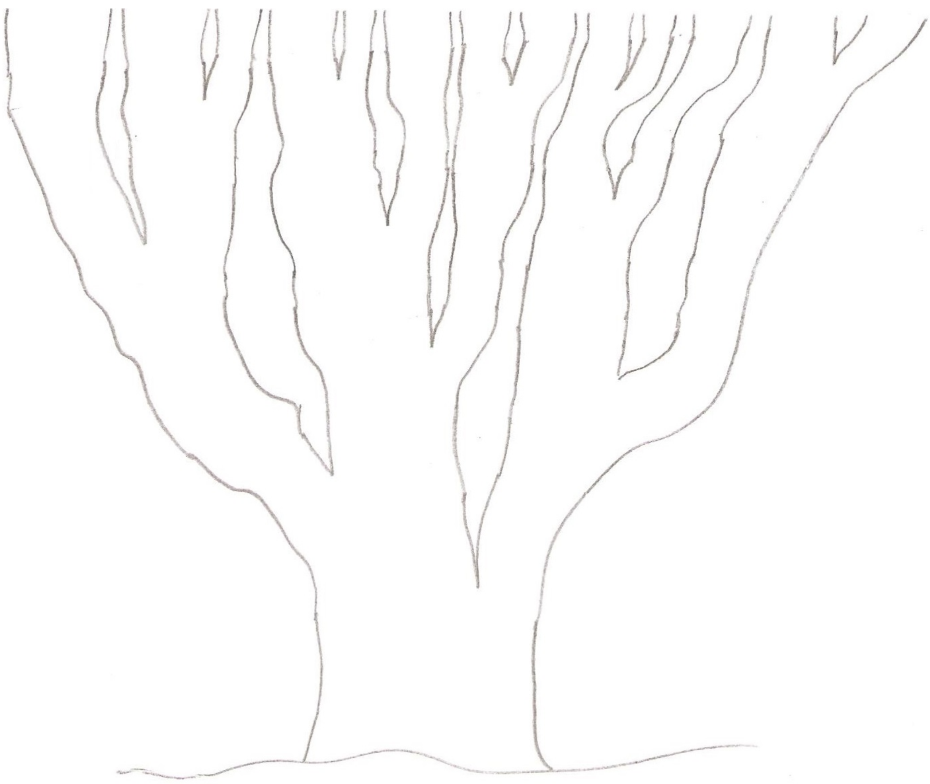


Se for preciso avance mais na contagem dos casais de coelhos. ▲

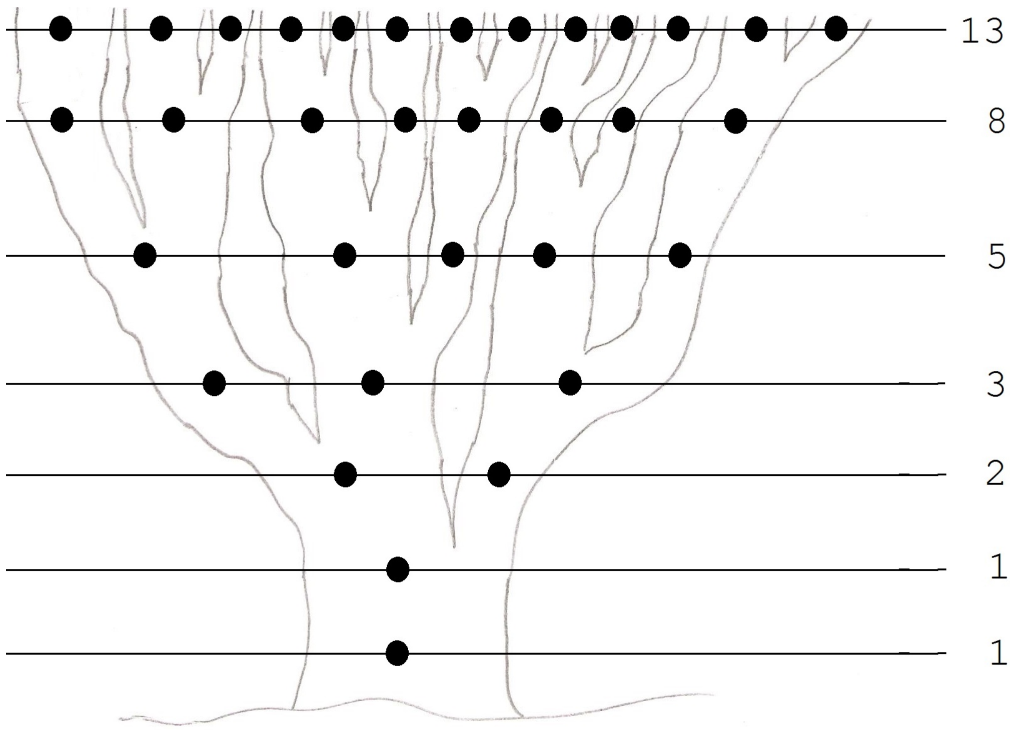
Exemplo 6.2. Quantidade de galhos numa árvore. Ao observarmos uma árvore, notamos que quanto mais alta ela é, mais galhos possui, portanto deve haver alguma relação entre sua altura e a quantidade de galhos que ela possui.

Desenhando uma árvore de baixo para cima, começamos pelo seu tronco saindo do chão, se o tronco se dividir logo, a árvore não terá força para crescer, portanto este tronco deve crescer um pouco mais, após um certo período ele se dividirá, porém não ao meio, terá um galho menor saindo deste tronco. Após outro período o galho que acabou de nascer está muito fraco ainda, portanto ele irá crescer um pouco mais. Já o tronco que já era forte, gerará outro galho menor. Sucessivamente temos que um galho ao nascer precisará de um período para ficar forte e após este período gerará um galho menor dele.

Um detalhe interessante deste momento. Desenhe na lousa à mão sem ajuda de régua e sem fazer correções. A irregularidade do desenho fará com que ele fique mais natural. Faça alguns testes antes obviamente, mas não procure deixar o desenho muito uniforme.



Fazendo-se a contagem dos galhos a partir do chão temos a sequência de Fibonacci.



▲

Depois de explicada a sequência, peça para os alunos procurarem-na no triângulo. Como ela não está explícita mostre-a como na seção 3.3 ou de uma maneira fácil que é colocando todo o triângulo alinhado à esquerda e traçando suas diagonais.

	1										
1	1	1									
1	1	2	1								
2	1	3	3	1							
3	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
8	1	6	15	20	15	6	1				
13	1	7	21	35	35	21	7	1			
21	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
34	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
55	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
89											

• *Fórmula da combinação.*

Justificativa: A intenção dessa atividade é mostrar como a consulta do triângulo aritmético facilita muitas contas. Um momento perfeito para se falar do triângulo aritmético no ensino médio é após algumas aulas de análise combinatória.

Como os alunos já fizeram várias contas com a fórmula da combinação, com o triângulo à mostra peça para eles calcularem, por exemplo $C_{8,3}$, e procurarem o resultado no triângulo. Eles o encontrarão como quarto elemento da linha 8. Faça isso com mais alguns exemplos e veja se eles conseguem deduzir qual a lógica dos resultados com as posições dos elementos no triângulo.

Se eles ficarem curiosos mostre que a relação de Stifel, descrita na seção 3.1, segue a mesma lógica de montagem do triângulo aritmético.

Com isso se justifica também porque há simetria no triângulo e na fórmula da combinação em que, por exemplo, $C_{8,3} = C_{8,5}$.

Após tudo isso convém repetir alguns exercícios que foram feitos sem a ajuda do triângulo e mostrar aos alunos como se economiza tempo na sua resolução.

• *Binômio de Newton.*

Justificativa: Introduza o conceito de binômio e faça com que eles calculem potências de $(x+y)$ até a ordem 4 pelo menos. Isso será trabalhoso, provavelmente eles não gostarão disso, mas é importante eles fazerem pelo menos uma vez, para se darem conta de quanto tempo está sendo economizado. Pode ser como trabalho de casa, isso fica a critério do professor.

Depois mostre como se encontra as potências com ajuda do triângulo, isso mostrará que uma conta muito trabalhosa pode ser resolvida em poucos minutos. Peça para calcularem potências mais altas agora, porém com a ajuda do triângulo.

6.3 PARTIÇÃO DE COMBINAÇÕES

Resolveremos agora, de uma maneira mais prática, alguns exemplos da seção 3.9 que envolvem partição de combinações.

Exemplo 6.3. Num grupo de 7 mulheres e 4 homens, queremos saber quantas comissões de cada tipo podem ser feitas com 4 pessoas.

Primeiramente verifique no grupo maior quantas pessoas podem ter na comissão e escreva a linha correspondente do triângulo aritmético. Neste caso é o grupo de 7 mulheres e temos de 0 a 4 mulheres. Vamos usar a linha 7 porém, só os elementos de 0 a 4, lembrando que começamos a contar do zero, logo

0M	1M	2M	3M	4M			
1	7	21	35	35	21	7	1

Do grupo menor também veja quantos podem ser usados e alinhe de trás para frente. Neste caso é o grupo de 4 homens e temos de 0 a 4, logo é toda a linha

4H	3H	2H	1H	0H
1	4	6	4	1

Agora alinhe e faça o produto.

0M,4H	1M,3H	2M,2H	3M,1H	4M,0H			
1	7	21	35	35	21	7	1
1	4	6	4	1			
1	28	126	140	35			

▲

Exemplo 6.4. Num grupo de 8 mulheres e 5 homens, queremos saber quantas comissões de cada tipo podem ser feitas com 3 pessoas.

Seguindo os mesmos passos que o exemplo anterior, o grupo maior é de 8 mulheres e temos de 0 a 3 mulheres nas comissões, logo

0M	1M	2M	3M					
1	8	28	56	70	56	28	8	1

O grupo menor é de 5 homens e temos de 0 a 3, logo

		3H	2H	1H	0H
1	5	10	10	5	1

Agora alinhe e faça o produto.

		0M,3H	1M,2H	2M,1H	3M,0H					
		1	8	28	56	70	56	28	8	1
1	5	10	10	5	1					
		10	80	140	56					

▲

6.4 OBTENDO MATRIZES SIMPLES COM DETERMINANTE DADO

Muitas vezes em sala de aula, o professor deseja encontrar uma matriz com um determinante específico para aplicar em atividades. Nem sempre é fácil conseguir, por exemplo, uma matriz sem valores nulos de ordem 4 cujo determinante é igual a 5. Devido a algumas propriedades da matriz de Pascal, isso pode ser conseguido facilmente, já que toda matriz quadrada, cujos valores sejam iguais a quaisquer linhas iniciais da matriz de Pascal, tem determinante sempre igual a 1. Como provado na seção 4.2.

Exemplo 6.5. Encontrar alguma matriz M tal que $\det M_4 = 5$. Usaremos uma matriz de ordem 4 com linhas inicias consecutivas iguais à matriz de Pascal, vamos usar da quarta linha em diante. Multiplique alguma linha por um número qualquer e some-a em outra linha usando o teorema de Jacobi, o que não altera o valor do determinante. Por exemplo, multiplique a segunda linha por 3 e some-a na terceira e a primeira por 7 e some-a na quarta. Depois disso multiplique a primeira linha pelo valor desejado do determinante, no caso 5, a matriz resultante terá valores inteiros com determinante 5.

$$\begin{array}{c}7\\3\\ \\ \\\end{array}\begin{vmatrix}1 & 4 & 10 & 20\\1 & 5 & 15 & 35\\1 & 6 & 21 & 56\\1 & 7 & 28 & 84\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 4 & 10 & 20\\1 & 5 & 15 & 35\\4 & 21 & 66 & 161\\8 & 35 & 98 & 224\end{vmatrix} \overset{\times 5}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix}5 & 20 & 50 & 100\\1 & 5 & 15 & 35\\4 & 21 & 66 & 161\\8 & 35 & 98 & 224\end{vmatrix}$$

Se calcularmos a sua inversa, sabemos que seu determinante é o inverso de 5, no caso ele será $\begin{vmatrix}35 & -294 & 70 & -20\\ \frac{126}{5} & 206 & -50 & 15\\ \frac{49}{5} & -77 & 19 & -6\\ -\frac{8}{5} & 12 & -3 & 1\end{vmatrix}$, se tivermos multiplicado na primeira linha por 5, então só terá frações na primeira coluna. ▲

Podemos também usar o corolário de $\det(P+k)$. *Seja P igual a Pn + k, Bn + k, Cn + k ou uma submatriz de Pascal que contenha uma linha ou coluna constante igual a 1. Então det P = 1 + k.*

Exemplo 6.6. Encontrar alguma matriz M tal que $\det M_4 = 8$. Tomamos uma matriz ou submatriz de Pascal que contenha uma linha ou coluna constante igual a 1.

$$\text{Seja } P = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 21 & 56 \\ 1 & 7 & 28 & 84 \\ 1 & 8 & 36 & 120 \\ 1 & 9 & 45 & 165 \end{vmatrix} = 1$$

Some o antecessor de 8, logo, some 7 a todos os elementos.

$$\text{Portanto } P+7 = \begin{vmatrix} 8 & 13 & 28 & 63 \\ 8 & 14 & 35 & 91 \\ 8 & 15 & 43 & 127 \\ 8 & 16 & 52 & 172 \end{vmatrix} = 8$$

O problema é que a coluna que era constante igual a 1, será constante igual a 8, que poderá ser colocada em evidência, daí teremos 8 multiplicado por um determinante igual a 1.

$$P+7 = \begin{vmatrix} 8 & 13 & 28 & 63 \\ 8 & 14 & 35 & 91 \\ 8 & 15 & 43 & 127 \\ 8 & 16 & 52 & 172 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 13 & 28 & 63 \\ 1 & 14 & 35 & 91 \\ 1 & 15 & 43 & 127 \\ 1 & 16 & 52 & 172 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1$$

Na prática, estamos gerando outra matriz com determinante igual a 1, portanto o método anterior se torna mais útil. ▲

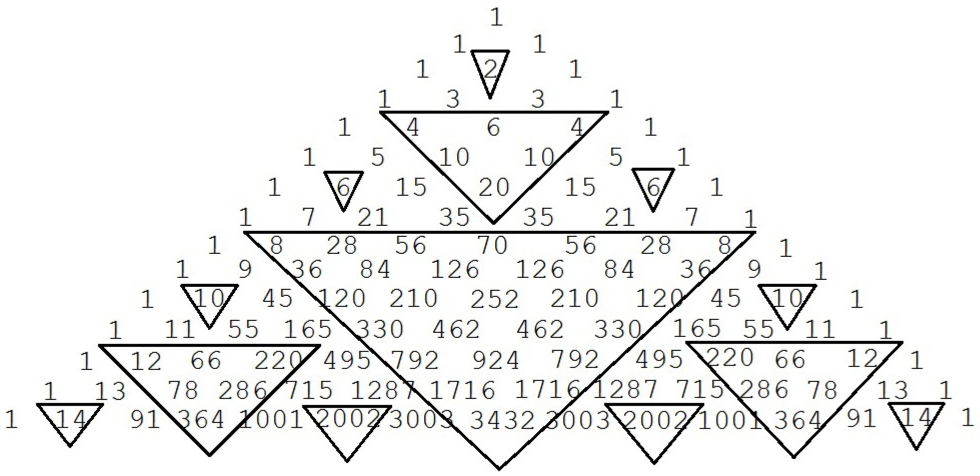
6.5 AUTOSSEMELHANÇA NO TRIÂNGULO MÓDULO n

Se o professor não tiver recursos visuais na sala, a montagem do triângulo até a linha 10 já é suficiente para se mostrar essa propriedade.

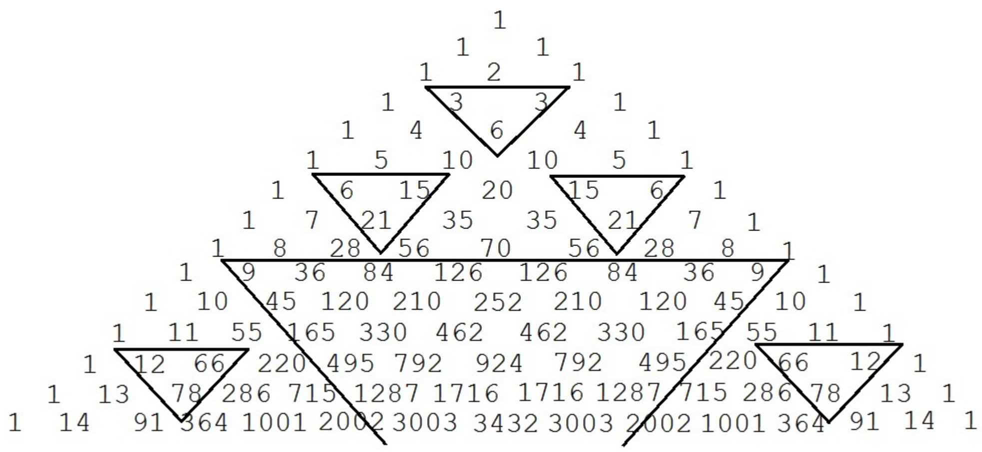
O ideal é que o professor projete um triângulo, até pelo menos a linha 14, aqui quanto maior o triângulo melhor a visualização. Pode-se buscar figuras já prontas e projetar para os alunos verem os padrões, mas primeiramente deixe-os encontrarem os múltiplos e veja se eles conseguem encontrar as figuras que vão se formando.

Com o triângulo na lousa, peça para eles procurarem os múltiplos de um número. Comece com os números primos menores. Agrupe esses números em triângulos invertidos verticalmente ao próprio triângulo aritmético. Números que aparecem sozinhos, faça um triângulo nele conforme as figuras.

- Múltiplos de 2



- Múltiplos de 3



- Múltiplos de 5

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

- Múltiplos de 7

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

A primeira coisa que vai chamar a atenção é que os múltiplos estão agrupados em triângulos invertidos.

Por exemplo, no triângulo dos múltiplos de 7 está formada a sequência 7, 21, 35, 35, 21 e 7. Os números que estão no triângulo invertido serão formados somando estes elementos dois a dois, logo a soma também será múltipla de 7.

Pode até se colocar um pouco de álgebra neste momento. Para $\forall n \in \mathbb{N}$, a soma de múltiplos de n sempre será múltiplo de n. Afinal, se a e b são múltiplos de n, então podemos escrevê-los como $a = n \cdot a'$ e $b = n \cdot b'$, portanto $a + b = n \cdot a' + n \cdot b' = n \cdot (a' + b')$.

No caso dos elementos que estão sozinhos, isso se deve ao fato de que um múltiplo de n somado ao um número não múltiplo de n, será um número não múltiplo de n.

Portanto concluímos que, ou os múltiplos estarão sozinhos, ou eles estarão agrupados em triângulos invertidos.

As figuras formadas serão algo muito parecido com um fractal, isso não podemos afirmar, pois um fractal deve se repetir conforme nos aproximamos ou nos afastamos da figura. No triângulo aritmético, ao nos aproximarmos os elementos se afastam e não se forma mais figura nenhuma. Porém para os alunos de ensino médio é uma boa maneira de se introduzir o assunto, caso seja a vontade do professor.

6.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na aula em que se expõe o triângulo aritmético, uma pergunta muito comum dos alunos é sobre a existência de mais propriedades além das que foram enunciadas na aula. Se há alguma outra sequência de números em particular que se encontra no triângulo.

É muito importante dizer que sim, que pode haver muitas outras coisas que não sabemos e até que podem até existir algumas que ninguém ainda descobriu. Isso dá uma perspectiva ao aluno e a nós mesmos, como professores, que a matemática não é algo fechado e terminado, mas sim algo ilimitado, que ainda é possível se descobrir coisas novas, mesmo na nossa época.

O próprio Pascal escreveu em seu tratado que o triângulo era muito fértil em propriedades. Isso não acontece só no triângulo aritmético, mas com toda matemática. Toda ela é muito fértil e cabe a nós, professores e alunos, darmos continuidade à ela.

A

APÊNDICES

Colocamos neste apêndice, somente a introdução de alguns tópicos que complementam alguns assuntos tratados anteriormente. Esses tópicos não tem necessariamente alguma relação com o triângulo aritmético.

A.1 POTÊNCIA DE MULTINÔMIOS

Como foi enunciado a potência de binômios e trinômios, uma pergunta natural é se existe alguma maneira de se calcular coeficientes de potências de multinômios, ou seja, a enésima potência de somas com s variáveis.

Há uma fórmula para esse desenvolvimento. Porém, ela é muito complicada de se usar sem ajuda de computadores.

Teorema 30. Para $\forall s, n \in \mathbb{N}$ temos que o desenvolvimento de $(x_0 + x_1 + \cdots + x_{s-1})^n$ pode ser escrito como [2]

$$\sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{m_1} \cdots \sum_{m_{s-1}=0}^{m_{s-2}} \frac{n!}{(n-m_1)!\,(m_1-m_2)!\cdots(m_{s-2}-m_{s-1})!\,m_{s-1}!} x_0^{n-m_1} x_1^{m_1-m_2} \cdots x_{s-2}^{m_{s-2}-m_{s-1}} x_{s-1}^{m_{s-1}}.$$

O teorema multinomial foi mencionado pela primeira vez numa carta em 1695 de Gottfried Leibniz (1646-1716) a Johann Bernoulli (1667-1748).

A.2 FUNÇÃO GAMA

Como definimos coeficientes binomiais generalizados, pode-se perguntar se existe fatoriais para números que não sejam naturais. O que temos é a função Gama, $\Gamma(x)$, que interpola todos os fatoriais de números naturais. Esta função é estendida para números complexos, porém números inteiros e negativos não fazem parte de seu domínio [9].

Para $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ temos que $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Para $n \in \mathbb{N}$ temos que $\Gamma(n+1) = n!$.

Um valor interessante é $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Leonhard Euler (1707-1783) definiu a função Gama durante os anos de 1729 e 1730.

Com isso, podemos definir coeficientes binomiais para quaisquer x e y. [8]

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}$$

Esta definição coincide com a definição usual de $\binom{m}{n}$ quando $m, n \in \mathbb{N}$ e preserva suas propriedades.

BIBLIOGRAFIA

[1] PASCAL, BLAISE *Traité du triangle arithmétique*. 1654.

[2] BONDARENKO, BORIS A. *Generalized Pascal Triangles and Pyramids*. 1990. Academy of Sciences of the Republic os Uzbekistan, Tashkent. ISBN 5-648-00738-8.

[3] LUNNON, W. FRED *The Pascal Matrix*. The Fibonacci Quarterly, volume 15, número 3. 1977.

[4] EDELMAN, ALAN e STRANG, GILBERT *Pascal Matrices*. The American Mathematical Monthly, volume 111, número 3. 2004.

[5] GRAHAM, RONALD L.; KNUTH, DONALD E. e PATASHNIK, OREN. *Matemática Concreta*. LTC Editora S.A. 1995. ISBN 8521610408.

[6] BOYER, CARL *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher Ltda. 2001. ISBN 85-212-0023-4.

[7] *Tehnicclass High School Lajkovac: Pascal's Triangle*. Disponível em `http://jovanovic-marija.net/sajt/math/pascal/pascal_history.pdf`, acessado em 04/11/2013.

[8] KRONENBURG, M.J. *The Binomial Coefficient for Negative Arguments*. arXiv:1105.3689, Cornell University Library. 2011.

[9] SEBAH, PASCAL e GOURDON, XAVIER. *Introduction to the Gamma Function* 2002. Disponível em `http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/gammaFunction.html`, acessado em 06/10/2014.