

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

## Problemas de Apolônio

**Oertes Alves Souza**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação apresentada junto ao Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática da Universidade Federal do ABC, para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Santo André - SP  
Outubro de 2014.

# Problemas de Apolônio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Oertes Alves Souza e aprovada pela comissão julgadora.

Santo André, 22 de outubro de 2014.

---

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva  
Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (Orientador) - UFABC
2. Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca - UFABC
3. Prof. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves - USP

Dissertação apresentada junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da UFABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob a responsabilidade única do autor e com a anuência do seu orientador.

Santo André, 18 de dezembro de 2014.

---

Oertes Alves Souza  
Autor

---

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva  
Orientador

Dedico este trabalho à minha família, aos meus amigos e a todos os meus colegas  
professores de todas as áreas do conhecimento.

# Agradecimentos

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), aos Professores da UFABC que se engajaram neste programa, ao meu amigo Cícero Thiago Magalhães, pela sugestão do tema, ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, que de pronto aceitou meu pedido de orientação, aos meus colegas de Mestrado Ricardo A. Mori, Leandro A. Mosca e Marcelo A. Souza pelas inúmeras vezes em que estudamos juntos e, principalmente, à minha família, que sempre me incentivou na minha carreira, desde o início.

A todos vocês, meus sinceros agradecimentos.

## **Resumo**

Inspirado em um capítulo do Livro de I. M. Yaglom [7], neste trabalho estudaremos a geometria inversiva a fim de resolver alguns dos antigos problemas de Apolônio de Pérgamo, apenas com o uso de régua e compasso ou com o auxílio de um software de geometria dinâmica.

## **Abstract**

Based on the work of I. M. Yaglom [7], in this work we study the inversive geometry to solve some old problems of Apollonius of Pergamum , just using a ruler and compass or with the aid of a dynamic geometry software.

## **Palavras-chave**

Apolônio, Problemas de Apolônio, Geometria Inversiva.

## **Keywords**

Apollonius, problems of Apollonius, inversive geometry.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Casos de congruência de triângulos . . . . .	4
1.2 Casos de semelhança de triângulos: <i>AA</i> , <i>LAL</i> e <i>LLL</i> . . . . .	6
1.3 Relações métricas em um triângulo retângulo . . . . .	8
1.4 Teorema do Ângulo Inscrito . . . . .	9
1.5 Relações métricas numa circunferência . . . . .	10
<b>2 Circunferências Ortogonais</b>	<b>13</b>
2.1 Ângulo entre reta e circunferência . . . . .	13
2.2 Ângulo entre duas circunferências . . . . .	14
<b>3 A inversão em relação a uma circunferência</b>	<b>17</b>
3.1 Propriedades da Inversão . . . . .	21
3.2 A inversão preserva ângulo entre duas curvas . . . . .	27
<b>4 Os problemas de Apolônio</b>	<b>31</b>
4.1 O problema de Apolônio para três circunferências . . . . .	32
<b>5 Exercícios</b>	<b>43</b>
5.1 Resoluções dos exercícios propostos . . . . .	44
5.2 Plano de aula . . . . .	48

5.2.1	Aula 1 . . . . .	48
5.2.2	Aula 2 . . . . .	48
5.3	Tutorial do Geogebra . . . . .	49
<b>Bibliografia</b>		<b>55</b>



# Lista de Figuras

1.1	caso LAL: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . . . . .	4
1.2	caso ALA . . . . .	5
1.3	caso LLL de congruência . . . . .	6
1.4	caso AA de semelhança . . . . .	7
1.5	caso LAL de semelhança . . . . .	7
1.6	caso LLL de semelhança . . . . .	8
1.7	Relações métricas no triângulo retângulo . . . . .	9
1.8	Teorema das Cordas . . . . .	11
1.9	Teorema das Secantes . . . . .	12
1.10	Teorema da Secante e Tangente . . . . .	12
2.1	O ângulo entre a reta e a circunferência é nulo . . . . .	14
2.2	O ângulo entre a reta e a circunferência mede $\alpha$ . . . . .	14
2.3	O ângulo entre a reta e a circunferência mede $90^\circ$ (a reta e a circunferência são ortogonais) . . . . .	14
2.4	Os ângulos $\theta_1$ e $\theta_2$ são congruentes . . . . .	15
2.5	o ângulo entre $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ é $\theta$ . . . . .	16
3.1	A e A' são simétricos em relação à reta $r$ . . . . .	17
3.2	$\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ são ortogonais a $\Gamma$ . . . . .	19
3.3	inversão de um ponto interno. . . . .	21
3.4	Na inversão com relação a $\Gamma$ , o ângulo $\widehat{OAB}$ é transformado no ângulo $\widehat{OB'A'}$ e o ângulo $\widehat{OBA}$ é transformado no ângulo $\widehat{O'A'B'}$ . . . . .	22
3.5	inversão de reta que passa por $O$ . . . . .	23
3.6	$s'$ é a circunferência de diâmetro $\overline{OP'}$ . . . . .	24
3.7	$\Gamma'_1$ é a reta que passa por $P'$ e é perpendicular a $\overline{OP'}$ . . . . .	25
3.8	inversão de circunferência com $O$ no interior . . . . .	26

3.9	inversão de circunferência com $O$ no exterior . . . . .	27
3.10	$\Omega$ é uma reta . . . . .	28
3.11	$\Omega$ é uma circunferência com $O \in \Omega$ . . . . .	28
3.12	$\Omega$ é uma circunferência com $O \notin \Omega$ . . . . .	29
3.13	inversão preserva ângulo entre retas . . . . .	30
4.1	Caso dois pontos e uma reta . . . . .	32
4.2	$\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ são as soluções . . . . .	33
4.3	$\Sigma$ é ortogonal a $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ . . . . .	34
4.4	$\Gamma'_1$ e $\Gamma'_2$ são concêntricas de centro $\{C\} = s \cap \Sigma'$ . . . . .	35
4.5	$\Omega'_1$ e $\Omega'_2$ são tangentes externamente a $\Gamma'_2$ e a $\Gamma'_3$ . . . . .	37
4.6	$\Omega'_3$ e $\Omega'_4$ são tangentes externamente a $\Gamma'_2$ e internamente a $\Gamma'_3$ . . . . .	38
4.7	$\Omega'_5$ e $\Omega'_6$ são tangentes externamente a $\Gamma'_3$ e internamente a $\Gamma'_2$ . . . . .	39
4.8	$\Omega'_7$ e $\Omega'_8$ são tangentes internamente a $\Gamma'_2$ a $\Gamma'_3$ . . . . .	40
4.9	$\Omega'_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , são tangentes a $\Gamma'_1, \Gamma'_2$ e $\Gamma'_3$ . . . . .	41
4.10	$\Omega_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , são tangentes a $\Gamma_1, \Gamma_2$ e $\Gamma_3$ . . . . .	42
5.1	Soluções $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ e $\Omega'_4$ . . . . .	46
5.2	Soluções $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ e $\Omega_4$ . . . . .	46
5.3	Soluções $\Omega'_1$ e $\Omega'_2$ . . . . .	47
5.4	Soluções $\Omega_1$ e $\Omega_2$ . . . . .	47
5.5	Ferramenta inversão . . . . .	50
5.6	Invertendo os pontos $A, B$ e $C$ . . . . .	51
5.7	$\Sigma$ é ortogonal a $\Gamma_1$ e a $\Gamma_2$ . . . . .	52
5.8	$\Gamma'_1$ e $\Gamma'_2$ são concêntricas . . . . .	53

# Introdução

Apolônio de Pérgamo foi um matemático e astrônomo grego que teria vivido entre os anos 262 a 190 a.c. Pouco se sabe sobre sua vida e suas obras, pois estas desapareceram ao longo do tempo. Em um dos seus trabalhos, denominado Tangências, aparece o chamado Problema de Apolônio, que pode ser assim enunciado: dados três objetos distintos, que podem ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que seja tangente a estes três objetos (onde tangência a um ponto significa que a circunferência passa por aquele ponto).

Quanto aos objetos, temos 10 situações possíveis:

- 1) três pontos;
- 2) dois pontos e uma reta;
- 3) dois pontos e uma circunferência;
- 4) um ponto e duas retas;
- 5) um ponto e duas circunferências;
- 6) um ponto, uma reta e uma circunferência;
- 7) uma reta e duas circunferências;
- 8) duas retas e uma circunferência;
- 9) três retas;
- 10) três circunferências.

Evidentemente, dependendo da disposição dos três objetos, o problema pode não ter solução, como por exemplo, quando no caso 1 os três pontos forem colineares ou no caso 2, quando os pontos pertencerem a semiplanos opostos em relação à reta. Além disso, em cada caso o número de soluções pode variar. Apenas para exemplificar, no caso 1, se os três pontos não forem colineares, o problema admite exatamente uma solução, que é

a circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são estes pontos. No caso 9, se as retas forem duas a duas paralelas entre si, o problema não admite solução. Por outro lado, se as três retas forem concorrentes duas a duas, o problema admite 4 soluções (a circunferência inscrita ao triângulo cujos vértices são os pontos de intersecção entre as retas e as três chamadas circunferências ex-inscritas a este triângulo).

Desta forma, podemos notar que há uma certa dificuldade em tratarmos todos os casos. Particularmente, neste trabalho vamos resolver alguns destes casos, incluindo o caso 10, sendo as três circunferências externas duas a duas. Mostraremos que, neste caso, há exatamente 8 soluções. Para isso, exploramos e demonstramos algumas propriedades da Geometria Inversiva. Os pré-requisitos para isso são conceitos básicos de Geometria Euclidiana Plana ensinados desde o Ensino Fundamental, como congruência e semelhança de triângulos e relações métricas em um triângulo retângulo a conceitos um pouco mais específicos, como relações métricas na circunferência, potência de ponto e teorema do ângulo inscrito, ensinados geralmente no segundo ano do Ensino Médio. Seria interessante, também, que o leitor fizesse uso de algum software de Geometria Dinâmica.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No capítulo 1 são apresentados alguns conceitos e resultados preliminares da Geometria Euclidiana Plana que são abordados nos programas dos Ensinos Fundamental e Médio. No início do capítulo utilizamos um fato reconhecido, porém não demonstrado, o qual chamamos de postulado.

No capítulo 2, definimos o ângulo entre uma reta e uma circunferência, bem como o ângulo entre duas circunferências, enfatizando o caso em que estes objetos são ortogonais.

No capítulo 3, abordamos a geometria inversiva. Algumas de suas propriedades são demonstradas, como os inversos de um ponto, de uma reta ou de uma circunferência em relação a uma circunferência. Um resultado fundamental demonstrado neste capítulo é que a inversão preserva o ângulo entre os objetos tratados no estudo dos problemas de Apolônio.

No capítulo 4, enunciamos, no caso geral, os problemas de Apolônio. Alguns casos são resolvidos, incluindo o caso onde os três objetos são circunferências externas duas a duas.

No capítulo 5 são propostos alguns problemas que podem ser resolvidos em sala de aula, com régua e compasso ou com o auxílio de um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, que foi utilizado nessa dissertação.

# Capítulo 1

## Resultados preliminares

### Notações

Representaremos o segmento de extremos  $A$  e  $B$  por  $\overline{AB}$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , isto é, o comprimento do segmento  $\overline{AB}$  indicaremos por  $m(\overline{AB})$ . Para simplificar a notação, usaremos  $m(\overline{AB}) = AB$ . Representaremos a medida do ângulo  $\hat{A}BC$  por  $m(\hat{A}BC)$ . Dados três pontos distintos e colineares  $A, B$  e  $C$ , dizemos que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , e escrevemos,  $A - B - C$ , quando  $AB + BC = AC$ .

**Definição 1.1.** *Dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são congruentes se, e somente se,  $AB = CD$ , isto é,  $\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff AB = CD$ .*

**Definição 1.2.** *Dois ângulos  $\hat{A}BC$  e  $\hat{D}EF$  são congruentes se, e somente se, eles têm a mesma medida, isto é,  $\hat{A}BC \cong \hat{D}EF \iff m(\hat{A}BC) = m(\hat{D}EF)$ .*

**Definição 1.3.** *Dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são congruentes se houver uma correspondência biunívoca entre seus vértices,  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$ , de tal modo que  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e, além disso,  $\hat{B}AC \cong \hat{E}DF$ ,  $\hat{A}BC \cong \hat{D}EF$  e  $\hat{A}CB \cong \hat{D}FE$ .*

Quando escrevermos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , será admitida uma correspondência  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$  entre seus vértices.

Os pré-requisitos para a leitura deste texto são conceitos e resultados básicos de Geometria Plana, que podem ser encontrados em qualquer livro dos Ensinos Fundamental e/ou Médio. A seguir, passamos a listar os resultados que serão utilizados para o desenvolvimento do texto. Algumas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas em [3] ou em [4].

## 1.1 Casos de congruência de triângulos

Admitiremos como postulado, o qual chamaremos de caso *LAL*, o seguinte fato: Se dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são tais que  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  e  $m(\hat{A}BC) = m(\hat{D}EF)$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

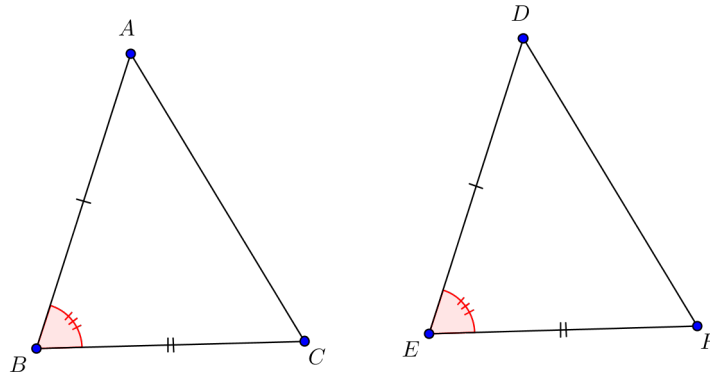


Figura 1.1: caso LAL:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

A partir deste postulado, podemos provar outros dois casos de congruência de triângulos que serão utilizados ao longo do texto.

**Teorema 1.1.** (*Caso ALA*) *Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  e uma correspondência biunívoca entre seus vértices  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$ , se*

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}BC \cong \hat{D}EF \\ BC = EF \\ \hat{A}CB \cong \hat{D}FE \end{array} \right.$$

então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Demonstração.* Seja  $D'$  um ponto da semirreta  $\overrightarrow{ED}$  tal que  $AB = D'E$ , como na Figura 1.2. Pelo caso *LAL*, temos que  $\triangle ABC \cong \triangle D'EF$ , de modo que  $m(\hat{A}CB) = m(\hat{D}'FE)$ . Mas  $m(\hat{A}CB) = m(\hat{D}FE)$  e, portanto,  $m(\hat{D}FE) = m(\hat{D}'FE)$  e como  $D' \in \overrightarrow{ED}$ , segue que  $D' = D$ . Consequentemente, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são congruentes.

□

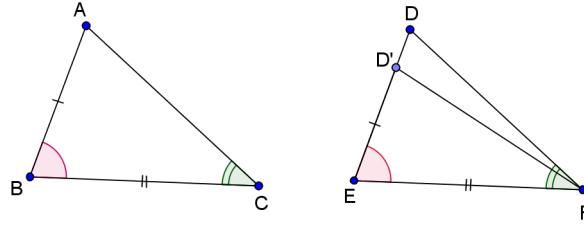


Figura 1.2: caso ALA

**Teorema 1.2.** (Caso LLL) Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  e uma correspondência biunívoca entre seus vértices  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$ , se

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$

então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Demonstração.* Seja  $D'$  um ponto do semiplano oposto ao determinado por  $A$  e pela reta  $\overleftrightarrow{BC}$  tal que  $D'B = DE$  e  $D'\hat{B}C \cong D\hat{E}F$ . Pelo caso *LAL*, temos que  $\triangle DEF \cong \triangle D'BC$ . Consequentemente,  $D'C = DF$ . Como  $D'$  e  $A$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$  então  $\overline{D'A} \cap \overleftrightarrow{BC} \neq \emptyset$ . Seja  $\{X\} = \overline{D'A} \cap \overleftrightarrow{BC}$ .

Devem ocorrer  $X - B - C$ ,  $X = B$ ,  $B - X - C$ ,  $X = C$  ou  $B - C - X$ . Continuamos a prova para o caso  $B - X - C$ , como ilustrado na Figura 1.3. Os outros casos são análogos.

Os triângulos  $\triangle ABD'$  e  $\triangle ACD'$  são isósceles, com base comum  $\overline{AD'}$ . Então,  $m(\hat{B}AD') = m(\hat{B}D'A)$  e  $m(\hat{C}AD') = m(\hat{C}D'A)$ . Segue que  $m(\hat{B}AC) = m(\hat{B}D'C)$  e pelo caso *LAL* temos que  $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$ . Portanto,  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

□

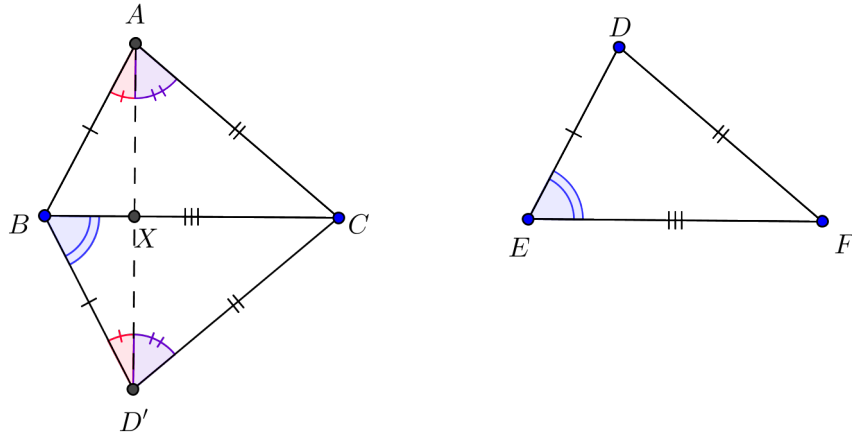


Figura 1.3: caso LLL de congruência

## 1.2 Casos de semelhança de triângulos: AA, LAL e LLL

**Definição 1.4.** Dizemos que dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são semelhantes (e simbolizaremos por  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ) se existe uma correspondência  $ABC \longleftrightarrow DEF$  tal que  $B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$ ,  $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$ ,  $B\hat{C}A \cong E\hat{F}D$  e  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ .

Quando escrevermos  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , será admitida uma correspondência  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$  entre seus vértices.

**Teorema 1.3.** (Caso AA) Se dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são tais que  $B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$  e  $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $m(\hat{A}CB) = 180^\circ - m(\hat{B}AC) - m(\hat{A}BC) = 180^\circ - m(\hat{E}DF) - m(\hat{D}EF) = m(\hat{D}FE)$  e, portanto,  $\hat{A}CB \cong \hat{D}FE$ . A seguir, sejam  $E'$  e  $F'$  pontos das semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , tais que  $AE' = DE$  e  $AF' = DF$ , como na Figura 1.4. Assim, os triângulos  $\triangle AE'F'$  e  $\triangle DEF$  são congruentes pelo postulado LAL, de onde segue que  $m(\hat{A}BC) = m(\hat{D}EF) = m(\hat{A}E'F')$  e  $m(\hat{A}CB) = m(\hat{D}FE) = m(\hat{A}F'E')$  e, portanto,  $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . Pelo Teorema de Tales temos que  $\frac{AE'}{AB} = \frac{AF'}{AC}$ . Logo  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ .

De maneira completamente análoga podemos mostrar que  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ . Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

□



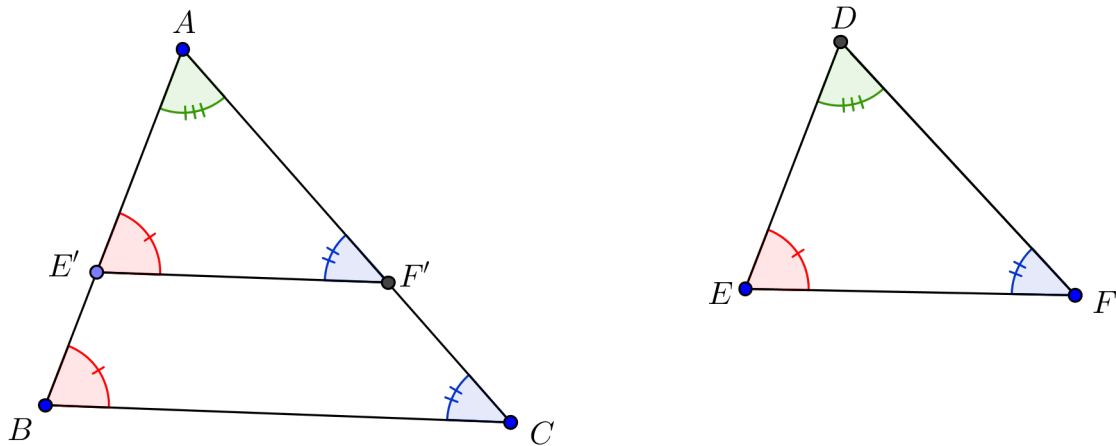


Figura 1.4: caso AA de semelhança

Os outros dois casos de semelhança serão enunciados a seguir, mas as provas serão omitidas e podem ser encontradas em [3] e [4].

**Teorema 1.4.** (Caso LAL de semelhança) Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  e uma correspondência biunívoca  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$  entre seus vértices, se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \\ \widehat{BCA} \cong \widehat{EFD} \end{array} \right.$$

então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  (como ilustrado na figura 1.5).

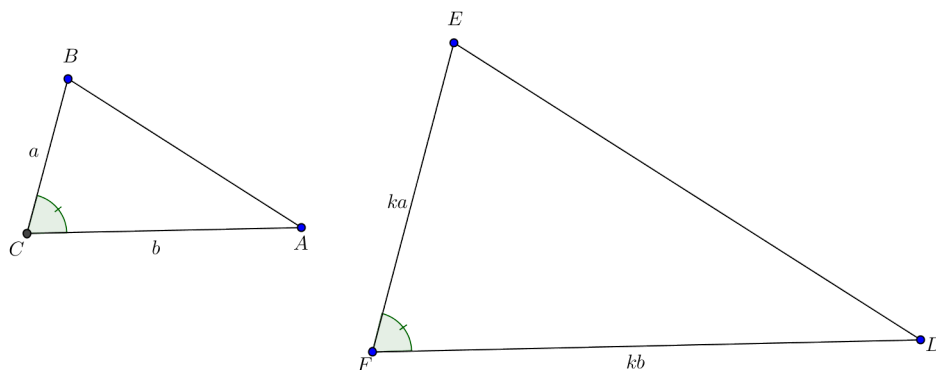


Figura 1.5: caso LAL de semelhança

**Teorema 1.5.** (Caso LLL de semelhança) Dados dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$  e uma correspondência biunívoca  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$  entre seus vértices, se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \end{array} \right.$$

então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  (como ilustrado na figura 1.6)

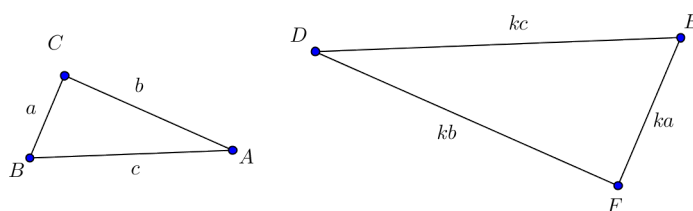


Figura 1.6: caso LLL de semelhança

### 1.3 Relações métricas em um triângulo retângulo

Consideremos um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , de catetos  $AB = c$ ,  $AC = b$  e hipotenusa  $BC = a$ . Seja  $D$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre o lado  $\overline{BC}$ . Como a hipotenusa  $\overline{BC}$  é o maior lado do triângulo  $\Delta ABC$  então  $B - D - C$ . Sejam  $m = CD$ ,  $n = BD$  e  $h = AD$ , como na figura 1.7. Então valem as seguintes relações:

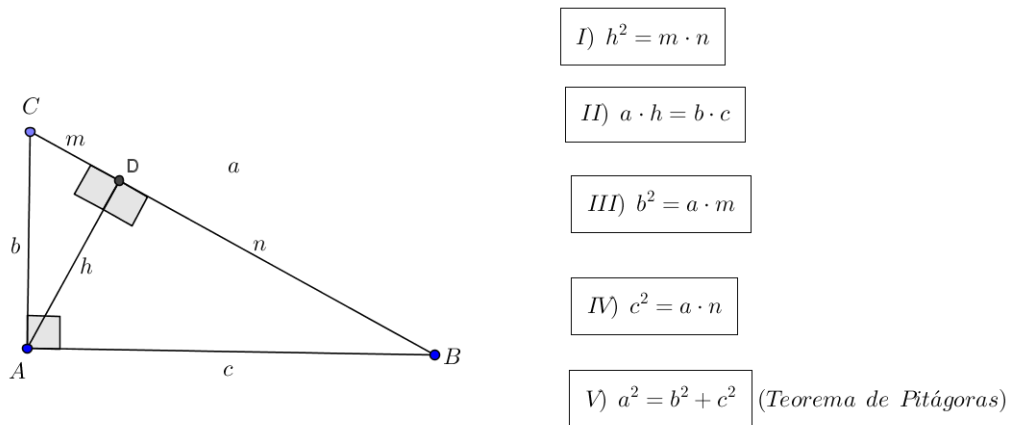


Figura 1.7: Relações métricas no triângulo retângulo

Temos  $m(\widehat{D\hat{C}A}) = 90^\circ - m(\widehat{D\hat{A}C})$ . Mas  $m(\widehat{D\hat{A}C}) = 90^\circ - m(\widehat{D\hat{A}B})$ . Logo  $m(\widehat{D\hat{C}A}) = m(\widehat{D\hat{A}B})$  e pelo caso AA, vale que  $\triangle DCA \sim \triangle DAB$ , de onde segue que  $\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA}$ , isto é,  $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$ . Logo,  $h^2 = m \cdot n$  que é a relação dada em (I).

Pelo caso AA, vale que  $\triangle DCA \sim \triangle ACB$ . Assim,  $\frac{DA}{AB} = \frac{AC}{BC}$ , isto é,  $\frac{h}{c} = \frac{b}{a}$ . Logo  $a \cdot h = b \cdot c$ , obtendo a relação (II). Além disso, temos  $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ , isto é,  $\frac{m}{b} = \frac{b}{a}$ . Logo  $b^2 = a \cdot m$ , que é a relação (III). Da mesma forma, pelo caso AA,  $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ . Assim,  $\frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC}$ , isto é,  $\frac{n}{c} = \frac{c}{a}$ . Logo,  $c^2 = a \cdot n$ , que é a relação (IV).

Para obtermos a relação (V), basta somarmos as equações dadas em (III) e (IV).

## 1.4 Teorema do Ângulo Inscrito

**Definição 1.5.** Consideremos um arco  $\widehat{BC}$  numa circunferência e um ponto A desta circunferência não pertencente ao arco  $\widehat{BC}$ . Dizemos que o ângulo  $B\hat{A}C$  é um ângulo inscrito nesta circunferência.

**Teorema 1.6.** *Consideremos uma circunferência de centro  $O$ . Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos distintos da circunferência tais que  $A \notin \widehat{BC}$ . Então*

$$m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC}).$$

*Demonstração.* Vamos supor que  $O$  pertence ao interior do ângulo  $\widehat{BAC}$ . Neste caso, tracemos o diâmetro  $\overline{AA'}$ . Note que os triângulos  $\triangle ABO$  e  $\triangle ACO$  são isósceles de bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Logo,  $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = \theta_1$  e  $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = \theta_2$  e pelo Teorema de Ângulo Externo, temos  $m(\widehat{BOA'}) = 2\theta_1$  e  $m(\widehat{A'OC}) = 2\theta_2$ , de onde segue que  $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BOA'}) + m(\widehat{A'OC}) = 2 \cdot \theta_1 + 2 \cdot \theta_2 = 2 \cdot (\theta_1 + \theta_2) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$ . □

Os casos em que  $O$  pertence a um dos lados ou ao exterior do ângulo  $\widehat{BAC}$  são análogos.

**Corolário 1.1.** *Se  $\widehat{BC}$  é um um arco de uma circunferência e  $A_1$  e  $A_2$  são pontos desta circunferência não pertencentes ao arco  $\widehat{BC}$ , então  $m(\widehat{BA_1C}) = m(\widehat{BA_2C})$ , isto é, ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são congruentes.*

## 1.5 Relações métricas numa circunferência

Nesta seção obteremos algumas relações métricas envolvendo um ponto  $P$  e segmentos tangentes e/ou secantes a uma circunferência, passando por  $P$ .

**Teorema 1.7.** *Teorema das Cordas*

*Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são duas cordas de uma circunferência que se interceptam num ponto  $P$  (interno à circunferência), então*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \tag{1.1}$$

*Demonstração.* Pelo Corolário 1.1, temos que  $\widehat{BCD}$  e  $\widehat{BAD}$  são ângulos inscritos que interceptam o mesmo arco  $\widehat{DB}$ , portanto, são congruentes. Analogamente, os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ADC}$  também os são, conforme a Figura 1.8. Assim, os triângulos  $\triangle PAD$  e  $\triangle PCB$  são semelhantes (caso AA) e, conseqüentemente  $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ , ou seja,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

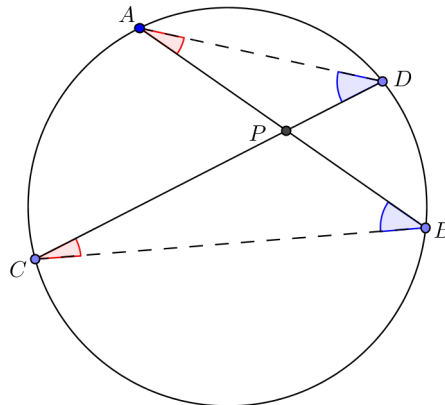


Figura 1.8: Teorema das Cordas

□

**Observação 1.1.** A recíproca do Teorema das Cordas também é verdadeira, isto é, se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são dois segmentos distintos e se interceptam em um único ponto  $P$  tal que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , então os pontos  $A, B, C$  e  $D$  pertencem a uma mesma circunferência, isto é, são concíclicos.

De fato, temos que  $\widehat{APD} \cong \widehat{CPB}$  (pois são opostos pelo vértice). Além disso, como por hipótese temos  $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ , segue que os triângulos  $\triangle APD$  e  $\triangle CPB$  são semelhantes pelo caso LAL. Consequentemente,  $m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{PCB}) = m(\widehat{DCB})$ , isto é, os pontos  $A$  e  $C$  pertencem ao mesmo arco capaz do segmento  $\overline{BD}$  e  $\widehat{DAB} \cong \widehat{DCB}$ , o que mostra que  $A, B, C$  e  $D$  são concíclicos.

### Teorema 1.8. Teorema das Secantes

Se por um ponto  $P$  no exterior de uma circunferência  $\Gamma$  traçarmos uma semirreta  $r$  que a intercepta nos pontos  $A$  e  $B$  e uma semirreta  $s$  que a intercepta nos pontos  $C$  e  $D$  (como na Figura 1.9), então

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Temos que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ADC}$  são inscritos no mesmo arco  $\widehat{AC}$ . Desta forma, os triângulos  $\triangle PDA$  e  $\triangle PBC$  são semelhantes (caso AA) e, portanto,  $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ , isto é,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

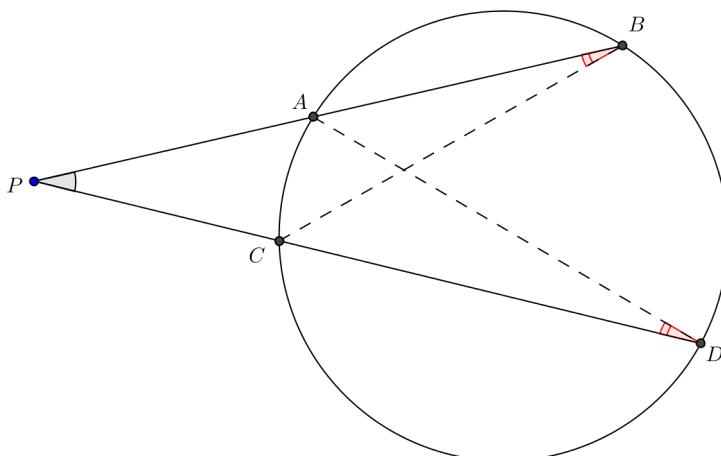


Figura 1.9: Teorema das Secantes

□

**Teorema 1.9.** *Teorema da Secante e Tangente*

Se por um ponto  $P$  no exterior de uma circunferência traçarmos uma semirreta  $r$  que a tangencia no ponto  $A$  e uma semirreta  $s$  que a intercepta nos pontos  $C$  e  $D$  (como na Figura 1.10), então

$$PA^2 = PC \cdot PD \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Temos que os ângulos  $\widehat{PAC}$  e  $\widehat{PDA}$  estão inscritos no mesmo arco  $\widehat{AC}$  e, portanto, são congruentes. Assim, os triângulos  $\triangle PAC$  e  $\triangle PDA$  são semelhantes (caso AA) e, então,  $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PA}$ , ou seja,  $PA^2 = PC \cdot PD$ . □

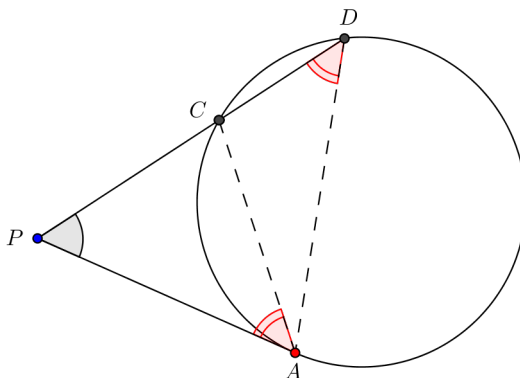


Figura 1.10: Teorema da Secante e Tangente

# Capítulo 2

## Circunferências Ortogonais

Neste capítulo, discutimos o conceito de ângulos entre uma reta e uma circunferência e entre duas circunferências. Particularmente, o caso em que as circunferências são ortogonais, isto é, o ângulo entre elas é reto. Esta discussão será utilizada para motivar o conceito de inversão, que será trabalhado no capítulo seguinte.

### 2.1 Ângulo entre reta e circunferência

**Definição 2.1.** *Dadas uma reta e uma circunferência que se interceptam (ou seja, a reta pode ser tangente ou secante à circunferência), definimos o ângulo entre as mesmas como sendo o menor ângulo entre a reta dada e a reta tangente à circunferência no (s) seu(s) ponto(s) de intersecção.*

Note que, de acordo com a definição, se a reta  $r$  for tangente à circunferência, a reta tangente no ponto de intersecção é a própria reta  $r$ , ou seja, o ângulo entre elas é nulo.

Se a reta for secante à circunferência e não passar pelo seu centro, sendo  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção, as retas tangentes à circunferência por estes pontos se interceptam num ponto  $P$ . Como os triângulos  $PAO$  e  $PBO$  são retângulos de catetos  $OA = OB$  e hipotenusa comum de medida  $OP$ , segue, pelo Teorema de Pitágoras, que  $PA = PB$  e, portanto, os triângulos  $\triangle PAO$  e  $\triangle PBO$  são congruentes pelo caso LLL. Consequentemente, o ângulo entre a reta  $r$  e qualquer uma dessas duas retas tangentes é o mesmo.

Se a reta  $r$  passar pelo centro da circunferência, sendo  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção, as retas tangentes à circunferência por estes pontos serão paralelas. Assim, o ângulo entre a reta  $r$  e qualquer uma dessas duas retas tangentes mede  $90^\circ$  e, nesse caso, dizemos que

a reta e a circunferência são **ortogonais**.

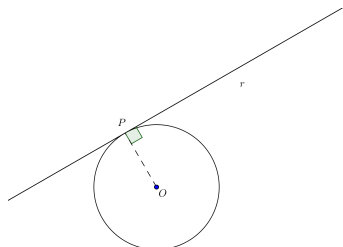


Figura 2.1: O ângulo entre a reta e a circunferência é nulo

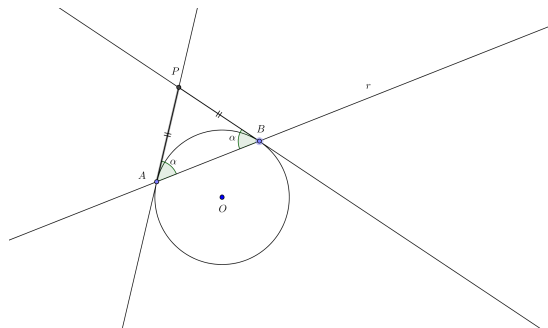


Figura 2.2: O ângulo entre a reta e a circunferência mede  $\alpha$

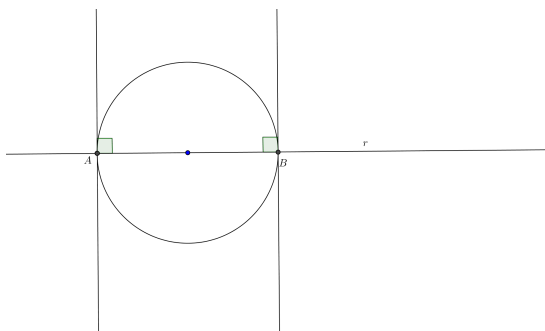


Figura 2.3: O ângulo entre a reta e a circunferência mede  $90^\circ$  (a reta e a circunferência são ortogonais)

## 2.2 Ângulo entre duas circunferências

Antes de definir o ângulo entre duas circunferências, comecemos com o seguinte

**Teorema 2.1.** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas circunferências secantes, que se interceptam nos pontos  $A$  e  $B$ , distintos. Sejam ainda  $s_1$  e  $s_2$  as retas que passam por  $A$  e são tangentes a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, bem como  $t_1$  e  $t_2$  as retas que passam por  $B$  e são tangentes a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente. Sendo  $\theta_1$  a medida do menor ângulo entre  $s_1$  e  $s_2$  e  $\theta_2$  a medida do menor ângulo entre  $t_1$  e  $t_2$ , temos que  $\theta_1 = \theta_2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, e  $P$  e  $Q$  pontos pertencentes às retas  $s_2$  e  $t_2$ , respectivamente, distintos de  $A$  e  $B$ , como na Figura 2.4.



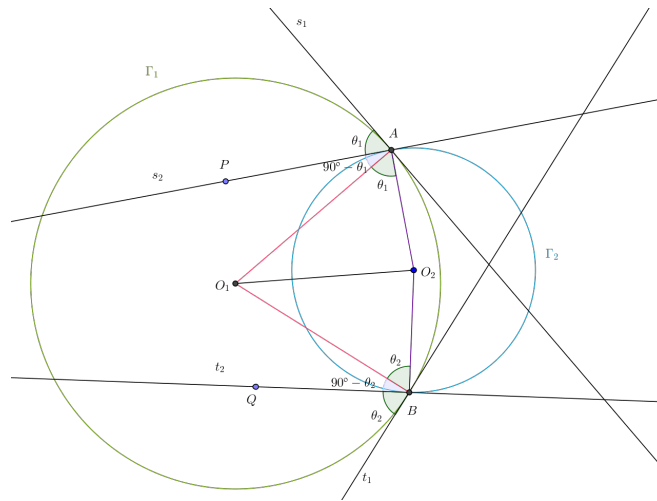


Figura 2.4: Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são congruentes

Já que  $s_1$  é tangente a  $\Gamma_1$  e  $s_2$  é tangente a  $\Gamma_2$ , temos que o ângulo  $O_1\hat{A}P$  mede  $90^\circ - \theta_1$  e, conseqüentemente, o ângulo  $O_1\hat{A}O_2$  mede  $90^\circ - (90^\circ - \theta_1) = \theta_1$ . De maneira completamente análoga, segue que o ângulo  $O_1\hat{B}O_2$  mede  $90^\circ - (90^\circ - \theta_2) = \theta_2$ . Mas os triângulos  $\Delta O_1AO_2$  e  $\Delta O_1BO_2$  são congruentes pelo caso *LLL* e, portanto,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

Note que o que acabamos de mostrar é que o ângulo entre as retas tangentes em cada ponto é congruente ao ângulo formado pelos raios das duas circunferências naquele ponto. Em particular, quando os raios forem perpendiculares nos pontos de intersecção, diremos que as circunferências são **ortogonais**.

□

**Definição 2.2.** Consideremos duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  secantes, sendo  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção de ambas. Pelo ponto  $A$  traçamos as retas  $s_1$  e  $s_2$ , tangentes a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente. Da mesma forma, pelo ponto  $B$  traçamos as retas  $t_1$  e  $t_2$ . Definimos o ângulo entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  como sendo o menor ângulo entre  $s_1$  e  $s_2$  ou entre  $t_1$  e  $t_2$  (como ilustrado na figura a figura 2.5), os quais já mostramos que são congruentes.

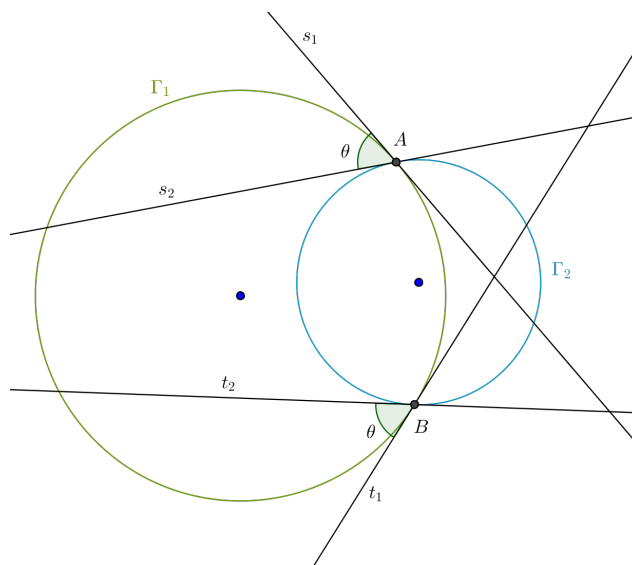


Figura 2.5: o ângulo entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é  $\theta$

**Observação 2.1.** *Por definição, se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  forem tangentes (interna ou externamente), o ângulo entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  será nulo.*

## Capítulo 3

# A inversão em relação a uma circunferência

Neste capítulo, apresentaremos as definições de reflexão em relação a uma reta e de inversão em relação a uma circunferência, bem como suas propriedades.

**Definição 3.1.** *Dada uma reta  $r$ , a reflexão em relação à reta  $r$  é a aplicação que fixa os pontos de  $r$  e associa a cada ponto  $A \notin r$  o ponto  $A'$  tal que  $r$  é a mediatriz de  $\overline{AA'}$ . Nesse caso, dizemos que  $A$  e  $A'$  são simétricos em relação à reta  $r$ .*

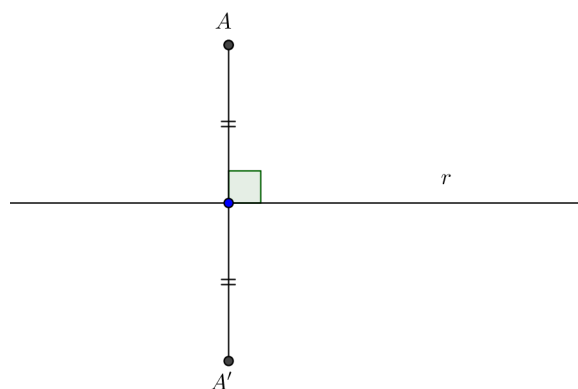


Figura 3.1:  $A$  e  $A'$  são simétricos em relação à reta  $r$

O resultado seguinte nos dá uma alternativa para verificarmos se dois pontos distintos são simétricos em relação a uma reta.

**Teorema 3.1.** *Dada uma reta  $r$ , dois pontos distintos  $A$  e  $A'$  são simétricos em relação a  $r$  se, e somente se, toda circunferência  $\Gamma$  com centro em algum ponto  $O \in r$  que passar pelo ponto  $A$  também passar por  $A'$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  a mediatriz de  $\overline{AA'}$  e  $O \in r$ . Assim,  $OA = OA'$  e, portanto, a circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e que passa por  $A$  (cujo raio é  $OA$ ) também passa por  $A'$ . Reciprocamente, consideremos uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O \in r$  e que passa por  $A$  e  $A'$ . Dessa forma,  $OA = OA'$  e como  $O$  é um ponto qualquer da reta  $r$  e é equidistante de  $A$  e  $A'$ , segue  $r$  é a mediatriz de  $\overline{AA'}$ , de modo que  $A$  e  $A'$  são simétricos em relação a  $r$ . □

**Definição 3.2.** *Consideremos uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  contida num plano  $\alpha$ . A **inversão** de centro  $O$  e raio  $r$  é uma transformação que associa a cada ponto  $A$  do plano  $\alpha$ , distinto de  $O$ , um ponto  $A'$  na semirreta  $\overrightarrow{OA}$  tal que  $OA \cdot OA' = r^2$ . Neste caso, dizemos que  $A'$  é o inverso de  $A$  em relação a  $\Gamma$  (ou que  $A$  e  $A'$  são simétricos em relação a  $\Gamma$ ).*

Motivados pela discussão anterior, veremos que a inversão em relação a uma circunferência pode ser dada a partir de circunferências ortogonais. Antes disto, precisamos dos seguintes resultados auxiliares.

**Lema 3.1.** *Se duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , de centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente, são ortogonais então  $O_1$  está no exterior de  $\Gamma_2$  e  $O_2$  está no exterior de  $\Gamma_1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de intersecção das duas circunferências, os quais existem pois supomos que  $\Gamma_1$  é ortogonal a  $\Gamma_2$ . As retas suportes dos raios  $\overrightarrow{O_1P}$  e  $\overrightarrow{O_2P}$  são tangentes a  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_1$ , respectivamente. Conseqüentemente,  $O_1$  está no exterior de  $\Gamma_2$  e  $O_2$  está no exterior de  $\Gamma_1$ . □

**Lema 3.2.** *Se duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  se interceptam nos pontos  $A$  e  $B$  e são ortogonais a uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$ , então  $O$ ,  $A$  e  $B$  são colineares.*

*Demonstração.* Sejam  $P$  um dos pontos de intersecção entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ ,  $Q$  um dos pontos de intersecção entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_2$ ,  $\{C\} = \overrightarrow{OA} \cap \Gamma_1, C \neq A$  e  $\{D\} = \overrightarrow{OA} \cap \Gamma_2, D \neq A$ . Pelo Teorema 1.9, temos  $OP^2 = OA \cdot OC$  e  $OQ^2 = OA \cdot OD$ , o que implica que  $OC = OD$ , pois  $OP$  e  $OQ$  são raios de  $\Gamma$ . Como  $C$  e  $D$  estão na mesma semirreta de origem  $O$ , segue que  $C = D = B$ , como queríamos mostrar. □

O próximo resultado é uma analogia ao Teorema 3.1. Ele nos dá uma alternativa para verificarmos se dois pontos são simétricos em relação a uma dada circunferência.

**Teorema 3.2.** *Dados uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  e um ponto  $A \neq O$ , temos que  $A'$  é o inverso de  $A$  em relação a  $\Gamma$  se e somente se toda circunferência ortogonal a  $\Gamma$  que passar por  $A$  também passar por  $A'$ .*

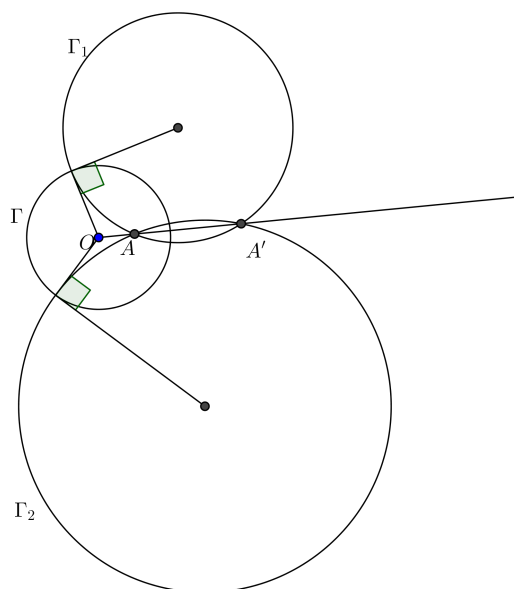


Figura 3.2:  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são ortogonais a  $\Gamma$

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $A'$  dois pontos quaisquer, simétricos em relação a  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$  uma circunferência ortogonal a  $\Gamma$  passando por  $A$  e  $B$  o ponto determinado por  $\overrightarrow{OA} \cap \Gamma_1$ ,  $B \neq A$ , como na figura 3.2. Assim, por definição de inversão, temos  $OA \cdot OA' = r^2$  e pelo Teorema 1.8, segue que  $OA \cdot OB = r^2$ . Consequentemente,  $OA' = OB$  e, pela demonstração do Lema 3.2,  $B$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}$ , de modo que  $B = A'$ , isto é,  $\Gamma_1$  também passa por  $A'$ .

Reciprocamente, sejam  $A$  e  $A'$  dois pontos distintos tais que toda circunferência ortogonal a  $\Gamma$  que passa por  $A$  também passa por  $A'$ . Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas destas circunferências, de modo que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A, A'\}$ . Pelo Lema 3.1,  $O$  está no exterior de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e pelo Lema 3.2, temos que  $O, A$  e  $A'$  estão alinhados. Assim,  $A' \in \overrightarrow{OA}$ . Segue do Teorema 1.8 que  $r^2 = OA \cdot OA'$ . Portanto,  $A'$  e  $A$  são simétricos em relação a  $\Gamma$ .

□

Doravante, designaremos por  $\Gamma$  uma circunferência com centro num ponto  $O$  e com um raio  $r > 0$ , e  $A'$  denotará o inverso de um ponto  $A$  em relação a  $\Gamma$ . Uma observação importante que deve ser feita é que, por definição,  $(A')' = A$ , para qualquer ponto  $A$ , distinto de  $O$ , ou seja, o inverso do inverso de um ponto é o próprio ponto. Dizemos também que a inversão é uma **involução**, isto é, uma aplicação  $I : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ , com  $I(I(x)) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{E}^2$ .

A seguir, vamos enunciar e demonstrar algumas propriedades da inversão que serão extremamente relevantes para o nosso trabalho.

**Proposição 3.1.** *Seja  $A$  um ponto do plano definido por  $\Gamma$ , distinto de  $O$ .*

(a) *se  $A$  pertence ao interior de  $\Gamma$  então  $A'$  pertence ao seu exterior;*

(b) *se  $A$  pertence ao exterior de  $\Gamma$  então  $A'$  pertence ao seu interior;*

(c) *se  $A$  pertence a  $\Gamma$  então  $A' = A$ .*

*Demonstração.* Suponha inicialmente que  $A$  pertence ao interior de  $\Gamma$ , isto é,  $OA < r$ . Multiplicando-se esta desigualdade por  $r$ , temos  $r \cdot OA < r^2 = OA \cdot OA'$ . Logo,  $OA' > r$ . O caso em que  $A$  pertence ao exterior de  $\Gamma$  é completamente análogo. Por fim, se  $A$  pertence a  $\Gamma$ , então  $OA = r$  e  $r^2 = OA \cdot OA'$ , donde  $OA' = r$ . Como  $A'$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OA}$ , segue que  $A = A'$ .

□

Note que a demonstração que acabamos de fazer é algébrica. No entanto, podemos dar uma demonstração geométrica dessa proposição. Além disso, mostraremos como construir, com régua e compasso, o inverso de um ponto  $A$  (distinto de  $O$ ) em relação a  $\Gamma$ .

Se  $A$  está no interior de  $\Gamma$ , trace por  $A$  a reta  $r$ , perpendicular a  $\overrightarrow{OA}$ , que interceptará  $\Gamma$  em dois pontos. Seja  $P$  um destes pontos. Pelo ponto  $P$  traçamos a reta  $s$ , perpendicular a  $\overrightarrow{OP}$  (observe que  $s$  é a reta tangente à circunferência  $\Gamma$  em  $P$ ). Sendo  $X$  a intersecção de  $\overrightarrow{OA}$  e  $s$ , temos  $X = A'$  (simétrico de  $A$  em relação a  $\Gamma$ ), como ilustrado na figura 3.3.

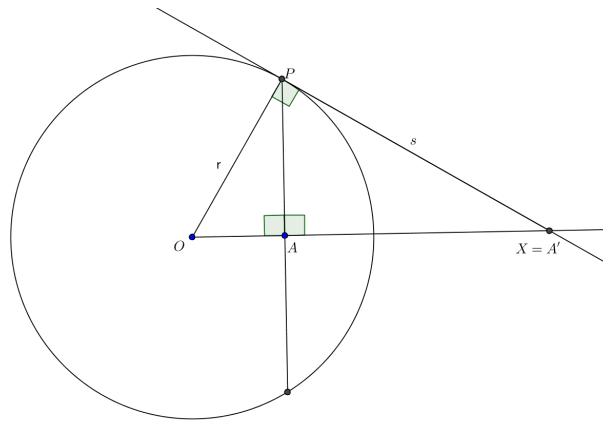


Figura 3.3: inversão de um ponto interno.

A demonstração está no fato de que os triângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle OPX$  são semelhantes pelo caso *AA*. Assim,  $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OX}$ . Ou seja,  $OA \cdot OX = OP^2 = r^2$ . Como  $X \in \overrightarrow{OA}$ , segue que  $X = A'$ . Além disto, como  $A' \in s$ , que é tangente a  $\Gamma$  em  $P$ , então  $A'$  está no exterior de  $\Gamma$ .

Se  $A$  está no exterior de  $\Gamma$ , trace por  $A$  por uma das retas tangentes a  $\Gamma$ , digamos  $s$ , e seja  $P$  o ponto de tangência. Pelo ponto  $P$  trace a reta  $t$ , perpendicular à semirreta  $\overrightarrow{OA}$ . Sendo  $X$  a intersecção de  $\overrightarrow{OA}$  e  $t$ , temos que  $O - X - A$  e  $X$  está no interior de  $\Gamma$ , pois  $\overline{OA}$  é a hipotenusa do triângulo retângulo  $\triangle OPA$ . Assim,  $X = A'$ . A demonstração é análoga ao caso anterior.

No caso em que  $A$  pertence a  $\Gamma$ , não há o que fazer, pois já que  $OA = OA' = r$  e  $A' \in \overrightarrow{OA}$ , então  $A' = A$ .

### 3.1 Propriedades da Inversão

Inicialmente, estudaremos a inversão de retas em relação a  $\Gamma$  e, em seguida, de circunferências. Usaremos os seguintes lemas:

**Lema 3.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos de modo que  $O$ ,  $A$  e  $B$  sejam não colineares. Então,  $O\hat{A}B \cong O\hat{B}'A'$ , isto é, a inversão inverte a orientação de um ângulo.*

*Demonstração.* Sejam  $A'$  e  $B'$  os inversos de  $A$  e  $B$  com relação a  $\Gamma$ , respectivamente. Temos, por definição, que  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$ , isto é,  $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ . Além disso,  $\widehat{AOB} \cong \widehat{B'O'A'}$  (que é o ângulo entre as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ ). Pelo caso *LAL* de semelhança de triângulos, segue que,  $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$  e, em relação à correspondência  $OAB \leftrightarrow OB'A'$ , temos  $\widehat{OAB} \cong \widehat{OB'A'}$ .

□

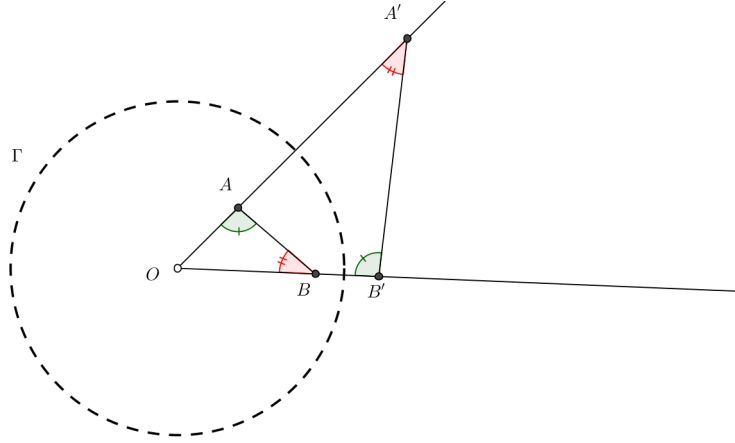


Figura 3.4: Na inversão com relação a  $\Gamma$ , o ângulo  $\widehat{OAB}$  é transformado no ângulo  $\widehat{OB'A'}$  e o ângulo  $\widehat{OBA}$  é transformado no ângulo  $\widehat{O'A'B'}$ .

Observe que na figura 3.4 os pontos  $A$  e  $B$  do Lema 3.3 estão no interior de  $\Gamma$ . No entanto, na demonstração que fizemos independeu do raio da circunferência, já que os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  serão sempre semelhantes.

**Lema 3.4.** Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são pontos pertencentes a uma mesma semirreta de origem  $P$  tais que  $P-X_1-X_2-\dots-X_n$ , então  $P-X'_n-X'_{n-1}-\dots-X'_2-X'_1$ , onde  $X'_i, i = 1, 2, \dots, n$ , é o inverso de  $X_i$  com relação a uma circunferência de centro  $P$ .

*Demonstração.* Temos que  $PX_i \cdot PX'_i = PX_{i+1} \cdot PX'_{i+1} = r^2$ , ou seja  $PX_i = \frac{PX_{i+1} \cdot PX'_{i+1}}{PX'_i}$ .

Como por hipótese temos  $PX_i < PX_{i+1}$ , segue que  $\frac{PX_{i+1} \cdot PX'_{i+1}}{PX'_i} < PX_{i+1}$ , implicando  $PX'_{i+1} < PX'_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , o que completa nossa demonstração.

□



**Proposição 3.2.** *O inverso de uma reta  $s$  em relação a  $\Gamma$  é:*

- (a) *a própria reta  $s$  (exceto  $O$ ), se  $s$  passar por  $O$  (como ilustrado na Figura 3.5);*
- (b) *uma circunferência que passa por  $O$ , se  $s$  não passar por  $O$  (como ilustrado na Figura 3.6).*

*Demonstração.* (a) Inicialmente, mostremos que toda involução é uma aplicação sobrejetiva. De fato, se  $I$  for uma involução do plano, então se  $y \in \mathbb{R}^2$ , temos que  $I(y) = x$  e  $I(x) = I(I(y)) = y$ . Por definição de inversão, todo ponto de  $s$  tem seu inverso na própria reta  $s$  e, dado um ponto  $X \in s$  (distinto de  $O$ ), este será o inverso de  $X'$ , que também pertence a  $s$ . Isso completa nossa demonstração para o item (a).

Esta propriedade nos diz que todos os pontos de uma reta  $s$  que passa pelo ponto  $O$  são levados, pela inversão com relação a  $\Gamma$ , em pontos da própria reta  $s$  (com exceção de  $O$ ). Devemos observar, entretanto, que isto não quer dizer que o inverso de um ponto qualquer dessa reta é o próprio ponto, ou seja, temos somente que  $s$  é invariante pela inversão. Na verdade, os únicos pontos fixos da reta  $s$  pela inversão com relação a  $\Gamma$  são os pontos de intersecção de  $\Gamma$  com  $s$ .

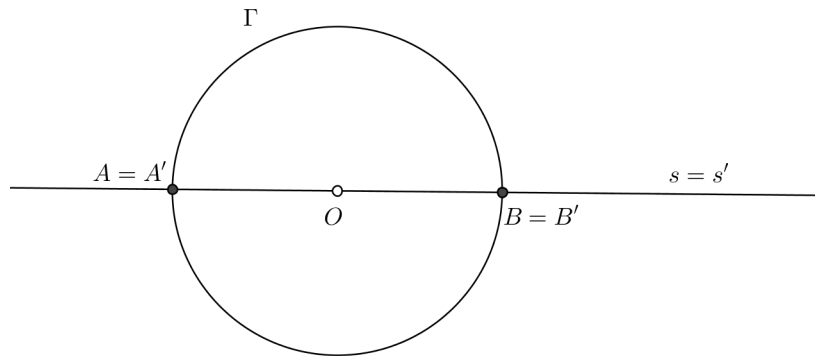


Figura 3.5: inversão de reta que passa por  $O$

Agora, suponhamos que  $O \notin s$  e seja  $P$  o pé da perpendicular baixada de  $O$  com relação à reta  $s$  e  $P'$  seu inverso com relação a  $\Gamma$ . Vamos mostrar que a circunferência  $\Gamma_1$ ,

de diâmetro  $\overline{OP'}$ , é o inverso da reta  $s$ . Com efeito, consideremos um ponto  $A$  qualquer da reta  $s$ , distinto de  $P$ . O segmento  $\overline{OA}$  intercepta  $\Gamma_1$  num ponto  $X \neq O$ , de forma que o ângulo  $O\hat{X}P'$  é reto (pois  $\overline{OP'}$  é um diâmetro de  $\Gamma_1$ ). Por hipótese, temos, então:

$$\begin{cases} m(O\hat{X}P') = m(O\hat{P}A) = 90^\circ \\ X\hat{O}P' \cong P\hat{O}A \end{cases}$$

Assim  $\Delta XOP' \sim \Delta POA$  (caso AA).

Consequentemente,  $\frac{OX}{OP} = \frac{OP'}{OA}$  e

$$OA \cdot OX = OP \cdot OP' = r^2. \quad (3.1)$$

Como  $X \in \overrightarrow{OA}$ , segue que  $X = A'$ , ou seja, todo ponto de  $s$  tem inverso na circunferência de diâmetro  $\overline{OP'}$ , como ilustrado na figura 3.6.

Da mesma forma, segue da equação 3.1 que para todo  $X$  da circunferência de diâmetro  $\overline{OP'}$ , existe o ponto  $\{A\} = \overrightarrow{OX} \cap s$ , que é o inverso de  $X$  com relação a  $\Gamma$ .

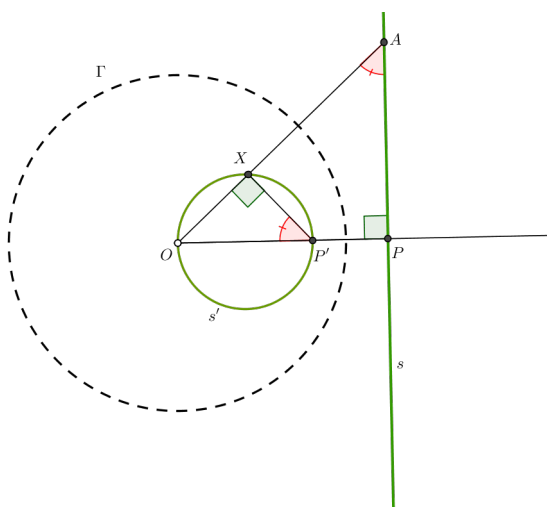


Figura 3.6:  $s'$  é a circunferência de diâmetro  $\overline{OP'}$ .

Na Figura 3.6, a reta  $s$  é exterior a  $\Gamma$  e  $s'$  é interior à mesma. A demonstração é análoga quando  $s$  é tangente ou secante a  $\Gamma$  (não passando por  $O$ ).

□

**Proposição 3.3.** *O inverso de uma circunferência  $\Gamma_1$  em relação a  $\Gamma$  é:*

(a) Uma reta que não passa por  $O$ , se  $\Gamma_1$  passar por  $O$ ;

(b) Uma circunferência que não passa por  $O$ , se  $\Gamma_1$  não passar por  $O$ .

*Demonstração.* (a) Basta fazermos uma construção "inversa" à demonstração do item (b) da Proposição 3.2. Com efeito, seja  $\overline{OP}$  um diâmetro de  $\Gamma_1$  e  $P'$  o seu inverso com relação a  $\Gamma$ . Considere agora a reta perpendicular  $t$  a  $\overleftrightarrow{OP}$  que passa por  $P'$ , como ilustrado na figura 3.7. Sendo  $A$  um ponto qualquer de  $\Gamma_1$  (distinto de  $O$ ) e  $X$  a intersecção de  $\overline{OA}$  com a reta  $t$ , temos que o ângulo  $\hat{OAP}$  é reto (pois  $\overline{OP}$  é um diâmetro de  $\Gamma_1$ ). Além disso, como o ângulo  $\hat{OP'X}$  também é reto e já que os ângulos  $\hat{AOP}$  e  $\hat{P'OX}$  são o mesmo, segue pelo caso AA que os triângulos  $\Delta OAP$  e  $\Delta OP'X$  são semelhantes, ou seja,  $\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OX}$ . Assim,  $OA \cdot OX = OP \cdot OP' = r^2$ , de onde segue que  $X = A'$ , ou seja, todo ponto de  $\Gamma_1$  tem inverso naquela reta. De modo análogo à demonstração do item (b) da Proposição 3.2, todo ponto de  $t$  é imagem de um ponto de  $\Gamma_1$  pela inversão em relação a  $\Gamma$ .

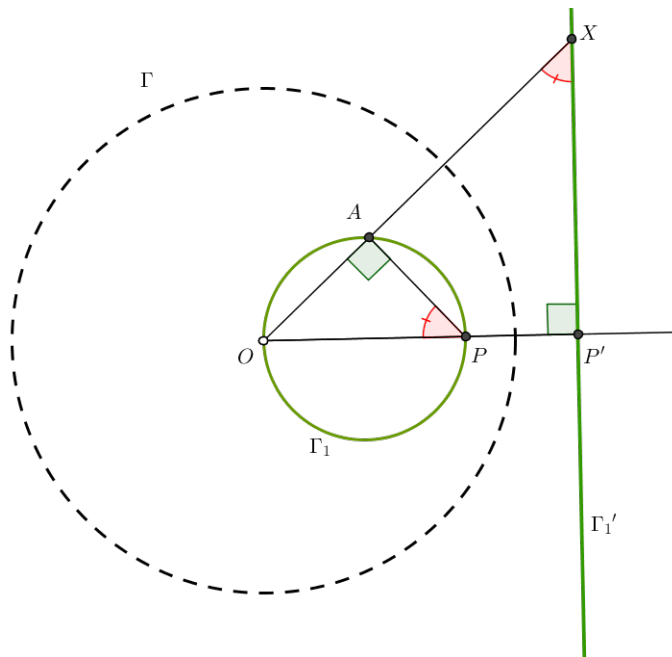


Figura 3.7:  $\Gamma'_1$  é a reta que passa por  $P'$  e é perpendicular a  $\overline{OP'}$

(b) **1º caso:**  $O$  pertence ao interior de  $\Gamma_1$ , como ilustrado na figura 3.8. Considere a reta  $\overleftrightarrow{OO_1}$ , onde  $O_1$  é o centro de  $\Gamma_1$ . Suponha que  $O \neq O_1$  e sejam  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção de  $\overleftrightarrow{OO_1}$  com  $\Gamma_1$ . Assim,  $A$  e  $B$  pertencem a semirretas opostas de

origem  $O$ . Se  $A'$  e  $B'$  são os inversos de  $A$  e  $B$ , respectivamente, em relação a  $\Gamma$ , então  $A'$  e  $B'$  também pertencem a semirretas opostas de origem  $O$ . Se  $X$  é um ponto qualquer de  $\Gamma_1$ , distinto de  $A$  e  $B$ , considere a semirreta  $\overrightarrow{OX}$  e  $X' \in \overrightarrow{OX}$ , o inverso de  $X$ . Pelo Lema 3.3, temos que  $m(\widehat{OBX}) = m(\widehat{OX'B'}) = \alpha$  e  $m(\widehat{OAX}) = m(\widehat{OX'A'}) = \beta$ . Além disso, o triângulo  $AXB$  é retângulo em  $X$  (já que  $\overline{AB}$  é um diâmetro de  $\Gamma_1$ ). Assim,  $\alpha + \beta = 90^\circ$  e  $m(\widehat{A'X'B'}) = m(\widehat{A'X'O}) + m(\widehat{OX'B'}) = \alpha + \beta = 90^\circ$ , ou seja,  $X'$  pertence à circunferência de diâmetro  $\overline{A'B'}$ . No caso de  $O = O_1$ , basta tomar uma reta qualquer passando por  $O = O_1$  e repetir a construção anterior.

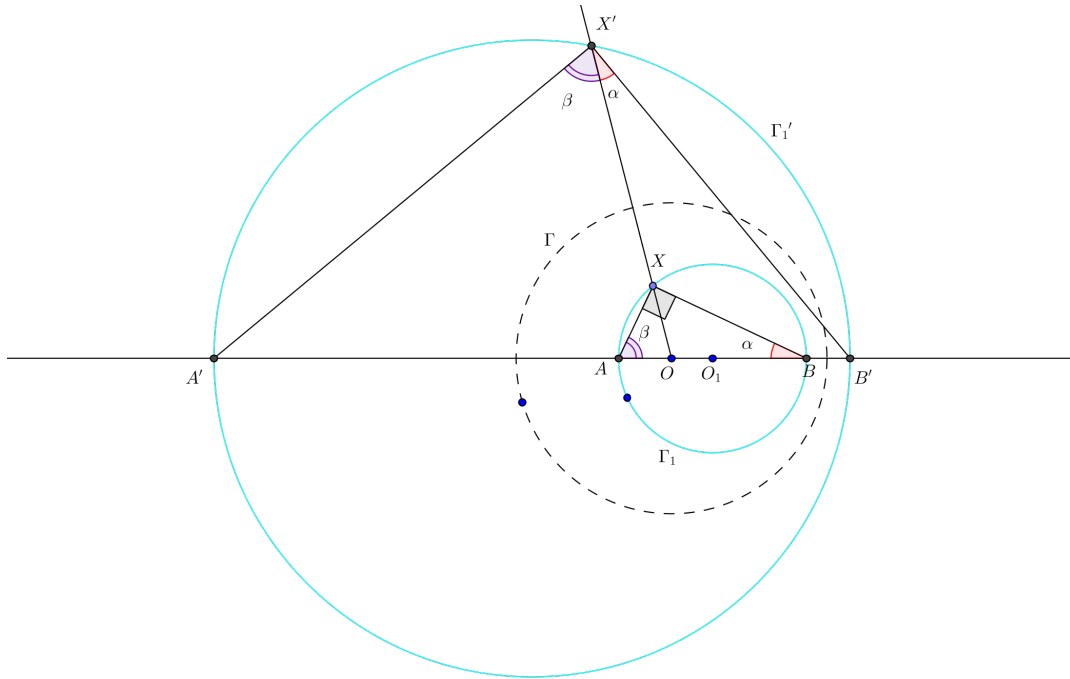


Figura 3.8: inversão de circunferência com  $O$  no interior

**2º caso:  $O$  pertence ao exterior de  $\Gamma_1$ ,** como ilustrado na figura 3.9.

Consideremos a semirreta  $\overrightarrow{OO_1}$  (onde  $O_1$  é o centro de  $\Gamma_1$ ) e sejam  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção de  $\overrightarrow{OO_1}$  com  $\Gamma_1$ , tais que  $O - A - B$ , bem como  $A'$  e  $B'$ , seus inversos, respectivamente, com a relação a  $\Gamma$ . Sejam ainda  $X$  um ponto qualquer de  $\Gamma_1$ ,  $X \neq A$  e  $X \neq B$ , e  $X' \in \overrightarrow{OX}$  seu inverso em relação a  $\Gamma$ . Novamente pelo Lema 3.3 temos que  $m(\widehat{OBX}) = m(\widehat{OX'B'}) = \alpha$  e  $m(\widehat{OX'A'}) = m(\widehat{OAX}) = 90^\circ + \alpha$  (já que o triângulo  $\triangle AXB$  é retângulo em  $X$  e  $\widehat{OAX}$  é um de seus ângulos externos). Como  $O - A - B - B' - A'$ , temos que  $m(\widehat{B'X'A'}) = m(\widehat{OX'A'}) - m(\widehat{OX'B'}) = 90^\circ + \alpha - \alpha = 90^\circ$  e, portanto,  $X'$  pertence à circunferência de diâmetro  $\overline{A'B'}$ .  $\square$

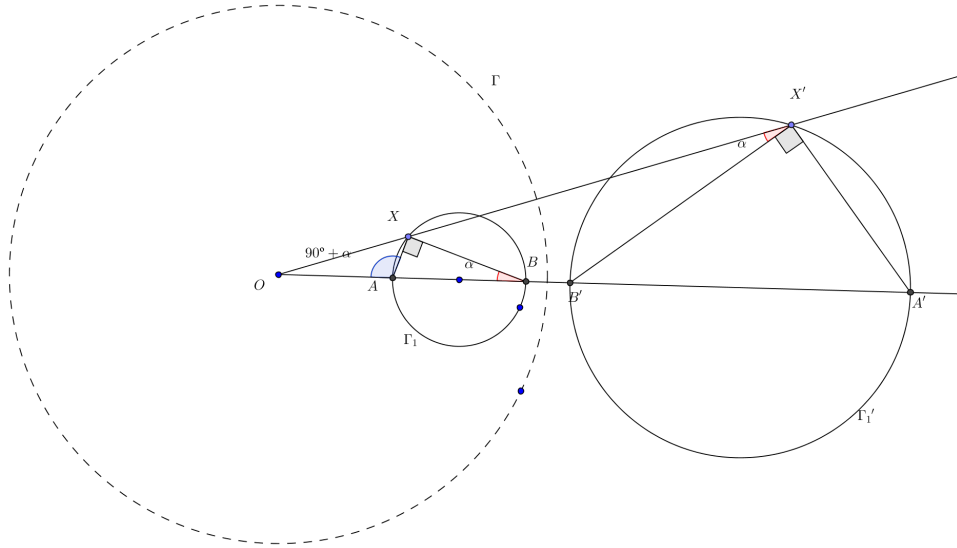


Figura 3.9: inversão de circunferência com  $O$  no exterior

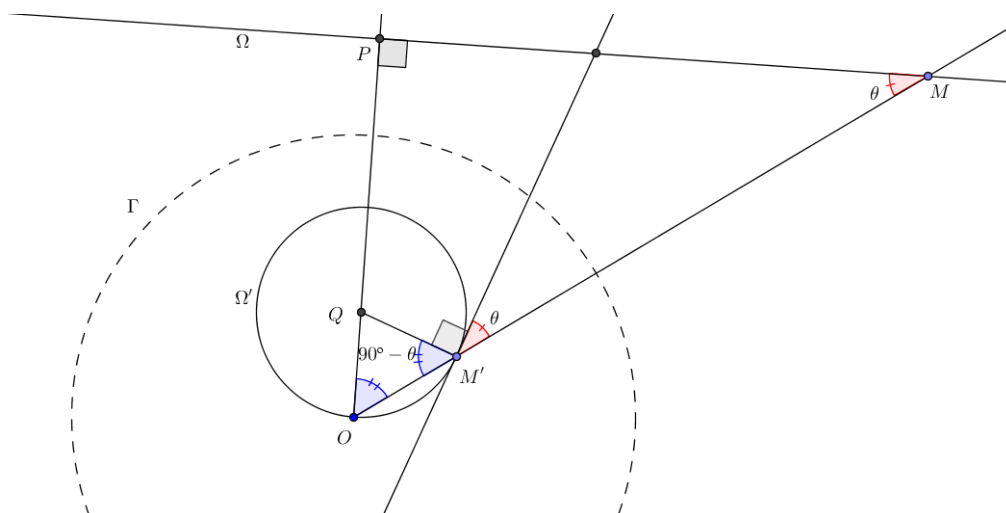
## 3.2 A inversão preserva ângulo entre duas curvas

Nesta seção, provaremos um resultado que será fundamental no estudo dos Problemas de Apolônio. Ele envolve o conceito de ângulo entre duas curvas, que em nosso trabalho estão restritas a duas retas, duas circunferências ou uma reta e uma circunferência. Mostraremos que a inversão preserva o ângulo entre estas curvas, ou seja, é uma transformação conforme.

Antes de enunciar e demonstrar esse fato, temos o seguinte lema. Novamente, consideramos  $\Gamma$  como sendo uma circunferência de centro  $O$ .

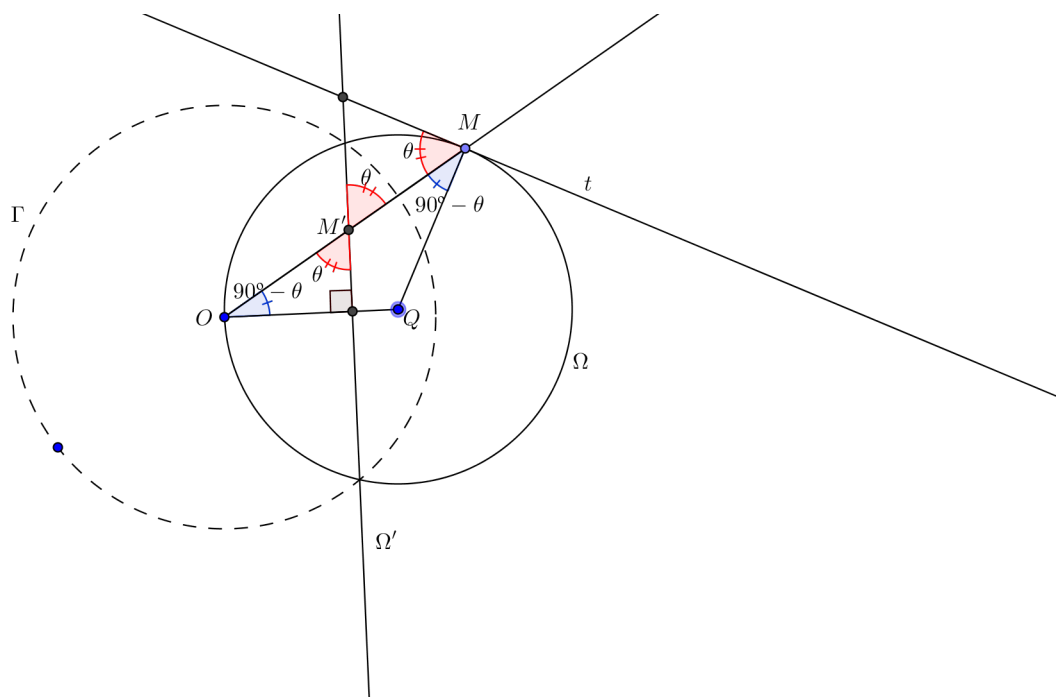
**Lema 3.5.** *Se  $\Omega$  é uma reta ou uma circunferência e  $M \in \Omega$ ,  $M \neq O$ , então o ângulo entre a reta tangente a  $\Omega$  em  $M$  e a semirreta  $\overrightarrow{OM}$  é congruente ao ângulo entre a reta tangente a  $\Omega'$  em  $M'$  e a semirreta  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ , onde  $\Omega'$  e  $M'$  são os inversos de  $\Omega$  e  $M$  em relação a  $\Gamma$ , respectivamente. Lembremos que se  $t$  é uma reta, então a reta tangente a  $t$  num ponto  $M \in t$  é a própria reta  $t$ .*

*Demonstração.* Primeiramente consideremos o caso em que  $\Omega$  é uma reta. Se  $O \in \Omega$  então  $\Omega' = \Omega$  e, portanto, o resultado segue trivialmente. Se  $O \notin \Omega$  então, pela Proposição 3.2,  $\Omega'$  é uma circunferência que passa por  $O$ . Nesse caso, sejam  $P$  o pé da perpendicular de  $O$  sobre  $\Omega$ ,  $M \in \Omega$ ,  $M' \in \Omega'$  o inverso de  $M$ ,  $Q$  o centro de  $\Omega'$  e  $t$  a reta tangente a  $\Omega'$  em  $M'$ , como na figura 3.10.

Figura 3.10:  $\Omega$  é uma reta

Sendo  $\theta$  o ângulo entre  $\Omega$  e a semirreta  $\overrightarrow{OM}$ , temos que  $m(\widehat{QM'O}) = m(\widehat{QOM}) = 90^\circ - \theta$  e como  $t$  é perpendicular a  $\overline{QM'}$ , o ângulo entre a semirreta  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$  e a reta  $t$  é  $180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta$ .

Seja agora  $\Omega$  uma circunferência. Se  $O \in \Omega$  então  $\Omega'$  é uma reta que não passa por  $O$ . Sejam  $M \in \Omega$ ,  $M'$  seu inverso com relação a  $\Gamma$  e  $Q$  o centro de  $\Omega$ , como na figura 3.11.

Figura 3.11:  $\Omega$  é uma circunferência com  $O \in \Omega$

Assim, denotando-se por  $\theta$  o ângulo entre a semirreta  $\overrightarrow{OM}$  e a reta  $t$ , tangente a  $\Omega$  em  $M$ , segue que  $m(\widehat{QOM}) = m(\widehat{QMO}) = 90^\circ - \theta$  e como pela Proposição 3.3, temos que  $\Omega'$  é perpendicular a  $\overline{OQ}$ , temos que o ângulo entre a semirreta  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$  e a reta tangente a  $\Omega'$  em  $M'$  (que nesse caso é a própria  $\Omega'$ ) é igual a  $180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta$ .

Se  $O \notin \Omega$  então, pela Proposição 3.3,  $\Omega'$  é uma circunferência que não passa por  $O$ . Suponhamos inicialmente que  $O$  esteja no exterior de  $\Omega$ . Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros de  $\Omega$  e  $\Omega'$ , respectivamente,  $\{P, Q\} = \overleftrightarrow{O_1O_2} \cap \Omega$  tais que  $O - Q - P$ ,  $M \in \Omega$ ,  $M \neq P$  e  $M \neq Q$ , e seus inversos  $M'$ ,  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente, em relação a  $\Gamma$ , como na figura 3.12.

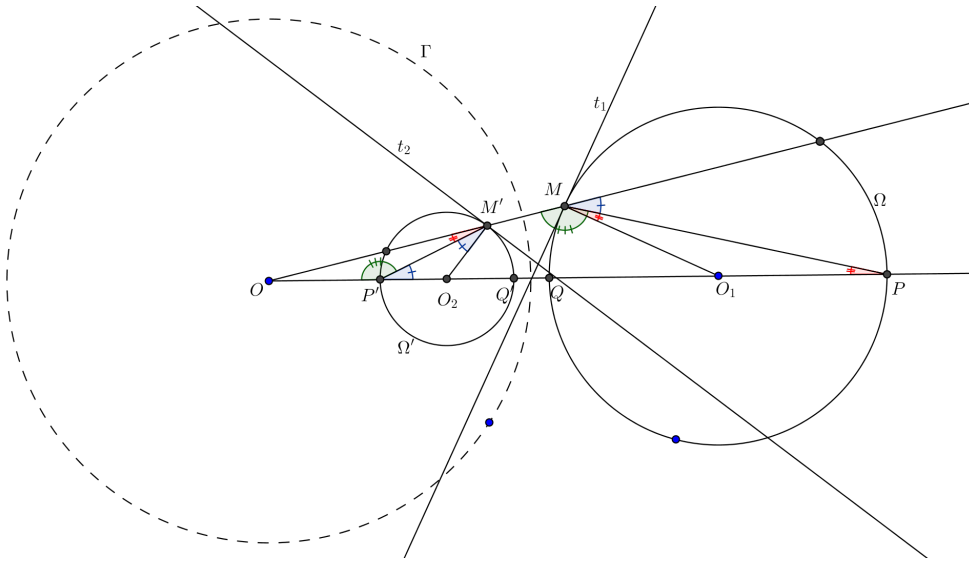


Figura 3.12:  $\Omega$  é uma circunferência com  $O \notin \Omega$

Pelo Lema 3.3,  $m(\widehat{OM'P'}) = m(\widehat{OPM})$  e  $m(\widehat{OP'M'}) = m(\widehat{OMP})$ . Consequentemente,  $m(\widehat{O_1MP}) = m(\widehat{O_1P'M}) = m(\widehat{OM'P'})$  e  $m(\widehat{O_2P'M'}) = m(\widehat{O_2M'P'}) = 180^\circ - m(\widehat{OMP})$  e sendo  $t_1$  e  $t_2$  as retas tangentes a  $\Omega$  em  $M$  e a  $\Omega'$  em  $M'$ , respectivamente, temos que o ângulo entre  $t_1$  e a semirreta  $\overrightarrow{OM}$  é dado por  $90^\circ - m(\widehat{O_1MP}) - (180^\circ - m(\widehat{OMP})) = 90^\circ - m(\widehat{OM'P'}) - m(\widehat{O_2M'P'})$ , que é congruente ao ângulo entre a reta  $t_2$  e a semirreta  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ .

O caso em que  $O$  pertence ao exterior de  $\Gamma$  é análogo.

□

**Proposição 3.4.** *Se  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são duas retas (concorrentes), uma reta e uma circunferência (tangentes ou secantes) ou duas circunferências (tangentes ou secantes), então o ângulo entre  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  é congruente ao ângulo entre  $\Omega'_1$  e  $\Omega'_2$ , onde  $\Omega'_1$  e  $\Omega'_2$  são os inversos de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  em relação a  $\Gamma$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Sejam  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  (não disjuntas) duas retas, uma reta e uma circunferência ou duas circunferências,  $\{M\} = \Omega_1 \cap \Omega_2$  e  $t_1$  e  $t_2$  as retas tangentes a  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente, bem como  $t_3$  e  $t_4$  as retas tangentes a  $\Omega'_1$  e  $\Omega'_2$ , respectivamente, em  $\{M'\} = \Omega'_1 \cap \Omega'_2$ , como na figura 3.13.

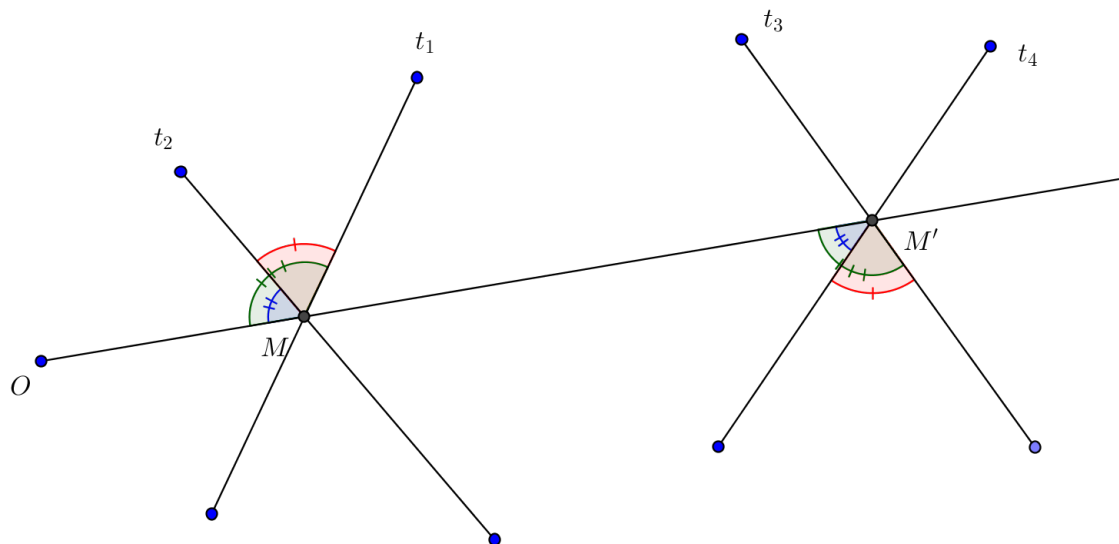


Figura 3.13: inversão preserva ângulo entre retas

Pelo Lema 3.5, temos que os ângulos entre a semirreta  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$  e  $t_1$  e entre  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$  e  $t_3$  são congruentes, bem como os ângulos entre  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$  e  $t_2$  e entre  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$  e  $t_4$ . Consequentemente, o ângulo entre  $t_1$  e  $t_2$  e entre  $t_3$  e  $t_4$  também são congruentes.

□



# Capítulo 4

## Os problemas de Apolônio

Neste capítulo vamos enunciar e resolver alguns dos problemas de Apolônio, cujo enunciado mais geral é:

*Dados três objetos, cada um dos quais quais é um ponto, uma reta ou uma circunferência, construir todas as circunferências tangentes aos três simultaneamente.*

No caso em que o objeto é um ponto, dizemos que uma circunferência é tangente a um ponto quando este pertencer à mesma.

Observe que há 10 casos possíveis, quanto aos tipos destes objetos, quais sejam:

1) três pontos 2) dois pontos e uma reta 3) dois pontos e uma circunferência 4) um ponto e duas retas 5) um ponto e duas circunferências 6) um ponto, uma reta e uma circunferência 7) uma reta e duas circunferências 8) duas retas e uma circunferência 9) três retas 10) três circunferências.

Obviamente, dependendo da disposição destes objetos, o problema pode não ter solução, como por exemplo 3 pontos alinhados, uma reta e dois pontos em semiplanos opostos em relação a esta reta.

Neste capítulo, vamos resolver alguns destes casos, incluindo o caso número 10, que consideramos ser o mais difícil de ser analisado e o mais interessante, pela possibilidade de ser resolvido usando-se Geometria Inversiva.

**Problema 1:** Três pontos não colineares.

Por três pontos  $A, B$  e  $C$ , não colineares, existe uma única circunferência que os contém. Para construirmos esta circunferência, basta determinarmos o encontro de duas mediatrizes dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ . O encontro dessas mediatrizes é o centro de tal circunferência.

**Problema 2:** Dois pontos e uma reta.

Sejam  $r$  uma reta e  $A$  e  $B$  dois pontos distintos no mesmo semiplano em relação a  $r$ .

Suponha o problema resolvido, isto é, consideremos uma circunferência que passa por  $A$  e  $B$  e é tangente à reta  $r$ . Seja  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $A$  e raio qualquer. A inversão em relação a  $\Gamma$  transforma a reta  $r$  numa circunferência que passa por  $A$ , que chamaremos de  $r'$ . Seja  $B'$  o inverso de  $B$  em relação a  $\Gamma$ . Pelo ponto  $B'$  traçamos as retas tangentes a  $r'$ , digamos  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , como ilustrado na figura 4.1.

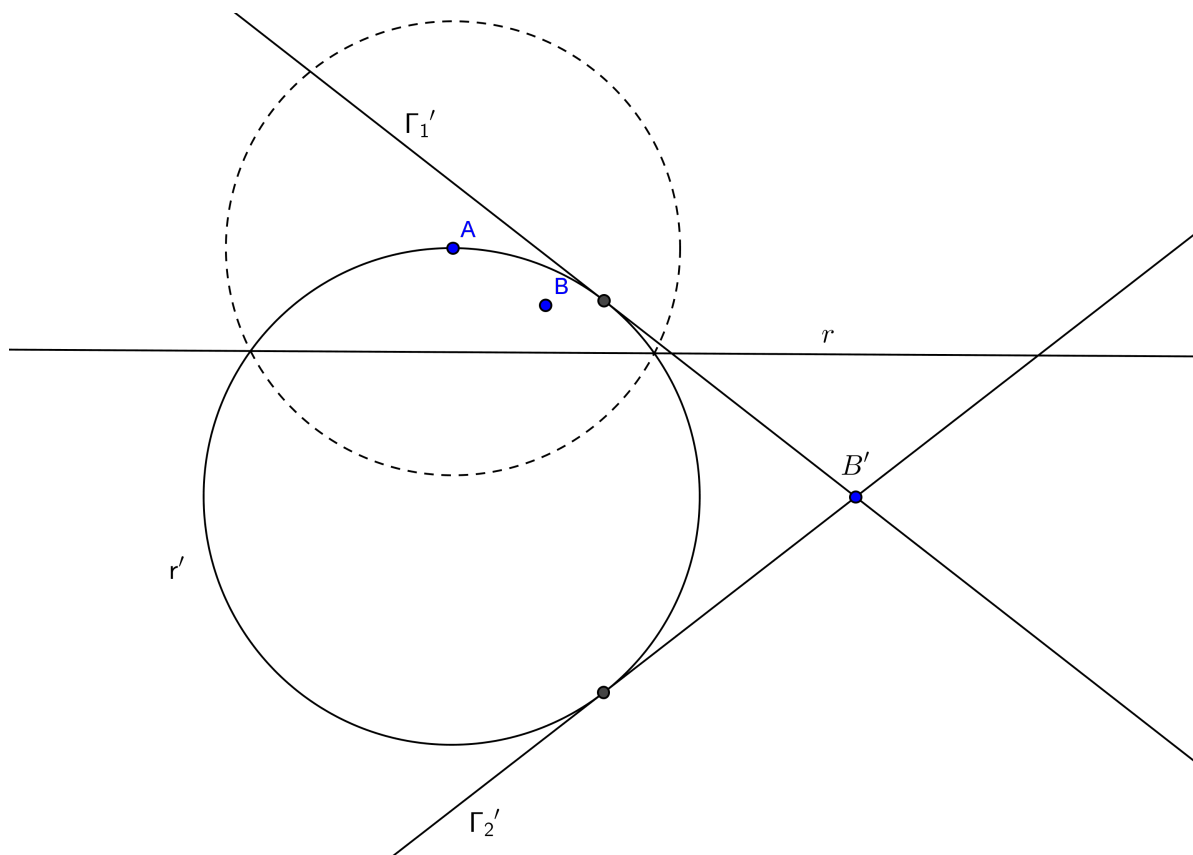


Figura 4.1: Caso dois pontos e uma reta

Como  $A$  não pertence a nenhuma destas retas, temos que a inversão destas retas em relação à circunferência  $\Gamma$  são duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  tangentes a  $r$  (já que  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são tangentes a  $r'$ ) e passam por  $A$  e  $B$ , como ilustrado na figura

## 4.1 O problema de Apolônio para três circunferências

Nesta seção, vamos resolver o caso mais geral do problema de Apolônio número 10:

*dadas três circunferências  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ , externas duas a duas, construir as circunferências tangentes simultaneamente às três.*

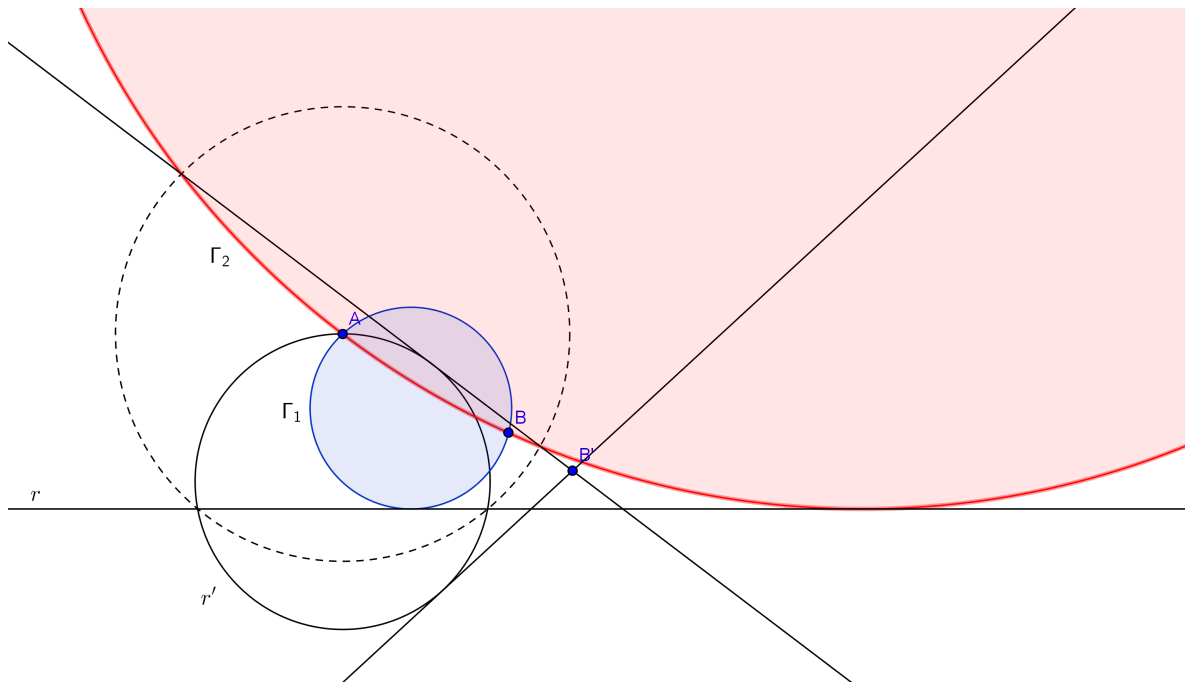


Figura 4.2:  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as soluções

Começemos com o seguinte lema.

**Lema 4.1.** *Existe uma inversão que transforma duas circunferências externas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em duas circunferências concêntricas.*

*Demonstração.* Primeiro, mostraremos que se  $s$  for a reta que passa pelos centros de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  então existe uma circunferência  $\Sigma$ , com centro em  $s$ , ortogonal a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$ .

De fato, seja  $A$  uma das intersecções de  $s$  com  $\Gamma_2$ . Os inversos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  com relação a uma circunferência  $\Gamma$  de centro em  $A$  e secante a  $\Gamma_2$  são  $\Gamma'_1$  (que é uma circunferência com centro em  $s$ ) e  $\Gamma'_2$  (que é uma reta perpendicular a  $s$  e secante a  $\Gamma_2$ ). Assim, sendo  $\{M\} = \Gamma'_2 \cap s$  e já que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma'_1 \cap \Gamma'_2 = \emptyset$ , segue que  $M$  é externo a  $\Gamma'_1$ , de modo que podemos considerar  $\overleftrightarrow{MN}$  tangente a  $\Gamma'_1$ , com  $N \in \Gamma'_1$  e  $\Sigma_1$  a circunferência de centro  $M$  e raio  $MN$ , como na figura 4.3.

Observe que  $\Sigma_1$  é ortogonal a  $\Gamma'_1$  e a  $\Gamma'_2$ . Além disso, como  $M$  pertence ao interior de  $\Gamma_2$  e  $A \in \Gamma_2$ , temos que  $MN > MA$ , ou seja,  $A$  não pertence a  $\Sigma_1$ , de modo que  $\Sigma'_1 = \Sigma$  (o inverso de  $\Sigma_1$  com relação a  $\Gamma$ ) é uma circunferência ortogonal a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$ , de acordo com a Seção 3.2.

Para demonstrar o lema, sejam  $P$  e  $Q$  as intersecções de  $\Sigma$  com a reta  $s = \overleftrightarrow{O_1O_2}$ . Vamos considerar agora uma inversão com centro em um destes dois pontos, digamos  $P$ ,

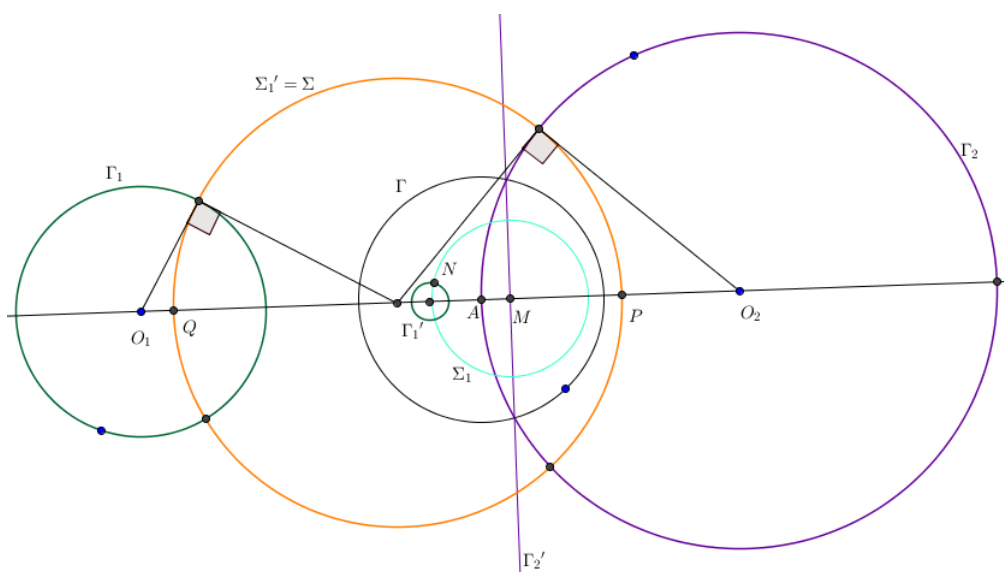


Figura 4.3:  $\Sigma$  é ortogonal a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$

que pertence ao interior de  $\Gamma_1$  e ao exterior de  $\Gamma_2$ . Esta inversão transforma  $\Gamma_1$  em uma circunferência  $\Gamma'_1$  com centro em  $C_1 \in s$  e  $\Sigma$  em uma reta  $\Sigma'$ , perpendicular a  $s$ . Como  $\Sigma$  é ortogonal a  $\Gamma_1$ , segue que  $\Sigma'$  é ortogonal a  $\Gamma'_1$  e, portanto,  $\Sigma'$  passa por  $C_1$ . Por outro lado, tal inversão transforma  $\Gamma_2$  em uma circunferência  $\Gamma'_2$ , com centro em  $C_2 \in s$  e já que  $\Sigma$  também é ortogonal a  $\Gamma_2$ , segue que  $\Sigma'$  é ortogonal a  $\Gamma'_2$ , ou seja,  $\Sigma'$  passa por  $C_2$ . Consequentemente, temos que  $C_1 = C_2 = C$ , o que mostra que  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são concêntricas de centro  $C$ , como pode ser visto na figura 4.4

□

Voltando ao problema de Apolônio proposto no início da seção, transformamos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em duas circunferências concêntricas  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , por uma inversão com centro  $P$ , que pertence ao interior de  $\Gamma_1$ . Que posição  $\Gamma'_3$  ocupará em relação a  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ ? Vamos mostrar que  $\Gamma'_3$  está contida no interior da coroa circular limitada por  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ . Para demonstrar isto, comecemos com as seguintes proposições:

**Proposição 4.1.** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  circunferências externas e  $P$  um ponto do interior de  $\Gamma_1$ . Se  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são os inversos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, em relação a uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $P$ , então  $\Gamma'_2$  pertence ao interior de  $\Gamma'_1$ .*

*Demonstração.* Observemos inicialmente que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma'_1 \cap \Gamma'_2 = \emptyset$ . Consideremos, então, a reta  $\overleftrightarrow{PO_2}$ , onde  $O_2$  é o centro de  $\Gamma_2$  e sejam  $\{X_1, X_2\} = \overleftrightarrow{PO_2} \cap \Gamma_1$  e  $\{Y_1, Y_2\} = \overleftrightarrow{PO_2} \cap \Gamma_2$ , tais que  $X_1 - P - X_2 - Y_1 - O_2 - Y_2$ .

Sendo  $X'_1, X'_2, Y'_1$  e  $Y'_2$ , respectivamente, os inversos de  $X_1, X_2, Y_1$  e  $Y_2$  com relação a  $\Gamma$ , segue pelo Lema 3.4 que  $X'_1 - P - Y'_2 - Y'_1 - X'_2$ . Como  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são circunferências tais que  $\overline{X'_1 X'_2}$  é uma corda de  $\Gamma'_1$  e  $\overline{Y'_1 Y'_2}$  é uma corda de  $\Gamma'_2$ , segue que  $\Gamma'_2$  está contida em  $\Gamma'_1$ .

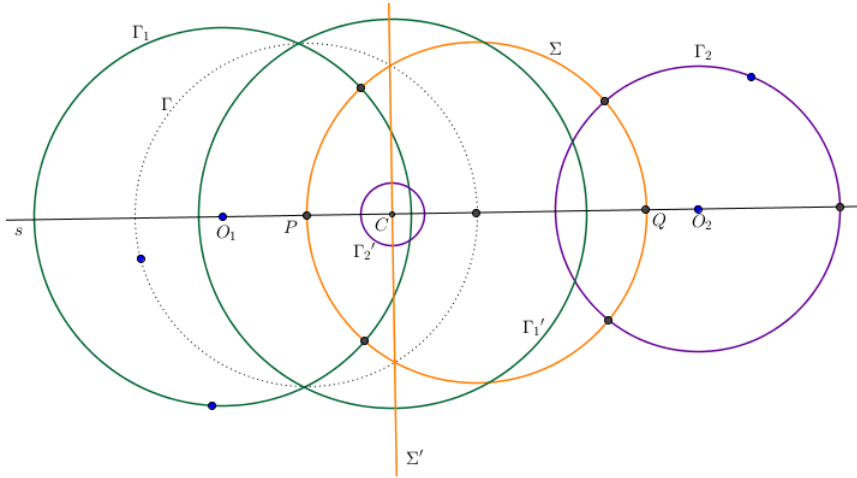


Figura 4.4:  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são concêntricas de centro  $\{C\} = s \cap \Sigma'$

□

**Proposição 4.2.** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  circunferências externas e  $P$  um ponto exterior às duas. Se  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são os inversos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, em relação a uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $P$ , então  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são duas circunferências externas.*

*Demonstração.* Temos que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma'_1 \cap \Gamma'_2 = \phi$ , ou seja,  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  não podem ser secantes nem tangentes. Suponhamos então, por absurdo, que uma delas esteja contida na outra. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\Gamma'_1$  está contida no interior de  $\Gamma'_2$ . Consideremos a reta  $\overrightarrow{PC_1}$ , onde  $C_1$  é o centro de  $\Gamma'_1$ . Esta reta interceptará  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  em dois pontos cada uma, digamos  $\{B', C'\}$  e  $\{A', D'\}$ , respectivamente, todos distintos dois a dois. Novamente, sem perda de generalidade, podemos supor que  $A' - B' - C' - D'$ . Agora, notemos que  $P$  não pode coincidir com nenhum destes quatro pontos, pois caso contrário  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$  seria uma reta (já que o inverso de uma circunferência que passa pelo centro de inversão é uma reta). Se  $P - A' - B' - C' - D'$ , então pelo lema 3.4, temos que  $P - D - C - B - A$  (onde  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente, são os inversos de  $A', B', C'$  e  $D'$  em relação a  $\Gamma$ ). Assim,  $\overline{BC}$  seria uma corda de  $\Gamma_1$  contida em uma corda  $\overline{AD}$  de  $\Gamma_2$ , o que contraria a hipótese de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  serem externas. O caso em que  $A' - B' - C' - D' - P$  é completamente análogo. Por fim, se  $A' - P - D'$  segue que  $A - P - D$ , ou seja,  $P$  pertence à corda  $\overline{AD}$  de  $\Gamma_2$ , o que contraria a hipótese de  $P$  ser externo a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$ .

□

Pelas Proposições 4.1 e 4.2, segue que  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$  estão contidas em  $\Gamma'_1$  e, além disso,  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$  são externas. Isso mostra que  $\Gamma'_3$  está contida na coroa circular limitada por  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ .

Nosso problema agora é, então, desenhar as circunferências tangentes simultaneamente a  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$  e, em seguida, invertê-las com relação a  $\Gamma$ , já que se  $\Omega'$  é tangente a  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$ , então  $\Omega$  é tangente a  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ . Isso reduz o problema original a um caso bem particular. Notemos primeiramente que se  $\Omega'$  é tangente a  $\Gamma'_1$  e a  $\Gamma'_2$  (que são concêntricas) então seu raio é igual a  $\frac{r_1 - r_2}{2}$  ou  $\frac{r_1 + r_2}{2}$ , conforme  $\Omega'$  seja tangente externamente ou internamente a  $\Gamma'_2$ , respectivamente, em que  $r_1$  e  $r_2$  denotam os raios de  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , respectivamente. Inicialmente, vamos construir as circunferências de raio  $\frac{r_1 - r_2}{2}$ . Essas circunferências podem ser tangentes interna ou externamente a  $\Gamma_3$ . Como essas circunferências são tangentes externamente a  $\Gamma'_2$  e internamente a  $\Gamma'_1$ , seu centro está a uma distância  $\frac{r_1 - r_2}{2} + r_2 = \frac{r_1 + r_2}{2}$  de  $C$  (centro de  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ ). Traçamos, então, uma circunferência  $\Psi_1$  de centro  $C$  e raio  $\frac{r_1 + r_2}{2}$ .

Temos agora dois casos: 1) Se  $\Omega'$  é tangente externamente a  $\Gamma'_3$ , então a distância do centro  $C_3$  de  $\Gamma'_3$  ao centro de  $\Omega'$  é igual a  $\frac{r_1 - r_2}{2} + r_3$ , onde  $r_3$  é o raio de  $\Gamma'_3$ . Construimos, então a circunferência  $\Psi_2$  com centro em  $C_3$  e raio  $\frac{r_1 - r_2}{2} + r_3$  e sejam  $\Psi_1 \cap \Psi_2 = \{K_1, K_2\}$ . Consequentemente, as circunferências  $\Omega'_1$  e  $\Omega'_2$  de centros  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente, e raio  $\frac{r_1 - r_2}{2}$  são tangentes externamente a  $\Gamma'_2$  e a  $\Gamma'_3$  e internamente a  $\Gamma'_1$ , como na figura 4.5.

2) Se  $\Omega'$  é tangente internamente a  $\Gamma'_3$ , então a distância do centro  $C_3$  de  $\Gamma'_3$  ao centro de  $\Omega'$  é igual a  $\frac{r_1 - r_2}{2} - r_3$ . Construimos, então a circunferência  $\Psi_3$  com centro em  $C_3$  e raio  $\frac{r_1 - r_2}{2} - r_3$  e sejam  $\Psi_1 \cap \Psi_3 = \{K_3, K_4\}$ . Consequentemente, as circunferências  $\Omega'_3$  e  $\Omega'_4$  de centros  $K_3$  e  $K_4$  e raio  $\frac{r_1 - r_2}{2}$  são tangentes internamente a  $\Gamma'_1$  e a  $\Gamma'_3$  e externamente a  $\Gamma'_2$ , como na figura 4.6. Observemos que como  $\Gamma'_3$  está contida na coroa circular de raios  $r_1$  e  $r_2$ , segue que  $r_1 - r_2 > 2r_3$ , ou seja,  $\frac{r_1 - r_2}{2} - r_3 > 0$ .

Vejamos agora as circunferências  $\Omega'$  de raio  $\frac{r_1 + r_2}{2}$  (que são tangentes internamente a  $\Gamma'_2$ ). Nesse caso, a distância de  $C$  ao centro dessas circunferências é igual a  $\frac{r_1 + r_2}{2} - r_2 = \frac{r_1 - r_2}{2}$ . Seja então,  $\Psi_4$  a circunferência de centro  $C$  e raio  $\frac{r_1 - r_2}{2}$ . Aqui novamente temos dois casos:

1) Se  $\Omega'$  é tangente externamente a  $\Gamma'_3$ , a distância de  $C_3$  ao centro de  $\Omega'$  é igual a  $\frac{r_1 + r_2}{2} + r_3$ . Construimos então a circunferência  $\Psi_5$  com centro em  $C_3$  e raio  $\frac{r_1 + r_2}{2} + r_3$  e sejam  $\Psi_4 \cap \Psi_5 = \{K_5, K_6\}$ . Dessa forma, as circunferências  $\Omega'_5$  e  $\Omega'_6$  de centros  $K_5$  e  $K_6$  e raio  $\frac{r_1 + r_2}{2}$  são tangentes internamente a  $\Gamma'_1$  e a  $\Gamma'_2$  e externamente a  $\Gamma'_3$ , como na figura 4.7.

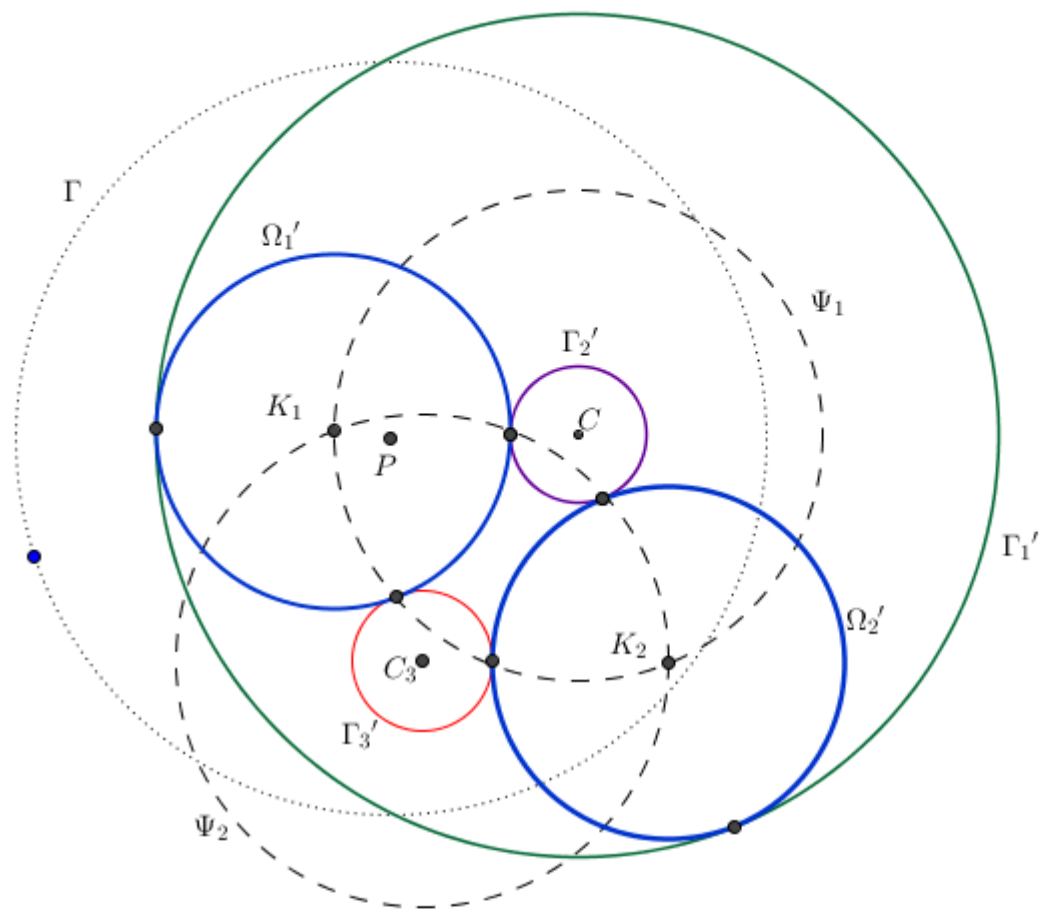


Figura 4.5:  $\Omega_1'$  e  $\Omega_2'$  são tangentes externamente a  $\Gamma_2'$  e a  $\Gamma_3'$

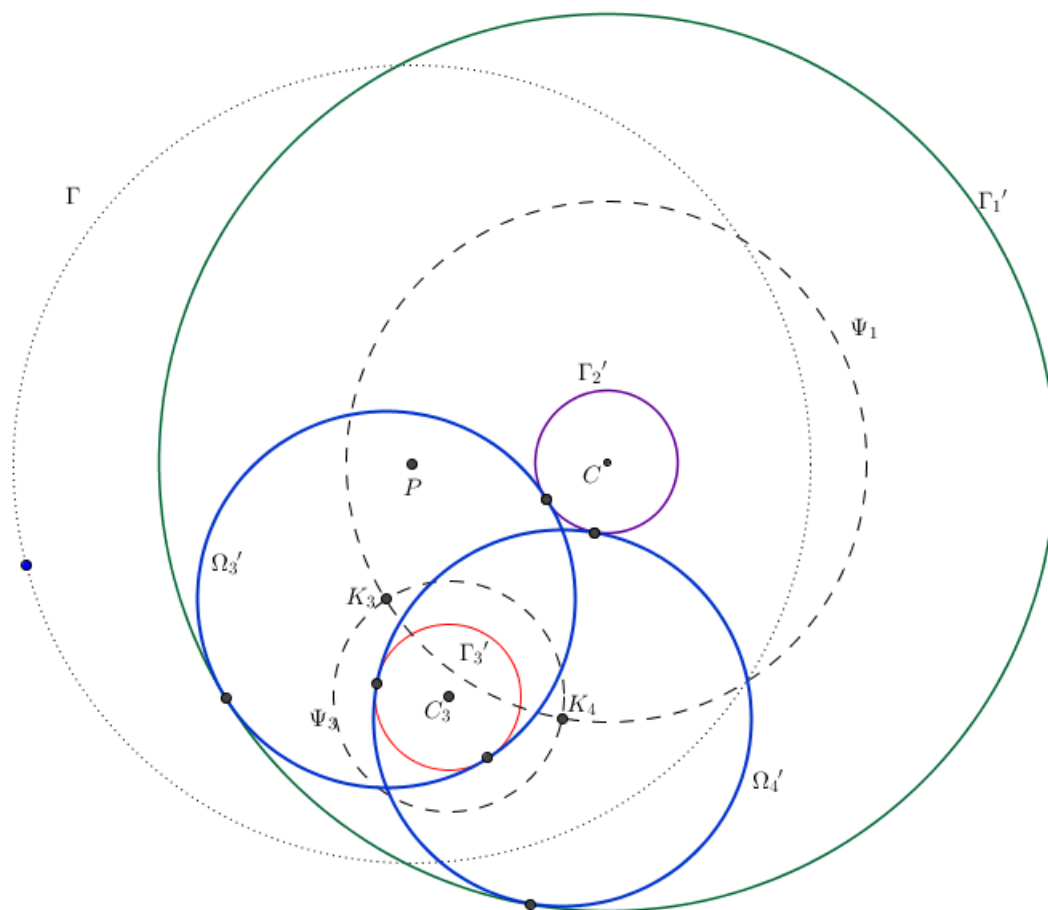


Figura 4.6:  $\Omega_3'$  e  $\Omega_4'$  são tangentes externamente a  $\Gamma_2'$  e internamente a  $\Gamma_3'$



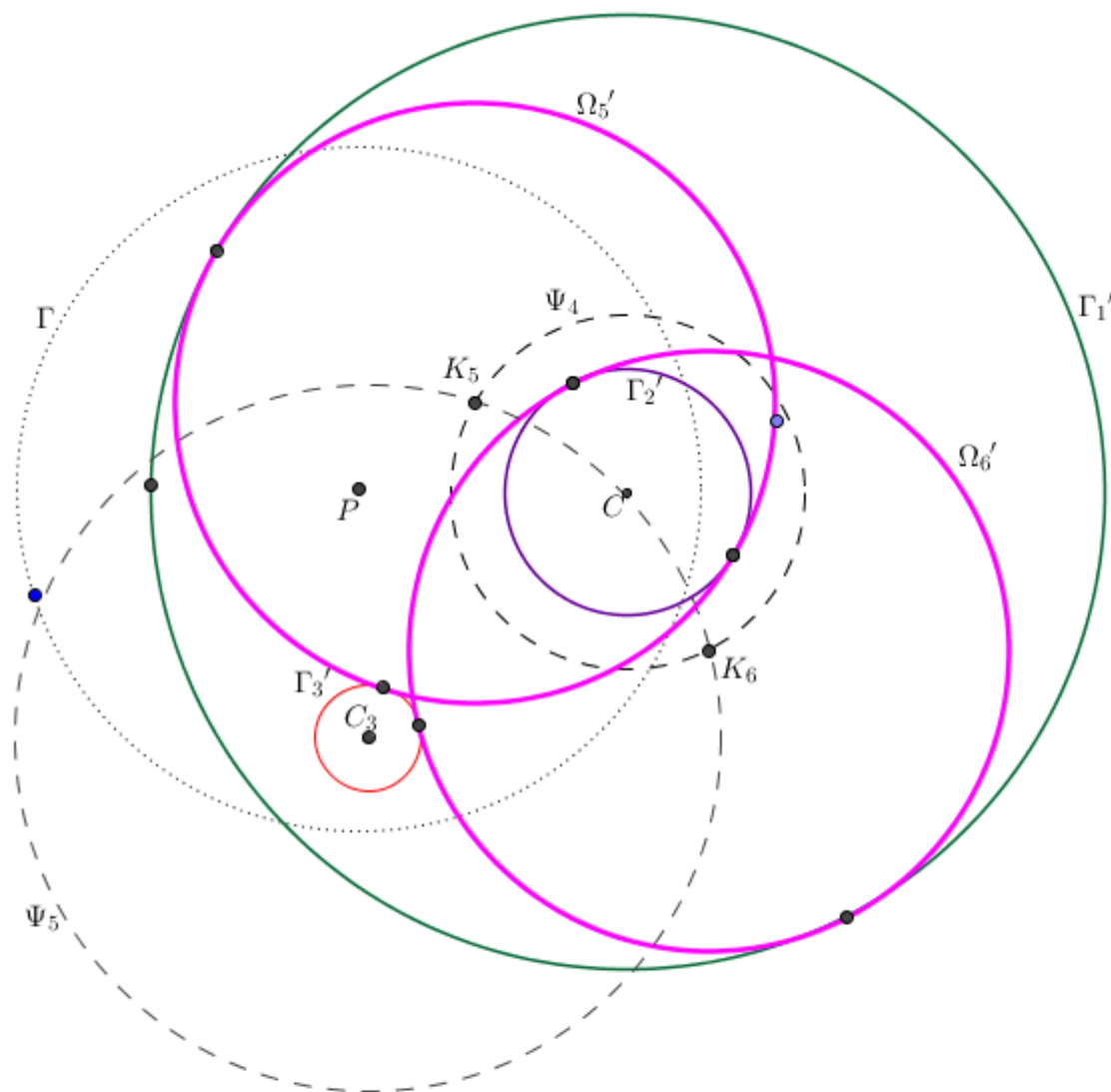


Figura 4.7:  $\Omega_5'$  e  $\Omega_6'$  são tangentes externamente a  $\Gamma_3'$  e internamente a  $\Gamma_2'$

2) Se  $\Omega'$  é tangente internamente a  $\Gamma'_3$ , a distância de  $C_3$  ao centro de  $\Omega'$  é igual a  $\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3$ . Construimos então a circunferência  $\Psi_6$  com centro em  $C_3$  e raio  $\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3$  e sejam  $\Psi_4 \cap \Psi_6 = \{K_7, K_8\}$ . Dessa forma, as circunferências de centros  $K_7$  e  $K_8$  e raio  $\frac{r_1 + r_2}{2}$  são tangentes internamente a  $\Gamma'_1$ , a  $\Gamma'_2$  e a  $\Gamma'_3$ , como na figura 4.8. Observemos que como  $\Gamma'_3$  está contida na coroa circular de raios  $r_1$  e  $r_2$ , segue que  $r_1 - r_2 > 2r_3$ . Mas,  $r_1 + r_2 > r_1 - r_2$ . Logo,  $\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3 > 0$ .

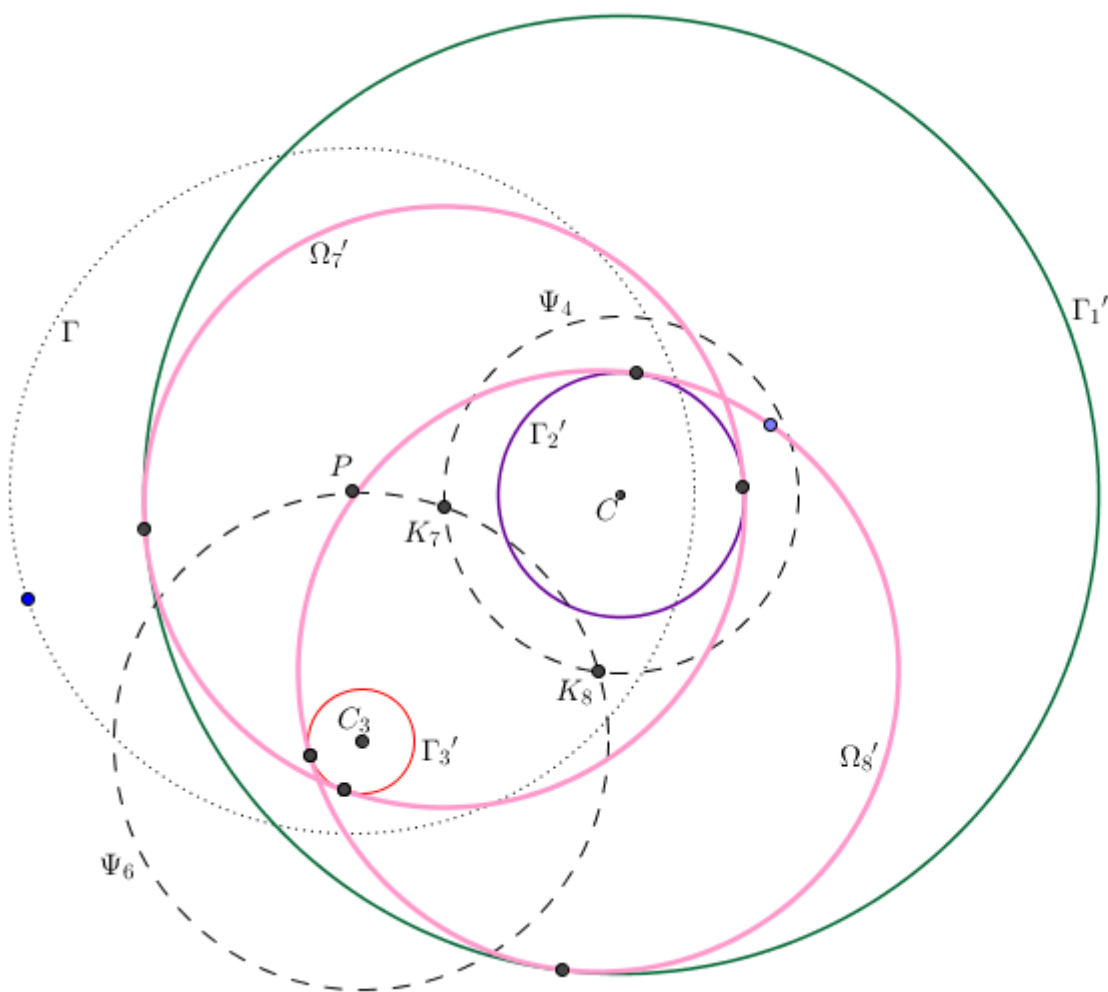


Figura 4.8:  $\Omega'_7$  e  $\Omega'_8$  são tangentes internamente a  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$

Na figura 4.9, traçamos as 8 circunferências simultaneamente tangentes a  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$ .

Invertendo-se as circunferências  $\Omega'_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$  em relação a  $\Gamma$  temos as 8 soluções para o nosso problema original, de modo que as circunferências  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , são todas tangentes às circunferências  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ , como na figura 4.10.

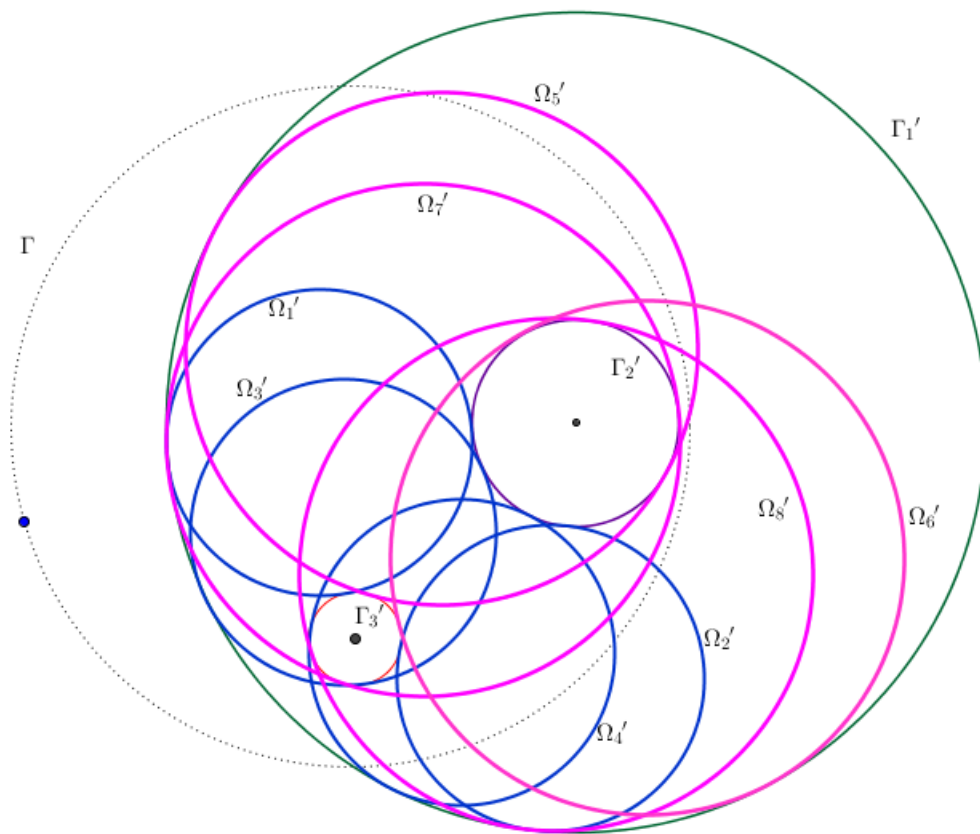


Figura 4.9:  $\Omega'_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , são tangentes a  $\Gamma'_1, \Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$ .

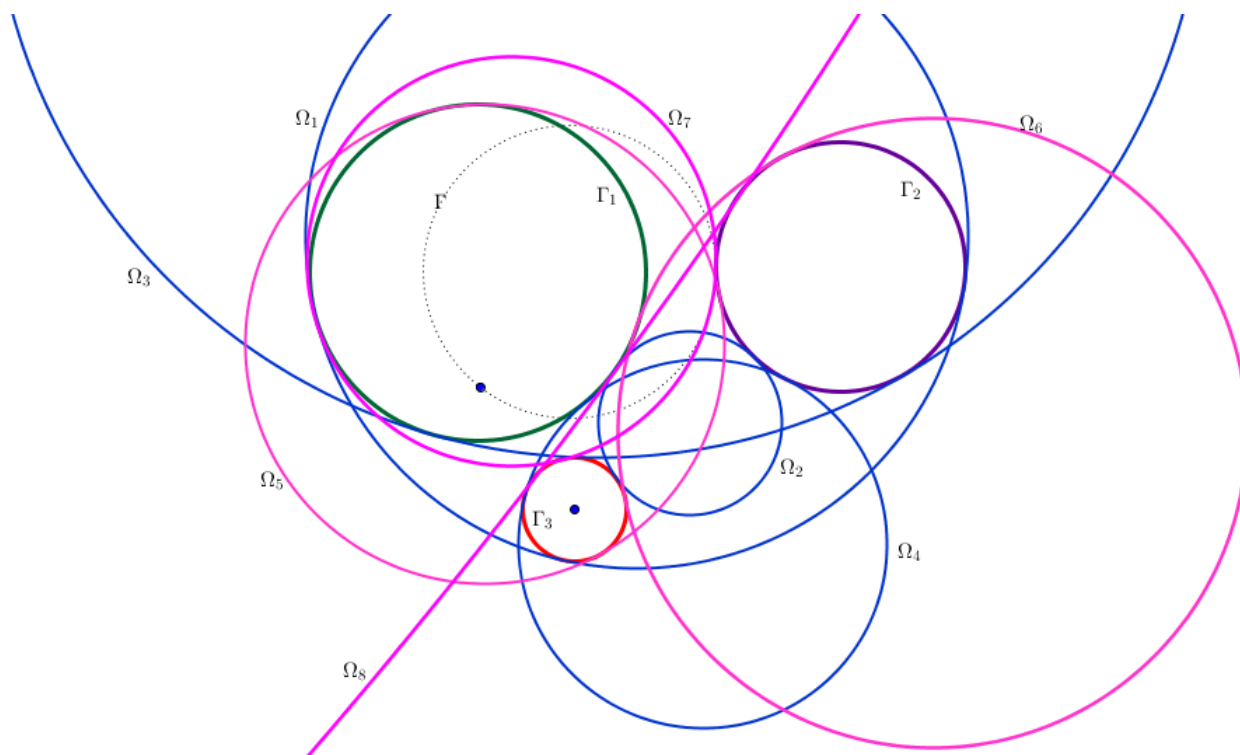


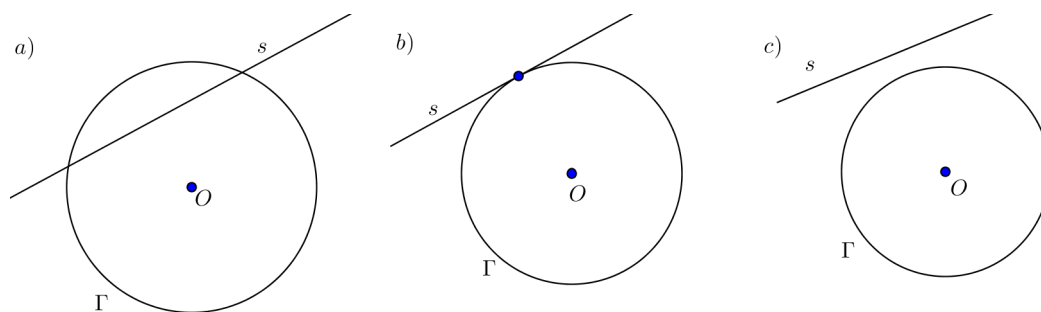
Figura 4.10:  $\Omega_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , são tangentes a  $\Gamma_1, \Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ .

# Capítulo 5

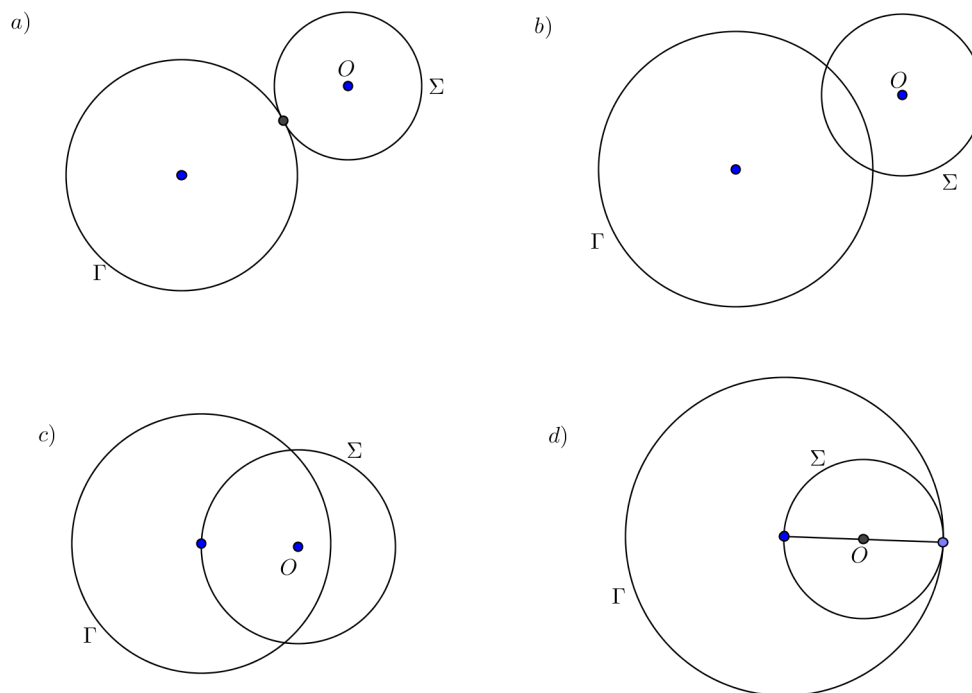
## Exercícios

Neste capítulo, propomos alguns exercícios e, em seguida, algumas sugestões para a construção das soluções, baseadas nos resultados provados nos capítulos anteriores. Estes exercícios podem ser resolvidos com régua e compasso ou com um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, que foi utilizado nesta dissertação. Nosso objetivo é desenvolver no aluno do Ensino Médio habilidades que estejam ligadas às construções geométricas, bem como às propriedades de figuras planas, como tangência, por exemplo.

1. Utilizando régua e compasso, desenhe o inverso  $s'$  da reta  $s$  em relação à circunferência  $\Gamma$ , de centro  $O$ , em cada caso a seguir:



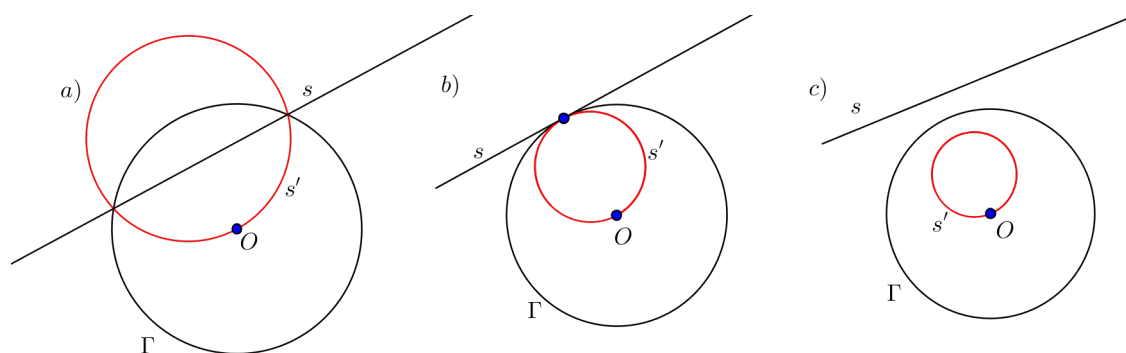
2. Em cada caso a seguir, desenhe o inverso  $\Sigma'$  da circunferência  $\Sigma$  em relação à circunferência  $\Gamma$ , de centro  $O$ .
3. Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas circunferências tangentes externamente e uma reta  $s$  exterior a ambas. Construa uma circunferência tangente a  $\Gamma_1$ , a  $\Gamma_2$  e a  $s$ .
4. Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas circunferências tangentes e  $P$  um ponto fora delas. Construa uma circunferência que passa por  $P$  e é tangente a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .



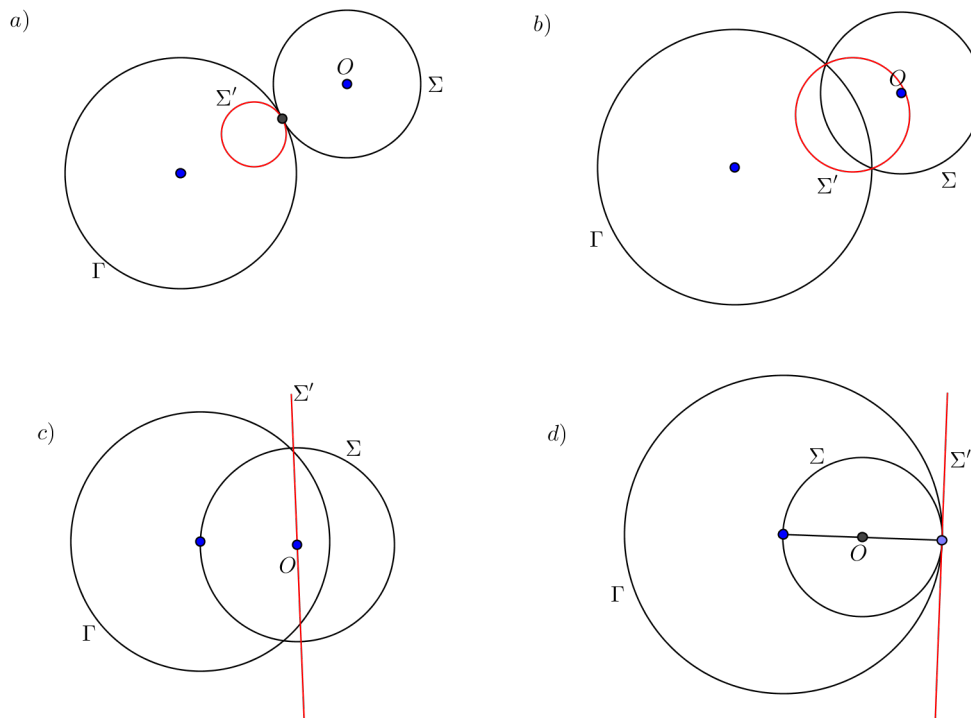
5. Dadas três circunferências  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ , tangentes externamente entre si, duas a duas, construir uma circunferência tangente às três. Quantas soluções tem este problema?

## 5.1 Resoluções dos exercícios propostos

1. Basta usarmos o resultado da proposição 3.2.



2. Basta usarmos o resultado da proposição 3.3



3. Sejam  $A$  o ponto de tangência de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e  $\Gamma$  uma circunferência qualquer de centro  $A$ . Os inversos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são duas retas paralelas  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  e o inverso de  $s$  é uma circunferência compreendida entre as retas  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ . Devemos então, construir as circunferências tangentes a  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  e a  $s$ . Os centros dessas circunferências pertencem a uma reta paralela a  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  (pois o raio  $r$  mede a metade da distância entre  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ ) e estão a uma distância  $r+r_{s'}$  ou  $r-r_{s'}$ , conforme sejam tangentes externamente ou internamente a  $s'$ , onde  $r_{s'}$  é o raio de  $s'$ . Nesse caso, temos quatro soluções, cujas construções estão ilustradas na figura 5.1.

Basta então "desinvertemos" tais circunferências e obtemos as soluções do problema, cujas construções estão ilustradas na figura 5.2.

4. A resolução é completamente análoga à do exercício anterior.
5. Sendo  $A$  o ponto de tangência entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , vamos considerar uma inversão em relação a uma circunferência  $\Gamma$ , de centro  $A$ . Assim, os inversos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são duas retas paralelas  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  e o inverso de  $\Gamma_3$  é uma circunferência  $\Gamma'_3$ , tangente a  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ . Construimos então as circunferências  $\Omega'_1$  e  $\Omega'_2$  tangentes a  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$ , como na figura 5.3.

Observamos que o problema tem exatamente duas soluções, que são obtidas "desinvertendo-se"  $\Omega'_1$  e  $\Omega'_2$ , conforme podemos verificar na figura 5.4.

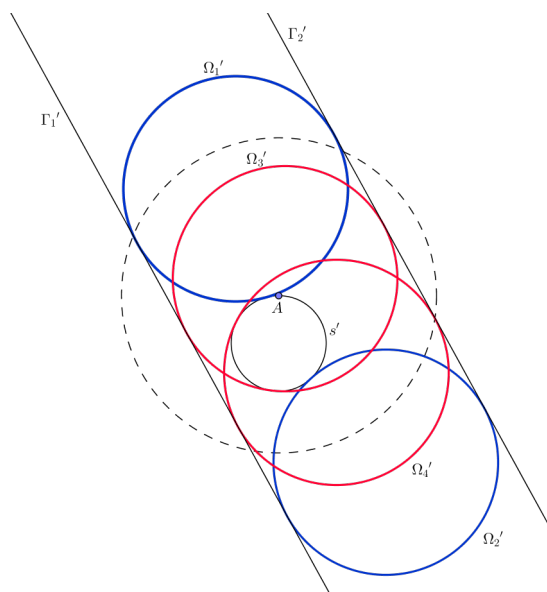


Figura 5.1: Soluções  $\Omega'_1$ ,  $\Omega'_2$ ,  $\Omega'_3$  e  $\Omega'_4$

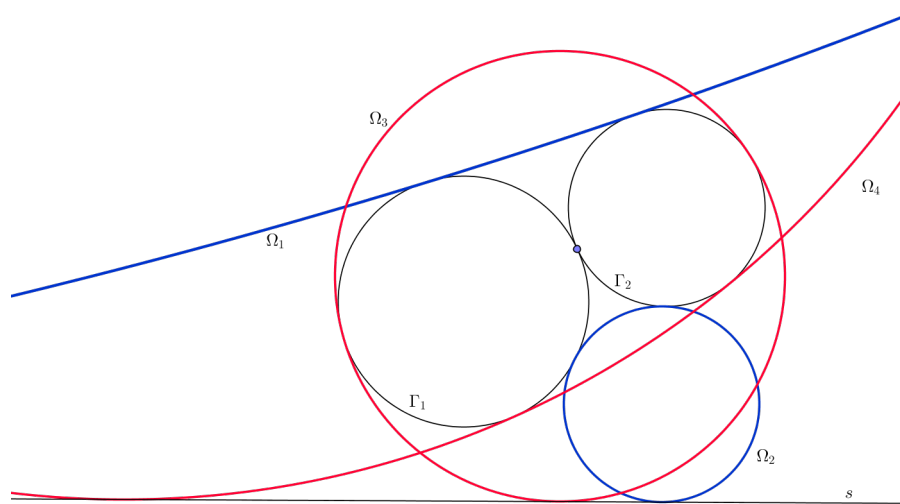


Figura 5.2: Soluções  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$



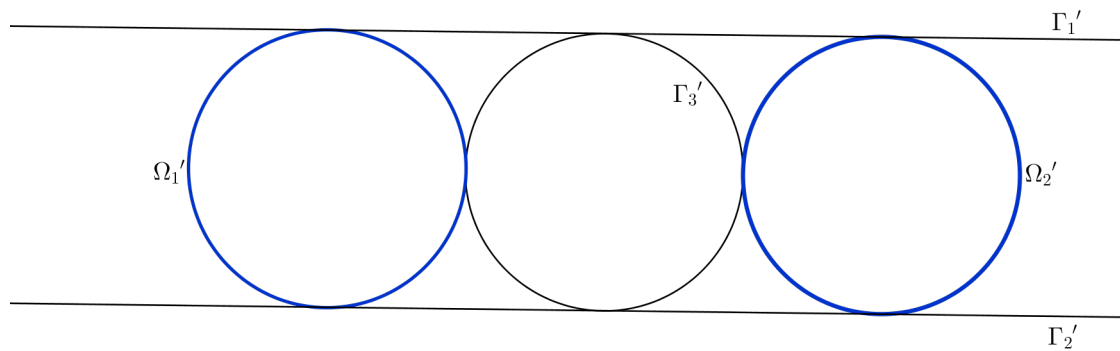


Figura 5.3: Soluções  $\Omega_1'$  e  $\Omega_2'$

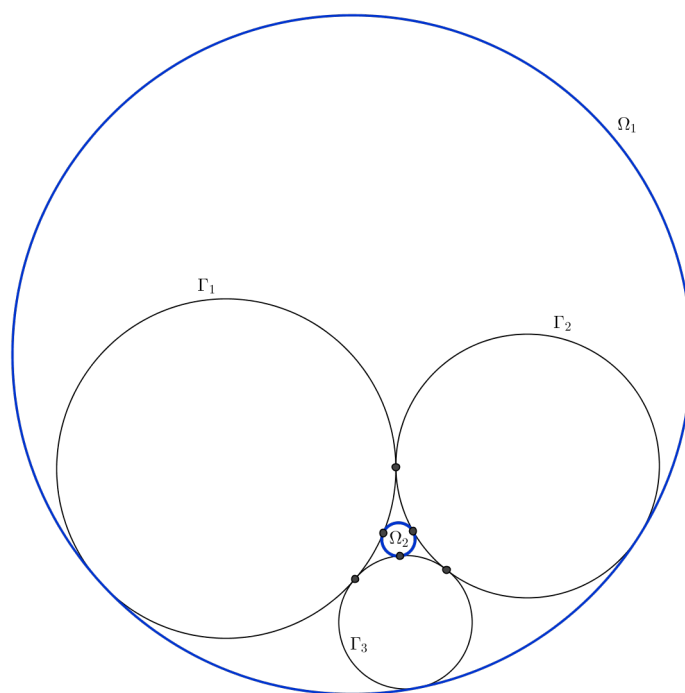


Figura 5.4: Soluções  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

## 5.2 Plano de aula

Nesta seção propomos um roteiro de duas aulas para a resolução dos exercícios propostos neste trabalho.

### 5.2.1 Aula 1

**Tema:** Inversão em relação a uma circunferência

**Objetivos:** Definir inversão em relação a uma circunferência. Mostrar como construir o inverso de um ponto com régua e compasso ou com o auxílio de um software de Geometria Dinâmica, como o Geogebra. Mostrar como construir o inverso de uma reta e de uma circunferência.

**Conteúdo:** Definição de inversão. Inversão de pontos, retas e circunferências.

**Roteiro:** Após a definição de inversão em relação a uma circunferência  $\Gamma$ , de centro  $O$ , o Professor deve mostrar aos alunos como construir o inverso de um ponto, distinto de  $O$ . A seguir, deve-se mostrar que o inverso de uma reta pode ser uma reta ou uma circunferência, o mesmo acontecendo com o inverso de uma circunferência. Sugerimos discutir os casos que a reta ou a circunferência a serem invertidas passam ou não pelo centro da circunferência de inversão. Após essa discussão, resolver os exercícios 1 e 2. Para isso, deve-se observar que se o inverso que procuramos for uma reta, basta invertermos dois pontos quaisquer do objeto a ser invertido. Se o inverso for uma circunferência, devemos inverter três pontos quaisquer. É importante ressaltar que se for possível o uso do Geogebra, basta utilizar a ferramenta Inversão, clicando primeiro no objeto a ser invertido e, em seguida, na circunferência de inversão.

**Observações** É importante notar que todos os exercícios da aula podem ser resolvidos com régua e compasso. Por outro lado, se o Professor e os alunos tiverem acesso ao Geogebra, as construções ficam bem mais rápidas. Mesmo assim, sugerimos que pelo menos um dos itens seja resolvido apenas com régua e compasso. Se for possível o uso do Geogebra, sugerimos que o Professor peça aos alunos que inventem outros exercícios semelhantes e que eles utilizem a dinâmica do Software para perceber como os inversos mudam na medida em que mudamos algo na circunferência de inversão ou no objeto a ser invertido.

### 5.2.2 Aula 2

**Tema:** Problemas de Apolônio

**Objetivos:** Resolver alguns casos particulares dos Problemas de Apolônio, em especial casos em que dois dos três objetos são circunferências tangentes.

**Conteúdo:** Resolução de 3 casos particulares dos Problemas de Apolônio: dois dos objetos são duas circunferências e o terceiro objeto é uma reta, um ponto no exterior das duas circunferências ou uma circunferência tangente externamente às duas, que são os exercícios 3, 4 e 5, respectivamente.

**Roteiro:** Para iniciar esta aula, sugerimos que o Professor mostre que se dois objetos (que podem ser uma reta ou uma circunferência) são tangentes em um ponto  $P$ , então os inversos destes objetos em relação a uma circunferência com centro em  $P$  são duas retas paralelas. Em seguida, discutir e resolver o exercício 3. Para isso, mostrar que o problema se reduz a desenhar as circunferências tangentes, simultaneamente, a duas retas paralelas e a uma circunferência no "interior" destas retas.

Com a mesma ideia do exercício 3, sugerimos que o Professor resolva o exercício 4.

Por fim, pode-se resolver com os alunos o exercício 5. O Professor deve insistir no fato de que, neste caso, podemos utilizar uma inversão com relação a uma circunferência centrada em qualquer um dos três pontos de tangência. Tal inversão reduz o problema a traçarmos as circunferências tangentes, simultaneamente, a duas retas paralelas e a uma circunferência tangente a estas duas retas. É importante ressaltar que há exatamente duas soluções para o problema.

**Observações** Sugerimos insistir com os alunos que uma inversão em relação a uma circunferência centrada num ponto de tangência de dois objetos reduz bastante a dificuldade do problema, já que seus inversos serão duas retas paralelas. O inverso do terceiro objeto pode ser um ponto, uma reta ou uma circunferência. É interessante também mostrar o número de soluções em cada exercício proposto.

## 5.3 Tutorial do Geogebra

Nesta seção vamos mostrar como utilizar a ferramenta Inversão no software Geogebra, que foi utilizado bastante utilizado para as construções das figuras deste trabalho.

O software possui no canto superior uma barra de ferramentas, entre elas a inversão, como podemos ver na figura a seguir:

Dada uma circunferência qualquer, para inverter pontos em relação a esta circunferência, basta clicarmos primeiro no ponto que queremos inverter e, em seguida, na circunferência. Na figura a seguir temos os inversos dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, no interior, no exterior e sobre a circunferência.

Para invertermos retas e/ou circunferências, fazemos da mesma forma: primeiramente clicamos no objeto a ser invertido e, em seguida, na circunferência de inversão.

Para a construção de uma circunferência ortogonal a duas circunferências externas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  dadas, temos os seguintes passos:

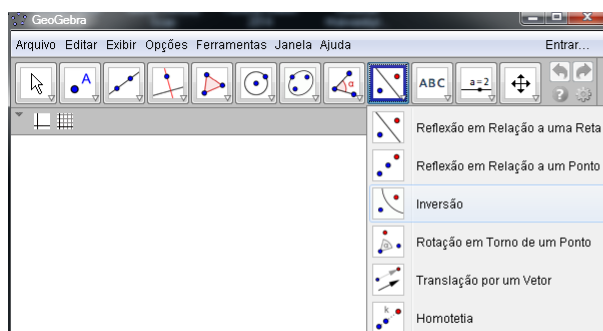


Figura 5.5: Ferramenta inversão

- Traçamos a reta que passa pelos centros  $O_1$  e  $O_2$  de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente;
- Sendo  $\Gamma$  uma circunferência de centro em  $A$ , um dos pontos de intersecção de  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  com  $\Gamma_2'$ , invertemos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_2'$  é uma reta e  $\Gamma_1'$  é uma circunferência, ambas disjuntas);
- Sendo  $M$  a intersecção de  $\Gamma_2'$  com  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ , traçamos, por  $M$ , uma das retas tangentes a  $\Gamma_1'$ , digamos no ponto  $N$ ;
- Traçamos a circunferência  $\Sigma_1$ , de centro  $M$  e raio  $MN$ .
- Por fim, invertemos  $\Sigma_1$  com relação a  $\Gamma$ , obtendo  $\Sigma_1' = \Sigma$ , uma circunferência ortogonal a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$ .

A construção anterior resulta na figura a seguir:

Após a construção anterior, seja  $P$  uma das intersecções de  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  com  $\Sigma$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $P$  no interior de  $\Gamma_1$ . Consideremos, então, uma circunferência  $\Gamma$ , de centro  $P$  e raio qualquer. Os inversos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em relação a  $\Gamma$  são duas circunferências  $\Gamma_1'$  e  $\Gamma_2'$ , com  $\Gamma_2'$  no interior de  $\Gamma_1'$ . Invertendo  $\Gamma_3$  com relação a  $\Gamma$ , obtemos

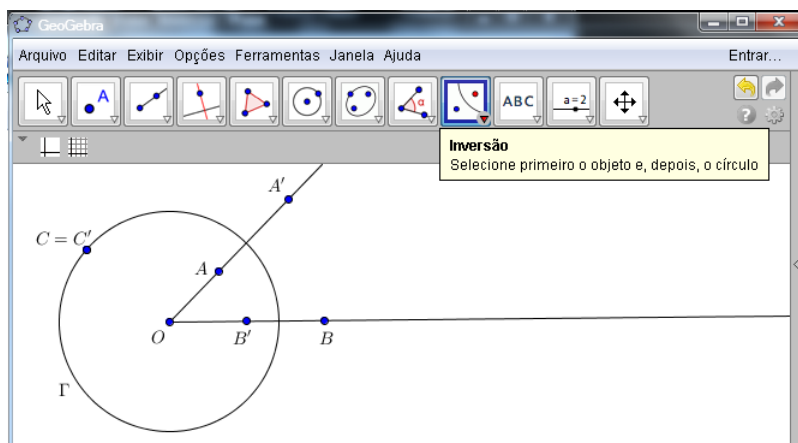


Figura 5.6: Invertendo os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

uma circunferência  $\Gamma'_3$ , no interior da coroa circular delimitada por  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , conforme a figura a seguir:

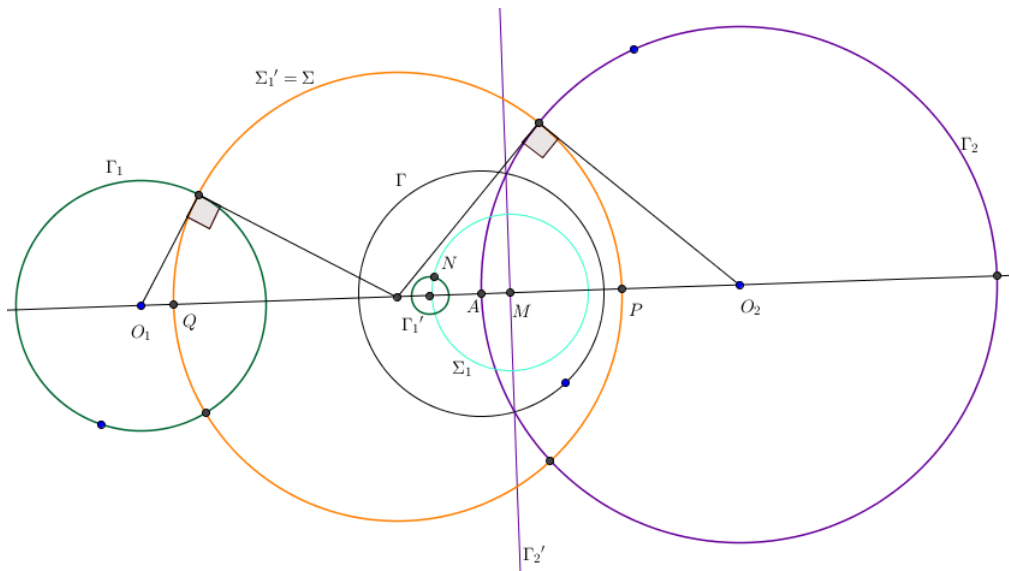


Figura 5.7:  $\Sigma$  é ortogonal a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$

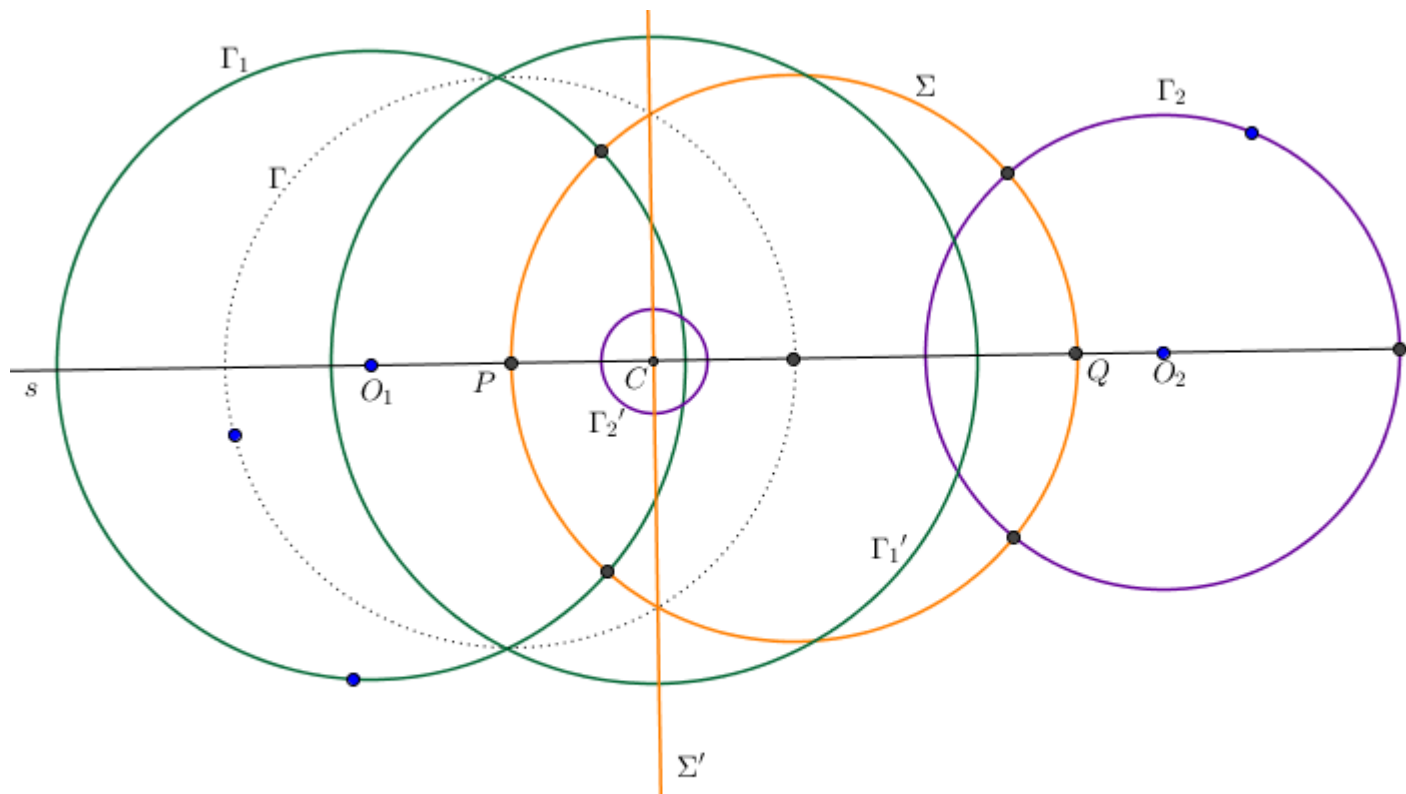


Figura 5.8:  $\Gamma_1'$  e  $\Gamma_2'$  são concêntricas





## Referências Bibliográficas

- [1] Sérgio Alves, Maria Elisa E. L. Galvão, Um estudo Geométrico das Transformações Elementares (1996).
- [2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry Revisited (1967).
- [3] Osvaldo Dolce, José N. Pompeo, Fundamentos de Matematica Elementar volume 9.
- [4] Edwin E. Moise Elementary Geometry from an Advanced Standpoint 3rd Edition.
- [5] Sandra Augusta Santos, André Luis Trevisan, O Problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais (2002).
- [6] Michel Spira, Como transformar retas em círculos e vice versa: A inversão e construções geométricas. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBA, (2004)
- [7] I. M. Yaglom, Geometric Transformations IV (2009).