



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA DETERMINANTES E  
APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS

BRUNO GUSTAVO CHAVES DOS REIS

Salvador - Bahia

JUNHO DE 2014

# UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA DETERMINANTES E APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

BRUNO GUSTAVO CHAVES DOS REIS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT–UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Salvador - Bahia

Junho de 2014

# UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA DETERMINANTES E APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

BRUNO GUSTAVO CHAVES DOS REIS

Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT–UFBA como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática,  
aprovada em 06 de Junho de 2014.

## Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa(Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey  
UFBA

---

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento  
UNEB

*À todos que direta ou indiretamente  
me conduziram ao final desta importante  
etapa da minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

À minha família, por ser a base, o suporte e a motivação para que eu enfrentasse qualquer jornada, , sempre disposta a apoiar, incondicionalmente, todas as minhas decisões a respeito dos rumos dados aos meus estudos, em especial à minha mãe Vera Lúcia, por ser um exemplo de força e caráter. À minha sogra Rita de Cássia, por se fazer presente num momento muito importante da minha vida. À minha esposa Maíra por compartilhar e entender todos os momentos em que necessitei priorizar os meus estudos em detrimento de outros afazeres. À minha irmã Liara, meu sobrinho Bernardo, às minhas tias Élide, Eliana e Nércia (*im memorian*), e seus respectivos companheiros, aos meus tios Hélio e Elizeu e suas companheiras, aos meus primos e primas e a mais nova integrante da família, a minha filha, Maria Luiza, com que eu tive o prazer de dividir as minhas noites de estudo. À todos os Professores das disciplinas do PROFMAT na UFBA os quais, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse repensar e melhorar a minha prática profissional, e em especial ao Professor José Nelson Bastos Barbosa, pela presteza, paciência e disponibilidade para orientar este trabalho. Aos meus colegas de turma e de curso, pois com eles os dias de sábado acabaram sendo mais interessantes pelas suas contribuições durante as aulas e fóruns de discussões que certamente abrilhantaram esse trabalho.

## Resumo

Neste trabalho, apresentaremos inicialmente uma definição formal para os determinantes de matrizes quadradas levando em consideração o conceito de permutação, com a finalidade de possibilitar uma argumentação consistente para o Ensino Médio e uma justificativa para a conhecida Regra de Sarrus para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3. Posteriormente iremos explorar algumas aplicações dos Sistemas Lineares em temas variados, chamando atenção para as Probabilidade, com as Cadeias de Markov.

**Palavras–Chave:** Determinantes. Cadeias de Markov. Sistemas Lineares.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Permutações e Determinantes: Uma Definição Formal</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Permutações e Determinantes . . . . .	2
1.2.1	Determinantes de Matrizes de Ordens 1, 2 e 3 . . . . .	5
1.2.2	Propriedades dos Determinantes . . . . .	7
1.2.3	A Regra de Cramer . . . . .	12
1.2.4	Cofator, Menor Complementar e o Teorema de Laplace . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Sistemas Lineares e Probabilidade</b>	<b>16</b>
2.1	Introdução . . . . .	16
2.2	Situação–Problema: . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Sistemas Lineares e Equações Matriciais</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Outras Aplicações</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Considerações Finais:</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Interpretação Geométrica dos Sistemas Lineares</b>	<b>32</b>
<b>B</b>	<b>Tópicos Sobre Probabilidades</b>	<b>37</b>
	Referências Bibliográficas	38

# Introdução

Na tentativa de atingir os nossos alunos de modo satisfatório, normalmente nós, professores, utilizamos com frequência, a contextualização para que possamos aplicar os conceitos, modelagens, e procedimentos matemáticos como ferramenta para resolvermos problemas cotidianos, e tentar estreitar o abismo existente entre os alunos e a Matemática.

Embora a contextualização torne-se cada vez mais uma tendência nos exames (como o Exame Nacional do Ensino Médio [ENEM], as provas dos vestibulares ainda existentes, as avaliações de seleção para cargos públicos, etc.) devemos estar sempre atentos à forma que aplicamos os conceitos matemáticos com a finalidade de resolver tais problemas em sala de aula, pois o simples fato de resolvermos os problemas contextualizados sem uma consistência e um rigor alto de precisão na aplicação desses conceitos acaba-se tornando uma ação sem nenhum sentido. Pensando nessas duas vertentes: consistência e aplicações, este trabalho tem dois objetivos principais.

O primeiro deles é apresentar o conceito formal de determinantes de matrizes quadradas, já que, normalmente, aprendemos e ensinamos tais resultados como regras prontas sem nenhuma explicação. Neste ponto, o trabalho pode ser utilizado como uma ferramenta para que os professores tenham condições de, pelo menos, argumentar com seus alunos a respeito dos resultados encontrados nos livros. É importante salientar que tal definição será apresentada segundo o conceito de permutação, que não é o único conceito capaz de definir os determinantes.

O segundo ponto a ser explorado nesse trabalho é, justamente, o de algumas aplicações dos determinantes, e das matrizes de um modo geral, ressaltando a aplicação das mesmas quando utilizadas para resolver problemas relacionados às probabilidades [as chamadas Cadeias de Markov], dentre outras, nas mais diferentes áreas do conhecimento (como Física, Química, Nutrição, etc.). Procedimentos e resoluções de Sistemas Lineares, de no máximo terceira ordem, também serão citados neste item do trabalho, como as Equações Matriciais e a Regra de Cramer. Este item pode ser consultado tanto por pro-



fessores que procuram enriquecer suas aulas com exemplos menos triviais, quanto pelos alunos que sempre nos questionam com relação à aplicabilidade dos conteúdos vistos em sala de aula.

# Capítulo 1

## Permutações e Determinantes: Uma Definição Formal

### 1.1 Introdução

Nos livros de Matemática para o Ensino Médio é muito comum nos depararmos com a definição de determinante de uma matriz como sendo “*um número real associado a uma matriz quadrada*”, e, além disso, os determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3 nos é apresentado como uma espécie de “*regra*” que devemos aplicar nos exercícios. Neste item, iremos explorar uma definição mais formal para o que vem a ser o determinante de uma matriz quadrada, embora a sua aplicação do Ensino Médio não seja comum por tratar do conceito de permutação como uma aplicação e sim como uma estratégia para resolvermos problemas em Análise Combinatória.

Simplificaremos esse conceito com algumas aplicações pontuais o que nos ajudará a compreender o conceito formal dos determinantes, até mesmo por que no Ensino Médio os determinantes calculados são, na sua grande maioria, no máximo de ordem 3. Importante salientar que determinantes de matrizes de ordens superiores a 3 podem ainda ser calculados segundo a definição apresentada neste trabalho, porém, gerando situações trabalhosas. Pensando nesses determinantes de ordens superiores e numa redução da carga de trabalho, outros conceitos poderão ser utilizados para facilitar os cálculos desses determinantes das matrizes de ordens superiores a 3, como o Teorema de Laplace, que conta com as definições de Cofator e Menor Complementar.

É importante salientar que a definição apresentada a seguir não é a única que pode ser utilizada para justificar as expressões utilizadas no Ensino Médio para o cálculo dos determinantes, é possível, caso se ache interessante, definir os determinantes como uma

aplicação entre Espaços Vetoriais<sup>1</sup>, que leva cada matriz quadrada em um número real. Com as informações a seguir, iremos introduzir o conceito de permutações e a seguir o de determinantes.

## 1.2 Permutações e Determinantes

Considere o conjunto  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  um subconjunto de  $N$ . Definiremos como *Permutação*<sup>2</sup> no conjunto  $I_n$ , toda aplicação bijetora  $\sigma : I_n \rightarrow I_n$ . Pela própria definição, a permutação de  $n$  objetos é o conjunto formado por todas as composições possíveis desses objetos, daí conhecendo a quantidade  $n$  de objetos, podemos concluir que temos  $n!$  permutações possíveis.

**Proposição 1.2.1.** *Sejam  $\sigma$  e  $\phi$  duas permutações no conjunto  $I_n$ , então a aplicação composta por  $\sigma$  e  $\phi$  continua sendo uma permutação no conjunto  $I_n$ .*

**Demonstração:** Consideremos a aplicação  $\pi$  composta pelas permutações  $\sigma$  e  $\phi$  de tal forma que  $\pi = \sigma \circ \phi : I_n \rightarrow I_n$  [o caso em que  $\pi = \phi \circ \sigma$  é análogo]. Como a aplicação  $\phi$  é uma permutação, podemos afirmar que a mesma é bijetora, desse modo qualquer elemento de  $I_n$  é imagem de algum elemento do próprio conjunto  $I_n$  devido a sobrejetividade da aplicação, ou seja, para todo  $n \in I_n$ , existe  $n = \phi(n) \in I_n$ . Como o domínio da aplicação  $\sigma$  é exatamente a imagem da aplicação  $\phi$ ,  $\sigma$  está definida para todos os elementos do conjunto  $I_n$ . Mas  $\sigma$  é uma permutação do conjunto  $I_n$  o que nos permite concluir que todos os elementos  $\phi(n)$  do domínio de  $\sigma$  têm imagens no conjunto  $I_n$ . Como a aplicação também é sobrejetora, podemos concluir que para todo  $m \in I_n$  existe  $m = \sigma(\phi(n)) = \pi(n) \in I_n$ . Assim,  $\pi$  é uma aplicação bijetora em  $I_n$  e portanto uma permutação.

Utilizaremos a seguinte notação para representar as permutações do conjunto  $I_n$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ , por exemplo, se  $n = 2$ , temos duas  $[2! = 2]$  permutações

do conjunto  $I_n = \{1, 2\}$  e desse modo temos:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id$  e  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

---

<sup>1</sup>A ideia de Espaços Vetoriais não deve ser abordada no Ensino Médio por necessitar de ferramentas que fogem ao propósito deste nível de ensino.

<sup>2</sup>A permutação identidade, responsável por levar cada elemento do conjunto e  $I_n$  nele próprio será chamada de *id*. Além disso a inversa de toda permutação, que está garantida devido ao fato das permutações serem bijetoras, também são permutações.

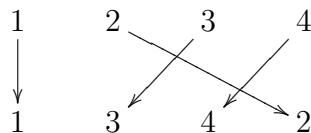
**Definição 1.1.** Seja  $r$  o número de pares ordenados  $(i, j)$  tais que  $1 \leq i < j \leq n$ , com  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , chamaremos de Sinal da Permutação  $\sigma$  o número inteiro e representaremos por  $\text{sgn}(\sigma)$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{sgn}(\sigma) = 1, & \text{se } r \text{ é par;} \\ \text{sgn}(\sigma) = -1, & \text{se } r \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Veamos alguns exemplos: Ex.01: Considere a permutação  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Como  $r = 1$  é ímpar, já que o único par ordenado que satisfaz a condição é o par  $(2, 3)$ , podemos dizer que  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ . Ex.02: Considere a permutação:  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  e como os únicos pares que satisfazem a condição são os pares  $(1, 2)$  e  $(1, 3)$ , portanto  $r = 2$  é par e assim  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ .

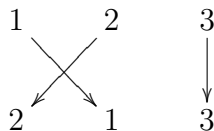
Uma maneira de abordar os sinais dos determinantes numa turma do Ensino Médio pode ser dada da seguinte forma. Escolhemos uma permutação qualquer e ligamos os números iguais nas duas linhas que representam a permutação com setas utilizando o seguinte critério: caso haja uma quantidade par de cruzamentos entre essas setas dizemos que a permutação tem sinal 1 e caso contrário, se a quantidade de cruzamentos entre as setas for ímpar o sinal da permutação é  $-1$ . Vejamos alguns exemplos:

Ex.01: Considere a permutação:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ . A partir daí, temos a seguinte situação:



Como existem apenas dois cruzamentos entre as setas no diagrama [a saber referentes aos pares  $(2, 4)$  e  $(3, 4)$ ], temos que o sinal dessa permutação é 1.

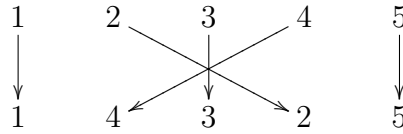
Ex.02: Considere a permutação:  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . A partir daí, temos a seguinte situação:



Como existem apenas um cruzamento entre as setas no diagrama [a saber referente ao par  $(1, 2)$ ], temos que o sinal dessa permutação é  $-1$ .

Ex.03: Considere a permutação:  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ . A partir daí, temos a seguinte

situação:



Como existem três cruzamentos entre as setas no diagrama [a saber referentes aos pares (2, 3), (2, 4) e (3, 4)], temos que o sinal dessa permutação é  $-1$ .

Considere, para definição a seguir, uma matriz  $A = (a_{ij})$  de ordem  $n$ , uma permutação  $\sigma$  no conjunto  $I_n$  e um produto da forma  $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$ . Note que nesse produto teremos apenas um elemento de cada linha, já que o primeiro índice de todos os elementos são distintos e além disso teremos apenas um elemento de cada coluna, devido ao fato da permutação  $\sigma$  ser bijetora e portanto injetora.

**Definição 1.2.** Chamaremos de *Determinante*<sup>3</sup> de uma matriz  $A$  de ordem  $n$ , o número resultado da seguinte expressão:

$$\sum_{i=1}^{n!} \text{sgn}(\sigma_i) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

E denotaremos por  $\det(A)$  ou simplesmente por  $|A|$ .

Como o número de parcelas que irão compor o determinante de uma matriz é igual a  $n!$ , o cálculo dos determinantes para matrizes de ordens superiores a 3 torna-se um processo trabalhoso (basta pegarmos uma matriz de ordem 4, o que já nos dá  $4! = 24$  permutações), mas uma das aplicações imediatas da definição de determinantes vista acima é o cálculo dos determinantes das matrizes triangulares, pois a única parcela não nula da definição dos determinantes é a parcela que contém os elementos do tipo  $a_{ii}$ , com  $1 \leq i \leq n$ .

---

<sup>3</sup>É importante salientar que a utilização de permutações para definirmos determinantes é apenas uma das opções que podem ser utilizadas. Podemos ainda definir determinantes como uma função que associa a cada matriz quadrada um escalar e, além disso, atende a algumas propriedades especiais às quais nos atentaremos mais à frente neste trabalho, veja por exemplo, Hoffman e Kunze 139 – 140

### 1.2.1 Determinantes de Matrizes de Ordens 1, 2 e 3

A seguir apresentaremos, segundo a definição adotada neste trabalho, as expressões resultantes dos cálculos dos determinantes das matrizes de ordens 1, 2 e 3. Para matrizes de ordens superiores a 3, embora a definição ainda seja aplicável, será mais interessante a utilização de outros conceitos e resultados, como, por exemplo, o Teorema de Laplace.

#### Determinantes de Matrizes de Ordem 1:

Tome a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ . Como a única permutação (como  $n = 1 \Rightarrow 1! = 1$ ) que podem ser definidas no conjunto  $I_n = \{1\}$ , é:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = id$  e como  $r = 0$ , temos  $sgn(\sigma) = 1$ , daí:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \\ &= a_{11} \end{aligned} \tag{1.1}$$

#### Determinantes de Matrizes de Ordem 2:

Tome a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Como as duas permutações ( $2!=2$ ) são definidas no conjunto  $I_n = \{1, 2\}$ , as únicas permutações são:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id$  e  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Mas pela definição temos que  $sgn(\sigma_1) = 1$  e  $sgn(\sigma_2) = -1$ , assim:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \\ &= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} \cdot a_{21} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned} \tag{1.2}$$

#### Determinantes de Matrizes de Ordem 3:

Tome a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ . Como as seis permutações (pois  $3!=6$ ) definidas no conjunto  $I_n = \{1, 2, 3\}$ , são:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  com  $r = 0$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  com  $r = 2$ , a saber temos os pares (1,3) e (2,3) e  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  com  $r = 2$ , a saber temos os pares (1,2) e (1,3) todas com sinal 1. Por outro lado, temos as permutações

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  com  $r = 1$  devido ao par  $(2,3)$ ,  $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  com  $r = 3$ , a saber temos os pares  $(1,2)$ ,  $(1,3)$  e  $(2,3)$  e  $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  por conta do par  $(1,2)$ , essas últimas com sinal  $-1$ , portanto:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned} \quad (1.3)$$

### Regra de Sarrus<sup>4</sup> : Um método prático para a obtenção de determinantes de ordem 3

Vimos qual o procedimento, usando a definição, para a obtenção dos determinantes para matrizes de ordem 3. Vimos ainda como a abordagem para as justificativas e os cálculos desses determinantes no Ensino Médio pode ser um pouco complicada neste nível de ensino. Um artifício muito usado para encontrarmos esses determinantes é a conhecida Regra de Sarrus. Esta regra consiste em repetirmos as duas primeiras colunas, posicionando-as à direita da matriz dada:

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right]$$

Em seguida, multiplicamos os três elementos que se encontram nas diagonais da matriz, ou paralelas à elas, levando em consideração as duas colunas adicionais:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}, a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}, a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}, a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}, a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}, a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Os ternos de números que se encontram na direção da diagonal principal têm o seu produto com o sinal mantido, inclusive a mesma, já os ternos que se encontram na direção

---

<sup>4</sup>Pierre Frédéric Sarrus [1798–1861]: Matemático francês conhecido por desenvolver uma regra para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3 e como Teoremas e Postulados são normalmente batizados pelo nome dos seus inventores, com essa regra não seria diferente. Sarrus, além de Professor na Universidade de Estarsburgo, na França de 1826 a 1856, foi membro da Académie des Sciences em Paris [1842]. Ele é autor de vários tratados, incluindo uma solução para equações numéricas com múltiplas incógnitas [1842], e múltiplas integrais e suas condições integrantes entre outras.

da diagonal secundária, juntamente com ela, têm o seu produto com o sinal trocado, e desse modo temos exatamente a expressão obtida com a aplicação da definição:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

## 1.2.2 Propriedades dos Determinantes

As propriedades dos determinantes<sup>5</sup> são muito importantes para que possamos encontrar os seus valores de uma maneira menos trabalhosa do que a utilização da definição. Outra importante justificativa para estudarmos tais propriedades, é o fato de ampliar os nossos horizontes enquanto professores, até porque estamos constantemente sendo postos à prova com relação ao domínio dos conceitos apresentados aos alunos. Veremos a seguir algumas propriedades e suas respectivas demonstrações. Para facilitar a escrita, vamos utilizar a seguinte notação:  $\det(A) = \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$  onde  $L_i$  representa a  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ .

**$P_1$ : O determinante da matriz identidade é igual a 1:**

**Demonstração:** Seja  $I = [a_{i\sigma(i)}] = \begin{cases} 1, & i = \sigma(i) \\ 0, & i \neq \sigma(i) \end{cases}$ , a matriz identidade de ordem  $n$ , isto significa dizer que  $a_{i\sigma(i)} = 1$ , se e somente se,  $i = \sigma(i)$ . Portanto a única parcela não nula do somatório proveniente da definição dos determinantes é a parcela da permutação identidade, ou seja, a permutação que leva cada elemento nele próprio e todas as outras parcelas que aparecem na definição, apresentam, pelo menos um elemento nulo e como o sinal da identidade é 1, podemos escrever:  $\det(I) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = 1$  e fica demonstrada a propriedade. ■

**$P_2$ : O determinante é  $n$ -linear, ou seja, podemos dizer que:  $\det(L_1, L_2, \dots, L_i + kM, \dots, L_n) = \det(L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_n) + k \cdot \det(L_1, L_2, \dots, M, \dots, L_n)$ , onde  $k \in R$ :**

**Demonstração:** Considere a matriz  $A'$  quadrada de ordem  $n$  cuja única linha que difere das linhas das matrizes  $A$  e  $M$  se encontra na posição  $i$  e tem todos os seus elementos obedecendo à seguinte relação, para algum  $k \in R$ :  $a'_{i\sigma(i)} = a_{i\sigma(i)} + km_{i\sigma(i)}$ ,  $a'_{i\sigma(i)} \in A'$ ,  $a_{i\sigma(i)} \in A$  e  $m_{i\sigma(i)} \in M$ . Pela definição de determinantes, temos que  $\det(A') = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \dots a'_{n\sigma(n)}$ , e como em cada parcela desse somatório devemos ter um

<sup>5</sup>As propriedades  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  nos permite definir os determinantes como uma função que leva o determinante da matriz identidade em 1 [ $P_1$ ], é  $n$ -linear em suas linhas [ $P_2$ ] e alternada [ $P_3$ ].



elemento de cada linha da matriz, em particular com o elemento da linha  $i$ , vem:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum sgn(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a'_{n\sigma(n)} \\ &= \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots [a_{i\sigma(i)} + k \cdot m_{i\sigma(i)}] \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &+ \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots k \cdot m_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Como  $k$  é constante no somatório, podemos ainda escrever:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &+ k \cdot \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots m_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &e \\ \det(M) &= \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots m_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Logo:  $\det(A') = \det(A) + k\det(M)$  como queríamos demonstrar. ■

Segue imediatamente desta propriedade que, caso tenhamos a matriz  $A' = k \cdot A$ , isto é, todas as  $n$  filas da mesma natureza, considerando ou todas as linhas ou todas as colunas, multiplicadas por um número real  $k$ , podemos concluir que  $\det(A') = k^n \cdot \det(A)$ .

**$P_3$ : O determinante é alternado, isto é, (i) caso tenhamos duas linhas iguais em uma matriz, seu determinante é igual a zero e (ii) caso permutemos duas linhas de uma matriz, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz original:**

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração dessa propriedade em duas partes:

(i)  $L_i = L_j \rightarrow \det(A) = 0$

Neste caso, uma das  $n!$  permutações não aparece na distribuição dos elementos das linhas dessa matriz, o que significa que uma outra permutação aparece por duas vezes, assim devemos ter duas linhas iguais na matriz. Suponhamos que as duas primeiras linhas sejam iguais (qualquer outro par de linhas iguais nos permitiria chegar à mesma conclusão). Faremos indução sobre o número de linhas da matriz  $A$ . Inicialmente, veremos o que ocorre

para matrizes de ordem dois, assim  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Por definição, temos  $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0$  o que satisfaz a propriedade. Suponha a propriedade válida para uma matriz de ordem  $n$  e vejamos o que acontece com uma matriz de ordem  $(n + 1)$ . Escolhendo, convenientemente, uma das linhas não repetidas da matriz  $A$ , pelo Teorema de Laplace, devemos ter:  $\sum (-1)^{i+j} M_{ij} \cdot a_{ij}$ , mas o menor complementar  $M_{ij}$  é justamente o determinante de uma matriz de ordem imediatamente inferior à matriz dada, neste caso, de ordem  $n$  e possui duas linhas iguais. Devido à nossa escolha, qualquer que sejam os valores de  $i$  e  $j$  teremos  $M_{ij} = 0$  e portanto  $\det(A) = 0$ , como queríamos demonstrar.

(ii)  $\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n) = -\det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_n)$

Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  de ordem  $n$ , que escreveremos:  $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$

da qual selecionaremos, aleatoriamente, duas linhas  $L_i$  e  $L_j$ . A partir daí, construiremos a matriz  $A'$  de tal forma que à linha  $L_i$  adicionaremos a linha  $L_j$  e à linha  $L_j$  adicionaremos

a linha  $L_i$ , assim:  $A' = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_j + L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ . Pela primeira parte da demonstração, podemos

afirmar que  $\det(A') = 0$  já que a matriz construída possui duas linhas iguais [a saber, as linhas nas posições  $i$  e  $j$ ]. Assim:

$\det(A') = 0 \rightarrow \det(L_1, \dots, L_i + L_j, \dots, L_j + L_i, \dots, L_n) = 0$ , mas o determinante é  $n$ -linear [ver propriedade  $P_2!$ ], logo:

$$\det(L_1, \dots, L_i + L_j, \dots, L_j + L_i, \dots, L_n) = 0$$

$$\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j + L_i, \dots, L_n) + \det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_j + L_i, \dots, L_n) = 0$$

$$\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n) + \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_i, \dots, L_n) + \det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_j, \dots, L_n) + \det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_n) = 0$$

Pela primeira parte da demonstração, a segunda e a terceira parcelas são nulas, daí:

$$\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n) + \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_i, \dots, L_n) = 0$$

E finalmente:

$$\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n) = -\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_i, \dots, L_n)$$

E fica demonstrada a propriedade. ■

Outro resultado importante quando tratamos de cálculos de determinantes é o teorema a seguir, ele nos permite encontrar o determinante do produto de duas matrizes sem termos que, necessariamente, efetuarmos o referido produto. Vejamos como isso se dá.

**Teorema 1.1** (Binet). *Se  $A$  e  $B$  são matrizes de ordem  $n$  quaisquer, então  $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ .*

**Demonstração:** Temos dois casos a analisar:

(i)  $A$  ou  $B$  não são inversíveis: Considere, sem perda de generalidade, que a matriz  $A$  não o seja inversível. Isto significa que, pelo menos uma das linhas da forma escada da matriz  $A$  é nula, assim  $\det(A) = 0$ . Além disso, a matriz  $A.B$  possui também, pelo menos uma linha nula (nas mesmas posições das linhas nulas da forma escada da matriz  $A$ ) e portanto,  $\det(A.B) = 0$ . E nesse caso a igualdade é válida, ou seja,  $\det(A.B) = \det(A).\det(B) = 0$ . Antes do segundo caso vejamos a demonstração da proposição a seguir.

**Proposição 1.2.2.** *Se  $E$  for uma Matriz Elementar<sup>6</sup> e  $A$  uma matriz qualquer da mesma ordem de  $E$ , então  $\det(E.A) = \det(E).\det(A)$ .*

**Demonstração:** Como o resultado da aplicação de uma operação elementar sobre as linhas da matriz  $A$  é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar  $E$  correspondente à operação com as linhas da matriz  $A$ , só temos 3 possibilidades para as

---

<sup>6</sup>Dizemos que uma matriz é chamada de elementar quando a mesma é obtida a partir da identidade de mesma ordem por uma das três operações elementares sobre as linhas de uma matriz, a saber: permutação, multiplicação de uma linha por um escalar e substituição de uma das linhas da matriz pela soma desta linha com o produto de uma outra linha por um escalar.

matrizes elementares:

**1º CASO:** A matriz  $E$  é obtida a partir da matriz identidade de mesma ordem, por uma permutação entre duas linhas, isto é,  $\det(E) = -1$ :

Desse modo, temos também uma permutação entre duas linhas da matriz  $A$ , mas  $\det(E.A) = \det(E).\det(A) = -1.\det(A) = -\det(A)$ , como era esperado.

**2º CASO:** A matriz  $E$  é obtida a partir da matriz identidade de mesma ordem, por uma multiplicação de uma de suas linhas por um escalar real não nulo  $k$ , isto é,  $\det(E) = k$ :

Desse modo, temos também uma multiplicação de uma das linhas da matriz  $A$  pelo mesmo escalar  $k$ , mas então,  $\det(E.A) = \det(E).\det(A) = k.\det(A)$ , como era esperado.

**3º CASO:** A matriz  $E$  é obtida a partir da matriz identidade de mesma ordem, por uma substituição da  $i$ -ésima linha da matriz  $I$  por  $k$  vezes a  $j$ -ésima linhas mais a  $i$ -ésima linha, isto é,  $\det(E) = 1$ :

Desse modo, temos também uma substituição da  $i$ -ésima linha da matriz  $A$  por  $k$  vezes a  $j$ -ésima linha mais a  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ , mas então,  $\det(E.A) = \det(E).\det(A) = 1.\det(A) = \det(A)$ , como era esperado.

Pelo exposto nos casos acima, fica demonstrada a proposição. ■

(ii)  $A$  e  $B$  são inversíveis:

Do fato que a matriz  $A$  é inversível, podemos dizer que a mesma pode ser escrita como um produto de matrizes elementares, logo:  $A = E_1.E_2.\dots.E_k$  e pela proposição anterior, podemos escrever que  $\det(A) = \det(E_1.E_2.\dots.E_k) = \det(E_1).\det(E_2).\dots.\det(E_k)$ . Assim, observando o determinante do produto entre as matrizes  $A$  e  $B$ , temos:

$$\det(A.B) = \det(E_1.E_2.\dots.E_k.B) = \det(E_1).\det(E_2.\dots.E_k.B) = \dots = \det(E_1).$$

$\det(E_2).\dots.\det(E_k).\det(B)$ , mas  $\det(E_1).\det(E_2).\dots.\det(E_k) = \det(A)$ , e desse modo:  $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$  como queríamos demonstrar.

### 1.2.3 A Regra de Cramer

Uma das primeiras aparições registradas dos Sistemas de Equações Lineares ocorreu por volta de 300 a.C. No livro *Nove Capítulos Sobre a Arte da Matemática* [China entre 200 a.C. e 100 a.C.] o seguinte problema foi enunciado:

*“Existem 3 tipos de milho. Três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 unidades de milho. Dois pacotes do primeiro, três pacotes do segundo e um do terceiro somam 34 unidades. E um pacote do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 unidades. Sabendo que os pacotes de milho do mesmo tipo contem a mesma quantidade de unidades, quantas unidades de milho contém um pacote de cada tipo?”*

Hoje o problema proposto acima tornou-se um problema de ,relativamente, fácil resolução pelo conhecimento de procedimentos como a Regra de Cramer, que nos permite resolver Sistemas Lineares. Vale salientar que, embora no Ensino Médio, as equações dos planos em  $R^3$  não sejam objetos de estudo, é possível que encontremos algumas contradições do ponto de vista geométrico para o que a Regra de Cramer<sup>7</sup> propõe, o que sugere que outros métodos [como o de Gauss, por exemplo.] existem embora não se faça necessário enunciar—los no Ensino Médio, mas é importante que os conheçamos. Vejamos como a Regra de Cramer é aplicada.

Este método consiste em tratar as soluções de um sistema linear nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com a seguinte forma:  $x_i = \frac{d_{x_i}}{d}$ , com  $1 \leq i \leq n$ , onde  $d$  é o determinante da matriz dos coeficientes e  $d_{x_i}$  é o determinante da matriz alterada dos coeficientes trocando a coluna da  $i$ -ésima variável do nosso sistema pela matriz coluna que representa a matriz dos coeficientes. Para ilustrar a utilização do método, vamos resolver o seguinte sistema linear:

---

<sup>7</sup>Gabriel Cramer [1704–1752] matemático suíço, filho de um médico, tinha outros dois irmãos. Em 1722 consagrou—se Doutor pela Universidade de Genebra devido ao seu trabalho na área acústica, e em 1724, tornou—se Professor de Matemática e de Filosofia na mesma. Nas diversas viagens realizadas entre 1727 e 1729 encontrou—se com grandes matemática e de filosofia na mesma. Nas diversas viagens realizadas entre 1727 e 1729 encontrou-se com grandes matemáticos de seu tempo, como Bernoulli, Euler, de Moivre, Jacob, Fontenelle, dentre outros. Essas trocas de experiências acabaram por influenciar em seu trabalho. A sua obra mais importante foi *Introduction à l’Analyse Des Courbes Algébriques* [Introdução à Análise de Curvas Algébricas] de 1750. É famosa a regra para solução de sistemas de equações lineares , enunciada a partir de uma generalização do “Teorema geral de Mclaurin”.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Transformando o sistema acima em uma equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $A$  é chamada de matriz dos coeficientes,  $X$  de matriz das variáveis e  $B$  de matriz dos termos independentes. Assim  $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 12$ ,  $d_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$

$$12, d_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \text{ e } d_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 36, \text{ logo pela Regra de Cramer}$$

os valores das variáveis são dados por:  $x_1 = \frac{d_{x_1}}{d} = \frac{12}{12} = 1$ ,  $x_2 = \frac{d_{x_2}}{d} = -\frac{12}{12} = -1$  e  $x_3 = \frac{d_{x_3}}{d} = \frac{36}{12} = 3$ , portanto o conjunto solução do sistema é  $S = \{(1; -1; 3)\}$ .

A Regra de Cramer é uma das possibilidades que temos para resolvermos um Sistema Linear. Temos ainda as Equações Matriciais e o Escalonamento que podem ser abordadas ainda no Ensino Médio, além da Interpretação Geométrica que neste nível de Ensino não é abordado. Das possibilidades acima citadas, a Regra de Cramer é a mais utilizada, embora não seja a menos cansativa. Talvez por tratar de um procedimento de resolução mais mecânico e que minimize os questionamentos por parte dos alunos, os livros priorizem a resolução pela Regra de Cramer<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>Basta consultar *Matemática e Ensino* do Elon 98-99 onde o mesmo aborda o custo operacional de cada método e justifica que dentre os três métodos que podem ser abordados no Ensino Médio o mais vantajoso é o Escalonamento por não depender de nenhuma condição para que possa ser aplicado.

## 1.2.4 Cofator, Menor Complementar e o Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace constitui uma ferramenta importante para o cálculo de determinantes de ordens superiores a 3, pois como já foi visto anteriormente nesse trabalho, a utilização da definição dos determinantes, nesses casos, torna-se muito trabalhosa. Antes de demonstrarmos o referido Teorema, vamos definir alguns elementos essenciais para que possamos, de fato, chegar ao Teorema de Laplace.

**Definição 1.3.** Chamaremos de Menor Complementar de um elemento  $a_{ij}$  pertencente a uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  e denotaremos por  $M_{ij}$ , o determinante da matriz de ordem  $(n-1)$  obtida a partir da matriz  $A$  suprimindo-se a linha  $i$  e a coluna  $j$  da mesma.

**Definição 1.4.** Chamaremos de Cofator ou de Complemento Algébrico de um elemento  $a_{ij}$  e denotaremos por  $A_{ij}$ , o número resultante da operação  $(-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$ .

**Teorema 1.2** (Laplace). *Seja uma matriz  $A$  de ordem  $n \geq 2$ , dizemos que o determinante da matriz  $A$  pode ser dado pelo produto de todos os elementos de uma fila da matriz  $A$  [linha ou coluna], pelos seus respectivos Complementos Algébricos, ou seja:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{k\sigma(i)} \cdot (-1)^{k+\sigma(i)} \cdot M_{k\sigma(i)}$$

Fixando a linha  $k$ , ou ainda:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{il} \cdot (-1)^{i+l} \cdot M_{il}$$

Fixando a coluna  $l$ .

**Demonstração:** Faremos indução sobre uma linha  $k$  da matriz  $A$  [caso em que escolhemos a coluna  $l$  é análogo]. Tome a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  e seja  $k = 1$ , ou seja, selecionaremos a primeira linha da matriz  $A$ . Como é sabido pela definição de Determinantes de matrizes de ordem 2, vem:  $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ , mas note que, para a primeira linha, considerando o elemento  $a_{11}$ , temos  $M_{11} = |a_{22}|$  e  $(-1)^{(1+1)} = 1$ . Analogamente para o elemento  $a_{12}$ , temos  $M_{12} = |a_{21}|$  e  $(-1)^{(1+2)} = -1$ , portanto pelo Teorema de Laplace:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n a_{1\sigma(i)} \cdot (-1)^{1+\sigma(i)} \cdot M_{1\sigma(i)} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

Suponha a propriedade válida para alguma matriz  $A$  de ordem  $n$ , com  $n$  par [o caso em que  $n$  é ímpar é análogo, bastando apenas termos atenção com relação às paridades envolvidas], vejamos o que acontece para uma matriz  $A_1$  de ordem  $(n + 1)$ , com  $(n + 1)$  ímpar. Considere, sem perda de generalidade, que escolheremos os elementos da primeira linha da matriz  $A_1$ , desse modo, pela definição de determinantes:

$$\det(A) = \sum sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{(n+1)\sigma(n+1)}$$

Considerando todas as parcelas onde os elementos da primeira linha da matriz  $A_1$  aparecem, temos:

$$\det(A_1) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{1j} \sum sgn(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{(n+1)\sigma(n+1)}$$

Com  $\sigma(i) \neq j$ , mas, pela hipótese de indução, temos que o determinante da matriz de ordem  $n$ :

$$\sum sgn(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{(n+1)\sigma(n+1)}$$

Pode ser dado por:

$$\sum sgn(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{(n+1)\sigma(n+1)} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{2\sigma(i)} A_{2\sigma(i)}$$

Mas para  $\sigma(i) \neq j$ , temos que:

$$A_{1j} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{2\sigma(i)} A_{2\sigma(i)}$$

Desse modo:

$$\det(A_1) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{1j} A_{1j}$$

Para qualquer linha escolhida chegamos à uma expressão equivalente à anterior, o que demonstra o Teorema. ■



# Capítulo 2

## Sistemas Lineares e Probabilidade

### 2.1 Introdução

Muitos fenômenos da natureza ou da sociedade podem ser estudados, pelo menos de um modo mais simplista e imediato, admitindo—se que a partir de um estado onde o estudo começa a se desenvolver, a transição dessa etapa inicial do fenômeno para o passo seguinte seria dado por uma probabilidade conhecida. Suponha ainda que a cada transição do fenômeno de uma etapa qualquer para a etapa imediatamente seguinte novas [ou antigas!] sequências de probabilidades sejam conhecidas. Caso apenas uma transição seja levada em consideração, chamaremos esse passo de Processos de Markov<sup>1</sup>, caso haja uma sucessão de transições, daremos a essa estrutura o nome de Cadeias de Markov. Vejamos de que forma esse estudo é desenvolvido.

### 2.2 Situação—Problema:

Vamos considerar a seguinte situação:

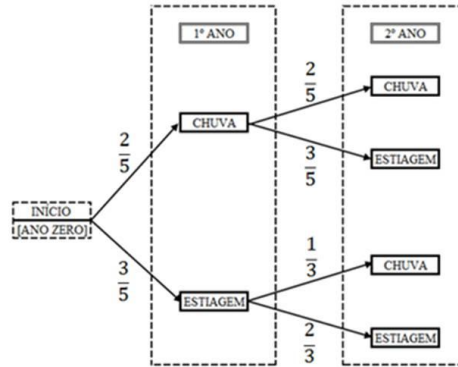
*“Em determinada região, observa—se que a probabilidade de chover muito durante um ano e chega-se a seguinte conclusão: a probabilidade de termos muita chuva é de  $\frac{2}{5}$  e assim a probabilidade de termos uma estiagem é de  $\frac{3}{5}$ . Além disso, caso num ano haja estiagem, a probabilidade de no ano seguinte termos*

---

<sup>1</sup>Andrei Andreyevich Markov [1856–1922] nascido em Ryazan, Rússia, formou—se na Universidade de St Petersburg em 1878. Tornou—se Professor da mesma após 8 anos de formado. Seus primeiros trabalhos Markov foram principalmente em teoria dos números e análise, frações contínuas, limites de integrais, teoria da aproximação e a convergência de séries. Markov é lembrado pelo seu estudo das chamadas Cadeias de Markov, uma modelagem de sistemas que trabalham em cima das probabilidades dos estados em cada uma de suas etapas de desenvolvimento.

uma nova estiagem é o dobro da probabilidade de termos muita chuva, isto é, temos as novas probabilidades iguais a  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{3}$ , respectivamente e caso num ano haja muita chuva as probabilidades são mantidas.”

Analisando apenas os primeiros 3 anos que respeitam a situação descrita anteriormente, podemos representá-la através do seguinte esquema:



Observe que caso desejemos saber qual a probabilidade de termos chuva suficiente no segundo ano, é dada por:  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$  que equivale a 36%

Note que, encontrarmos probabilidade à longo prazo, torna-se uma tarefa que não é das mais prazerosas, o que nos permite pensar na aplicação de outra estratégia para finalizar o problema. A partir daí definiremos matriz das probabilidades de transição e vetor de probabilidade. A primeira trata-se de uma matriz [chamaremos de  $T$ ] é obtida a partir da tabela das probabilidades, onde o elemento da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna indica a transição do  $j$ -ésimo para o  $i$ -ésimo estado. No caso da situação descrita acima, podemos escrever:

	de C	de E
para C	2/5	1/3
para E	3/5	2/3

E portanto, temos a matriz das probabilidades de transição  $T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Já o vetor probabilidade é a matriz coluna formada pelas probabilidades de termos chuva no  $n$ -ésimo ano na primeira linha e a probabilidade de termos estiagem no  $n$ -ésimo na segunda linha, desse modo:  $P = \begin{bmatrix} p_C^{(n)} \\ p_E^{(n)} \end{bmatrix}$ . Fazendo uso das definições acima

podemos verificar facilmente que a probabilidade de termos chuva suficiente no segundo ano é igual a:

$$\begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_E^{(2)} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_E^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 36\% \text{ como havíamos}$$

encontrado anteriormente. Podemos ainda fazer uma projeção para os anos subsequentes, por exemplo, caso queiramos descobrir qual a probabilidade de termos chuva suficiente

no terceiro ano pode ser dada da seguinte forma:  $\begin{bmatrix} p_C^{(3)} \\ p_E^{(3)} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_E^{(2)} \end{bmatrix}$ , mas  $\begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_E^{(2)} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_E^{(1)} \end{bmatrix}$  e desse modo podemos escrever:  $\begin{bmatrix} p_C^{(3)} \\ p_E^{(3)} \end{bmatrix} = T \cdot T \cdot \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_E^{(1)} \end{bmatrix} = T^2 \cdot \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_E^{(1)} \end{bmatrix}$ . Mais

geralmente podemos escrever:  $\begin{bmatrix} p_C^{(n+1)} \\ p_E^{(n+1)} \end{bmatrix} = T^n \cdot \begin{bmatrix} p_C^{(n)} \\ p_E^{(n)} \end{bmatrix}$ , relação que nos permite esta-

belecer probabilidades à longo prazo que são previsões de grande importância, mas só podem ser realizadas caso os elementos da matriz  $T^n$  se aproximem de uma matriz fixa que chamaremos de  $P$  o que retrata uma regularidade no problema. Caso a matriz  $T^n$  não tenha uma regularidade que nos permita encontrar a matriz  $P$ , significa que o processo não terá um padrão, ou seja, ele se modificaria muito a cada passo o que comprometeria as previsões a longo prazo.

## Capítulo 3

# Sistemas Lineares e Equações Matriciais

Uma aplicação imediata das matrizes é na solução de sistemas de equações lineares os quais sempre podem ser transformados numa equação envolvendo matrizes que chamaremos de *Equação Matricial*. É claro que a abordagem apresentada a seguir não caberá no Ensino Fundamental devido ao fato de termos que utilizar algumas definições e conceitos ainda não apresentados neste nível mas pode ser uma boa argumentação no Ensino Médio para abordar uma solução alternativa para os sistemas vistos em anos anteriores.

Observe a situação a seguir:

*“No pátio de uma fábrica de brinquedos encontram-se 30 unidades fabricadas entre bicicletas e triciclos. Se no total tem-se 72 rodas, quantas bicicletas e quantos triciclos encontram-se no pátio? [Para evitar confusão, admita que as bicicletas não possuem rodinhas]”.*

### Resolução:

Para resolvermos esse problema, vamos chamar o número de bicicletas de  $x_1$  e o número de triciclos de  $x_2$  e desse modo podemos expressar a situação com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 72 \end{cases}$$

De acordo com a operação de multiplicação entre duas matrizes [respeitando a condição envolvendo as ordens das matrizes, para a possibilidade das operações serem efetuadas], podemos escrever, equivalentemente ao sistema acima a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 72 \end{bmatrix}$$

Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  dos coeficientes,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  das variáveis e a matriz  $B = \begin{bmatrix} 30 \\ 72 \end{bmatrix}$ , dos termos independentes, e desse modo podemos encarar a equação matricial da seguinte forma:  $A.X = B$ . Esse sistema terá uma única solução nos casos onde a matriz  $A$  for inversível e como o produto entre duas matrizes não é uma operação comutativa, podemos resolver a equação matricial de acordo com o seguinte processo: admitido que a matriz inversa da matriz  $A$  seja conhecida:

$$\begin{aligned} A.X &= B \\ A^{-1}.A.X &= A^{-1}.B \\ X &= A^{-1}.B \end{aligned}$$

No exemplo anterior, como  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ , temos:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}.B \\ X &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 72 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pela igualdade entre matrizes podemos afirmar que  $x_1 = 18$  e  $x_2 = 12$ , isto é, 18 bicicletas e 12 triciclos.

Observe agora a seguinte situação:

*“ Considere que entre quadriláteros e pentágonos, um aluno desenhou um total de 35 polígonos. Sabendo que esse aluno precisou de um total de 158 segmentos de reta e que nenhum segmento de reta faz parte de dois ou mais polígonos, determine quantos são os quadriláteros e quantos são os pentágonos, desenhados por esse aluno?”*

### **Resolução:**

Para resolvermos esse problema, vamos chamar o número de quadriláteros de  $x_1$  e o número de pentágonos de  $x_2$  e desse modo podemos expressar a situação com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35 \\ 4x_1 + 5x_2 = 158 \end{cases}$$

De acordo com a operação de multiplicação entre duas matrizes [respeitando a condição envolvendo as ordens das matrizes, para a possibilidade das operações serem efetuadas], podemos escrever, equivalentemente ao sistema acima a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 158 \end{bmatrix}$$

Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  dos coeficientes,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  das variáveis e a matriz  $B = \begin{bmatrix} 35 \\ 158 \end{bmatrix}$ , dos termos independentes, e por argumentação análoga ao exemplo anterior:

$$\begin{aligned} A.X &= B \\ A^{-1}.A.X &= A^{-1}.B \\ X &= A^{-1}.B \end{aligned}$$

No exemplo anterior, como  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ , temos:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}.B \\ X &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35 \\ 158 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pela igualdade entre matrizes podemos afirmar que  $x_1 = 17$  e  $x_2 = 18$ , isto é, 17 quadriláteros e 18 pentágonos.

# Capítulo 4

## Outras Aplicações

No Ensino de Matemática, independente no nível, é muito comum nos depararmos em sala de aula com a pergunta: “*Professor, onde eu vou usar isso na minha vida?*”. Esse item do trabalho visa apresentar algumas aplicações das Matrizes, dos Determinantes e dos Sistemas Lineares na resolução de problemas em várias áreas do conhecimento (como em Física, Química, Nutrição, Geometria Analítica, Logística, etc.) além da aplicação no estudo das probabilidades vista anteriormente neste trabalho. Como a transversalidade é uma tendência cada vez mais presente nas avaliações que os nossos alunos são submetidos, como o Exame Nacional de Ensino Médio [ENEM], por exemplo, vejamos algumas situações onde esses conhecimentos podem nos auxiliar a resolver alguns problemas.

[**Nutrição**] Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que o alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C, o alimento II tem 2 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 5 unidades de vitamina C e o alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e não contém vitamina C. Se são necessárias 14 unidades de vitamina A, 18 de vitamina B e 14 de vitamina C, quais as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejadas?

### **Resolução:**

Considere que as quantidades ingeridas dos alimentos I, II e III sejam, respectivamente,  $x$ ,  $y$  e  $z$  gramas. Desse modo podemos escrever que com relação ao alimento I, temos  $x$  unidades de vitamina A,  $3x$  unidades de vitamina B e  $4x$  unidades de vitamina C. Já com relação ao alimento II temos  $2y$  unidades de vitamina A,  $3y$  unidades de vitamina B e  $5y$  unidades de vitamina C e por fim, com relação ao alimento III temos  $3z$  unidades de vitamina A,  $3z$  unidades de vitamina B e nenhuma unidade de vitamina C e como as quantidades necessárias de vitaminas A, B e C, são de, respectivamente, 14, 18 e 14

unidades, temos o seguinte sistema linear para a representação do referido problema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 3y + 3z = 18 \\ 4x + 5y + 0z = 14 \end{cases}$$

Ou equivalentemente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}$$

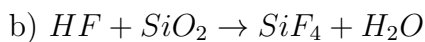
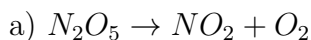
Pela Regra de Cramer:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, d_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 18 & 3 & 3 \\ 14 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, d_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 3 & 18 & 3 \\ 4 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 36 \text{ e } d_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 3 & 18 \\ 4 & 5 & 14 \end{vmatrix} =$$

54, e, portanto, podemos concluir que:  $x = \frac{d_x}{d} = \frac{18}{18} = 1$  grama,  $y = \frac{d_y}{d} = \frac{36}{18} = 2$  gramas

e  $z = \frac{d_z}{d} = \frac{54}{18} = 3$  gramas e está resolvido o problema.

**[Química]** Uma reação química é um rearranjo de moléculas para formar novas substâncias químicas em que reagentes são transformados em produtos. Por exemplo:  $2Na + Cl_2 \rightarrow 2NaCl$  representa a reação de duas moléculas de sódio [Na] e uma de cloro [Cl] para produzir duas moléculas de cloreto de sódio (sal de cozinha). Essa reação é balanceada no sentido que o número de átomos de todos os elementos em um lado da reação é o mesmo que o número de átomos no outro lado. Pelo exposto anteriormente, balanceie as reações a seguir:



### Resolução:

No item a) temos,  $N_2O_5 \rightarrow NO_2 + O_2$ . Considere que hajam  $x$  moléculas de  $N_2O_5$  como reagente, produzindo  $y$  moléculas de  $NO_2$  e outras  $z$  moléculas de  $O_2$ . Como a reação estará balanceada se e somente se, o número dos átomos de um lado da reação for igual o número desse mesmo átomo do outro lado da reação, temos então:  $x.N_2O_5 \rightarrow y.NO_2 + z.O_2$ , daí temos que  $2x = y$  [em relação ao Nitrogênio N] e também  $5x = 2y + 2z$  [em relação ao Oxigênio O], assim podemos escrever:  $\begin{cases} 2x = y \\ 5x = 2y + 2z \end{cases}$ , o que nos permite concluir

que:  $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$  que obviamente trata-se de um sistema linear indeterminado, pois o número de variáveis é maior que o número de equações, assim, podemos concluir



que, sendo  $y = 2x$  temos:  $5x - 2.(2x) - 2z = 0 \rightarrow z = \frac{x}{2}$ . Logo podemos concluir que todo terno ordenado  $(x, y, z)$ , da forma  $(x, 2x, \frac{x}{2})$ , para qualquer  $x$  real, constitui-se uma solução para o sistema e balanceia a reação.

No item b) temos,  $HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + H_2O$  e por procedimento análogo ao anterior podemos escrever, assumindo que as quantidades de moléculas  $HF, SiO_2, SiF_4$  e  $H_2O$ , sejam  $x, y, z$  e  $w$ , assim a reação pode ser escrita como:  $x.HF + y.SiO_2 \rightarrow z.SiF_4 + w.H_2O$  e desse modo pela igualdade dos átomos envolvidos na reação:  $x = 2w$  [em relação ao Hidrogênio  $H$ ],  $x = 4z$  [em relação ao Flúor  $F$ ],  $y = z$  [em relação ao Silício  $Si$ ] e  $2y = w$

[em relação ao Oxigênio  $O$ ] originando o sistema: 
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2w \\ x = 4z \\ y = z \\ 2y = w \end{array} \right. , \text{ portanto escrevendo as}$$

demais variáveis em função de  $z$ , podemos afirmar que qualquer quádrupla  $(x; y; z; w)$  da forma  $(4z; z; z; 2z)$  balanceia a reação.

[Física] Suponha que em um determinado experimento sobre lançamento oblíquo os alunos computaram a altura atingida pelo objeto lançado nos instantes 1, 2 e 3 segundos, obtendo a seguinte tabela:

t (segundos)	h (metros)
1	6
2	6
3	4

Determine a altura máxima atingida pelo objeto e o instante em que isso ocorre.

### Resolução:

Como sabemos, ao submetermos um objeto ao lançamento oblíquo o mesmo descreve uma trajetória parabólica, e, portanto, podemos afirmar que a lei matemática que define tal trajetória é uma função polinomial do segundo grau, assim podemos escrever:  $h(t) = at^2 + bt + c$ , com  $a \neq 0$ . Tomando os pontos obtidos com o experimento, podemos escrever:  $h(1) = a(1)^2 + b(1) + c \rightarrow a + b + c = 6$  e analogamente temos:  $4a + 2b + c = 6$

e  $9a + 3b + c = 4$ . Desse modo originamos o seguinte sistema: 
$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{array} \right. , \text{ ou}$$

equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Pela Regra de Cramer:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, d_a = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, d_b = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \text{ e } d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8, \text{ e, portanto, podemos concluir que: } a = \frac{d_a}{d} = \frac{2}{(-2)} = -1, b = \frac{d_b}{d} = \frac{(-6)}{(-2)} = 3 \text{ e } c = \frac{d_c}{d} = \frac{(-8)}{(-2)} = 4, \text{ logo: } h(t) = at^2 + bt + c \rightarrow h(t) = -t^2 + 3t + 4 \text{ cuja representação gráfica é uma parábola com concavidade voltada para baixo, daí a altura máxima trata-se do } y_V, \text{ que como sabemos, pode ser encontrado usando a relação } y_V = -\frac{\Delta}{4a} \text{ e como } \Delta = 32 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 2 \text{ e finalmente } h_M = 12,5 \text{ metros. Já o instante em que isso ocorre é exatamente o } x_V = -\frac{b}{2a} = 1,5 \text{ segundo.}$$

[**Codificação**] Nos dias de hoje é muito comum que as pessoas utilizem dados pessoais nas atividades do dia-a-dia, como senhas de acesso à bancos, contas de e-mail, senhas de cartão de crédito/débito, os próprios números dos documentos pessoais como RG e CPF, além do que várias empresas e setores do Governo precisam trafegar mensagens secretas e dados sigilosos, o que faz com que haja a necessidade do estudo da codificação/decodificação de mensagens. Esses códigos utilizados serão chamados de cifras, e a ação de “cifrar” uma sequência de dados é chamado de codificação, e obviamente a operação de decifrar uma sequência é chamada de decodificação.

Uma classe de Sistemas Poligráficos consiste em escrever uma frase de  $n$  letras do nosso alfabeto segundo uma codificação conhecida pelas partes interessadas nessas informações.

Vejamos a codificação utilizada para cada letra num dado sistema de codificação/decodificação:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Vamos utilizar o símbolo # para separar as palavras<sup>1</sup>, desse modo temos ainda:

#
27

<sup>1</sup>É claro que a medida em que se fizer necessário, os acentos ortográficos e demais signos que possam/queiram ser utilizados para a codificação/decodificação podem ser incorporados na tabela de codificação.

Vejamos como podemos codificar a frase

“TRABALHO FINAL DO PROFMAT”  
[TRABALHO#FINAL#DO#PROFMAT#]

**Resolução:**

1º **Passo:** Escolha uma matriz quadrada [e inversível caso a decodificação seja necessária]. Para efeito facilitador iremos escolher uma matriz de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A saber, como  $|A| = -1 \neq 0$ , a matriz  $A$  é inversível.

2º **Passo:** Transcreva a frase a ser codificada utilizando os símbolos definidos na tabela de codificação, dividindo o texto em duas linhas [de um modo mais abrangente deveremos dividir o texto num número de linhas igual à ordem da matriz de codificação escolhida] e caso seja necessário utilizaremos o símbolo # para completar a segunda linha da mensagem:

T	R	A	B	A	L	H	O	#	F	I	N	A
20	18	01	02	01	12	08	15	27	06	09	14	01
L	#	D	O	#	P	R	O	F	M	A	T	#
12	27	04	15	27	16	18	15	06	13	01	20	27

Desse modo temos a matriz  $M$  associada a mensagem a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 01 & 02 & 01 & 12 & 08 & 15 & 27 & 06 & 09 & 14 & 01 \\ 12 & 27 & 04 & 15 & 27 & 16 & 18 & 15 & 06 & 13 & 01 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

3º **Passo:** Para a codificação basta multiplicarmos as matrizes  $A$  e  $M$ , originando a matriz codificada  $C$ :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 18 & 01 & 02 & 01 & 12 & 08 & 15 & 27 & 06 & 09 & 14 & 01 \\ 12 & 27 & 04 & 15 & 27 & 16 & 18 & 15 & 06 & 13 & 01 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 32 & 45 & 05 & 17 & 28 & 28 & 26 & 30 & 33 & 19 & 10 & 34 & 28 \\ 84 & 108 & 11 & 36 & 57 & 68 & 60 & 75 & 93 & 44 & 29 & 82 & 57 \end{bmatrix}$$

Logo a mensagem codificada, usando para as entradas da matriz a congruência  $\text{mod}(27)$ , pois trata-se da quantidade de símbolos utilizadas, é:

$$C = \begin{bmatrix} 05 & 18 & 05 & 17 & 01 & 01 & 26 & 03 & 06 & 19 & 10 & 07 & 01 \\ 03 & 27 & 11 & 09 & 03 & 14 & 06 & 21 & 12 & 17 & 02 & 01 & 03 \end{bmatrix}$$

“**EREQAAZCFSJGAC KICNFULQBAC**”

O que convenhamos, é praticamente impossível de ser decifrada. Caso a decodificação seja necessária, denotaremos a matriz de decodificação por  $D$ , que para ser encontrada basta efetuarmos a seguinte operação:  $D = A^{-1}.C$ .

Uma vez feita a codificação, vejamos como o processo inverso pode ser realizado. Como sabemos que a matriz resultante após a codificação é:

$$C = \begin{bmatrix} 05 & 18 & 05 & 17 & 01 & 01 & 26 & 03 & 06 & 19 & 10 & 07 & 01 \\ 03 & 27 & 11 & 09 & 03 & 14 & 06 & 21 & 12 & 17 & 02 & 01 & 03 \end{bmatrix}$$

E que a matriz utilizada nessa codificação foi:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  cuja inversa é  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ . Realizando a multiplicação:  $D = A^{-1}.C$ , obtemos a seguinte matriz:

$$D = \begin{bmatrix} -07 & -09 & 01 & -25 & 01 & 12 & -46 & 15 & 00 & -21 & -18 & -13 & 01 \\ 12 & 27 & 04 & 42 & 00 & -11 & 72 & -12 & 06 & 40 & 28 & 20 & 00 \end{bmatrix}$$

Logo a mensagem decodificada, usando para as entradas da matriz  $D$  com a congruência  $\text{mod}(27)$ , é:

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 01 & 02 & 01 & 12 & 08 & 15 & 27 & 06 & 09 & 14 & 01 \\ 12 & 27 & 04 & 15 & 27 & 16 & 18 & 15 & 06 & 13 & 01 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

Que é, justamente a matriz encontrada antes da codificação. O que confirma a eficácia da decodificação.

[**Geometria Analítica**] Uma aplicação muito utilizada das matrizes, é a possibilidade de escolhermos um sistema de coordenadas ortogonais de forma conveniente para simplificar a expressão de uma Cônica<sup>2</sup> ou uma curva qualquer no Plano Cartesiano. Normalmente

---

<sup>2</sup>A saber temos as Parábolas, as Elipses e as Hiperbóles. Caso as mesmas tenham os seus eixos focais paralelos a alguns dos eixos cartesianos, podemos dizer que as equações das mesmas, em relação ao sistema XOY, podem ser dadas por:  $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$  [Parábola com o Eixo Focal paralelo ao eixo

quando uma dessas cônicas não tem o seu eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados, podemos reescrever a equação da mesma assumindo um novo sistema de eixos coordenados a partir de uma simples rotação<sup>3</sup> dos eixos originais em torno da origem do sistema de coordenadas facilitará a escrita da equação de cada cônica da seguinte forma:

*Considere um Sistema de Coordenadas Ortogonais XOY. Seja o Sistema de Coordenadas X'OY' obtido a partir do Sistema XOY pela rotação dos dois eixos em torno da origem [utilizaremos o centro de rotação na origem apenas com a finalidade de facilitar as nossas conclusões. Por procedimento conveniente, podemos ainda deslocar o centro de rotação para obtermos o Sistema X'OY' com a nova origem num ponto diferente da origem do Sistema XOY] por um ângulo  $\theta$  tal que  $0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Tome um ponto qualquer de coordenadas  $(x, y)$  em relação ao Sistema XOY que também possui coordenadas  $(x', y')$  referente ao Sistema X'OY'. Considere ainda o segmento OP com extremidades no ponto P e na origem e o ângulo  $\phi$  entre o segmento OP e semi-eixo positivo OX' e chamaremos o seu comprimento de r. Desse modo podemos escrever:*

$$\begin{cases} x' = r.\cos(\varphi) \\ y' = r.\sen(\varphi) \end{cases}$$

*E também*

$$\begin{cases} x = r.\cos(\varphi + \theta) \\ y = r.\sen(\varphi + \theta) \end{cases}$$

*Mas, desenvolvendo as expressões trigonométricas, temos:*

$$\begin{cases} x = r.\cos(\varphi).\cos(\theta) - r.\sen(\varphi).\sen(\theta) \\ y = r.\sen(\varphi).\cos(\theta) + r.\cos(\varphi).\sen(\theta) \end{cases}$$

*O que nos permite escrever*

$$\begin{cases} x = x'.\cos(\theta) - y'.\sen(\theta) \\ y = x'.\sen(\theta) + y'.\cos(\theta) \end{cases}$$

---

X],  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$  [Parábola com o Eixo Focal paralelo ao eixo Y],  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  [Elipse com o Eixo Focal paralelo ao Eixo OX],  $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$  [Elipse com o Eixo Focal paralelo ao Eixo OY],  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  [Hipérbole com o Eixo Focal paralelo ao Eixo OX],  $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$  [Hipérbole com o Eixo Focal paralelo ao Eixo OY] todas elas com centro no ponto  $(x_0, y_0)$ .

<sup>3</sup>Podemos, ainda, utilizar uma simples translação dos eixos do sistema XOY ou até mesmo uma combinação entre uma rotação e uma translação dos eixos do mesmo sistema de coordenadas.

E finalmente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

O que nos permite ainda “desfazer” um rotação da seguinte forma<sup>4</sup>:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como ilustrado na figura a seguir:

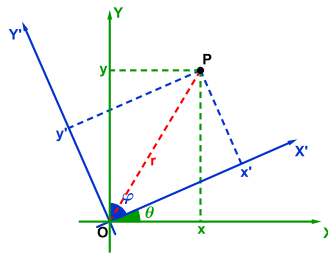


Figura 4.1: Sistema Ortogonal X'OY' pela rotação  $\theta$  em torno da origem do Sistema Ortogonal XOY

De acordo com o exposto acima, considere a cônica de equação:  $-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0$ . Determine qual a cônica em questão e encontre qual a equação da mesma no Sistema Ortogonal X'OY' obtido a partir da rotação por um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ .

### Resolução:

Vejamos como fica a equação no novo Sistema Ortogonal. Usando o fato que  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \text{ podemos escrever que } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

podemos escrever que:  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y') \end{cases}$  e substituindo na equação dada temos:

$$\begin{aligned} -5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 &= 0 \\ -5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' - y')\right)^2 + 26\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' - y')\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y')\right) - 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y')\right)^2 - 72 &= 0 \\ \Rightarrow (\dots) \Rightarrow \\ 16x'^2 - 36y'^2 &= 144 \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Observe que nos dois casos abordados para a obtenção das coordenadas dos pontos nos Sistemas Ortogonais, as duas matrizes quadradas são inversas uma da outra.

E dividindo a equação por 144, temos:  $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$  que trata de uma Hipérbole com uma equação muito mais simples do que a equivalente no Sistema XOY. Caso as características desta Hipérbole sejam solicitadas, basta encontrá-las no Sistema X'OY' e depois utilizar a equação matricial conveniente para obtermos as coordenadas dos pontos no Sistema XOY.

# Capítulo 5

## Considerações Finais:

Como visto neste trabalho, a aplicação das Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares pode ir muito além dos simples exercícios normalmente abordados em sala de aula. Existe um campo muito amplo que pode ser levado em consideração, mesmo no Ensino Médio pois não necessitam de ferramentas mais sofisticadas do que as apresentadas até a conclusão da Educação Básica.

Além disso, o conceito formal de Determinantes, que às vezes é deixado de lado nos cursos de graduação e que normalmente se constitui uma deficiência para nós, Professores de Matemática, que trabalhamos cada vez mais com uma clientela questionadora e não aceita com facilidade a argumentação de que as “coisas” são resolvidas de acordo com simples “regras” que podemos aplicar a terminar um exercício ou problema como uma verdade absoluta, foi um ponto que não poderia ser deixado de lado neste trabalho. Uma abordagem com um olhar um pouco mais técnico foi dada no tratamento de tal definição com o intuito de fornecer ao Professor, pelo menos, uma argumentação mais consistente do que vem a ser o Determinante de uma matriz, em quais situações os mesmos podem ser calculados, e as demonstrações de algumas propriedades utilizadas no cálculo dos Determinantes, que são atalhos que facilitam muito a obtenção dos resultados procurados.

As aplicações das Matrizes e dos Sistemas Lineares em situações menos triviais do que as apresentadas nos livros do Ensino Médio também foram motivos de atenção deste trabalho. Problemas envolvendo Probabilidades, Equações Químicas, Movimentos Uniformemente Variados, Codificação, dentre outros apresentados neste trabalho, nos permite observar que em muitos casos podemos estabelecer um elo entre conteúdos, aparentemente desconexos, com a intenção de criar estratégias de resoluções menos óbvias, possibilitando apresentar aos nossos alunos que conceitos matemáticos não precisam ficar restritos na própria Matemática e sim ultrapassar os limites da mesma.



# Apêndice A

## Interpretação Geométrica dos Sistemas Lineares

### Reconhecendo Equações de Retas no $R^2$ e de Planos no $R^3$

Uma vertente interessante de análise de Sistemas Lineares é a resolução geométrica destes. No entanto a utilização dessa ferramenta para a análise não pode ser usada de forma indiscriminada. Precisamos definir alguns conceitos e estabelecer algumas regras neste tipo de resolução dos Sistemas Lineares a fim de conseguirmos alcançar o nosso objetivo de resolver todas as equações envolvidas no sistema de forma simultânea.

No Ensino Fundamental, os Sistemas Lineares de duas equações e duas variáveis são, na sua esmagadora maioria, possíveis e determinados e como sabemos as equações dos sistemas são, na verdade, equações de duas retas coplanares. Vejamos as posições relativas entre duas retas coplanares.

**1) Concorrentes:** As duas retas possuem um único ponto de interseção, em outras palavras, o sistema deve ser possível e determinado, pois a sua solução é única, assim devemos respeitar a seguinte condição:  $\det(A) \neq 0$ , como por exemplo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} . \text{ Como: } d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \text{ podemos afirmar que o sistema é possível e determinado, isto é, as retas são concorrentes [a saber o ponto de interseção entre as retas é o ponto de coordenadas (1;2). Geometricamente temos a seguinte situação:}$$

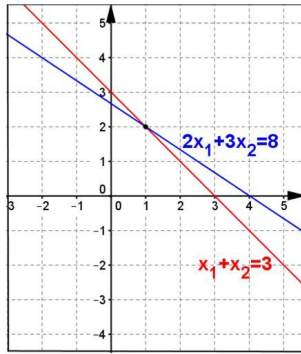


Figura A.1: Duas retas concorrentes.

**2) Paralelas<sup>1</sup>:** As duas retas não possuem ponto de interseção, desse modo o sistema não possui solução, isto é, o sistema deve ser impossível, daí, devemos ter:  $\det(A) = 0$  e  $\det(x_1) \neq 0$  ou  $\det(x_2) \neq 0$ . Considere o exemplo:  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ . Como:  $d =$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$  e  $d_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$ , podemos afirmar que o sistema é impossível e as retas são paralelas. Geometricamente temos a seguinte situação:

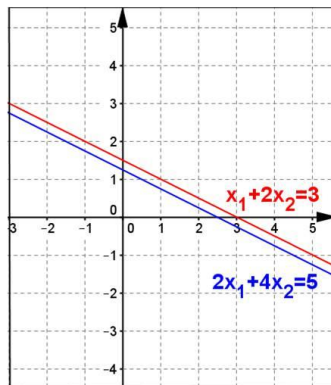


Figura A.2: Duas retas paralelas.

**Coincidentes:** Neste caso, todos os pontos de uma das retas também são pontos da outra, ou seja, o sistema admite infinitas soluções, portanto o sistema é possível e indeterminado, assim:  $\det(A) = \det(x_1) = \det(x_2) = 0$ , vejamos o exemplo:  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ ,

como:  $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ,  $d_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$  e  $d_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ , podemos afirmar que o sistema é possível e indeterminado, e daí as retas são coincidentes. Geometricamente temos a seguinte situação:

<sup>1</sup>Neste caso levaremos em consideração APENAS as retas paralelas distintas. As retas coincidentes fazem parte de outro grupo de posições relativas.

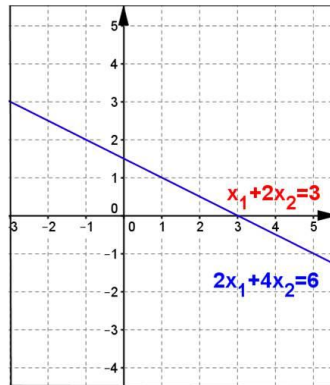


Figura A.3: Duas retas coincidentes

Já no Ensino Superior, os estudantes acabam estudando equações de três variáveis que são na verdade equações de planos no  $R^3$ . No Ensino Médio esse conceito não é apresentado aos alunos, mas poderíamos, sem muitos problemas, assumir que a equação de um plano é dada da forma:  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  e assim estudar as posições relativas entre dois ou mais objetos dessa natureza, em particular, poderíamos fazer uma analogia com os Sistemas Lineares de 3 equações e 3 variáveis que são estudadas neste nível de ensino. Dizemos que os Sistemas Lineares de ordem 3 admitem solução apenas se os três planos envolvidos possuem pontos em comum: observe que mesmo que as interseções dos planos envolvidos no sistema ocorram apenas para pares de planos, não poderemos encontrar pontos que satisfaçam TODAS as equações do sistema.

Vejam os em quais situações os Sistemas Lineares de ordem 3 admitem soluções. A saber, um sistema de ordem 3 possível só pode admitir como soluções um ponto, uma reta ou um plano [iremos considerar nestes casos que nenhum dos coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  sejam nulos, para efeito de minimizar os problemas com a interpretação geométrica do sistema].

Antecipando às análises que virão a seguir, vejamos como poderemos classificar dois planos. Considere dois planos com equações  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  e  $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d'$ , podemos classificá-los em coincidentes, paralelos e concorrentes e devemos ter:

- Para planos coincidentes:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

- Para planos paralelos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

- Para planos concorrentes:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \quad \text{ou}$$

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} \quad \text{ou}$$

$$\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

A partir daí, podemos avaliar os Sistemas Lineares de ordem 3 verificando as posições relativas entre os planos dois a dois.

**CASO 1:** A solução do sistema é um ponto:

Neste caso, qualquer par de planos do sistema devem ser concorrentes e geometricamente, devemos ter uma configuração similar ao desenho a seguir:

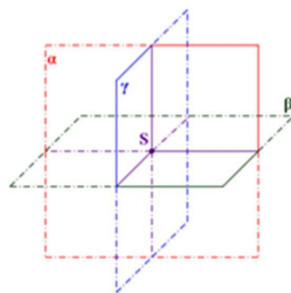


Figura A.4: Três planos concorrentes dois a dois

**CASO 2:** A solução do sistema é uma reta:

Neste caso temos duas situações possíveis a analisar:

I) Temos dois planos coincidentes e o terceiro é secante aos dois primeiros:

Desse modo, temos duas equações de planos proporcionais e uma terceira equação de plano concorrente aos outros dois, desse modo, temos, geometricamente:

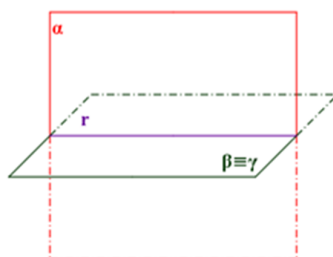


Figura A.5: Dois planos coincidentes e um terceiro concorrente

II) Temos que os três planos são distintos dois a dois possuem uma única reta em comum: Desse modo devemos ter dois números reais não nulos  $k_1$  e  $k_2$  que satisfaçam as situações:

$$\begin{cases} a' = k_1 a'' + k_2 a''' \\ b' = k_1 b'' + k_2 b''' \\ c' = k_1 c'' + k_2 c''' \end{cases}$$

Podemos dizer ainda que uma das equações é uma combinação linear das outras duas. Geometricamente:

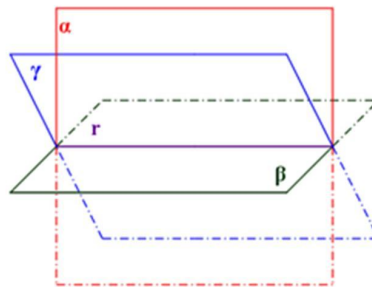


Figura A.6: Três planos distintos dois a dois que possuem uma reta em comum.

**CASO 3:** A solução do sistema é um plano:

Nessa situação, os três planos são coincidentes, e sem maiores complicações devemos encontrar, geometricamente:



Figura A.7: Três planos coincidentes.

# Apêndice B

## Tópicos Sobre Probabilidades

Para podermos efetivamente determinar as probabilidades de algumas situações ocorrerem é necessário que tenhamos alguns conhecimentos prévios a respeito dos conceitos envolvidos. A seguir temos os conceitos iniciais que ajudarã a compreendermos um pouco sobre probabilidades.

### 1) Experimento Aleatório:

Chamamos de Experimento Aleatório ou Casual, toda ação que realizada sob as mesmas condições, ainda assim, não nos permite determinar com certeza o seu resultado, por exemplo, o lançamento de uma moeda é classificado como Experimento Aleatório, pois mesmo sabendo todas as possibilidades de resultados, não podemos dizer com certeza o resultado a cada lançamento.

### 2) Espaço Amostral:

É o conjunto que engloba todas os resultados possíveis em um dado experimento aleatório, denotaremos por  $S$ . Assim, no lançamento de uma moeda perfeita, chamemos por  $C = \text{Cara}$  e  $K = \text{Coroa}$ , daí o espaço amostral é dado por:  $S = \{C, K\}$ . Nesse caso temos um espaço equiprovável, ou seja, todos os elementos tem a mesma probabilidade de serem encontrados.

### 3) Eventos:

Todo subconjunto do espaço amostral recebe o nome de evento, assim podemos definir o seguinte evento:  $A = \{\text{Sair cara no lançamento de uma moeda}\}$

### 4) Probabilidade de um Evento Ocorrer:

Por fim a probabilidade nada mais é do que a divisão entre o número de elementos do conjunto evento e o número de elementos do espaço amostral, e pode ser calculada

utilizando a seguinte fórmula:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

A saber,  $0 \leq p(A) \leq 1$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] J. L. Boldrini, S. R. Costa, V. L. Figueredo, H. G. Wetzler *Álgebra Linear*, UNICAMP (1980).
- [2] C. A. Callioli, H. H. Domingues, R. C. F Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, (1990).
- [3] S. R. I. Ferreira, *Aplicações de Matrizes no Ensino Médio*, USP (2013).
- [4] K. Frensel, J. Delgado, *Geometria Analítica*.
- [5] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Linear*, USP (1970).
- [6] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, IMPA (2001).
- [7] E. L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, IMPA (2010).
- [8] E. L. Lima, *Matemática e Ensino*, DATA.
- [9] L. N. de Nunes *Breve Introdução ao LATEX*, UFPB (2000).
- [10] S. Shokranian, *Exercício em Álgebra Linear 1 - Matrizes e Espaços Vetoriais*, (2009).
- [11] J. J. Venturi, *Cônicas e Quádricas*, (1949).