UNICAMP

Carla Cristina Fonte

Introdução aos Grafos no Ensino Médio

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

CARLA CRISTINA FONTE

INTRODUÇÃO AOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Pedro José Catuogno

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA CARLA CRISTINA FONTE, E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO JOSÉ CATUOGNO.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F737i

Fonte, Carla Cristina, 1990-
Introdução aos grafos no ensino médio / Carla Cristina Fonte. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Pedro José Catuogno.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grafos. 2. Problema do caixeiro viajante. 3. Teorema do casamento. 4. Algoritmos. 5. Ciclos eulerianos. I. Catuogno, Pedro José,1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Introduction to graphs in high school
Palavras-chave em inglês:
Graph theory
Traveling salesman problem
Marriage theorem
Algorithms
Euler cycles
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Pedro José Catuogno [Orientador]
Roberto Andreani
Cristian Favio Coletti
Data de defesa: 12-12-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 12 de dezembro de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof.(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Coletti; Cristian Favio

Prof.(a). Dr(a). CRISTIAN FAVIO COLETTI

Abstract

This work focuses on the initial concepts and important applications of the graph theory. Detailing, in the applications, some classic problems such as the seven bridges of Königsberg problem, the travelling salesman problem and the stable marriage problem.

In order to provide a supporting material for the introduction to graphs in high school, it is shown a suggestion to the lesson plan, which exploration indicates various interesting mathematical properties beyond stimulating the reasoning and the deep study in the field.

Keywords: Graph, Travelling Salesman, Stable Marriage, Bridges of Königsberg, Leonard Euler, Algorithm.

Resumo

Neste trabalho, exploram-se os conceitos iniciais e aplicações importantes da teoria de grafos. Acentuam-se, nas aplicações, alguns problemas clássicos, como o das sete pontes de Königsberg, o do caixeiro viajante e o problema dos casamentos estáveis.

Com o intuito de servir como material de apoio para a introdução de grafos ao ensino médio, expõe-se uma sugestão para plano de aula, cuja exploração sinaliza diversas propriedades matemáticas interessantes, além de estimular o raciocínio e o estudo.

Palavras-chave: Grafos, Caixeiro Viajante, Casamentos Estáveis, Pontes de Königsberg, Leonard Euler, Algoritmo.

Sumário

Aos meus pais e irmãos ...
Aos meus familiares e amigos ...
Aos meus professores e alunos ...

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Meishu Sama, por me darem sabedoria, forças e aplainarem os meus caminhos.

A Maria Padilha, pela imensa ajuda e carinho.

Agradeço o apoio constante de meus pais. Os seus conselhos permaneceram sempre nítidos, reanimando-me a seguir no caminho que escolhi. Minha gratidão por terem suportado minha ausência, minha avidez e por terem investido tanto em minha educação, acreditando em minha capacidade.

Aos meus irmãos, por me provocarem a todo momento, por estarem sempre presentes em minha vida e por vibrarem comigo a cada conquista. Às minhas cunhadas, pelo carinho e amizade.

Aos meus padrinhos, Renato e Ivonete, pelo incentivo matemático desde a infância.

Aos meus familiares, principalmente as minhas avós, por serem tão especiais; minha prima Letícia, pela ajuda; minha tia Isaura, pela sua fé e carinho.

A Renan Bergonci, por me animar nos momentos de inércia, pelo carinho, paciência e admiração.

Ao ministro e grande amigo José Roberto Agostinetto, por não ter me deixado desistir, por confiar mais em minha capacidade do que eu mesma, por me mostrar os caminhos, por festejar minhas vitórias e por sempre me mandar boas vibrações.

Aos amigos Renata, Mota e Ana Paula, que fizeram do mestrado momentos felizes de que jamais me esquecerei, e por estarmos juntos na grande batalha da realização de nossos sonhos.

Em especial, ao grande amigo Matheus Heinel, pelas ajudas, incentivos e por aturar minhas lamentações. E a melhor companheira do mundo, Sophia, que ficou em meu colo durante todo o desenvolvimento dessa dissertação.

Ao meu orientador, Pedro Catuogno, pela paciência, confiança e transmissão de grande sabedoria.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos.

Aos meus professores, que me transmitiram a paixão pela educação, pela matemática, pelo ensino, pela aprendizagem.

Finalmente, aos meus alunos, por me ensinarem tanto e por fazerem brotar em mim o sentimento de ser cada vez melhor como professora e como pessoa.

"Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel."
(Ary Quintela)

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

Grafos é um assunto relativamente novo na matemática e pouco conhecido pela grande maioria, entretanto é um tema que envolve as mais diversas frentes matemáticas.

A primeira notícia de estudo de grafos foi por meio de Euler e o problema das pontes de Königsberg, e acabou ficando de lado por um tempo. Alguns matemáticos chegaram a estudar e deram continuidade a grafos, mas foi somente no século XX que começou um número maior de pesquisas abrangendo esse termo.

No Ensino Superior já se encontram muitos textos relacionados com grafos, contudo é interessante ressaltar que é um tema que pode ser aplicado primeiramente no Ensino Médio. Estudos como [15] mostram que grafos é um assunto que agrada tanto a alunos quanto a professores.

Muitos já utilizam grafos em sala de aula, tanto direta quanto indiretamente, porém normalmente não é encontrada essa nomenclatura no livro texto.

A dissertação está dividida em 4 capítulos que facilitarão ao docente introduzir grafo no Ensino Médio. São 3 problemas de diferentes níveis e, por fim, um plano de aula sugerido.

O primeiro capítulo traz o conhecido problema das pontes de Königsberg. É escolhido porque através dele é que surgiu o conceito de grafos, sendo o marco inicial historicamente. Além disso, é um exercício em que se pode introduzir as primeiras definições, pois é de fácil compreensão. É a melhor opção introdutória, com pequenas variações em seu enunciado obtém-se uma grande gama de exercícios similares, perfeitos para a absorção do conteúdo pelos alunos.

O segundo capítulo apresenta um clássico problema em Teoria dos Grafos. Nele é estudado o Problema do Caixeiro Viajante. Aqui o aluno é capaz de sair do cotidiano matemático, pois, apesar de possuir um grau de dificuldade acima do exemplo anterior, trata-se de um problema sem solução exata, ou seja, é possível trabalhar resoluções através de estimativas, algo incomum na maioria dos colégios. Esse tipo de resolução ajuda no desenvolvimento lógico dos estudantes e na construção de modelos matemáticos, quesitos de suma importância nessa fase da vida escolar. E por sair da rotina, tornando-se um exercício diferenciado para os alunos, estes tendem, segundo os PCN's, a ter maior interesse na disciplina, obtendo melhor rendimento de aprendizado.

O terceiro capítulo trata do problema dos casamentos estáveis. É um exercício mais elaborado e de resolução mais complicada; entretanto, conforme os alunos descobrirem métodos para resolvê-lo, fascinam-se ainda mais pelo assunto, pois mostra diferentes caminhos, além de trabalhar com algoritmos, algo pouco comum em sala de aula.

Por fim, o quarto capítulo é uma sugestão de um plano de aula, colocando mais exemplos para que o docente possa aplicar com seus alunos. Por ser um tema pouco conhecido, é importante ter acesso a uma variedade de exemplos e exercícios para poder tornar sua aula cada vez mais interessante e atrativa. Conforme o professor e o estudante vão se familiarizando com o conteúdo, devem adequar o plano no decorrer das aulas, com suas necessidades e interesses.

Capítulo 1

PROBLEMA DAS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG

Escolhido como pontapé inicial na introdução dos conceitos de grafos em sala de aula, esse problema, além de muito famoso, segundo [4], trata-se do primeiro registro relacionado com o que hoje é chamado de Teoria dos Grafos. Foi resolvido em 1736 pelo célebre matemático Leonhard Euler (1707-1783).

1.1 O Enigma

Contam que, na época, Königsberg (uma antiga cidade da Prússia, mais tarde chamada de Kaliningrado, na Rússia) tinha uma charada até então não resolvida sobre o lugarejo. No rio Pregel, junto à cidade, existem duas ilhas que eram ligadas por uma ponte e mais seis pontes que as ligavam até a margem, como ilustra a figura 1.1.

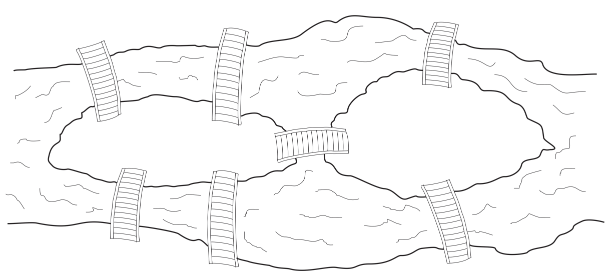

Figura 1.1: As Sete Pontes de Königsberg

O quebra-cabeça consistia em determinar se é possível passear pela cidade atravessando as sete pontes exatamente uma vez e retornar ao ponto de partida.

Por se tratar de um enigma relativamente simples, dividir os alunos em grupos e propor que resolvam gera uma boa discussão. Mesmo sem mencionar os conceitos básicos de grafos, alguns grupos poderão chegar à solução desejada. Primeiramente, espera-se que façam uma representação do problema e várias tentativas para ver se é possível. A resposta negativa dada por Euler em

1736, dizendo que somente seria possível com quantidades pares de ponte entre as áreas, uma para ir e outra para voltar, pode ser obtida facilmente pelos alunos. É preciso ficar atento se as justificativas dadas por eles são plausíveis e observar se foi realmente entendida por todos.

Conforme diz [4], Euler resolveu esse problema sem dar muita relevância, sem nenhum aprofundamento; então, infelizmente, por mais de 100 anos ninguém pensou em algo semelhante.

Como utilizar grafos na resolução desse problema? E ele de fato é importante? Embora ele pareça trivial nessa situação, possui muitas aplicações e tem resultados de grande valor.

Definição 1.1.1. Um grafo $\mathcal{G}$ é um par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{V}$ representa um conjunto finito não vazio de vértices e $\mathcal{A}$ o conjunto finito e não vazio de arestas.

Os vértices representarão a parte terrestre (ilhas e margens) e as arestas representarão as pontes de acesso.

Pode-se converter a Figura 1.1 pela representação geométrica de um grafo.

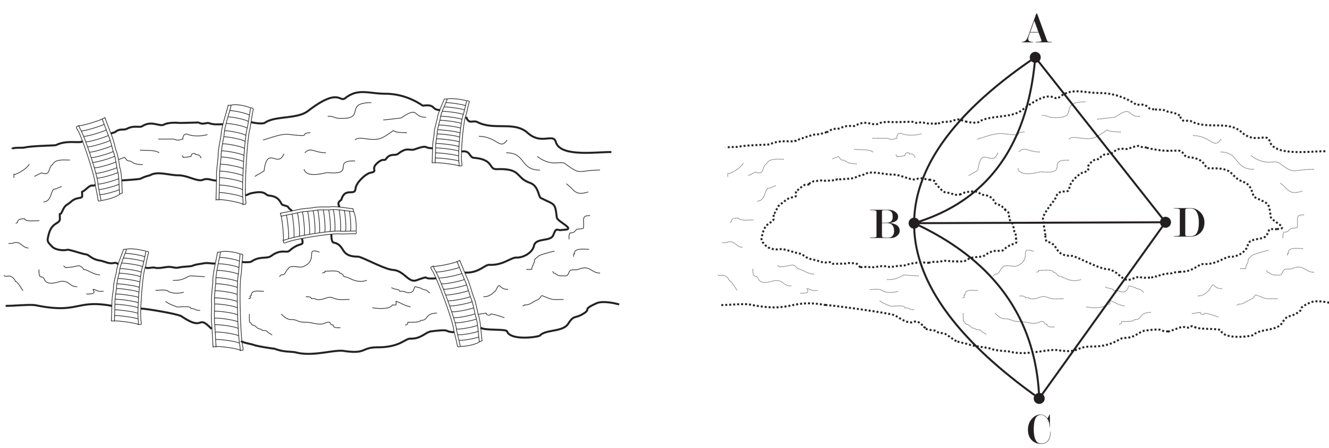

Figura 1.2: As Sete Pontes de Königsberg - Grafos

Portanto,

$$\mathcal{V} = \{A, B, C, D\} \text{ e } \mathcal{A} = \{(A, B), (A, B), (A, D), (B, C), (B, C), (B, D), (C, D)\},$$

com cardinalidades $|\mathcal{V}| = 4$ e $|\mathcal{A}| = 7$.

Diz-se que uma aresta é incidente aos dois vértices que lhe dão origem, que duas arestas são adjacentes quando possuem um vértice em comum e que dois vértices são adjacentes quando há uma aresta conectando-os. Nesse caso, pode-se observar que os vértices A e B são adjacentes, porém A e C não são.

Arestas associadas a um mesmo vértice constituem um laço e quando mais de uma aresta incide no mesmo par de vértice, então esse grafo possui arestas múltiplas.

Definição 1.1.2. Um grafo que não possui arestas múltiplas nem laços denomina-se grafo simples.

Não é possível considerar o grafo das pontes como simples, pois, apesar de ele não possuir laços, os vértices A e B são extremidades de duas arestas. O mesmo acontece com os vértices B e C.

Definição 1.1.3. Denomina-se grau de um vértice a quantidade de arestas incidentes a ele.

Definição 1.1.4. Um grafo é considerado regular quando todos os seus vértices possuírem o mesmo grau.

Definição 1.1.5. Define-se grau de um grafo $\mathcal{G}$ como sendo a soma do grau de cada um dos vértices que o compõem.

$$grau(\mathcal{G}) = \sum_{v \in \mathcal{V}} grau(v)$$

O grafo 1.2 não é regular, pois $grau(A) = 3$, $grau(B) = 5$, $grau(C) = 3$ e $grau(D) = 3$. Reparem que o grau desse grafo $3+5+3+3 = 14$ é o dobro da quantidade de arestas, isso acontece porque cada aresta contribui com dois graus, um para cada vértice que a forma, portanto, de um modo geral, pode-se dizer:

$$grau(\mathcal{G}) = \sum_{v \in \mathcal{V}} grau(v) = 2.|A|$$

Teorema 1.1.6. Todo grafo possui grau par.

Demonstração. Como o grau de um grafo é sempre o dobro do número de arestas, então ele é sempre par. $\square$

A representação geométrica de um grafo é ótima visualmente, porém, em casos maiores, mais complexos, o uso de meios computacionais é indispensável, então faz-se necessária a representação matricial de grafos. Ou seja, as mesmas informações obtidas no grafo abaixo sobre o enigma das pontes pode ser obtidas através de matrizes que as descrevam.

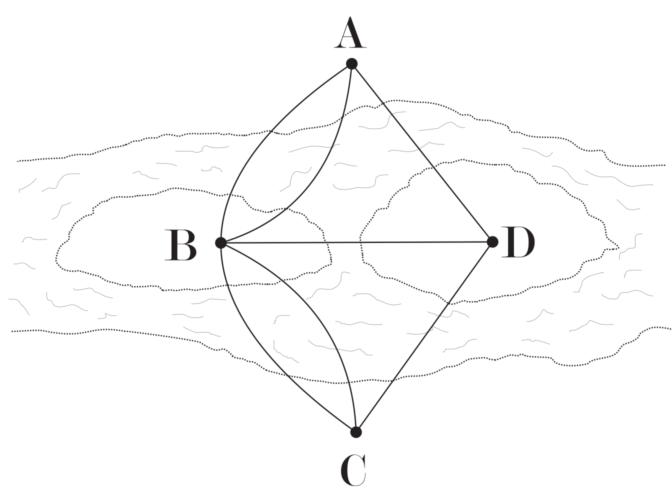

Figura 1.3: As Sete Pontes de Königsberg Representada por Grafos.

Definição 1.1.7. Matrizes de Incidência são $\mathcal{M}_I = [m_{ij}]_{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{A}|}$, onde as linhas são associadas aos vértices e as colunas são associadas às arestas, com

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & aresta\ j\ for\ incidente\ ao\ v\acute{e}rtice\ i \\ 0 & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Em particular, pela Figura 1.3 pode-se obter:

	(A,B)	(A,B)	(A,D)	(B,C)	(B,C)	(B,D)	(C,D)
A	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	1	1	1	0
C	0	0	0	1	1	0	1
D	0	0	1	0	0	1	1

Tabela 1.1: Königsberg - Incidência.

Resultando na seguinte matriz de incidência:

$$\mathcal{M}_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.8. Matriz de Adjacência são $\mathcal{M}_A = [a_{ij}]_{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{V}|}$, onde tanto as linhas quanto as colunas são associadas aos vértices, com

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & quantidade\ de\ aresta\ (i,j) \in \mathcal{A} \\ 0 & (i,j) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Portanto, o caso das pontes pode ser representado como:

	A	B	C	D
A	0	2	0	1
B	2	0	2	1
C	0	2	0	1
D	1	1	1	0

Tabela 1.2: Königsberg - Adjacência.

Gerando a matriz de adjacência:

$$\mathcal{M}_A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

É possível relacionar a soma dos elementos dessas matrizes com alguma informação importante?

A respeito da matriz de incidência, a soma dos elementos da primeira linha representa a quantidade de arestas incidentes ao vértice A, ou seja, essa soma representa o $grau(A)$; portanto, ao somar todos os elementos da matriz, na verdade, estamos somando os graus de cada vértice, resultando, então, no grau do grafo.

Na matriz de adjacência, cada elemento representa a quantidade de arestas com aqueles vértices, então a soma deles resulta no dobro do número total de arestas, ou seja, também representa o grau do grafo. E a soma dos elementos da diagonal principal (a_{ii}, para todo $1 \leq i \leq 4$) dessa matriz representam a quantidade de laços, arestas associadas a um mesmo vértice, do grafo.

Definição 1.1.9. Caminho é uma ligação sequencial de vértices. Quando o último vértice coincidir com o primeiro, então temos um ciclo.

Definição 1.1.10. Um grafo é conexo se para dois vértices quaisquer do grafo existe, pelo menos, um caminho entre eles. Caso contrário, é desconexo.

Exemplo de grafos conexo e desconexo é como na figura abaixo.

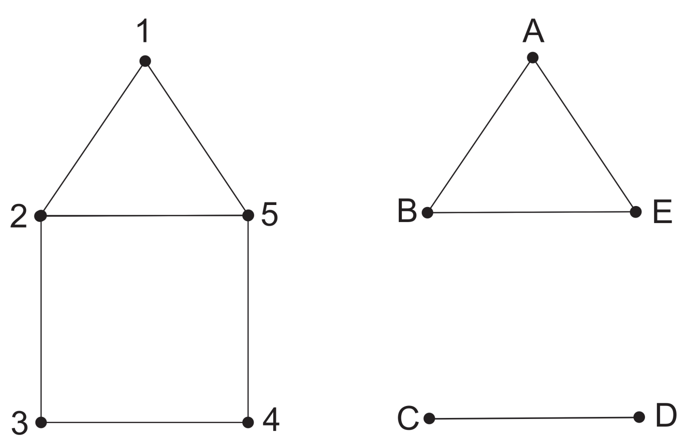

Figura 1.4: Grafos Conexo e Desconexo.

No exemplo, o grafo da esquerda é claramente um grafo conexo, pois, a partir de cada vértice, é possível encontrar um caminho para um outro vértice qualquer. Já o da direita caracteriza um grafo desconexo, pois é impossível encontrar um caminho, por exemplo, entre A e C.

No enigma das pontes, deve-se fazer um caminho percorrendo cada aresta uma única vez e retornar ao ponto de partida. Esse tipo de caminho recebe o nome de *Ciclos Eulerianos*, em homenagem ao ilustre matemático que solucionou os ciclos que contêm todas as arestas exatamente uma vez.

Teorema 1.1.11 (Ciclos Eulerianos)**.** Um grafo $\mathcal{G}$ conexo possui ciclo euleriano se, e somente se, todo vértice de $\mathcal{G}$ possui grau par.

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponha que se tenha um ciclo euleriano. Então, se de cada vértice for contada a entrada e a saída, após percorrer o caminho todo, tem-se um conjunto de números pares.

$\Leftarrow$ Se todos os vértices possuem grau par, então pode-se iniciar em um vértice qualquer v um caminho simples, e é possível continuar percorrendo as arestas até que se regresse a v e já tenham sido percorridas todas as arestas incidentes a ele.

Suponha que existe um ciclo simples H em $\mathcal{G}$ que não possua todas as arestas. Então existe um vértice v' com um número par de arestas incidentes ainda não percorridas. É necessário lembrar que como $\mathcal{G}$ é conexo, então esse vértice já está incluso no ciclo H. Inicia-se então um novo ciclo simples nesse vértice, percorrendo as arestas que ainda não foram trilhadas.

Esse processo pode ser repetido enquanto restarem arestas a serem percorridas.

Dessa maneira, de modo indutivo, intercalando-se todos os ciclos conexos H' com o ciclo inicial H, obtém-se o ciclo euleriano $\mathcal{G}$. $\square$

Esse teorema esclarece a resposta negativa dada por Euler. Uma questão interessante seria generalizar, fazendo com que os alunos pensem mais a respeito. Por exemplo, seria possível fazer esse passeio se fossem retiradas algumas pontes? Quais precisariam ser removidas?

Atualmente, a cidade se encontra como mostra a figura abaixo. Se a charada fosse mantida até os dias atuais, a resposta continuaria negativa?

Figura 1.5: Kaliningrad Atualmente.
Fonte: Google Maps

Capítulo 2

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O problema do Caixeiro Viajante consiste em como partir de uma determinada cidade visitando todas as outras uma única vez e retornando à cidade de origem, de modo que a rota total da viagem seja a menor possível. Não será levada em consideração a ordem em que as cidades são visitadas, e de cada cidade pode-se ir diretamente a qualquer outra.

2.1 Caso Particular

O caixeiro Júnior é um viajante que possui clientes em 5 cidades e precisa planejar suas visitas da maneira mais eficiente possível.

Para a solução desse problema, a cidade natal de Júnior será representada pela letra A e as demais serão representadas pelas letras B, C, D e E. A fim de facilitar a locomoção do caixeiro, deve-se traçar a menor rota possível entre as cidades, de modo que ele parta da cidade A e retorne para ela.

A tabela abaixo fornece as distâncias em quilômetros:

Dist. de A até	B	C	D	E
	90	80	190	140
Dist. de B até	A	C	D	E
	90	80	280	220
Dist. de C até	A	B	D	E
	80	80	120	180
Dist. de D até	A	B	C	E
	190	280	120	150
Dist. de E até	A	B	C	D
	140	220	180	150

Definição 2.1.1. Um grafo é valorado quando suas arestas possuírem pesos.

Para representar essas informações, serão utilizados grafos onde cada vértice representará uma cidade e cada aresta representará o trajeto entre elas, lembrando que, nesse caso, o grafo é considerado valorado, pois cada aresta possui um peso (distância em quilômetros).

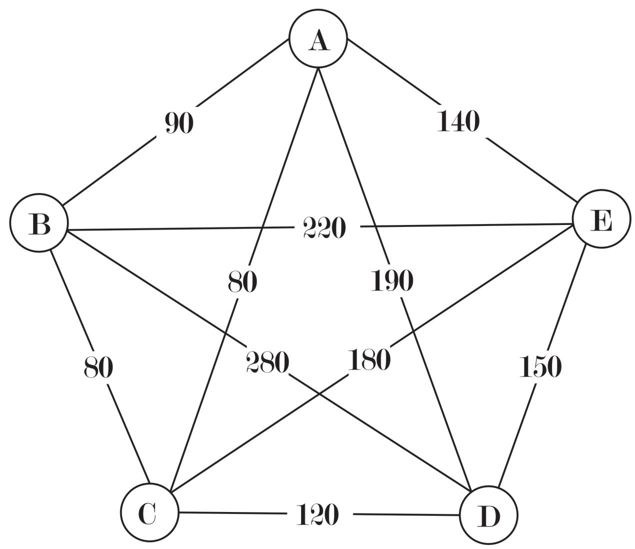

Figura 2.1: Grafo - Cidades e suas distâncias.

Duas cidades são vizinhas quando possuem um trajeto entre elas. Analogamente, em um grafo, dois vértices são adjacentes (vizinhos) se possuem aresta entre eles.

Além da forma geométrica, outra representação possível é através de uma matriz de adjacência (Definição 1.1.8) $\mathcal{M}$ de ordem $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|$, com

$$m_{ij} = \begin{cases} \textit{peso (distância) da aresta } ij \\ 0 \textit{ caso não haja aresta entre } i \textit{ e } j \end{cases}$$

Repare que, nesse caso, como o grafo é valorado, quando possui uma aresta entre dois vértices, coloca-se o peso dessa aresta e zero, caso contrário.

Seja $1 = A$, $2 = B$ e, assim, sucessivamente. Ou seja, m_{34} representará a distância da cidade C até a cidade D.

Logo,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 80 & 190 & 140 \\ 90 & 0 & 80 & 280 & 220 \\ 80 & 80 & 0 & 120 & 180 \\ 190 & 280 & 120 & 0 & 150 \\ 140 & 220 & 180 & 150 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando que o trajeto entre duas cidades é o mesmo na ida e na volta, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, então $\mathcal{M}$ é uma matriz simétrica ($\mathcal{M} = \mathcal{M}^t$) e o grafo é não orientado.

Para esse problema, o grafo que o representa é simples (Definição 1.1.2), ou seja, existe somente uma estrada entre duas cidades.

Uma característica muito importante é o fato de que cada cidade tem acesso a todas as outras, o que leva à seguinte definição.

Definição 2.1.2. Um grafo completo é um grafo simples, onde todos os seus vértices são mutuamente adjacentes. Frequentemente, denota-se um grafo completo de n vértices como K_n.

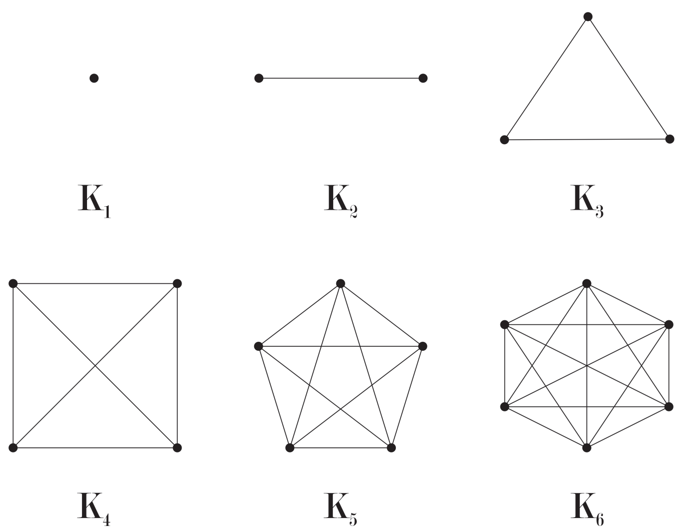

Figura 2.2: Grafos Completos.

É fácil obter a quantidade de arestas de K_n. Para formar uma aresta, é preciso escolher dois vértices entre os n possíveis. Isso pode ser feito de C_n^2 maneiras, ou seja, K_n possui

$$C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

arestas.

Isso justifica as 10 arestas desenhadas na Figura 2.1.

Como o caixeiro parte da cidade A e retorna a ela, então o grafo que representa a trajetória começa e termina no mesmo vértice, obtendo um ciclo.

Definição 2.1.3. Um ciclo que contenha cada vértice do grafo uma única vez é denominado ciclo hamiltoniano.

Diferente do problema anterior, onde se passa por cada aresta uma única vez, para o problema do Caixeiro deve-se passar somente uma vez por cada vértice.

Como Júnior possui clientes somente em 5 cidades, é possível enumerar todos os trajetos (ciclos hamiltonianos) e ver qual tem o menor comprimento.

Partindo de A, o caixeiro possui 4 opções para escolher a próxima cidade. Feita essa escolha, restam-lhe 3 opções para a seguinte e, assim, sucessivamente. Portanto, o número de trajetos possíveis é $1.4.3.2.1 = 24 = 4!$.

De um modo geral, para K_n existem $n!$ opções de caminhos. Como em um ciclo não faz diferença qual é o vértice inicial, então temos $(n-1)!$ ciclos.

Como o grafo é não orientado, o ciclo hamiltoniano $A-B-C-D-E-A$ terá o mesmo comprimento que o seu inverso $A-E-D-C-B-A$, o que acontecerá com todos os outros ciclos, portanto serão $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos hamiltonianos para K_n.

No caso de Junior, que possui clientes somente em 5 cidades, serão $\frac{4!}{2} = 12$ caminhos a serem analisados. Isso será feito de 3 maneiras diferentes, a saber: Método Exaustivo, Método da Cidade Vizinha mais Próxima e Método da Aresta de Menor Peso.

2.1.1 Método Exaustivo

Os 12 caminhos possíveis são:

Ciclo Hamiltoniano	**Comprimento**	**Ciclo Inverso**
A-B-C-D-E-A	90+80+120+150+140=580	A-E-D-C-B-A
A-B-C-E-D-A	90+80+180+150+190=690	A-D-E-C-B-A
A-B-D-C-E-A	90+280+120+180+140=810	A-E-C-D-B-A
A-B-D-E-C-A	90+280+150+180+80=780	A-C-E-D-B-A
A-B-E-C-D-A	90+220+180+120+190=800	A-D-C-E-B-A
A-B-E-D-C-A	90+220+150+120+80=660	A-C-D-E-B-A
A-C-B-D-E-A	80+80+280+150+140=730	A-E-D-B-C-A
A-C-B-E-D-A	80+80+220+150+190=720	A-D-E-B-C-A
A-C-D-B-E-A	80+120+280+220+140=840	A-E-B-D-C-A
A-C-E-B-D-A	80+180+220+280+190=950	A-D-B-E-C-A
A-D-B-C-E-A	190+280+80+180+140=870	A-E-C-B-D-A
A-D-C-B-E-A	190+120+80+220+140=750	A-E-B-C-D-A

Tabela 2.1: Enumeração dos Ciclos Hamiltonianos.

Observando os resultados possíveis, a melhor opção é a rota $A - B - C - D - E - A$ ou sua rota inversa $A - E - D - C - B - A$, cujo comprimento é 580 quilômetros.

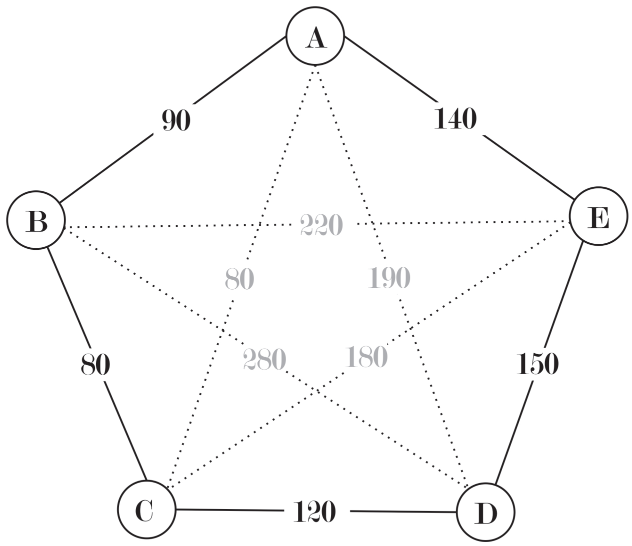

Figura 2.3: Método Exaustivo

Esses cálculos só foram possíveis pelo fato de Júnior ter clientes em poucos lugares.

A situação torna-se mais complicada à medida que aumenta o número de cidades. Por exemplo: escolhendo-se 25 cidades, será necessário fazer a adição de 25 distâncias entre as cidades, das $\frac{24!}{2}$ maneiras possíveis.

Um computador muito veloz, que faça 1 bilhão de adições por segundo, calcularia $\frac{10^9}{25} = 4.10^7$ rotas por segundo. Para um total de $\frac{24!}{2} \approx 3,1.10^{23}$ rotas, ele demoraria cerca de 246 milhões de anos. Esse tempo é gasto somente para fazer as adições sem compará-las.

Esse rápido aumento no tempo, devido à ampliação do número de cidades, é conhecido como explosão combinatorial.

É possível observar esse rápido crescimento na tabela abaixo:

Cidades	Rotas Possíveis	Tempo (Aproximado)
5	$\frac{4!}{2} = 12$	$0,00000006$ segundos
10	$\frac{9!}{2} = 181440$	$0,0018$ segundos
15	$\frac{14!}{2} \approx 4,36.10^{10}$	11 minutos
20	$\frac{19!}{2} \approx 6,08.10^{16}$	$38,5$ anos
25	$\frac{24!}{2} \approx 3,1.10^{23}$	246 milhões de anos

Tabela 2.2: Método Exaustivo - Tempo Aproximado de Execução.

Somente este método garante a solução exata, porém ele é, na maior parte das vezes, impraticável. A enormidade do tempo de resolução tornou este problema um dos mais famosos e não resolvidos problemas matemáticos.

2.1.2 Método da Cidade Vizinha Mais Próxima (vértice adjacente mais próximo)

Esse é um método aproximado em que a cada vértice escolhe-se o seguinte, de modo que seja o mais perto dele. Porém, casualmente, uma dessas escolhas pode levar a um caminho bem diferente do que seria o ideal.

Se Júnior partir do vértice A, pode escolher entre B, C, D e E para a cidade seguinte. Como a cidade C é a mais próxima de A ($80km$), tem-se a seguinte decisão:

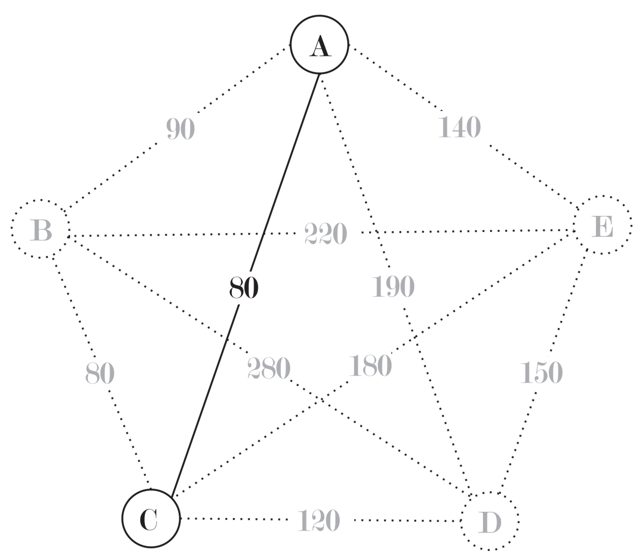

Figura 2.4: Cidade Vizinha Mais Próxima - 1ª decisão.

Da cidade C pode-se ir para a cidade B (80km), D (120km) ou E (180km); logo, a próxima cidade é a B.

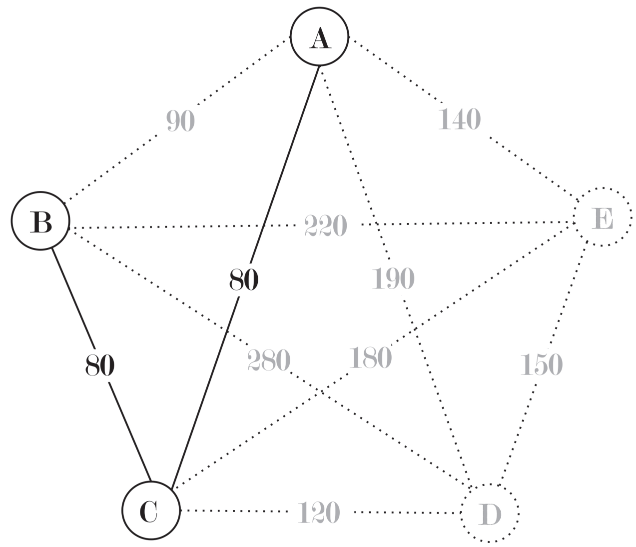

Figura 2.5: Cidade Vizinha Mais Próxima - 2ª decisão.

Analogamente, a próxima escolha é a cidade E (220km).

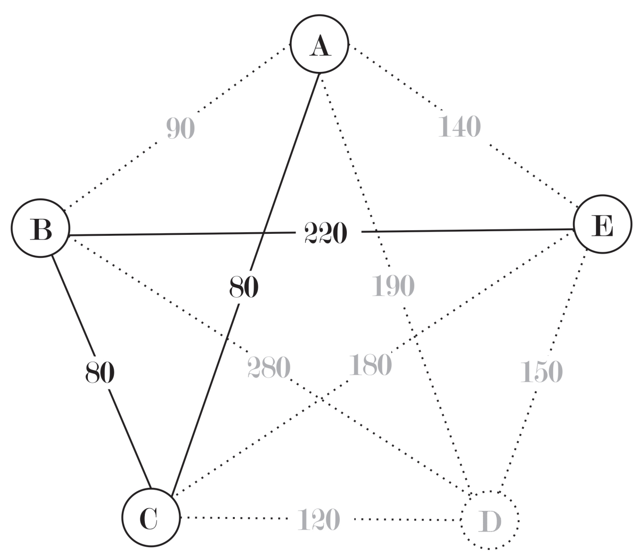

Figura 2.6: Cidade Vizinha Mais Próxima - 3ª decisão.

Finalmente, a cidade D (150km). Posteriormente, retornando à cidade A.

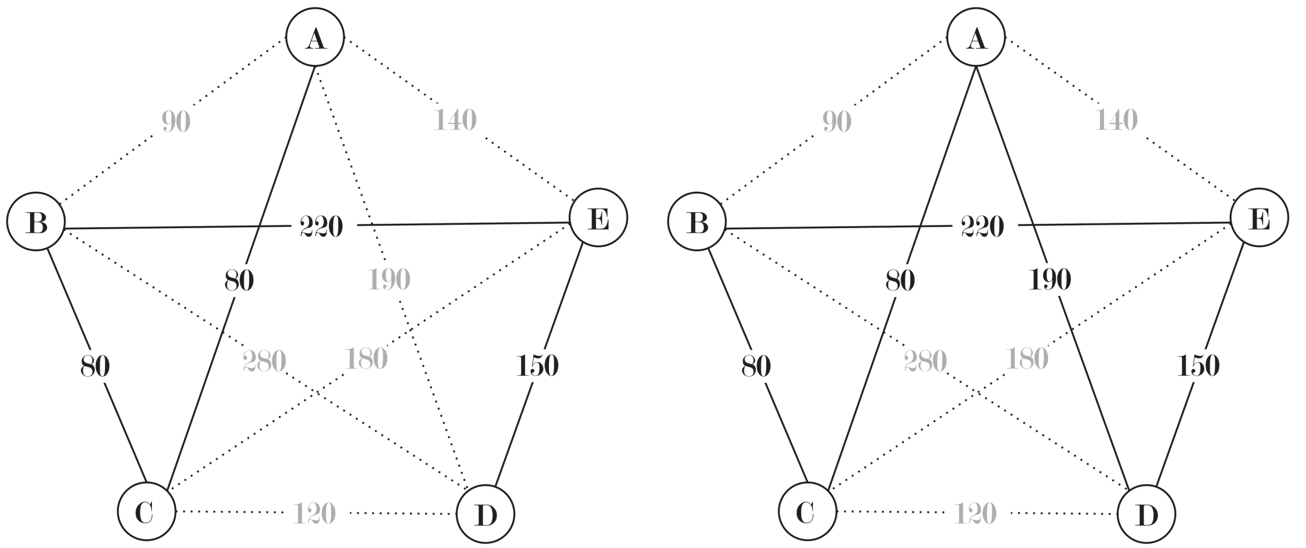

Figura 2.7: Cidade Vizinha Mais Próxima - 4ª decisão e Trajeto Final.

Portanto, o trajeto é $A - C - B - E - D - A$, totalizando 720 quilômetros.

A melhor rota tem comprimento 580 quilômetros. Através desse método, encontra-se uma rota com 140 quilômetros a mais que a ideal, um erro relativo de $\frac{140}{580} = 24,14\%$.

De um modo geral, para n cidades, a procura da menor distância entre todas as arestas incidentes em um vértice faz-se a partir do primeiro, deste para o segundo e, assim, sucessivamente.

Quando chegar ao último vértice ainda não escolhido, a única hipótese será voltar ao inicial. Logo serão feitas $n - 1$ operações.

Comparando com o tempo de execução do método anterior, para 25 cidades são necessárias 24 operações. Considerando que se leva 1 minuto para cada operação, demoraria aproximadamente meia hora para encontrar essa rota.

2.1.3 Método da Aresta de Menor Peso

Primeiramente, a aresta de menor comprimento do grafo deve ser escolhida. Utilizando o mesmo princípio entre as arestas que restaram e, assim, sucessivamente. Vale ressaltar que as arestas não precisam ser adjacentes, porém deve-se respeitar duas regras

- Não escolher uma aresta que forme um ciclo, a não ser que todos os vértices sejam incidentes de alguma aresta já escolhida.
- Não permitir que três arestas sejam incidentes a um mesmo ponto.

Repetindo esse procedimento até que um ciclo seja obtido, este será necessariamente um ciclo Hamiltoniano.

A) A primeira aresta escolhida pode ser $AC = 80km$ ou $BC = 80km$. De maneira aleatória, escolhe-se BC.

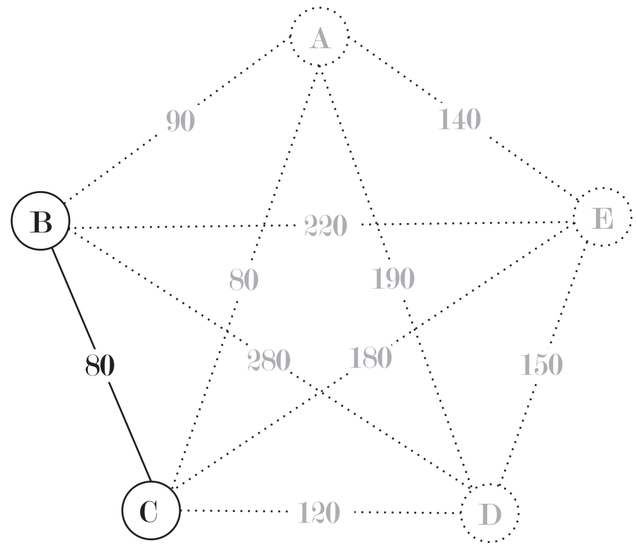

Figura 2.8: Método da Aresta de Menor Peso - 1ª decisão.

B) Como anteriormente BC foi escolhido, então agora escolhe-se para a segunda aresta $AC = 80km$. Observe que se a outra decisão tivesse sido tomada no item A, nesse exato momento o trajeto seria o mesmo.

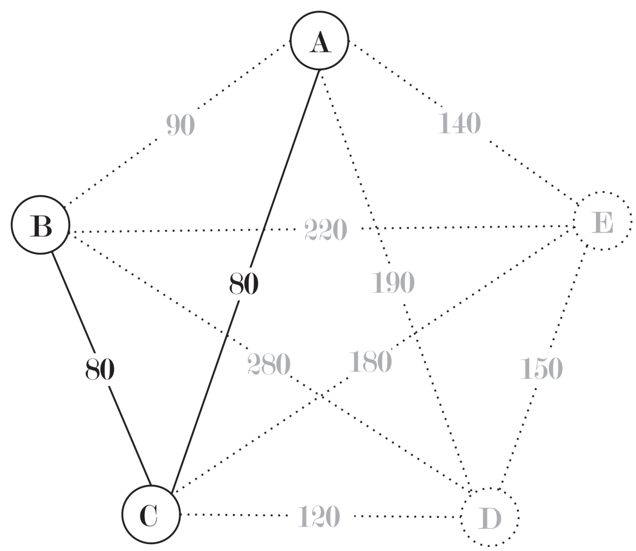

Figura 2.9: Método da Aresta de Menor Peso - 2ª decisão.

C) A aresta de menor peso entre as restantes é a $AB = 90km$, porém ela não pode ser escolhida, pois forma o ciclo $A - B - C$. A próxima opção seria $CD = 120km$, que também não pode ser escolhida pois C teria três arestas incidentes. Seguinte opção: $AE = 140km$, que será a terceira aresta escolhida.

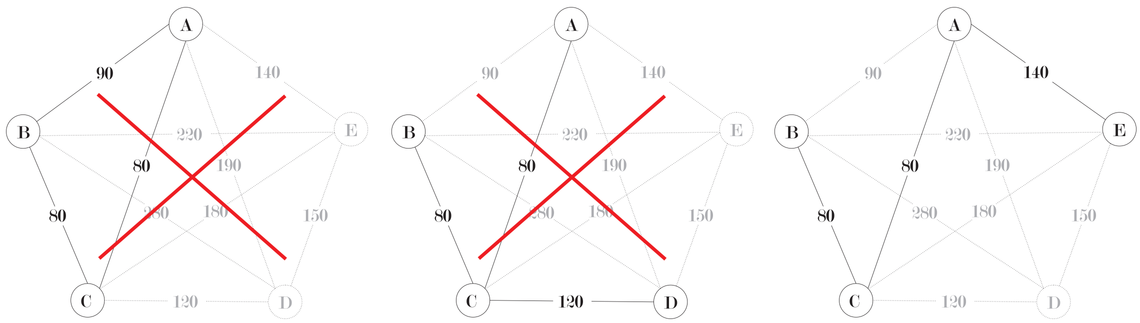

Figura 2.10: Método da Aresta de Menor Peso - 3ª decisão.

D) Quarta aresta: $DE = 150km$.

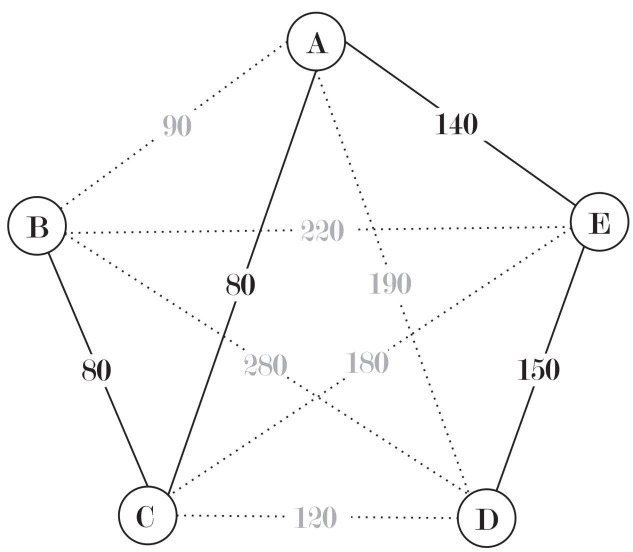

Figura 2.11: Método da Aresta de Menor Peso - 4ª decisão.

E) Para a quinta aresta resta $BE = 220km$, $BD = 280km$, $AD = 190km$ ou $EC = 180km$, porém se a EC, que possui o menor peso, for escolhida, será gerado o ciclo $A - E - C$. Se AD for escolhida, então três arestas incidirão em A. No caso da aresta BE, as três arestas irão incidir em E. Por conseguinte, só restará como opção, a aresta BD, essa será a quinta e última escolha.

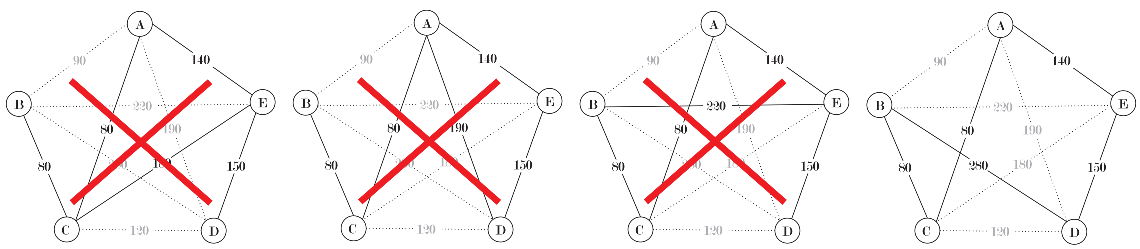

Figura 2.12: Método da Aresta de Menor Peso - Trajeto Final.

Então obtém-se a rota $A - C - B - D - E - A$ ou sua inversa $A - E - D - B - C - A$, com 730 quilômetros. Isso representa 150 quilômetros a mais do que a rota ideal obtida pelo método exaustivo, um erro relativo de $25,86\%$.

Embora o Problema do Caixeiro Viajante não tenha uma solução exata para qualquer n cidades, ele leva a várias situações cotidianas, como a dos correios, que precisam planejar suas entregas de maneira rápida; motoristas de ônibus, para que tracem a melhor rota, levando em consideração trânsito, pontos de lotação, entre outras coisas; médicos, para analisarem casos de epidemias em cidades ou bairros vizinhos. Inúmeras são as situações em que a solução é análoga a esse exemplo estudado.

Devido a sua grande importância, há muitas pesquisas e estudos recentes nessa área [6].

Dá para observar que Grafo pode ser um assunto bem complexo se aprofundado, porém pode ser ensinado para turmas de ensino médio com muita admiração dos alunos, podendo ser associado a temas da geometria, da estatística e até mesmo da álgebra.

2.2 Caso Geral

O Problema do Caixeiro Viajante consiste na procura de um circuito que possua a menor distância, começando numa cidade qualquer, entre várias, visitando cada cidade precisamente uma vez e regressando à inicial.

Esse problema, representado por grafos, será estudado para n cidades, as quais serão denotadas por vértices e as estradas por arestas. A cidade i será denominada c_i com $1 \leq i \leq n$, cada cidade (vértice) receberá um nome então será obtido um Grafo Rotulado. A distância entre c_i e c_j será representada por d_{ij}, logo será um Grafo Valorado.

Pode ser escrita a seguinte matriz de distâncias:

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & \dots & d_{n,n} \end{pmatrix}$$

Como a distância para ir a uma cidade e vir dela é a mesma, então $d_{i,j} = d_{j,i}$, ou seja, a matriz D é simétrica ($D = D^t$), o grafo é não orientado. Outra informação necessária é que $d_{i,i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Assim, a matriz D pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & \dots & d_{1,n-1} & d_{1,n} \\ d_{1,2} & 0 & d_{2,3} & \dots & d_{2,n-1} & d_{2,n} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & 0 & \dots & d_{3,n-1} & d_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{1,n-1} & d_{2,n-1} & d_{3,n-1} & \dots & 0 & d_{n-1,n} \\ d_{1,n} & d_{2,n} & d_{3,n} & \dots & d_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Em um grafo simples, cada aresta é formada por dois vértices distintos, então, quando o grau de cada um deles é somado, obtém-se o dobro do número de arestas que o grafo contém. Com essas informações tem-se:

$$n^o\, de\, arestas = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} grau(c_i)}{2}$$

Teorema 2.2.1. O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.

Demonstração. A soma do número de vértices de grau par com o de grau ímpar resulta no número total de vértices do grafo. Portanto, separando a soma dos graus de todos vértices em duas somas, dos de grau ímpar e de grau par:

$$\sum_{i=1}^{n} grau(c_i) = \sum grau(c_{pares}) + \sum grau(c_{\acute{\imath}mpares})$$

A soma da esquerda é par (dobro do número de arestas). Do lado direito a primeira soma também é par, já que todos os graus são pares; portanto, para que a soma dos dois somatórios do lado direito seja par é preciso que $\sum grau(c_{\acute{\imath}mpares})$ também seja par.

Como cada valor desse somatório é ímpar, a quantidade de itens da soma é necessariamente par. Logo, há uma quantidade par de vértices com grau ímpar. □

Para esse problema, admite-se que há uma estrada (aresta) entre cada uma das cidades (vértices) e ela é única, ou seja, todos os vértices do grafo são mutuamente adjacentes. Isso caracteriza um grafo completo com n vértices, que normalmente é representado por K_n.

K_n possui $\binom{n}{2}$ arestas. Ou seja, obtém-se:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

arestas possíveis para serem escolhidas, de modo que as n cidades sejam visitadas.

Uma outra maneira para descobrir o número de arestas de K_n seria como cada vértice é adjacente a todos os outros, então o grau de cada um deles é $n-1$. A soma de todos os graus do grafo é o dobro do número de arestas, então K_n possui $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Partindo de uma cidade, visitando todas as outras uma única vez e retornando à inicial, obtém-se um ciclo hamiltoniano.

Definição 2.2.2. Ciclo é o caminho de um grafo em que o primeiro e o último vértices são iguais. Caso ele contenha cada vértice do grafo uma única vez é denominado ciclo hamiltoniano.

2.2.1 Método Exaustivo

Esse é um método para a obtenção do resultado exato do problema. De um modo geral, para K_n existem $n!$ opções de caminhos; porém, como em um ciclo não faz diferença qual é o vértice inicial, então serão $(n-1)!$ caminhos. Cada ciclo Hamiltoniano terá o mesmo comprimento que o seu inverso, onde o número de trajetos possíveis para serem analisados será dado por $\frac{(n-1)!}{2}$.

Esse método consiste na enumeração de cada trajeto, calcular a distância de cada um e escolher a menor. Porém, como dito no caso particular, esse método é inviável à medida que aumentamos o valor de n, devido ao tempo necessário para sua execução (explosão combinatorial).

2.2.2 Método da Cidade Vizinha Mais Próxima

Esse é um método para a obtenção do resultado aproximado do problema. Ele consiste em, a partir de uma cidade k, escolher-se entre as $n-1$ cidades restantes aquela que esteja mais próxima.

Esse procedimento é repetido até que todas as cidades sejam escolhidas; então, da última retorna a cidade k, fechando o ciclo. Esse é um método prático, mas algumas escolhas podem levar a um resultado bem distante do ideal.

2.2.3 Método da Inserção com Menor Encargo

Algoritmo que consiste na inserção de vértices a cada iteração.

Passos do Algoritmo:

1) Selecione uma cidade i e identifique a cidade j mais próxima. Forme o trajeto: $i - j - i$

2) A cada iteração encontre um vértice k que não esteja no trajeto e que está mais próximo a qualquer vértice. Se houver mais de uma possibilidade de inserção deste vértice k no trajeto, vá para o passo 3.

3) Identifique o arco (c_i,c_j) no trajeto que minimiza a relação $d_{i,k} + d_{k,j} - d_{i,j}$. Insira esta cidade k entre i e j,ou seja, substituindo o arco (c_i, c_j) pelos arcos (c_i, c_k) e (c_k, c_j), e volte ao Passo 2. Repita este processo até que todas as cidades sejam incluídas no trajeto.

2.3 Abelhas

Que as abelhas possuem grandes habilidades é de conhecimento de todos. Porém, em estudos recentes feitos na Faculdade de Ciências Biológicas, Royal Holloway, na Universidade de Londres, descobriram que as abelhas, por meio de um método ainda desconhecido, conseguem calcular a melhor rota entre todas as flores, gastando, assim, menos energia para coletarem o néctar. [11]

Resolução de problemas complexos é frequentemente visto como um indicador de inteligência avançada que exige raciocínio causal e um cérebro com grande poder de processamento, porém as abelhas possuem um cérebro bem simples (apenas 950 mil neurônios) se comparado ao nosso (86 bilhões de neurônios) e acham uma boa solução para o complexo problema do Caixeiro Viajante que custa a nós, matemáticos e programadores, resolver.

Conforme detalhado na edição de 17 de agosto da revista *Biology Letters* (sobre os artigos [12] [11]), as abelhas foram analisadas dentro de uma gaiola de voo, onde dispuseram seis flores artificiais organizadas de modo que o Método da Flor Vizinha Mais Próxima não levaria ao resultado ideal. Anotaram a ordem em que as flores eram visitadas e analisaram os dados obtidos.

Depois de explorar a localização das flores, as abelhas aprenderam rapidamente a fazer o menor percurso. Uma possibilidade é que elas gravem a menor rota encontrada até o momento e compare com novas rotas.

O método utilizado por elas ainda não se sabe ao certo, porém, caso encontrem o algoritmo que elas usam, ele será muito útil, tendo em vista a sua importância.

Capítulo 3

PROBLEMA DOS CASAMENTOS ESTÁVEIS

3.1 Emparelhamento Estável

Definição 3.1.1. Dado um grafo $\mathcal{G}$ com conjunto de vértices $\mathcal{V}$ e conjunto de arestas $\mathcal{A}$, um emparelhamento $\mathcal{E}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}$ de arestas duas a duas não adjacentes.

Considere um conjunto com $2n$ pessoas, sendo n pessoas do sexo masculino e n do sexo feminino. Cada homem possui uma lista de preferência entre as mulheres, ou seja consegue ordená-las, sem empate, desde a sua preferida até a mulher que ele menos gosta. Analogamente para as mulheres em relação aos homens.

O conjuntos dos homens será representado como

$$\mathcal{H} = \{h_1, h_2, h_3, ..., h_n\}$$

e o das mulheres como

$$\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, ..., m_n\}$$

com cardinalidade $|\mathcal{H}| = |\mathcal{M}| = n$.

Todos os elementos $m \in \mathcal{M}$ têm uma preferência em relação aos elementos do conjunto $\mathcal{H}$. Assim para facilitar o entendimento, a notação $h_1 \succ_m h_2$ será utilizada para representar que m gosta mais de h_1 do que de h_2, para h_1 e $h_2 \in \mathcal{H}$.

Deseja-se determinar um conjunto de casamentos (monogâmico e heterossexual) estáveis , onde os homens se propõem às mulheres e elas decidem aceitar ou não, considerando as preferências.

Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos casais. Um emparelhamento $\mathcal{E}$ será chamado de *instável* se houver dois emparelhamentos (A, B) e (α, β) pertencentes a $\mathcal{E}$, tais que $\beta \succ_A B$ (A prefere β a B) e $A \succ_\beta \alpha$ (β prefere A a α). Neste caso, o par (A, β) denomina-se par *bloqueador* e tem-se um *conjunto de casamentos instáveis*.

Definição 3.1.2. Um emparelhamento $\mathcal{E}$ é *estável* se não existem pares bloqueadores pertencentes a ele.

Informalmente, isso significa, que almejar casamentos estáveis seria montar casais de modo que nenhuma troca de par beneficie os casais envolvidos.[2]

De certa forma, o problema se resume a formar pares (determinar um emparelhamento) entre os elementos de dois conjuntos.

Um primeiro questionamento a ser feito é: sempre existe um emparelhamento estável $\mathcal{E}$? Caso afirmativo, como obtê-lo? Ele é único?

Gale e Shapley [9], em 1962, mostraram que é possível fazer um emparelhamento através do seguinte algoritmo:

ALGORITMO GALE-SHAPLEY

Enquanto houver algum homem h livre
    Seja m a primeira mulher da lista de preferências de h que ele ainda não se ofertou
        Se m estiver solteira
            m e h ficam noivos
        Caso contrário
            Se m preferir seu atual noivo
                m recusa h e ele continua livre
            Caso contrário
                m e h ficam noivos e seu antigo noivo h' fica livre

Em outras palavras, o algoritmo de Gale-Shapley afirma:

1. No início de cada rodada, cada homem não comprometido postula a mulher favorita de sua lista de preferências e que não o tenha rejeitado ainda.

2. Cada mulher escolhe de todos os seus pretendentes, incluindo seu atual namorado, seu preferido. Ela fica noiva deste preferido e todos os outros pretendentes ficam permanentemente rejeitados.

3. Os homens rejeitados riscam de sua lista de preferências as mulheres que os rejeitam.

Teorema 3.1.3. Através do algoritmo Gale-Shapley todos se casam.

Demonstração. Afim de demonstrar esse teorema, o método utilizado foi a contradição.

Se uma mulher recebe uma proposta, então começa a namorar e nunca perde isso. Ela só pode trocar de namorado se tiver um pretendente melhor do que ele.

Como todas as mulheres fazem parte da lista de preferência dos homens, então um homem não tem namorada, se, e somente se, é rejeitado por todas as mulheres.

No final, se um homem h não se casa, resulta que uma mulher m também não se casa. Logo, m, em algum momento, recebeu uma proposta de h e o rejeitou, isto é, ela deve estar casada com um pretendente melhor. Contradição.

Portanto todos se casam. □

Teorema 3.1.4. O casamento $\mathcal{E}$ obtido pelo algoritmo Gale-Shapley é estável.

Demonstração. A prova desse teorema será por absurdo.

Suponha que o grupo $\mathcal{E}$ de casamentos não é estável, então existe o casal $(h, m) \notin \mathcal{E}$ que o torna instável. Isso significa que existem $(h, m'), (h', m) \in \mathcal{E}$ tal que $m \succ_h m'$ e $h \succ_m h'$.

Como h prefere m a sua atual noiva m', então ele deve ter se proposto primeiro a ela, e ela só o rejetaria se preferisse seu atual noivo ou algum outro homem que a tivesse flertado anteriormente.

Já que, segundo o algoritmo uma mulher pode a cada tempo trocar de pretendente somente se o considerar melhor que o outro, isto significa que ela gosta mais de h' do que de h contradizendo nossa hipótese. Portanto, o casamento é estável. $\square$

Definição 3.1.5. Um emparelhamento estável é chamado *ótimo* do ponto de vista de $\mathcal{A}$, se cada elemento de $\mathcal{A}$ tiver o melhor par do que em qualquer outro emparelhamento estável possível.

Definição 3.1.6. Um emparelhamento estável é chamado *péssimo* do ponto de vista de $\mathcal{A}$, se cada elemento de $\mathcal{A}$ tiver o pior par do que em qualquer outro emparelhamento estável possível.

Esse problema que representa o tradicional casamento em que os homens se propõem as damas é mais vantajoso para qual deles?

Teorema 3.1.7. O algoritmo Gale-Shapley dá para cada homem sua companheira ótima.

Demonstração. A prova desse teorema será por absurdo.

Suponha que existe $h \in \mathcal{H}$ que não consegue sua parceira ótima no $\mathcal{E}$. Suponha que h é o primeiro homem que foi rejeitado por sua mulher ótima m_h. Seja h' o homem que ocasionou essa rejeição, isto é m_h prefere h' a h.

Como h é o primeiro que foi rejeitado por sua companheira ótima, tem-se que h' não foi rejeitado por sua companheira ótima ainda. Logo, h' prefere m_h a $m_{h'}$. Isso significa que o par (h', m_h) é um par bloqueador pertencente a $\mathcal{E}$.

Portanto, $\mathcal{E}$ não é estável. Absurdo! $\square$

Teorema 3.1.8. O algoritmo Gale-Shapley dá para cada mulher seu pior companheiro.

Demonstração. A prova desse teorema será por absurdo.

Seja $(h, m) \in \mathcal{E}^{GS}$ e $(h', m) \in \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}^{GS}$ representa o grupo de casamentos obtidos através do algoritmo de Gale-Shapley e $\mathcal{E}$ um outro emparelhamento estável.

Sabendo $(h, m) \in \mathcal{E}^{GS}$ então $m \succ_h m'$. Como $\mathcal{E}$ é estável então $h' \succ_m h$. Pois, caso contrário, o par (m, h) seria um bloqueador para $\mathcal{E}$.

Logo toda mulher prefere sempre o outro par de outro emparelhamento estável. $\square$

Isto significa que os casamentos estáveis obtidos através do algoritmo de Gale-Shapley são ótimos para os homens, pois não existe um emparelhamento estável segundo o qual qualquer homem poderia se associar a uma parceira melhor e é péssimo para as mulheres, pois cada mulher é emparelhada com o seu pior parceiro válido. Claro que isso seria o inverso se as mulheres passassem a se propor aos homens.

3.2 Exemplo

Apresenta-se um exemplo afim de aclarar os cálculos associados ao algoritmo de Gale-Shapley, isto é, considera-se o caso em que $n = 6$.

Para $n = 6$, ou seja, 6 homens e 6 mulheres, seus respectivos rankings de preferências, em ordem estritamente decrescente, da esquerda para a direita, são

$$\begin{aligned}
h_1 &= \{m_5, m_4, m_6, m_2, m_1, m_3\} \\
h_2 &= \{m_4, m_3, m_2, m_1, m_6, m_5\} \\
h_3 &= \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} \\
h_4 &= \{m_2, m_1, m_4, m_3, m_6, m_5\} \\
h_5 &= \{m_3, m_2, m_1, m_6, m_5, m_4\} \\
h_6 &= \{m_4, m_3, m_5, m_6, m_1, m_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= \{h_6, h_5, h_4, h_3, h_2, h_1\} \\
m_2 &= \{h_1, h_3, h_5, h_2, h_4, h_6\} \\
m_3 &= \{h_2, h_3, h_1, h_5, h_4, h_6\} \\
m_4 &= \{h_6, h_1, h_5, h_2, h_4, h_3\} \\
m_5 &= \{h_1, h_6, h_2, h_5, h_3, h_4\} \\
m_6 &= \{h_3, h_1, h_4, h_2, h_6, h_5\}
\end{aligned}$$

Baseado nesses favoritismos, aplica-se o algoritmo Gale-Shapley para encontrar os casamentos estáveis que são *ótimos* para os homens.

1. m_5 é a preferida de h_1 e ela está solteira, logo (h_1, m_5) ficam noivos. Nesse momento,

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5)\}$$

2. h_2 escolhe m_4 e, como ela está solteira, então eles ficam noivos. Logo,

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_4)\}$$

3. De maneira análoga, formamos os casais (h_3, m_1), (h_4, m_2) e (h_5, m_3). Nesse momento,

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_4), (h_3, m_1), (h_4, m_2), (h_5, m_3)\}$$

4. Resta somente o h_6 e ele se propõe a m_4, mas ela está noiva de h_2. Como $h_6 \succ_{m_4} h_2$, então seu atual noivo h_2 fica livre e ela fica noiva de h_6. Atualizando,

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_3, m_1), (h_4, m_2), (h_5, m_3), (h_6, m_4)\}$$

5. h_2 está livre novamente e a próxima mulher de sua lista é m_3, atualmente ela está noiva de h_5, porém, como $h_2 \succ_{m_3} h_5$, então h_5 volta a ficar solteiro. Logo,

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_1), (h_4, m_2), (h_6, m_4)\}$$

6. h_5 se propõe a m_2, que abandona seu atual noivo h_4. Então,

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_1), (h_5, m_2), (h_6, m_4)\}$$

7. h_4 tenta ficar, então, com m_1, como $h_4 \succ_{m_1} h_3$ então eles ficam juntos gerando o novo

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_4, m_1), (h_5, m_2), (h_6, m_4)\}$$

8. h_3 se interessa por m_2 e esta opta por ficar com ele, deixando h_5 livre.

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_1), (h_6, m_4)\}$$

9. h_5 faz sua terceira tentativa de noivado, agora com m_1, que o aceita e, portanto, abandona h_4.

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_5, m_1), (h_6, m_4)\}$$

10. h_4 escolhe m_4, mas ela gosta mais do seu atual noivo h_6, então h_4 não encontrou uma parceira ainda.

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_5, m_1), (h_6, m_4)\}$$

11. h_4 tenta então com m_3, mas ela também prefere seu atual noivo h_2. Portanto, $\mathcal{E}$ não sofreu alteração.

12. h_4 faz sua quinta tentativa, agora com m_6; como ela está sozinha, então ela o aceita.

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_6), (h_5, m_1), (h_6, m_4)\}$$

13. Fim, não restam mais homens livres.

Portanto, o emparelhamento estável ótimo para os homens que podemos obter nesse caso é:

$$\mathcal{E} = \{(h_1, m_5), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_6), (h_5, m_1), (h_6, m_4)\}$$

Assim como os problemas anteriores, esse está associado a muitos outros problemas que teriam métodos de solução semelhante. Muito interessante a ser trabalhado em sala de aula, por despertar extrema curiosidade. Menos trivial que os anteriores, porém acessível aos conhecimentos de uma turma de ensino médio. É possível fazer o teste com os próprios alunos da classe, propondo que montem listas de preferências e façam as devidas análises.

Capítulo 4

PLANO DE AULA

4.1 Objetivos

Através dos problemas apresentados em cada capítulo, tem-se por objetivo introduzir conteúdos básicos de grafos aos alunos, mostrando sua relação com a resolução de problemas; estimular o raciocínio lógico; implementar algoritmos e suas aplicações; desenvolver a capacidade de representar determinadas situações e suas necessidades, através de grafos; interpretar soluções aproximadas; estimular a curiosidade dos alunos para que busquem novos conhecimentos; inserir uma matemática moderna e dinâmica em sala de aula.

4.2 Ementa

- Introdução;
- Noções Básicas: definição, grau, grafo simples, grafo completo...;
- Representação de grafos: lista de adjacências, matriz de adjacência e matriz de incidência. Grafos Conexos;
- Caminhos, percursos;
- Algoritmos em grafos;
- Grafos Eulerianos e Hamiltonianos;
- Caminho Mínimo;
- Emparelhamento;
- Análise e Interpretação de Problemas.

4.3 Metodologia de Ensino

Aulas teóricas, práticas e, para concluir, aulas práticas supervisionadas.

Sempre de maneira estimulante, criativa e muito atraente. A interação dos alunos é importantíssima para o aprendizado, por isso sua participação deve ser incentivada e estimulada a todo momento.

As aulas práticas englobam o uso de multimídias, softwares, laboratórios, computadores, entre outros materiais manipulativos.

As atividades supervisionadas serão trabalhadas, apresentadas e avaliadas em sala de aula, podendo, de acordo com o envolvimento da turma, até montar uma banca examinadora composta por alunos e professores para analisarem as apresentações.

A conclusão deve ser feita pelo professor, que pode finalizar tirando as últimas dúvidas e indagando a opinião dos alunos a respeito do conhecimento adquirido sobre grafos, além de deixar uma curiosidade para que, dessa maneira, os estudantes busquem maiores rudimentos.

4.4 Sugestões de Atividades

Após trabalhar em sala os três problemas anteriores, discutindo cada detalhe e introduzindo os conceitos principais de grafos e suas aplicações, será hora de permitir que os alunos trabalhem em equipe. Momento de permitir que cada aluno busque sua solução sem interferência nenhuma do professor, que somente organizará a divisão das atividades e orientações iniciais.

Apresentar aos alunos situações problema que envolvam grafos para sua solução e permitir que eles se dividam igualmente, de acordo com o interesse de cada um.

Propor aos grupos que se reúnam, conversem, discutam e busquem uma solução.

Solicitar que mostrem aos colegas os raciocínios utilizados, montando uma apresentação do problema e sua respectiva solução.

Como cada problema possui uma complexidade diferente, as apresentações devem ser agendadas de acordo com o tempo necessário para sua resolução. Na apresentação de cada grupo, recomendar que elaborem um charada envolvendo grafos, para seus colegas de classe refletirem.

4.4.1 Problema 1 - Amizade

O grupo deverá fazer uma pesquisa com a turma de outra sala. Perguntando a cada um: "Quais são os seus três colegas preferidos?". Montar um grafo que represente essas preferências. Determinar as posições de liderança, as amizades recíprocas e alunos com possíveis problemas de relacionamento.

4.4.2 Problema 2 - Portos

Uma empresa de turismo pretende montar um pacote de cruzeiro que passe pelos 11 portos citados na Figura 4.1. O pacote inclui 5 horas de turismo em cada uma dessas 11 cidades. Baseado nessas informações, essa viagem durará, no mínimo, aproximadamente, quantos dias e qual será o melhor roteiro?

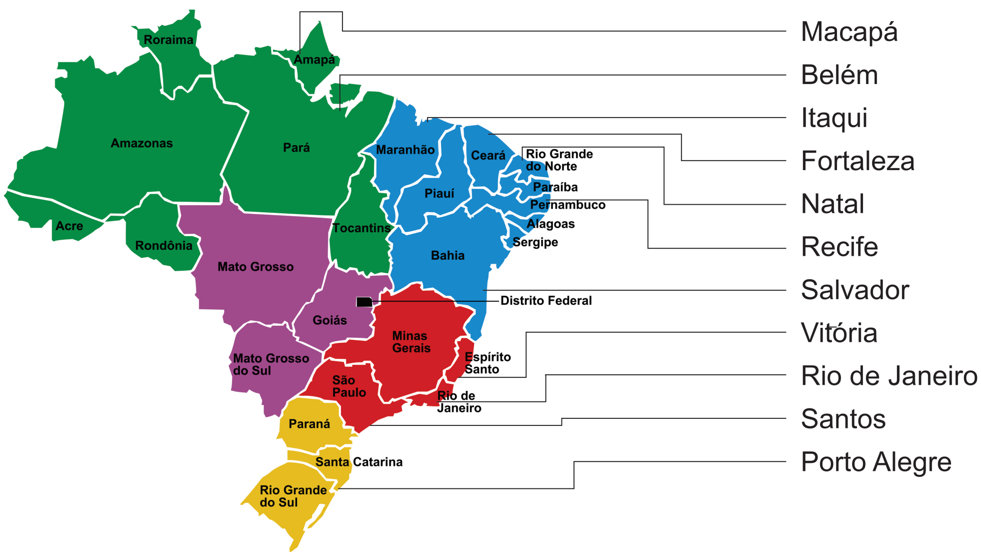

Figura 4.1: Portos - Brasil.

4.4.3 Problema 3 - ***Facebook***

Facebook é um site e serviço de rede social, muito utilizado pelos alunos. Nele pode se obter o número de amigos que possui em comum com qualquer outra pessoa.

Dessa maneira como esse site relaciona o perfil de cada um, dando sugestão de possíveis conhecidos para serem adicionados?

Como determinar se duas pessoas estão interligadas através de uma sequência de relacionamentos? Escolher 3 alunos da turma e montar uma representação dos relacionamentos.

4.4.4 Problema 4 - Professores

Em universidades, um problema importante é a distribuição das aulas.

Suponhamos que em uma universidade haja P professores e D disciplinas ($D < P$).

Se cada professor informar as matérias que leciona, é possivel oferecer todas as disciplinas simultaneamente?

Qual é o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas pela universidade?

4.4.5 Problema 5 - Avião

Adaptado da atividade desenvolvida em [16], neste problema o grupo deverá representar as malhas aéreas através de grafos, onde os vértices simbolizarão os aeroportos e as arestas os voos. Para isso, devem considerar que todos os voos existem nas duas direções: ida e volta.

O problema consiste em construir uma malha aérea para o país (abaixo), de modo que todas as cidades estejam conectadas por, no máximo, três voos.

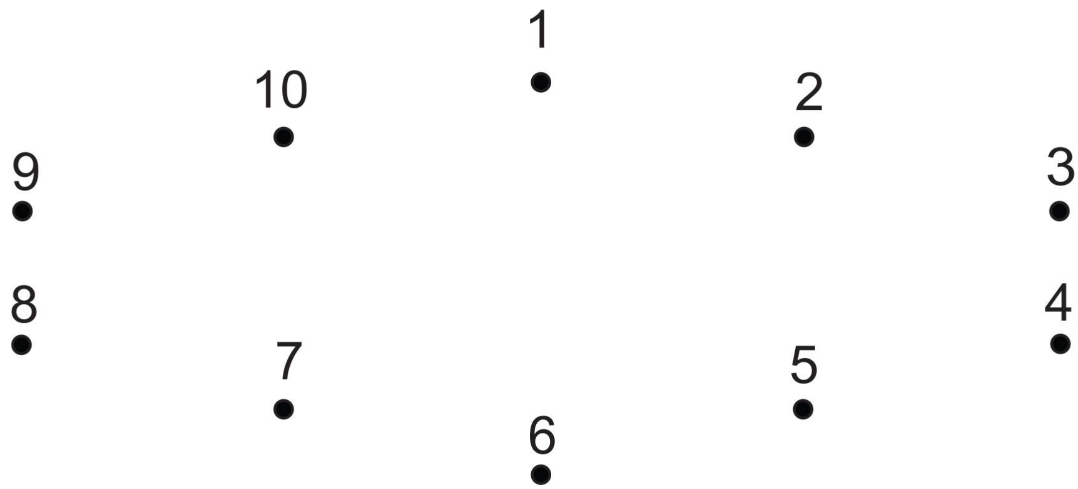

Figura 4.2: Malha Aérea.

Admita a restrição, como as cidades 4 e 9, 3 e 8, e 2 e 7 estão muito distantes umas da outras, as viagens entre elas devem ser feitas com, pelo menos, dois voos.

Indagar aos alunos se é possível construir uma malha aérea menor que a apresentada por eles e que satisfaçam as condições desse problema. Proporcionar essa reflexão junto aos demais alunos da turma.

4.5 Finalização

Após cada grupo montar sua amostra, agendar as apresentações de modo que em cada uma delas o professor debata com a turma e faça o desfecho. Fazendo, então, um fechamento da atividade com envolvimento e relato de todos.

Espera-se que os resultados das atividades aqui esboçadas apontem, tanto quanto se tem observado, para a possibilidade, importância, relevância e potencialidade desse assunto no Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sendo grafo considerado um termo pouco conhecido, tem-se aqui uma abordagem simplificada para servir de ponto de partida para os docentes. Considera-se importante a explicação histórica através do exercício das Pontes de Königsberg, por incitar a curiosidade dos alunos com relação aos descobrimentos matemáticos, provando que a matemática também se transforma com o passar do tempo.

Antes de passar para os outros dois exemplos explorados, o professor deve fixar bem os conceitos desenvolvidos na primeira etapa, para que não se acumulem dúvidas. A partir daí, elevar a dificuldade das atividades usando exercícios mais dinâmicos e complexos.

O modelo de plano de aula é para auxiliar os professores nesse primeiro contato com grafos. Conforme o desenvolvimento das atividades, ele pode interferir no plano, adequando-o com a sua realidade e necessidades. Isso varia de turma para turma, podendo aplicar planos diferentes em uma mesma escola, por exemplo.

Com este estudo fica comprovado que grafo é um tópico matemático que pode ser muito mais explorado do que acontece atualmente no Ensino Médio. Um tema que mostra uma matemática moderna e muito interessante para os alunos, pois atingem-se assuntos do cotidiano dos estudantes.

Com grafos é possível estimular o raciocínio lógico, através de exercícios desafiadores, mesmo quando simples. Utilizar a ligação com outras disciplinas para atrair uma gama ainda maior de alunos.

Desenvolver a modelagem matemática, fator pouco praticado no Ensino Médio. Ou seja, trata-se de um tema amplo, que engloba diversos quesitos requeridos em uma boa formação matemática e acadêmica, trazendo muitas vantagens para os estudantes.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, Ruy Madsen. **Combinatória e grafos.** São Paulo, SP: Nobel, 1974.

[2] BRANDALERO, Marcelo. **Uma análise de emparelhamentos estáveis em grafos bipartidos.** 2011. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[3] BRIA, Jorge. **Grafos, por que não?** Disponível em: < *http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume1/grafos_por_que_no.pdf* >. Acessado em: 18/03/2014.

[4] BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; JURKIEWICZ, Samuel (Coaut. de). **Grafos: introdução e prática.** São Paulo, SP: Edgard Blucher, 2009. 162p.

[5] BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. **Teoria e modelos de grafos.** São Paulo, SP: Edgard Blucher, 1979. xi, 249p.

[6] COSTA, Polyanna Possani da. **Teoria dos grafos e suas aplicações.** Dissertação de mestrado – Unesp Rio Claro, 2011.

[7] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos: A experiência russa.** Trad. Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 292p.

[8] FURTADO, Antonio Luz. **Teoria dos grafos: algoritmos.** Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos, 1973. xii, 155p.

[9] GALE, David; SHAPLEY, Lloyd S. **College admissions and the stability of marriage.** American Mathematical Monthly, p. 9-15, 1962.

[10] JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos - Uma Introdução.** 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila5-Grafos.pdf>. Acessado em 12/05/2013.

[11] LIHOREAU, Mathieu et al. **Bees do not use nearest-neighbour rules for optimization of multi-location routes.** Biology letters, v. 8, n. 1, p. 13-16, 2012.

[12] LIHOREAU, Mathieu et al. **Unravelling the mechanisms of trapline foraging in bees.** Communicative and integrative biology, v. 6, n. 1, p. e22701, 2013.

[13] LOPES, Samuel António. **Métodos finitos em matemática.** 2009. 117 p. Arquivo escolar - Faculdade de Ciências do Porto. Disponível em: < http : //arquivoescolar.org/bitstream/arquivo − e/45/3/metodos_finitos_III.pdf >. Acessado em: 15/05/2014.

[14] LUCCHESI, Cláudio Leonardo. **Introdução a teoria dos grafos.** Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1979. 148 p.

[15] MALTA, Gláucia Helena Sarmento. **Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível.** 2008. Tese de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[16] MATEMÁTICA MULTIMÍDIA - UNICAMP. **Aviões e matrizes.** Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1221>. Acessado em: 16/10/2014.

[17] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÂO. **Orientações curriculares para o ensino médio.** v. 2. Brasília: Secretaria de Educação Básica. 2009. 135 p. Disponível em: < http : //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf >. Acessado em: 23/07/2014.

[18] SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari (Coaut. de). **Introdução à análise combinatória.** 4. ed. rev. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna, 2007. 390 p.

[19] SZWARCFITER, Jayme Luiz. **Grafos e algoritmos computacionais.** 2.ed. Rio de Janeiro, RJ: Campus, 1986. 216p.

[20] TOMÁS, Ana Paula. **Emparelhamentos, casamentos estáveis e algoritmos de colocação de professores.** Technical Report DCC-2005-02, DCC-FC LIACC, University of Porto, 2005. Disponível em: < www.dcc.fc.up.pt/Pubs/TR05/dcc − 2005 − 02.pdf >. Acessado em: 29/07/2014.

[21] WIKIPÉDIA - **Problema do casamento estável.** Disponível em: < http : //pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_emparelhamento_est%C3%A1vel >. Acessado em: 23/07/2014.