



MARIA CLÁUDIA CRISTOFOLETTI

SEÇÕES ÁUREAS E APLICAÇÕES NA ROTINA DAS SALAS DE
AULAS

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MARIA CLÁUDIA CRISTOFOLETTI

SEÇÕES ÁUREAS E APLICAÇÕES NA ROTINA DAS SALAS DE
AULAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA MARIA CLÁUDIA CRISTOFOLETTI, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT.

Assinatura da Orientadora

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "m. a. e. h.", is written over a horizontal line.

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C868s Cristofoletti, Maria Cláudia, 1975-
Seções áureas e aplicações nas salas de aulas / Maria Cláudia
Cristofoletti. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Segmento áureo. 2. Método do segmento áureo. 3. Penrose, Ladrilhos de. I.
Ehrhardt, Maria Aparecida Diniz, 1956-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Golden sections and classroom routine applications

Palavras-chave em inglês:

Golden section

Golden section method

Penrose tiles

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestra

Banca examinadora:

Maria Aparecida Diniz Ehrhardt [Orientador]

Sandra Augusta Santos

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

Data de defesa: 15-12-2014

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 15 de dezembro de 2014 e
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

Prof.(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

Sandra Augusta Santos

Prof.(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

Prof.(a). Dr(a). REGINA HELENA DE OLIVEIRA LINO FRANCHI

Abstract

We present, in this work, a survey related to the Golden Section, which was studied by the greeks before the time of Euclid, but that received from him a formal definition called by Extreme and Mean Ratio. We begin by showing that this ratio, known as Golden Ratio, has a rich history that is presented in different contexts. We exhibited the algebraic properties of the number Φ , resulting from this ratio, we approached the Method of Golden Section, which allows to find extreme points of functions of one variable and we show its geometric presence in Penrose tiles. We believe that such matters can be dealt with in the classroom in order to arise the interest of students in Mathematics, so, we prepare suggestions for activities to explore these concepts and use diverse strategies.

Keywords: Golden Section, Method of Golden Section, Penrose tiles.

Resumo

Apresentamos, neste trabalho, uma pesquisa relacionada à Seção Áurea, que foi estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides, mas que recebeu deste uma definição formal chamada de Razão Extrema e Média. Optamos por iniciar mostrando que essa razão, conhecida como Razão Áurea, possui uma história rica que se apresenta em diferentes contextos. Exibimos as propriedades algébricas do número Φ , resultante dessa razão, abordamos o Método da Seção Áurea, que permite encontrar pontos extremos de funções de uma variável e mostramos a sua presença geométrica nos ladrilhos de Penrose. Entendemos que tais assuntos podem ser tratados em sala de aula de forma a despertar o interesse do aluno pela Matemática, logo, preparamos sugestões de atividades que explorem esses conceitos e utilizem estratégias diversificadas.

Palavras-chave: Seção Áurea, Método da Seção Áurea, Ladrilhos de Penrose.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
2 Razão Áurea	4
2.1 Contexto histórico	4
2.2 O pentágono e o pentagrama	5
2.3 Platão	8
2.4 Euclides e a Extrema e Média Razão	9
2.5 A sequência de Fibonacci	15
2.6 Renascimento	16
2.7 A Razão Áurea nas artes	19
3 Aplicações gerais	22
3.1 Propriedades algébricas do número Φ	22
3.2 O triângulo retângulo e o número Φ	26
3.3 O método da Seção Áurea	28
3.3.1 O algoritmo da Seção Áurea	31
3.4 Os ladrilhos de Penrose	34
4 Aplicações na sala de aula	40
4.1 Sequência didática sobre o método da Seção Áurea	41
4.2 Sequência didática sobre pavimentação do plano e os ladrilhos de Penrose	50
5 Conclusão	57
Referências	58

Dedico esta dissertação a Deus.
Ao meu esposo José, minhas filhas Júlia e Laura e meus pais Tadeu e Cecília.

Agradecimentos

A Deus por sua presença em minha vida, mostrando o caminho certo e suprimindo todas as minhas necessidades. Ao meu esposo José que sempre esteve ao meu lado me incentivando e sem o qual não teria conseguido concluir esse mestrado. As minhas lindas filhas Júlia e Laura que são minha inspiração e força para prosseguir. Aos meus pais Tadeu e Cecília, por serem exemplos de vida, caráter e determinação. A todos os professores que passaram pela minha vida e que contribuíram para que eu chegasse até aqui, em especial à minha orientadora Maria Aparecida Diniz Ehrhardt. À Capes pelo apoio financeiro para a realização desse trabalho.

Lista de Ilustrações

2.1	Diagonais do pentágono formando o pentagrama	5
2.2	Pentágono ABCDE	6
2.3	Segmento dividido em Razão Extrema e Média	9
2.4	Divisão de segmento na Seção Áurea encontrada em <i>Elementos</i>	10
2.5	Gnômion G	11
2.6	Retângulo Áureo	12
2.7	Construção do pentágono feita em <i>Elementos</i>	13
2.8	Triângulo Áureo	13
2.9	Infinitos Triângulos Áureos	14
2.10	Razão se aproximando do número Φ	16
2.11	Triângulo de Kepler	18
2.12	<i>Harlequin with Clarinet</i>	20
2.13	<i>Modulor</i>	20
3.1	Triângulo Retângulo com as medidas dos lados em PG	26
3.2	Triângulo Retângulo com hipotenusa medindo Φ	27
3.3	Gráficos das funções seno, cosseno e tangente	28
3.4	Exemplo de função unimodal	29
3.5	Partição de $[a, b]$ em três partes iguais	30
3.6	Intervalo dividido na Seção Áurea	30
3.7	Iteração para o caso em que $f(m_k) < f(n_k)$	32
3.8	Iteração para o caso em que $f(m_k) > f(n_k)$	32
3.9	Localização de m_1 e n_1 no intervalo $[a, b]$	33
3.10	Ladrilhagem periódica	35
3.11	Pentágonos justapostos	35
3.12	Triângulos Áureos acutângulos e obtusângulos	36
3.13	Decomposição dos Pentágonos em polígonos elementares	36
3.14	Ladrilhos de Penrose	37
3.15	Ladrilho com Dardos e Pipas	38
3.16	Ladrilho com Rombos agudos e obtusos	38
3.17	Os ladrilhos de Penrose no pentágono e pentagrama	38
4.1	Gráfico de $v(t)$ no <i>Geogebra</i>	46
4.2	Reflexão do hexágono no <i>Geogebra</i>	52

4.3	Composições possíveis com polígonos regulares	53
4.4	Construção do Pentágono no <i>Geogebra</i>	54
4.5	Ladrilhos de Penrose formados por dois Triângulos Áureos	56

Lista de Tabelas

3.1	Tabela com as k iterações.	34
4.1	Tabela com as k etapas para determinar o valor mínimo.	46
4.2	Tabela com as k etapas para determinar o valor máximo.	47
4.3	Tabela do problema da estação de rádio, item (a).	48
4.4	Tabela do problema da estação de rádio, item (b).	49
4.5	Tabela do problema da caixa.	50

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal estudar a Seção Áurea, que desde a Antiguidade desperta a curiosidade de matemáticos e estudiosos. Investigamos suas histórias e propriedades, apresentamos algumas de suas aplicações e propomos duas sequências didáticas idealizadas para serem desenvolvidas com alunos do Ensino Médio.

A Matemática possui uma vasta história repleta de descobertas, conhecimentos e curiosidades, que podem ser aplicadas como ferramenta de apoio pedagógico ao professor e como instrumento para motivar e envolver o aluno no processo de aprendizagem. Através da utilização da história da Matemática em sala de aula, como parte da sequência didática, busca-se obter uma aprendizagem significativa, possibilitando aos alunos a participação nas descobertas e discussão dos assuntos envolvidos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática tratam a História da Matemática como um subsídio para a transmissão dos conhecimentos matemáticos de maneira clara e contextualizada.

"A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino aprendizagem. Ao revelar a Matemática como uma criação, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente."[3]

O ensino de Matemática hoje em dia ainda apresenta-se de forma isolada das outras disciplinas, recheado de teorias, definições e exercícios repetitivos, limitando-se a poucos momentos de contextualização e interdisciplinaridade. Mas, através da história da Matemática, esperamos que o aluno veja e entenda a disciplina como uma construção humana, que permita o enfrentamento dos múltiplos e complexos desafios da vida contemporânea e que compreenda a integração com as demais áreas do conhecimento.

Portanto, consideramos necessário elaborar um capítulo que explore a história da Seção Áurea, exiba alguns de seus estudiosos, suas manifestações e contribuições para as diversas áreas do conhecimento. Sabemos que podemos defini-la de uma maneira muito simples da seguinte forma: "Dado um segmento qualquer, dividido em duas partes desiguais, diremos que ele está particionado na Seção Áurea quando o quociente entre as medidas do segmento inteiro e da parte maior é igual

ao quociente entre as medidas das partes maior e da menor". Mas também conheceremos outros modos de fazê-lo e estudaremos o quociente acima referido, que recebe o nome de Razão Áurea, e o número resultante dessa razão designado Número de Ouro.

Iniciamos, na Seção 2.2, com o Pentágono e o Pentagrama, dois objetos geométricos explorados há milênios, que além de suas associações com divindades supremas e místicas, também tiveram suas propriedades geométricas estudadas e associadas à Razão Áurea. Os gregos, no papel de Pitágoras e da sua escola, fizeram estudos geométricos sobre o pentágono e encontraram nele a Razão Áurea traçando suas diagonais. Perceberam que a partição das diagonais por outras diagonais do pentágono divide cada uma delas na Seção Áurea.

Platão, um dos grandes filósofos e matemáticos da Grécia Antiga, segundo muitos historiadores, também apresentou interesse direto na Seção Áurea, principalmente no que se refere ao estudo dos comprimentos incomensuráveis e dos sólidos platônicos.

Mas foi Euclides, um outro matemático grego, que a definiu como Razão Extrema e Média em sua obra nomeada *Elementos*, e ensinou a construí-la com régua não graduada e compasso, como veremos na Seção 2.4, outorgando a ela uma dignidade geométrica clássica, e empregando-a também na construção do pentágono, do icosaedro e do dodecaedro. A proposta de Euclides para a construção do pentágono utiliza um triângulo isósceles que também será retomado em diversos momentos desse trabalho e que é conhecido como Triângulo Áureo. Porém, a construção mais famosa, relacionada à Seção Áurea, é a do chamado Retângulo Áureo, cujos lados estão na Razão Áurea e que, segundo muitos estudiosos, possui propriedades estéticas perfeitas.

A associação da Seção Áurea com o pentágono e o pentagrama que envolveu os pitagóricos, o interesse de Platão pelos sólidos regulares, a crença de que estes representavam entidades cósmicas e a sua presença nos *Elementos* de Euclides, estimularam matemáticos por muitas gerações a trabalhar com essa razão e com o Número de Ouro.

Entre eles, podemos citar Leonardo Fibonacci, um matemático que propôs um problema em seu livro *Liber Abaci*, cuja solução originou uma sequência que possui uma conexão com o Número de Ouro. E, Luca Pacioli, que introduziu a expressão "Proporção Divina" e foi responsável pela divulgação da Razão Áurea em sua época.

Ainda no Capítulo 2, apresentamos alguns resultados obtidos pelo astrônomo Johannes Kepler, que a respeito de sua admiração pela Seção Áurea escreveu:

"A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma jóia preciosa." [7]

Ao final do Capítulo 2, veremos que podemos admirar a presença da Razão Áurea em produções de artistas que fizeram investigações matemáticas e a aplicaram em suas obras, mas que também precisamos tomar cautela ao estudar determinados trabalhos, que ratificam a presença das proporções áureas em grandes obras arquitetônicas antigas baseadas apenas em algumas medidas convenientemente tomadas e que se aproximam do Número de Ouro.

Nosso objetivo no Capítulo 3 será o de apresentar algumas propriedades relacionadas à Seção Áurea. Na Seção 3.1, iniciamos com aquelas que relacionam o Número de Ouro, que será representado pela letra Φ (fi maiúscula) e o seu inverso representado pela letra φ (fi minúscula), exibimos as

propriedades das potências de Φ e finalizamos com diferentes formas da representação do Número de Ouro.

Existem diversas associações feitas entre o número Φ e os polígonos. Optamos, na Seção 3.2, por apresentar a que se manifesta no triângulo retângulo, definindo as medidas dos lados desse triângulo em função de Φ e encontrando o ângulo cuja tangente e cosseno possuem o mesmo valor, também vinculado ao Número de Ouro.

Na Seção 3.3, apresentaremos uma aplicação da Seção Áurea em problemas de otimização, ou seja, aqueles em que se deseja maximizar ou minimizar uma função em um determinado domínio. Nesse caso, um intervalo inicial é definido para o domínio da função em questão e, através de um algoritmo, a função é avaliada, de forma que, a cada etapa o intervalo inicial se reduz aproximando-se cada vez mais daquele em que o valor máximo ou mínimo desejado se encontra. A Seção Áurea manifesta-se no processo a cada etapa, visto que o intervalo é sempre particionado pelos pontos que o dividem na Seção Áurea.

Para finalizar o Capítulo 3, retomaremos os polígonos, mas agora discutiremos a possibilidade de dispô-los em uma superfície de maneira que ela seja revestida completamente, sem lacunas ou falhas por eles e que, nessa pavimentação, não ocorra periodicidade, ou seja, não sejam gerados padrões que se repetem, nem seja exibida simetria.

Para solucionar o problema da existência ou não desse tipo de ladrilhagem, após anos de estudos, em 1974, Roger Penrose encontrou um conjunto de polígonos que satisfazem as condições do problema e, além disso, apresentam a Razão Áurea em sua composição, uma vez que são Triângulos Áureos ou figuras formadas pela união de Triângulos Áureos. Na Seção 3.4, exibimos os ladrilhos de Penrose e sua conexão com a Razão Áurea.

Diante de tudo o que foi apresentado neste trabalho e com o intuito de diversificar o ensino de Matemática no Ensino Médio, exibiremos, no Capítulo 4, duas sequências didáticas idealizadas com o objetivo de proporcionar uma abordagem investigativa em sala de aula. Acreditamos que o educador precisa estar sempre buscando novos recursos que motivem e promovam o verdadeiro aprendizado através de questionamentos, confronto de ideias e contraponto entre teoria e prática.

Como trabalhamos com realidades escolares distintas, apoiamos a adaptação das atividades a fim de que as necessidades e peculiaridades das Unidades Escolares sejam respeitadas. As sequências didáticas necessitam da participação ativa dos alunos e, para isso, será essencial que o professor tenha domínio do conteúdo e de ferramentas computacionais, para que atue como um mediador e que seja capaz de desafiar e aproximar o aluno da busca pelo conhecimento.

Finalmente, apresentamos no capítulo 5, algumas considerações sobre a maneira como o assunto foi abordado neste trabalho, a intenção inicial e de que forma os conteúdos aqui tratados foram escolhidos e sendo inseridos, sempre com a preocupação de abordar o tema de forma que a aplicação na sala de aula pudesse ocorrer de forma sistemática e contextualizada. Apesar de, as sequências didáticas, não terem sido validadas esperamos poder fazê-lo, a fim de que sua eficácia seja comprovada e as alterações necessárias efetivadas.

Capítulo 2

Razão Áurea

2.1 Contexto histórico

Diversas mudanças econômicas e políticas ocorridas por volta de 2000 a.C. proporcionaram o declínio do poder egípcio e babilônico e a ascensão de outros povos como hebreus, assírios, fenícios e gregos. A invenção do alfabeto, a introdução de moedas, a possibilidade de uso de ferramentas, o crescente incentivo ao comércio e as descobertas geográficas permitiram o aparecimento de uma nova civilização onde o homem surge como um ser racional e cheio de questionamentos.

Na matemática não foi diferente e a aritmética e a geometria pouco intelectualizadas, onde a simples argumentação através de exemplos era suficiente, como era feito no oriente antigo, deu lugar ao método demonstrativo. Um dos precursores desse tipo de raciocínio foi Tales de Mileto, que viveu durante a primeira metade do sexto século a.C., teve influência da Matemática mesopotâmica e egípcia e é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas.

A primitiva matemática grega não dispõe de fontes primárias que permitam uma descrição mais consistente do seu desenvolvimento. Escritos de Platão, Aristóteles, Euclides e Proclus, nos permitem obter de forma indireta algum conhecimento sobre a matemática da época. Um dos poucos documentos conhecidos é o chamado *Sumário Eudemiano* de Proclus, que viveu no século V a.C., e é um breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides.

Um dos matemáticos ilustres citados no *Sumário Eudemiano* é Pitágoras, uma figura enigmática e obscura da qual pouco se sabe com algum grau de certeza. Pitágoras nasceu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, mas se estabeleceu em Crotona, em um local chamado de Magna Grécia, hoje Itália, por volta de 572 a.C. Fundou a famosa escola pitagórica que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era uma irmandade de conduta rígida, unida por ritos secretos e cerimônias.

Não se sabe exatamente quais feitos matemáticos são atribuídos a Pitágoras, já que os seus ensinamentos eram orais e ele não escreveu nada, mas a sua escola e sua filosofia são conhecidas pela consagração e estudo das propriedades e teoria dos números, geometria, música, astronomia, gramática, lógica e retórica. Supõe-se que os pitagóricos tiveram um papel importante na matemática, pois deixaram de praticar a aritmética e geometria de forma prática e repleta de cálculos e algoritmos como era feito até então e passaram a examinar seus princípios de forma teórica e

investigá-las através de argumentações consistentes e demonstrações.

2.2 O pentágono e o pentagrama

Uma das figuras importantes para os pitagóricos era o pentágono regular, um polígono convexo de cinco lados e cinco ângulos internos de mesma medida, visto que o pentagrama formado pelas suas cinco diagonais era o símbolo de sua escola. Por sua vez, as diagonais do pentágono formam também um pentágono menor no centro, e as suas diagonais formam um outro pentagrama e um pentágono ainda menor (Figura 2.1). Continuando a traçar diagonais obtemos sempre um pentágono e um pentagrama cada vez menores e isso pode ocorrer sucessivamente, tantas vezes quantas se queira.

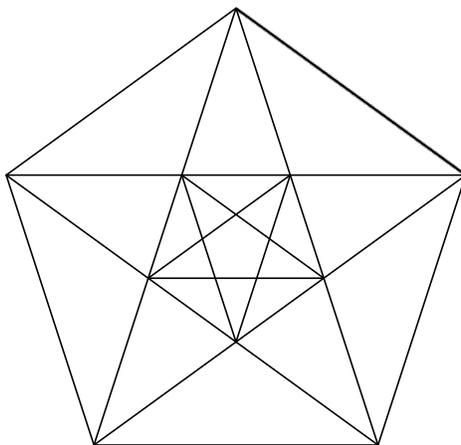


Figura 2.1: Diagonais do pentágono formando o pentagrama

Quando se trata do estudo da Razão Áurea, o pentágono regular é um símbolo de grande referência, pois muitos pesquisadores sugerem que os pitagóricos foram os primeiros a descobri-la através dele, utilizando o conhecimento geométrico que havia na época.

Acredita-se que eles perceberam que a razão entre a medida de um lado do pentágono e a medida de sua diagonal é um número que possui representação decimal infinita e não periódica, o que os teria levado a descobrir a incomensurabilidade entre dois segmentos, ou seja, que a diagonal e o lado do pentágono não possuem uma medida de segmento em comum. E também os levou a desvendar que cada ponto em que as diagonais são divididas determinam dois segmentos diferentes sobre ela e que a razão do comprimento da diagonal para o maior dos segmentos é igual à deste para o segmento menor.

Esta partição feita no segmento da diagonal recebeu, mais recentemente, o nome de Seção Áurea e, da mesma forma, a Razão Áurea foi assim nomeada no século XIX. No início do século XX, o número resultante dessa razão passou a ser representado pela letra Φ (fi maiúsculo), em

homenagem ao escultor grego Fideas que viveu entre 490 e 430 a.C., e também é conhecido como o Número de Ouro.

Podemos, da mesma forma como os matemáticos da Escola de Pitágoras, usando semelhança entre triângulos, encontrar a Razão Áurea no pentágono traçando suas diagonais (Figura 2.2) e analisando que, dado um pentágono regular $ABCDE$, cujas diagonais se interceptam nos pontos F, G, H, I e J , obtemos um outro pentágono regular $FGHIJ$.

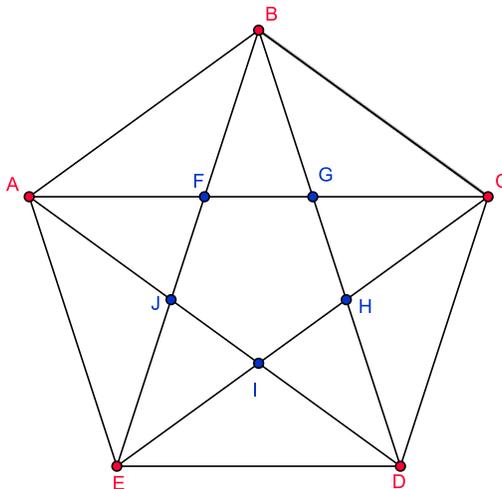


Figura 2.2: Pentágono ABCDE

Observamos que existem diversos triângulos na figura, entre eles, consideraremos o triângulo EBC , que é isósceles de base \overline{BC} , pois os seus lados \overline{EB} e \overline{EC} são as diagonais do pentágono regular e o triângulo EFA , que, como veremos na demonstração a seguir, também é isósceles de base \overline{FA} .

Considerando o pentágono regular $ABCDE$, queremos mostrar que o triângulo EFA , formado quando as diagonais do pentágono são traçadas, é isósceles. Para isso, utilizaremos o fato de que os ângulos internos do pentágono regular medem 108° e iniciaremos analisando os ângulos internos do triângulo EAD . Como ele é isósceles de base \overline{AD} e $\widehat{DEA}=108^\circ$, temos que $\widehat{EAD}=\widehat{ADE}=36^\circ$. Da mesma forma, o triângulo ABE é isósceles de base \overline{BE} , com $\widehat{EAB}=108^\circ$ e $\widehat{ABE}=\widehat{BEA}=36^\circ$. E, por meio do mesmo raciocínio, temos para o triângulo isósceles BCA , de base \overline{CA} , $\widehat{ABC}=108^\circ$ e $\widehat{BCA}=\widehat{CAB}=36^\circ$. Logo, como $\widehat{EAB}=\widehat{EAD}+\widehat{DAC}+\widehat{CAB}=108^\circ$, então, pelos ângulos determinados anteriormente, $\widehat{DAC}=36^\circ$.

Portanto, no triângulo EFA , temos $\widehat{EAF}=\widehat{EAD}+\widehat{DAC}=36^\circ+36^\circ=72^\circ$ e $\widehat{FEA}=\widehat{BEA}=36^\circ$. E, como as somas dos ângulos internos desse triângulo deve ser igual a 180° , concluímos que $\widehat{EFA}=72^\circ$ e o triângulo EFA também é isósceles de base \overline{FA} com os ângulos da base medindo 72° .

Assim, os dois triângulos EBC e EFA , que consideraremos no pentágono são isósceles e semelhantes com ângulos da base medindo 72° . A fim de uniformizar a nomenclatura sempre que mencionarmos um segmento \overline{AB} indicaremos seu comprimento por AB .

Da semelhança entre os triângulos EBC e EFA podemos escrever uma proporção entre os segmentos:

$$\frac{EC}{EA} = \frac{EB}{EF} = \frac{BC}{FA}.$$

Mas, como as diagonais do pentágono possuem a mesma medida, temos que:

$$EC = EB,$$

como o triângulo ABF é isósceles de base AB , podemos afirmar que:

$$FA = FB,$$

e como o pentágono é regular:

$$BC = AE = EF,$$

o que nos dá:

$$\frac{EB}{EA} = \frac{EB}{EF} = \frac{EF}{FB}. \quad (2.2.1)$$

Ou seja, o ponto F divide a diagonal EB do pentágono na Seção Áurea, determinando sobre ela dois segmentos tais que a razão entre a diagonal e o lado do pentágono é igual à razão entre a diagonal e o maior dos segmentos, que é igual à razão entre o maior e o menor segmento.

A Razão Áurea pode ser encontrada no pentágono da Figura 2.2 tomando outros triângulos semelhantes presentes no polígono. Entre eles vamos destacar o triângulo isósceles AFJ com ângulos da base de medida 72° e ângulo oposto à base de medida 36° . Ele é semelhante ao triângulo isósceles EFA , o que resulta na seguinte proporção:

$$\frac{EA}{AJ} = \frac{EF}{AF} = \frac{AF}{JF}.$$

Como o triângulo AFJ é isósceles então $AJ = AF$ e pelo fato do triângulo JEA ser isósceles temos que $AF = AJ = EJ$ e substituindo essas igualdades na proporção obtida teremos:

$$\frac{EA}{AF} = \frac{EF}{EJ} = \frac{EJ}{JF}.$$

Logo, no triângulo isósceles EFA temos que o ponto J intercepta o lado FE na Razão Áurea e a medida dos lados EA e AF também possuem razão igual à Áurea.

Da mesma maneira, como foi feito para o ponto J , podemos provar que os demais pontos formados da interseção das diagonais do pentágono dividem os segmentos aos quais pertencem na Seção Áurea.

A igualdade (2.2.1) equivale a uma equação quadrática, visto que, se chamarmos a medida do lado do pentágono de x e a sua diagonal de a , teremos: $EA = EF = x$, $EB = a$ e $FB = a - x$, e substituindo na proporção obtemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Multiplicando médios e extremos temos a equação $x^2 = a^2 - ax$.
O valor de x que satisfaz essa equação será:

$$x = a \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right).$$

Como $x > 0$ e $a > 0$, concluímos que:

$$x = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Logo, a razão entre a diagonal e o lado do pentágono será:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}.$$

Racionalizando:

$$\frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots$$

Apesar de já serem conhecidos métodos para se resolver esse tipo de equação, pois aproximadamente em 2000 a.C. os babilônios já o faziam, acredita-se que na época de Pitágoras a razão obtida do pentágono e do pentagrama tenha sido estudada apenas de forma geométrica e que os pitagóricos não tenham encontrado o valor $\Phi = 1,6180\dots$

2.3 Platão

Por volta de 427 a.C. nascia, em Atenas, Platão, uma das mentes mais influentes da Grécia antiga. Platão foi discípulo de Sócrates e estudou matemática com Teodore de Cirene, com quem provavelmente discutiu e provou a existência de segmentos incomensuráveis. Alguns autores sugerem que essa descoberta foi feita através da comparação entre o lado e a diagonal do quadrado e outros que foi através da razão entre o lado e a diagonal do pentágono, ou seja, através da Razão Áurea.

Em termos matemáticos suas contribuições não foram muito significativas, mas sua famosa Academia, uma instituição que objetivava a investigação científica e filosófica, possibilitou a criação de diversos trabalhos matemáticos relevantes do século IV a.C., por meio de seus discípulos e amigos, criando um elo entre a matemática pitagórica mais antiga e a posterior escola de Alexandria.

A construção dos cinco poliedros regulares (também conhecidos como poliedros de Platão), provavelmente por Teeteto, um matemático que também estudou com Teodore de Cirene, foi o que impulsionou os trabalhos de base para que a Razão Áurea fosse definida e compreendida

pela Academia de Platão. As associações feitas entre eles, principalmente envolvendo o icosaedro e o dodecaedro, muitas ainda desconhecidas na época, e a dificuldade de construí-los, antes da descoberta da Razão Áurea, não foi motivo para que Platão e seus seguidores deixassem de admirar a sua beleza.

2.4 Euclides e a Extrema e Média Razão

Por volta de 300 a.C. Euclides, conhecido como fundador da geometria dedutiva e formal, deu a primeira definição de Razão Áurea em sua obra intitulada *Elementos*, uma coleção composta de treze volumes sobre Geometria e Teoria dos Números, organizados sistematicamente, contendo resultados conferidos a Euclides e também a outros geômetras. Ela exibe de forma organizada a matemática que os gregos tinham criado e desenvolvido até o momento.

A definição de Razão Áurea aparece no livro VI é chamada de Razão Extrema e Média e é apresentada como uma proporção derivada da simples divisão de uma linha:

“Uma linha reta se diz dividida em extrema e média razão, quando toda a linha é para o segmento maior, como este segmento maior é para o segmento menor”.^[4]

Na Figura 2.3, podemos observar um segmento \overline{AB} dividido em Razão Extrema e Média pelo ponto C.



Figura 2.3: Segmento dividido em Razão Extrema e Média

E, da definição de Euclides obtemos a proporção:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

Uma propriedade interessante sobre essa seção é que ela se auto propaga, ou seja, se sobre o segmento maior AC , tomarmos um ponto D tal que $DC = CB$, então o segmento AC também ficará dividido na Seção Áurea pelo ponto D e esse processo pode se repetir indefinidamente.

Em *Elementos* podemos perceber que o interesse principal era a interpretação geométrica da Razão Áurea, no livro II, proposição 11 e no livro VI, proposição 30, Euclides utiliza a mesma figura para demonstrar a resolução geométrica da equação $x^2 = a^2 - ax$ e um processo para a sua construção, por meio de régua e compasso, respectivamente. Veremos, a seguir, o método

apresentado por ele para dividir um segmento de reta AB em razão extrema e média (Figura 2.4):

1º Passo: Constrói-se o quadrado $ABCD$ sobre \overline{AB} .

2º Passo: Determina-se o ponto médio M de \overline{AD} .

3º Passo: Traça-se \overline{MC} e prolonga-se \overline{AD} até E , de modo que $\overline{ME} = \overline{MC}$.

4º Passo: Completa-se o quadrado $DEFG$.

5º Passo: Prolonga-se o lado \overline{FG} determinando o ponto H sobre \overline{AB} , que divide o segmento em média e extrema razão.

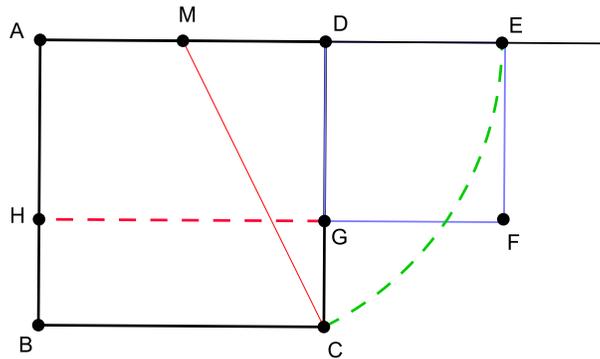


Figura 2.4: Divisão de segmento na Seção Áurea encontrada em *Elementos*

Usando os conhecimentos geométricos e a álgebra atual, a justificativa desta construção baseia-se na aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo MCD . Chamando a medida do segmento \overline{AB} de a e como $ABCD$ é um quadrado (passo 1), então $AD = a$ e $AM = \frac{a}{2}$, pois M é o ponto médio de AD (passo 2). Logo o triângulo MCD , retângulo em D , tem catetos \overline{CD} e \overline{MD} medindo a e $\frac{a}{2}$, respectivamente. Então, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$MC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Assim, $MC = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Como, por construção (passo 3), $MC = ME$, então $ME = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Como D está entre M e E , então $DE = ME - MD$.

Daí, $DE = MC - MD$.

Logo, $DE = \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Como, por construção (passo 4), $DEFG$ é um quadrado, então, $AH = DG = DE$.

Portanto, $AH = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

E, utilizando esse valor, temos que a razão entre o segmento AB e o segmento AH será:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AH} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})} \\ \frac{AB}{AH} &= \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \\ \frac{AB}{AH} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{AB}{AH} &= 1,6180\dots = \Phi \end{aligned}$$

Com o objetivo de ilustrar uma propriedade iterativa da Seção Áurea, iremos definir o que é um gnômon. Na Grécia antiga a palavra significava "aquele que sabe" e, em Geometria, é uma figura G que quando unida convenientemente à outra figura A resulta em uma figura semelhante à figura A (Figura 2.5).

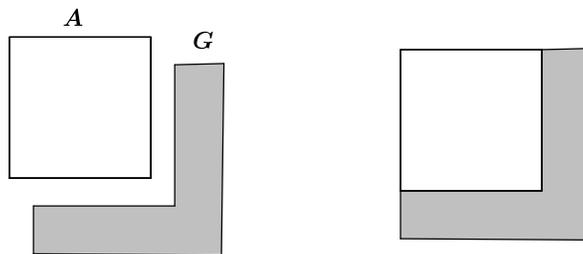


Figura 2.5: Gnômon G

Se na Figura 2.4, ao gnômon $CBAEFG$ é acrescentado o ponto J , de forma que o retângulo $ABJE$ seja formado (Figura 2.6). A razão entre os lados desse retângulo será igual ao número Φ , visto que:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AB} &= \frac{AD + DE}{AB} \\ \frac{AE}{AB} &= \frac{a + \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})}{a} \\ \frac{AE}{AB} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{AE}{AB} &= 1,6180\dots = \Phi \end{aligned}$$

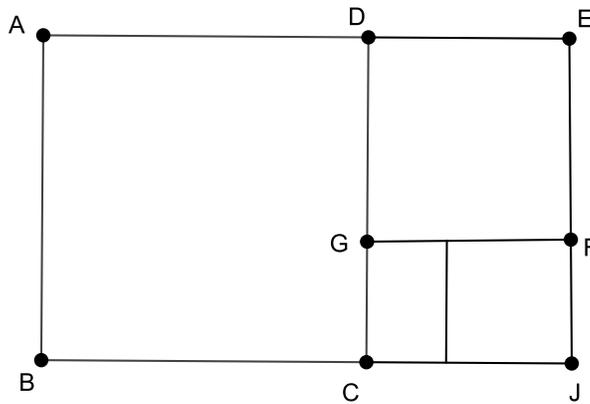


Figura 2.6: Retângulo Áureo

Tal retângulo é conhecido como Retângulo Áureo e se dele suprimirmos o quadrado $ABCD$, o retângulo restante $CJED$ será semelhante ao retângulo original, ou seja, a razão entre os lados do retângulo $CJED$ também será igual ao número Φ , e como $CJED$ também é um retângulo áureo pode-se suprimir dele um quadrado $DEFG$ e o retângulo restante $GCJF$ também será áureo. Essa operação de suprimir quadrados pode continuar indefinidamente sempre resultando em retângulos semelhantes cujos lados estão na Razão Áurea.

A construção do pentágono regular proposta por Euclides, que aparece no livro IV, é feita a partir de um triângulo isósceles cuja medida dos ângulos da base é igual ao dobro da medida do ângulo do vértice superior. Nela, o triângulo, que chamaremos de ACD , é inscrito em uma circunferência (Figura 2.7). São traçadas as bissetrizes dos ângulos da base ACD e ADC que interceptam a circunferência nos pontos E e B , respectivamente. A figura $ABCDE$ formada é o pentágono procurado.

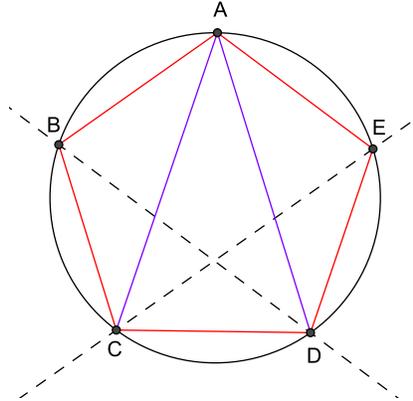


Figura 2.7: Construção do pentágono feita em *Elementos*

À primeira vista, não percebemos a presença da Razão Áurea nessa construção, mas ela aparece quando se toma a razão entre as medidas dos lados do triângulo isósceles utilizado, medidas essas que são também a diagonal e o lado do pentágono e que, como já vimos acima, determinam a Razão Áurea.

Como o triângulo isósceles possui as medidas dos ângulos ACD e ADC igual ao dobro de CAD , então temos que seus ângulos internos medem 72° , 72° e 36° (Figura 2.8). Traçando a bissetriz do ângulo ACD , marcamos o ponto E sobre o lado \overline{AD} . Os triângulos CDE e EAC formados também serão isósceles de bases \overline{DE} e \overline{AC} , respectivamente. Sendo que o triângulo CDE possui ângulos internos de mesma medida que o triângulo ACD .

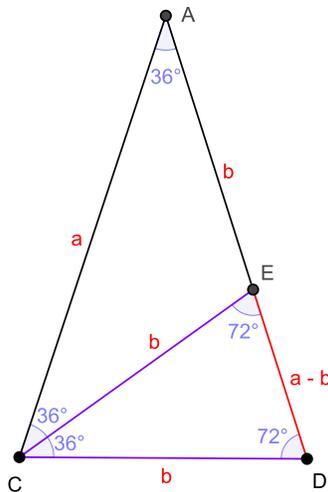


Figura 2.8: Triângulo Áureo

Como os triângulos ACD e CDE são semelhantes, pois possuem ângulos internos correspon-

dentos de mesma medida, então podemos determinar a proporção:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DE}.$$

Chamando as medidas dos lados $AC=a$, $CD=b$ e $DE=a - b$, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}.$$

Ou seja, verificamos que esse triângulo isósceles, utilizado na construção do pentágono, tem a razão entre seus lados igual à Razão Áurea e por esse motivo é denominado de Triângulo Áureo. Podemos também perceber que o ponto E determinou a Seção Áurea sobre o lado AD do triângulo.

Continuando o processo descrito acima de maneira infinita, ou seja, traçando a bissetriz de um dos ângulos da base do triângulo CDE, obtemos um novo triângulo áureo e, assim por diante, conforme Figura 2.9.

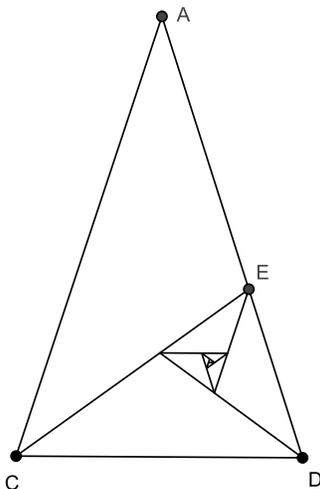


Figura 2.9: Infinitos Triângulos Áureos

Portanto, Euclides fazia uso da Razão Áurea para construir de forma simples o pentágono regular. Em Elementos, a razão surge em vários lugares, no livro XIII ela é usada especialmente para a construção do icosaedro e do dodecaedro.

Por volta do século II a.C., um texto conhecido como o livro XIV dos Elementos foi escrito, provavelmente, por Hipsicles de Alexandria, e trazia resultados geométricos produzidos por matemáticos gregos, entre eles um importante teorema sobre o dodecaedro e o icosaedro inscritos em esferas, que também envolviam a Razão Áurea. Com o passar dos anos o interesse pela Razão Áurea foi diminuindo juntamente com o declínio da matemática e da geometria no Ocidente. Um dos

últimos resultados foi desenvolvido por Pappus de Alexandria, no século IV d.C., que apresentou um método diferente para a construção do dodecaedro e do icosaedro, além da comparação entre os volumes de todos os sólidos platônicos, sempre usando a Razão Áurea.

2.5 A sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Leonardo Fibonacci, foi um matemático que nasceu em 1170, em Pisa, na região da Toscana, um centro comercial da Itália. Filho de um mercador e representante comercial, teve a oportunidade de viajar e conhecer diferentes culturas, bem como a matemática árabe que era mais desenvolvida do que a praticada na Europa Ocidental.

É conhecido como um dos matemáticos mais talentosos da Idade Média e pelo seu livro *Liber Abaci*, de 1202, no qual Fibonacci destaca a praticidade do sistema de numeração indo-arábico e do sistema posicional em relação aos demais sistemas de numeração, e apresenta diversos tipos de problemas práticos resolvidos por diferentes métodos nesse novo sistema. Em *Practica Geometriae*, de 1223, ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro, todos com forte ligação à Razão Áurea.

No entanto, foi um problema do *Liber Abaci* que trouxe fama a Fibonacci e, mesmo que a princípio nada tivesse a ver com a Razão Áurea, acabou por ser o seu problema mais conhecido e cuja resolução deu origem à sequência de Fibonacci. Seu enunciado é apresentado a seguir:

“Um homem pôs um casal de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse casal em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo casal, que é fértil a partir do segundo mês?” [7]

A solução do problema dá origem a uma sequência de números de pares de coelhos adultos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... É fácil perceber que essa é uma sequência recursiva, ou seja, cada termo da sequência, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois anteriores.

No século XIX, o matemático francês Edouard Lucas nomeou-a como Sequência de Fibonacci e, em 1611, Johannes Kepler, astrônomo, matemático e metafísico alemão, descobriu que a razão entre um termo da Sequência de Fibonacci e o seu termo antecessor converge para a Razão Áurea.

Na notação que usamos nos dias de hoje, se chamarmos de u_n ao n -ésimo termo da Sequência de Fibonacci, e de x_n a sequência definida pela razão: $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (n número natural), então podemos verificar que a razão $\{x_n\}$, à medida que aumentamos o valor de n , se aproxima do número Φ : $x_1 = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = \frac{2}{1} = 2$, $x_3 = \frac{3}{2} = 1,5$, $x_4 = \frac{5}{3} = 1,666\dots$, $x_5 = \frac{8}{5} = 1,6$, $x_6 = \frac{13}{8} = 1,625$, $x_7 = \frac{21}{13} = 1,615384\dots$, assim sucessivamente, com valores mais próximos da Razão Áurea (Figura 2.10).

Os matemáticos Abraham de Moivre (1667-1754) e Leonard Euler (1707-1783) descobriram uma fórmula que expressa qualquer termo da Sequência de Fibonacci em função da posição n na sequência. Contudo, nós a chamamos pelo nome de Jacques Phillippe Marie Binet, um outro matemático francês que a redescobriu em 1843. Essa fórmula utiliza a Razão Áurea como podemos ver a seguir, visto que, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $-(\Phi^{-1}) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

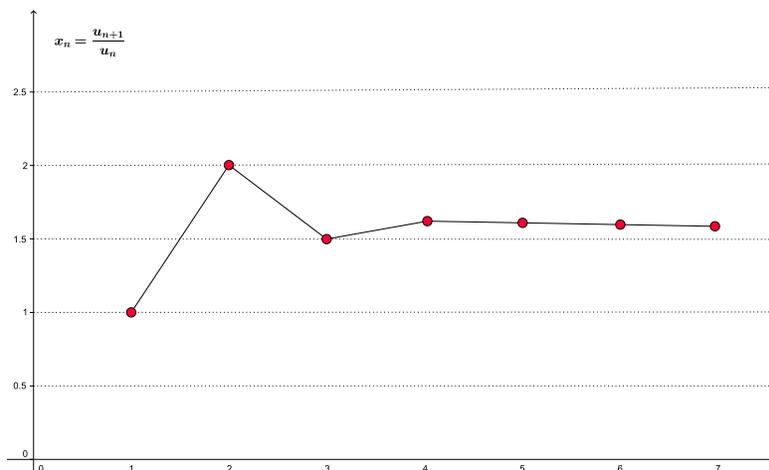


Figura 2.10: Razão se aproximando do número Φ

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

A Sequência de Fibonacci não está associada somente ao problema dos coelhos como acabamos de ver. Além da conexão feita com a Razão Áurea, muitas outras foram sendo observadas ao longo do tempo. Desde fenômenos da natureza, como no crescimento de plantas e no comportamento da luz, até aplicações no mercado financeiro.

2.6 Renascimento

As artes e o saber na Europa do século XV sofreram mudanças com o início do Renascimento e a Razão Áurea passou a ser estudada, não somente na matemática mas também nos meios artísticos. O matemático e artista italiano Piero della Francesca (1412-1492) apresenta em dois de seus trabalhos, *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (Livro curto sobre os cinco sólidos regulares) e *Tratado d'Abaco* (Tratado sobre o Ábaco), diversos problemas envolvendo o pentágono e os cinco sólidos platônicos, calculando o comprimento de seus lados e diagonais de uma forma diferente do que se havia feito até então usando a Razão Áurea.

Muitas das obras sobre sólidos de Piero foram traduzidas do latim para o italiano por Luca Pacioli (1445-1517) e incorporadas no seu famoso livro *Divina Proportione* (A Proporção Divina), um tratado de três volumes que foi publicado em 1509, e possibilitaram a circulação de forma impressa das ideias e construções matemáticas de Piero.

O primeiro volume, *Compendio de Divina Proportione* (Compêndio da Proporção Divina) contém um sumário detalhado da Razão Áurea e um estudo dos sólidos platônicos e outros poliedros. Uma das atrações desse primeiro livro se deve às sessenta ilustrações de sólidos feitas por Leonardo da Vinci.

Foi através desse trabalho de Pacioli que a Razão Áurea, até então conhecida como “Razão Extrema e Média” ou “Proporção que tem uma média e dois extremos”, passou a ser chamada também de A Proporção Divina e devido à crença no caráter místico do relacionamento dessa proporção com a criação do Universo, um grupo eclético de intelectuais cada vez maior se interessou em se aprofundar no assunto. Além disso, a Razão Áurea começou a se tornar acessível para artistas, pois os tratados teóricos presentes neste trabalho possuíam uma linguagem de maior entendimento para leigos e, assim eles realmente poderiam usá-la em suas obras.

O interesse pela arte e matemática também aparece no trabalho do pintor alemão Albrecht Dürer (1471-1528). Ele se dedicou ao estudo dos *Elementos* de Euclides, às obras de Pacioli e aos trabalhos dos arquitetos Marcos Vitruvius Polião e Leon Baptista Alberti sobre proporção e arquitetura. Contribuiu tanto com trabalhos escritos como através de sua arte para a história da Razão Áurea.

Sua maior publicação foi *Tratado sobre medida com compasso e régua*, de 1525, e nele Durër afirma que ninguém pode ser ou se tornar um artista completo sem conhecer geometria. No primeiro dos quatro livros de seu Tratado descreve a construção de diversas curvas, entre elas a Espiral Logarítmica que está relacionada com a Razão Áurea. A construção do pentágono é feita de duas maneiras no segundo livro e os sólidos platônicos e outros criados pelo próprio Durër aparecem no quarto livro. Nesse livro também se encontram algumas das representações mais antigas da planificação de um dodecaedro, que como sabemos possui faces pentagonais.

Johannes Kepler (1571-1630), que é conhecido como o astrônomo que desenvolveu um trabalho pioneiro no que se refere ao estudo das órbitas dos planetas, também apresentou interesse pela Razão Áurea. Durante o período em que trabalhou como professor de matemática na Universidade de Grätz, na Áustria, demonstrou um teorema sobre um triângulo retângulo cuja hipotenusa está dividida na Seção Áurea e que foi usado em uma das falsas teorias que explicavam a presença da Razão Áurea na grande pirâmide de Gizé. O resultado obtido por Kepler é o seguinte:

“Se numa linha dividida nas razões média e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto da seção, então o lado menor terá o mesmo valor do maior segmento da linha dividida”. [7]

Na Figura 2.11 podemos observar o triângulo de Kepler. O segmento \overline{AB} está dividido na Razão Áurea pelo ponto C. O triângulo ABD é construído sobre a hipotenusa \overline{AB} , de forma que o ângulo reto D esteja na perpendicular colocada no ponto C da Seção Áurea.

A demonstração feita por Kepler utiliza a semelhança entre os triângulos DCB e ADB, logo,

$$\frac{x}{a} = \frac{a - b}{x},$$

onde x é a medida do cateto DB.

Obtemos então a equação:

$$x^2 = a(a - b). \tag{2.6.1}$$

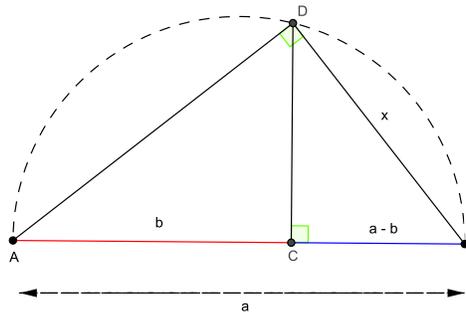


Figura 2.11: Triângulo de Kepler

Da Seção Áurea feita sobre o segmento AB podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \Phi.$$

O que nos dá:

$$a - b = \frac{b}{\Phi} \quad \text{e} \quad a = b \cdot \Phi.$$

E substituindo na equação 2.6.1 teremos:

$$\begin{aligned} x^2 &= (b \cdot \Phi) \left(\frac{b}{\Phi} \right), \\ x^2 &= b^2, \\ x &= b. \end{aligned}$$

Ou seja, Kepler provou que a medida do segmento \overline{BD} , o menor cateto, é igual à medida de \overline{AC} , o maior segmento obtido da divisão de \overline{AB} na Razão Áurea.

Kepler acreditava que a Razão Áurea foi um instrumento de Deus para a construção do Universo, e sobre ela escreveu o seguinte:

“Uma peculiaridade dessa proporção está no fato de que uma proporção semelhante pode ser construída com a parte maior e o todo; o que era antes a maior passa a ser a menor, o que era antes o todo passa a ser a parte maior, e a soma desses dois tem agora a razão do todo. Isto continua indefinidamente; a proporção divina permanece. Acredito que essa proporção geométrica serviu de ideia para o Criador quando Ele introduziu a criação da semelhança usando a semelhança, que também continua indefinidamente”. [7]

Como já vimos anteriormente foi Kepler, em 1608, quem descobriu a relação entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci e acredita-se que ele o fez sem ter conhecimento do livro *Liber Abaci*. Em 1619, publicou *Harmonice Mundi* (A Harmonia do Mundo), um livro dedicado à geometria, em que desenvolve um trabalho com mosaicos formados por figuras geométricas ligadas à Razão Áurea, como pentágonos, pentagramas e decágonos.

O Renascimento proporcionou uma importante mudança no que se refere ao uso do conceito da Razão Áurea, pois ela passou a ser utilizada em obras artísticas e para explicar fenômenos da natureza, deixando de ser um conceito restrito à matemática.

2.7 A Razão Áurea nas artes

Muitos são os estudos feitos sobre a Razão Áurea e sua associação com grandes obras artísticas, projetos arquitetônicos e composições musicais como a Mona Lisa, o Partenon e as sonatas de Mozart. Porém, a maioria dessas afirmações não podem ser confirmadas e se baseiam em textos de entusiastas pela Razão Áurea que enxergam a sua presença em grandes obras com evidência apenas nas suas dimensões, no caso de pinturas e projetos arquitetônicos, e na quantidade de compassos, em peças musicais, e não no fato de que os artistas realmente conheciam e faziam uso dessa razão.

Mas o século XIX proporcionou uma grande produção acadêmica sobre a Razão Áurea que também alcançou artistas que fizeram uso consciente da proporção em suas obras nos séculos seguintes.

Entre eles podemos citar Paul Sérusier (1864-1927), um pintor francês, que se interessou pela Razão Áurea quando visitou um mosteiro beneditino na Alemanha e conheceu um padre chamado Didier Lenz que o introduziu no que ele denominava “Medidas Sagradas”, uma teoria que afirmava que as grandes obras de arte da Antiguidade foram baseadas em entidades geométricas simples como o círculo, o triângulo equilátero e o hexágono, além da Razão Áurea. Sérusier foi um dos primeiros artistas a utilizá-la em algumas de suas obras, na maior parte para verificar e controlar as proporções presentes em seus trabalhos.

Os artistas cubistas Juan Gris (1887-1927) e Jacques Lipchitz (1891-1973) trabalharam em conjunto na construção da escultura *Harlequin with Clarinet* (Figura 2.12), na qual usaram o triângulo de Kepler para obter as proporções desejadas.

Sobre seu interesse na Razão Áurea, Lipchitz escreveu:

“Naquele momento, eu estava muito interessado em teorias de proporções matemáticas, como os outros cubistas, e tentei aplicá-las às minhas esculturas. Todos nós tínhamos uma grande curiosidade pela ideia de uma regra áurea ou Seção Áurea, um sistema que se acreditava que condicionava a arte e a arquitetura da antiga Grécia” [7].

Outro nome ligado à Razão Áurea no século XX é o de Charles Edouard Jeanneret-Gris (1887-1965), arquiteto, urbanista e pintor francês, mais conhecido pelo nome Le Corbusier e considerado uma das figuras mais importantes da arquitetura moderna.

Le Corbusier foi para Atenas estudar o Partenon e outros edifícios da Grécia Antiga e se impressionou com o uso da Razão Áurea pelos gregos clássicos. Propôs uma teoria de proporções



Figura 2.12: *Harlequin with Clarinet*

e forneceu descrições de como foram aplicadas em seus projetos. Essa teoria de medição recebeu o nome de Modulor e, segundo Le Corbusier satisfaria tanto ao padrão de beleza, pois era derivada da Seção Áurea, como também poderia ser aplicada à arquitetura e mecânica.

O Modulor era baseado nas proporções humanas. Nele um homem, medindo aproximadamente 1,83 metros, aparece com o seu braço erguido até a altura de 2,26 metros (Figura 2.13). Sua construção foi feita baseada na Seção Áurea, por isso diversas razões entre medidas resultam no número Φ . A aplicação dessas proporções pode ser vista em diferentes edifícios de Le Corbusier.

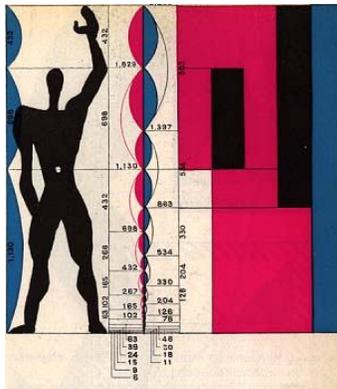


Figura 2.13: *Modulor*

Esses são alguns entre os diversos artistas que fizeram uso da Razão Áurea em seus trabalhos nos séculos XIX e XX. Existem muitos outros que têm suas obras frequentemente associadas a

ela, tanto em artes visuais, com na arquitetura e na música. Porém, devido a muitos equívocos, encontramos uma quantidade de afirmações incorretas e superficiais sobre tantos outros que nem sequer demonstraram interesse em empregar essa proporção em suas obras. O pintor holandês Piet Mondrian (1872-1944), o pontilhista francês Georges Seurat (1859-1891) e o compositor Claude Debussy (1862-1918) são exemplos de artistas que figuram entre esses. Suas obras são citadas como modelos de aplicação da Razão Áurea em muitos textos de pesquisa mas sem nenhuma comprovação.

A Razão Áurea chamou a atenção de matemáticos, filósofos, historiadores, cientistas e artistas, devido às suas propriedades e associações com o divino e tudo o que é esteticamente agradável e harmonioso, desde a época de Pitágoras, passando por Euclides até Kepler, motivou a pesquisa e a criação de uma vasta bibliografia a seu respeito e chega a nos surpreender até os dias de hoje.

Capítulo 3

Aplicações gerais

Iremos abordar nesse capítulo algumas propriedades da Razão Áurea, mais especificamente do número resultante dessa razão, que, como vimos no capítulo anterior, é representado pela letra grega Φ , e conhecido também por Número de Ouro. Veremos também de que forma podemos encontrar o número Φ no triângulo retângulo e, algumas de suas contribuições, em um método numérico para encontrar mínimos de funções de uma variável real e na construção dos ladrilhos de Penrose.

3.1 Propriedades algébricas do número Φ

Da definição dada por Euclides, encontrada na seção 2.4, em que tomamos um segmento \overline{AB} e marcamos o ponto C, que determina sobre ele a Seção Áurea, obtemos a proporção $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Tomando $AC = x$ e $CB = 1$, podemos encontrar a equação algébrica que define o número Φ :

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

As soluções para essa equação são:

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180\dots$$

A solução positiva é o número de ouro Φ e o valor absoluto da outra solução será representada pela letra φ (fi minúscula).

Veremos que o número Φ possui algumas propriedades interessantes:

- Tomando o quadrado de Φ temos: $\Phi^2 = 2,6180\dots$, e o seu inverso $\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} = 0,6180\dots$, ou seja, verificamos facilmente que $\Phi^2 = \Phi + 1$, $\Phi^{-1} = \varphi$ e $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$.

- O produto das raízes da equação é igual a -1, pois pela igualdade obtida no item anterior, $\frac{1}{\Phi} = \varphi$, temos que:

$$x' \cdot x'' = \Phi \cdot (-\varphi) = \Phi \cdot \left(-\frac{1}{\Phi}\right) = -1.$$

- A soma das raízes da equação é igual a 1:

$$x' + x'' = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1,$$

ou seja, $\Phi + (-\varphi) = 1$.

- Somar duas potências inteiras positivas consecutivas de Φ resulta na próxima potência inteira positiva de Φ . Como sabemos que $\Phi^2 = \Phi + 1$, temos:

$$\begin{aligned}\Phi + \Phi^2 &= \Phi \cdot (1 + \Phi) = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi^3, \\ \Phi^2 + \Phi^3 &= \Phi^2 \cdot (1 + \Phi) = \Phi^2 \cdot \Phi^2 = \Phi^4, \\ \Phi^3 + \Phi^4 &= \Phi^3 \cdot (1 + \Phi) = \Phi^3 \cdot \Phi^2 = \Phi^5, \dots \\ \Phi^n + \Phi^{n+1} &= \Phi^n \cdot (1 + \Phi) = \Phi^n \cdot \Phi^2 = \Phi^{n+2}.\end{aligned}$$

Ou seja, $\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^{n+2}$.

- Em uma progressão geométrica de razão igual a Φ , cujo primeiro termo é igual a 1, cada termo a partir do segundo é igual à soma dos dois precedentes. Essa afirmação é verificada através da igualdade obtida no item anterior.
- Somar duas potências inteiras negativas consecutivas de Φ , resulta na potência inteira negativa imediatamente anterior à maior entre as duas potências de Φ que foram somadas. Como sabemos que $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned}\Phi^{-2} + \Phi^{-1} &= \Phi^{-1} \cdot (1 + \Phi^{-1}) = \Phi^{-1} \cdot \Phi = \Phi^0, \\ \Phi^{-3} + \Phi^{-2} &= \Phi^{-2} \cdot (1 + \Phi^{-1}) = \Phi^{-2} \cdot \Phi = \Phi^{-1}, \\ \Phi^{-4} + \Phi^{-3} &= \Phi^{-3} \cdot (1 + \Phi^{-1}) = \Phi^{-3} \cdot \Phi = \Phi^{-2}, \dots \\ \Phi^n + \Phi^{n+1} &= \Phi^{n+1} \cdot (1 + \Phi^{-1}) = \Phi^{n+1} \cdot \Phi = \Phi^{n+2},\end{aligned}$$

ou seja, $\Phi^{n-1} + \Phi^n = \Phi^{n+1}$, com $n < 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Somar todas as potências inteiras negativas de Φ produz o próprio número Φ .

Antes de verificarmos essa igualdade vamos chamar $\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots = x$. De forma que:

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + \Phi^{-2} (\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots) \\
 &\Rightarrow x = 1 + \Phi^{-2} \cdot x \\
 &\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{\Phi^2} \cdot x \\
 &\Rightarrow \frac{x}{x-1} = \Phi^2 = \Phi + 1 \\
 &\Rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 = \Phi \\
 &\Rightarrow \frac{x - x + 1}{x-1} = \Phi \\
 &\Rightarrow \frac{1}{x-1} = \Phi \\
 &\Rightarrow x = \frac{1 + \Phi}{\Phi} = \frac{\Phi^2}{\Phi} \\
 &\Rightarrow x = \Phi.
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Logo, somando todas as potências inteiras negativas de Φ , agrupando-as de modo a aplicar a propriedade do item anterior, encontramos:

$$\begin{aligned}
 &(\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) + (\Phi^{-3} + \Phi^{-4}) + (\Phi^{-5} + \Phi^{-6}) + \dots = \\
 &= \Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots + \Phi^{-2n} + \dots = \\
 &= 1 + \Phi^{-2} (\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots),
 \end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

E, utilizando a igualdade (3.1.1) acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 &(\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) + (\Phi^{-3} + \Phi^{-4}) + (\Phi^{-5} + \Phi^{-6}) + \dots = \\
 &= 1 + \Phi^{-2} \cdot x = \\
 &= 1 + \Phi^{-2} \cdot \Phi = \\
 &= 1 + \Phi^{-1} = \\
 &= \Phi.
 \end{aligned}$$

- O número Φ pode ser representado como a seguinte expressão:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Esse resultado pode ser provado chamando $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = x$. Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade obtemos:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

E, substituindo o valor de x , encontramos:

$$x^2 = 1 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0,$$

que é a equação que define o número Φ .

- O número Φ pode ser escrito como uma fração contínua:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Para verificar essa igualdade utilizamos uma igualdade já apresentada anteriormente: $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Substituindo Φ por $1 + \frac{1}{\Phi}$, no denominador da fração acima, tem-se:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}$$

Fazendo novamente a substituição obtemos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}$$

e, após sucessivas repetições, encontramos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

que é uma fração contínua na qual todos os termos são iguais a 1.

3.2 O triângulo retângulo e o número Φ

Existem algumas associações entre o número Φ e os triângulos retângulos que serão apresentadas nessa seção. Primeiramente, iremos considerar um triângulo retângulo cujas medidas dos lados estão em progressão geométrica, ou seja, é possível formar uma sequência numérica com essas medidas tal que, a partir do segundo termo da sequência, a razão entre um termo e o seu antecessor, é igual a uma constante chamada de razão.

Para isso, consideremos o triângulo retângulo da Figura 3.1, cujos lados estão em progressão geométrica de razão igual a r , ($r > 0$) e primeiro termo igual a a , $a \neq 0$.

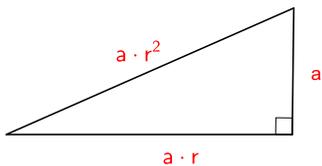


Figura 3.1: Triângulo Retângulo com as medidas dos lados em PG

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}(a \cdot r^2)^2 &= (a \cdot r)^2 + (a)^2 \\ \Rightarrow a^2 \cdot r^4 &= a^2 \cdot r^2 + a^2.\end{aligned}$$

Dividindo por a^2 , já que $a \neq 0$, encontramos:

$$r^4 = r^2 + 1.$$

Se substituirmos r^2 por R , obtemos a equação do segundo grau:

$$R^2 = R + 1 \Leftrightarrow R^2 - R - 1 = 0,$$

que, como já vimos, nos fornece as raízes:

$$R' = \Phi \quad \text{e} \quad R'' = -\varphi.$$

Como $R = r^2$, não podemos considerar a raiz negativa, então:

$$R = r^2 = \Phi$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\Phi}.$$

Portanto, a razão da progressão geométrica é igual a $\sqrt{\Phi}$ e as medidas dos lados do triângulo retângulo são a , $a \cdot \sqrt{\Phi}$ e $a \cdot \Phi$.

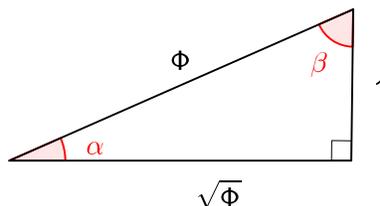


Figura 3.2: Triângulo Retângulo com hipotenusa medindo Φ

Assim, se tomarmos $a = 1$, teremos um triângulo retângulo com catetos medindo 1 e $\sqrt{\Phi}$ e hipotenusa de medida igual ao Número de Ouro (Figura 3.2). Agora, se chamarmos o ângulo oposto ao cateto de medida 1, de ângulo α , e o ângulo oposto ao cateto de medida $\sqrt{\Phi}$ de β , estaremos associando o número Φ às razões trigonométricas como segue:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\Phi}} = \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi} \quad \text{e} \quad \tan \beta = \sqrt{\Phi},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi} \quad \text{e} \quad \cos \beta = \frac{1}{\Phi},$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{\Phi} \quad \text{e} \quad \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi}.$$

Daí, podemos afirmar que:

$$\tan \alpha = \cos \alpha \quad \text{e}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{\text{sen } \beta} \Leftrightarrow \tan \beta = \text{csc } \beta.$$

Logo, um triângulo retângulo como o definido acima, com catetos e hipotenusa de medidas 1, $\sqrt{\Phi}$ e Φ , respectivamente, possui um valor para o ângulo α , aquele oposto ao cateto de medida 1, em que $\tan \alpha = \cos \alpha$ e $\text{sen } \alpha = \frac{1}{\Phi} = \varphi$.

Esse mesmo resultado é encontrado ao analisarmos os gráficos, no plano cartesiano, das três funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Figura 3.3), encontrando os seguintes pontos de interseção entre os gráficos considerados:

- A origem do plano, onde $\tan x = \text{sen } x$.
- O ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, onde $\text{sen } x = \cos x$.
- E um outro ponto em que $\tan x = \cos x$.

Vamos determinar as coordenadas desse último ponto. Uma vez que, $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, então, substituindo na igualdade $\tan x = \text{cos } x$, obtemos:

$$\text{sen } x = (\text{cos } x)^2 = 1 - (\text{sen } x)^2.$$

Ou seja,

$$(\text{sen } x)^2 + (\text{sen } x) = 1.$$

E, resolvendo essa equação do segundo grau, em função de $\text{sen } x$, nós encontramos:

$$\text{sen } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \text{sen } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

O segundo valor é negativo e não satisfaz a condição de que $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, então, o ponto em que $\tan x = \text{cos } x$, é aquele em que $\text{sen } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,6180\dots = \varphi = \frac{1}{\Phi}$.

Portanto, o ponto de interseção do gráfico das funções trigonométricas, cosseno e tangente, no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, resulta em um valor para x , tal que $\text{sen } x = \frac{1}{\Phi}$.

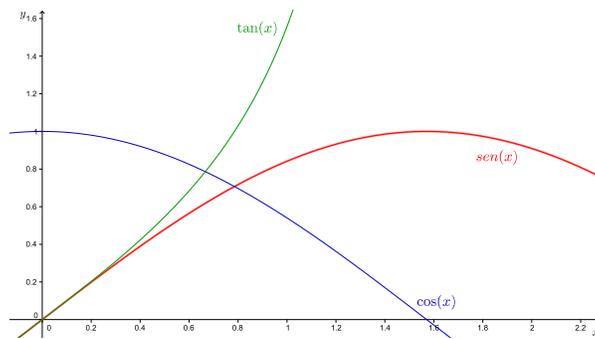


Figura 3.3: Gráficos das funções seno, cosseno e tangente

3.3 O método da Seção Áurea

O estudo de problemas em que se busca determinar os valores extremos de um função, isto é, o maior ou menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo, através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras é, em matemática, denominado otimização.

A otimização é frequentemente utilizada em diversos campos como economia, informática, medicina, logística, processos sísmicos, entre outros, e tem como objetivo minimizar ou maximizar determinada variável. Conforme o tipo de problema de otimização obtemos uma função com determinadas restrições de igualdade e/ou desigualdade e para os quais existem métodos específicos que atendem às suas especificidades. Podemos encontrar alguns desses métodos em [9], bem como diferentes tipos de exercícios e suas soluções.

Nesta seção, estudaremos um método para encontrar pontos extremos de funções de uma variável real em um intervalo $[a, b]$, conhecido como método da Seção Áurea e que será abordado como foi feito em [1] e [9]. Para isso, vamos caracterizar para qual tipo de função o método da Seção Áurea está definido.

Definição 3.3.1 (Função Unimodal). Dizemos que uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é unimodal, quando ela possui um único ponto de mínimo (máximo) \bar{x} em $[a, b]$, e é estritamente decrescente (crescente) em $[a, \bar{x}]$ e estritamente crescente (decrescente) em $[\bar{x}, b]$.

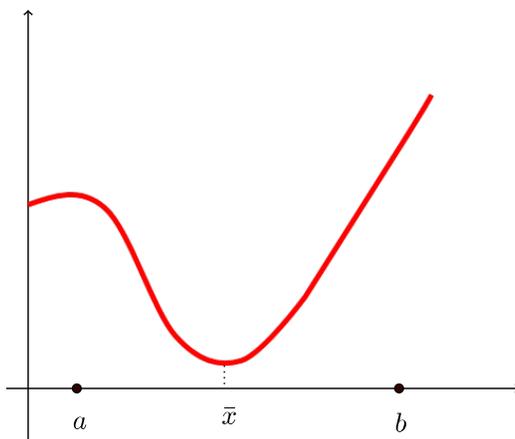


Figura 3.4: Exemplo de função unimodal

Logo, se f é unimodal em $[a, b]$, então ela terá somente um mínimo ou máximo local \bar{x} nesse intervalo, e esse valor resolverá o problema de otimização. Nesse método o intervalo inicial é reduzido sucessivas vezes, de forma que \bar{x} esteja sempre contido nesses intervalos menores. A escolha desses novos intervalos ocorre de forma que o intervalo da etapa anterior seja dividido na Seção Áurea.

Mas porque a divisão do intervalo na Seção Áurea é mais eficiente do que, por exemplo, a simples triseção? Podemos encontrar em [9] uma resposta a esse questionamento. Consideremos $[a, b]$ o intervalo que contenha um único ponto mínimo e tomemos m e n nesse intervalo, $m < n$, de forma que $[a, b]$ seja particionado em três partes iguais, o que nos dá:

$$m = a + \frac{1}{3} \cdot (b - a) \quad \text{e} \quad n = a + \frac{2}{3} \cdot (b - a).$$

O método que veremos propõe que façamos uma avaliação da função definida pelo problema em cada um desses pontos de forma que seus valores sejam comparados e, a partir deles, o intervalo seja reduzido.

Vamos supor que $f(m) < f(n)$, então podemos descartar o intervalo $[n, b]$, visto que sabemos que o mínimo não se encontra em seu interior, e obter um novo intervalo de estudo, que também será particionado em três partes iguais e que chamaremos de $[\bar{a}, \bar{b}]$. A nova triseção será feita agora através dos pontos \bar{m} e \bar{n} e, novamente será necessário avaliar a função nesses dois pontos

para encontrar o intervalo que será descartado. Ou seja, precisamos fazer duas novas avaliações da função a cada etapa, pois o ponto m ou n que restou no interior do intervalo $[a, b]$ não pode ser mais utilizado. (Figura 3.5)

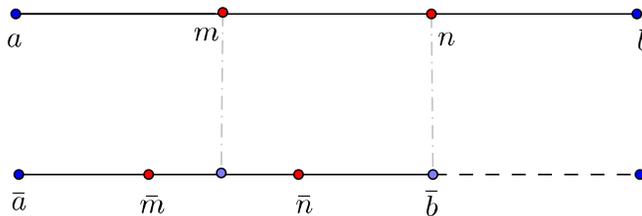


Figura 3.5: Partição de $[a, b]$ em três partes iguais

Porém, veremos que existe uma maneira de escolher os pontos que dividem o intervalo de maneira que a cada etapa seja necessária a avaliação da função em apenas um ponto.

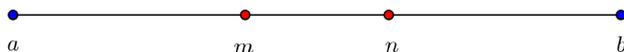


Figura 3.6: Intervalo dividido na Seção Áurea

Consideremos o intervalo $[a, b]$ e vamos particioná-lo de maneira que sejam tomados dois pontos em seu interior, m e n ($m < n$), que o divide na Razão Áurea. Observando a Figura 3.6, e da definição para a divisão de um segmento em Extrema e Média Razão dada por Euclides, temos que m e n devem satisfazer:

$$\frac{b-a}{n-a} = \frac{n-a}{b-n} \quad \text{e} \quad \frac{b-a}{b-m} = \frac{b-m}{m-a}.$$

Daí segue que:

$$(b-a) \cdot (b-n) = (n-a)^2 \quad \text{e} \quad (b-a) \cdot (m-a) = (b-m)^2.$$

Da primeira igualdade obtemos:

$$n^2 + (b-3a)n + (a^2 - b^2 + ab) = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática em função de n , encontramos:

$$n = \frac{(3a-b) \pm \sqrt{5(b-a)^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow n = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot (b-a) \quad \text{ou} \quad n = a + \frac{(-\sqrt{5}-1)}{2} \cdot (b-a).$$

Como $n = a + \frac{(-\sqrt{5}-1)}{2} \cdot (b-a)$ não convém, pois, neste caso, tem-se $n < a$, então:

$$n = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot (b-a).$$

E tomando, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi \approx 0,618$, ficamos com:

$$n = a + \varphi \cdot (b-a) \approx a + 0,618 \cdot (b-a).$$

Procedendo da mesma forma com a segunda igualdade, encontramos:

$$m = b + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot (b-a) \quad \text{ou} \quad m = b - \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \cdot (b-a).$$

O resultado $m = b + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot (b-a)$ nos dá que $m > b$, logo será descartado e, como, $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} = \varphi \approx 0,618$, podemos escrever:

$$m = b - \varphi \cdot (b-a) \approx b - 0,618(b-a).$$

Os números m e n encontrados acima são denominados menor e maior ponto da Seção Áurea, respectivamente. Eles serão usados para particionar o intervalo $[a, b]$ e de acordo com o algoritmo definido a seguir, a cada iteração a função necessitará ser avaliada em apenas um ponto.

3.3.1 O algoritmo da Seção Áurea

Sejam a função unimodal $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e m e n pontos em $[a, b]$ tais que:

$$m = b - \varphi \cdot (b-a) \quad \text{e} \quad n = a + \varphi \cdot (b-a).$$

Para caracterizar um algoritmo, vamos tomar $k = 1$ e definir: $a_k = a$, $b_k = b$, $m_k = m$ e $n_k = n$.

1. Calcular $f(m_k)$ e $f(n_k)$ e, assim, um dos dois casos deve ocorrer:

(a) Se $f(m_k) < f(n_k)$, então definimos $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = n_k$, $m_{k+1} = b_{k+1} - \varphi \cdot (b_{k+1} - a_{k+1})$ e $n_{k+1} = m_k$ (Figura 3.7).

(b) Se $f(m_k) \geq f(n_k)$, então definimos $a_{k+1} = m_k$, $b_{k+1} = b_k$, $m_{k+1} = n_k$ e $n_{k+1} = a_{k+1} + \varphi \cdot (b_{k+1} - a_{k+1})$ (Figura 3.8).

2. Tomar $k = k + 1$ e retornar ao passo 1.

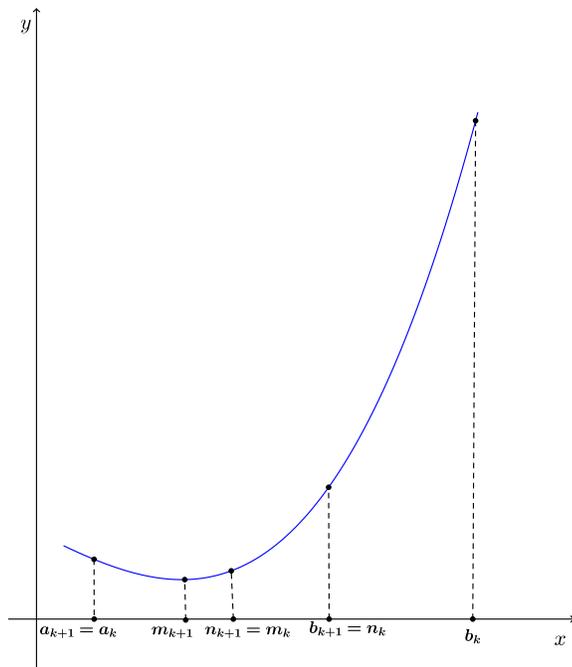


Figura 3.7: Iteração para o caso em que $f(m_k) < f(n_k)$

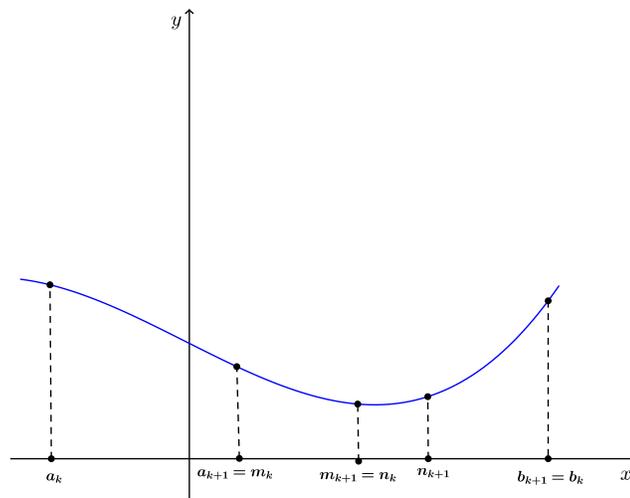


Figura 3.8: Iteração para o caso em que $f(m_k) > f(n_k)$

Cada vez que $f(x)$ é avaliada nos dois pontos do item 1 e o intervalo, que chamaremos de intervalo de incerteza, é reduzido, diremos que uma iteração do método da Seção Áurea foi completada. Uma das vantagens da divisão áurea sobre o intervalo é que a cada iteração a função deve ser avaliada em apenas um dos dois novos pontos.

Podemos verificar que para encontrar m_1 , visto que $m_1 = b - \varphi \cdot (b - a)$, movemos uma fração igual a φ do intervalo a partir do extremo direito e na direção do extremo esquerdo. E por, $n_1 = a + \varphi \cdot (b - a)$, ao encontrarmos n_1 , movemos uma fração igual a φ do intervalo a partir do extremo esquerdo e na direção do extremo direito (Figura 3.9). Após a avaliação de $f(x)$, descartamos o intervalo que não contém o ponto extremo da função.

Assim, se chamarmos de L_k ao tamanho do intervalo de incerteza após k iterações do algoritmo ter sido completadas, temos que:

$$L_k = \varphi \cdot L_{k-1},$$

o que nos leva a:

$$L_k = \varphi^k \cdot (b - a).$$

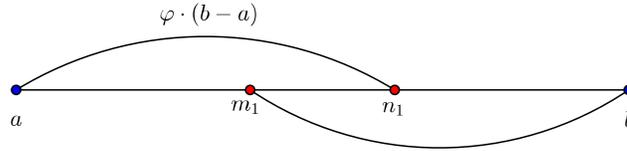


Figura 3.9: Localização de m_1 e n_1 no intervalo $[a, b]$

Portanto, se quisermos que um intervalo de incerteza final tenha um tamanho menor que um ϵ especificado, $\epsilon > 0$, será necessário executar k iterações do método da Seção Áurea de modo que:

$$\varphi^k \cdot (b - a) < \epsilon.$$

Observação: Na aplicação do algoritmo da Seção Áurea, sempre descartamos o intervalo que não contém o mínimo valor da função unimodal $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definido naquela iteração k . Logo, ao final da aplicação do algoritmo somos capazes de determinar o mínimo da função em $[a, b]$. Mas, se a função possuir um máximo nesse intervalo, e desejarmos encontrá-lo, basta tomar a função $(-f)$ e executar o algoritmo.

Exemplo 3.3.1. Seja $f(x) = x^2 + 2x$. Vamos encontrar o mínimo de $f(x)$ em $[-3, 5]$ usando o método da Seção Áurea, de forma que o erro (o intervalo de incerteza final) seja menor que 0,2.

Primeiramente, vamos determinar o número de iterações k necessárias para que o intervalo de incerteza seja menor que $\epsilon = 0,2$. Para isso, temos, pelo enunciado, $a = -3$, $b = 5$ e

$$\varphi^k \cdot (b - a) < \epsilon = 0,2.$$

Substituindo os valores de a e b :

$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^k \cdot (5 + 3) < 0,2.$$

Daí, segue que:

$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^k < 0,025 \Rightarrow k \cdot \log\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) < \log(0,025) \Rightarrow k > \frac{\log(0,025)}{\log(0,618)} \Rightarrow k > 7,665.$$

Logo, precisamos de $k = 8$ iterações, no mínimo, para obter um erro menor que 0,2.

Dessa forma, temos que: $a_1 = -3$, $b_1 = 5$, $m_1 = 5 - \varphi \cdot (5 + 3) = 0,056$ e $n_1 = -3 + \varphi \cdot (5 + 3) = 1,944$. E, com isso, encontramos:

$$f(m_1) = 0,115 \quad \text{e} \quad f(n_1) = 7,667.$$

Como $f(m_1) < f(n_1)$, então obtemos um novo intervalo de incerteza, onde $a_2 = -3$, $b_2 = 1,944$, $m_2 = 1,944 - \varphi \cdot (1,944 + 3) = -1,111$ e $n_2 = 0,056$.

iteração(k)	a_k	b_k	m_k	n_k	$f(m_k)$	$f(n_k)$	$b_k - a_k$
1	-3	5	0,056	1,944	0,115	7,667	8
2	-3	1,944	-1,111	0,056	-0,988	0,115	4,944
3	-3	0,056	-1,832	-1,111	-0,308	-0,988	3,056
4	-1,832	0,056	-1,111	-0,665	-0,988	-0,888	1,888
5	-1,832	-0,665	-1,386	-1,111	-0,851	-0,988	1,167
6	-1,386	-0,665	-1,111	-0,940	-0,988	-0,996	0,721
7	-1,111	-0,665	-0,940	-0,835	-0,996	-0,973	0,446
8	-1,111	-0,835	-1,006	-0,940	-0,999	-0,996	0,276
9	-1,111	-0,940					0,171

Tabela 3.1: Tabela com as k iterações.

O processo se repete e está sintetizado na Tabela 3.1.

Depois de oito iterações envolvendo nove avaliações da função, o intervalo de incerteza é $[-1, 111; -0, 940]$, e o mínimo pode ser estimado como o ponto médio desse intervalo $-1,026$. Note que o mínimo verdadeiro é igual a $-1,0$.

Esse método será retomado no próximo capítulo, onde apresentaremos um plano de aula com atividades para a resolução de situações problema, que envolvem máximos e mínimos, para o aluno do Ensino Médio, de forma que a abordagem numérica permita que o método da Seção Áurea possa ser empregado.

3.4 Os ladrilhos de Penrose

Nessa seção iremos tratar de uma manifestação geométrica da Razão Áurea e do número Φ , associando-os a polígonos, de forma que seja possível cobrir o plano inteiro com essas figuras sem que haja lacunas ou sobreposições, como ladrilhos ou azulejos que revestem paredes e pavimentos. Para isso, vamos definir o conceito de simetria como a característica que algumas formas geométricas possuem de serem invariantes ao sofrerem rotações, translações e reflexões.

Quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares são polígonos, que quando usados com o objetivo de cobrir todo o plano, conseguem manter um padrão recorrente em intervalos regulares, ou seja, trechos das figuras formadas por eles periodicamente se repetem e exibem simetria, ao que chamaremos de ladrilhagem periódica, como vemos, em alguns exemplos apresentados na Figura 3.10.

Os ladrilhos que são formados apenas por quadrados simples possuem uma simetria quádrupla, visto que, quando rotacionados em um quarto de círculo continuam iguais. Os ladrilhos que são compostos somente por triângulos equiláteros, quando rodados em um terço de círculo continuam os mesmos, logo possuem simetria tripla e os hexagonais, pelo mesmo motivo, possuem simetria sêxtupla.

Figuras compostas por apenas um tipo de polígono regular recebem o nome de malha regular. Mas, ladrilhagens periódicas também podem ser geradas por combinações de diferentes polígonos

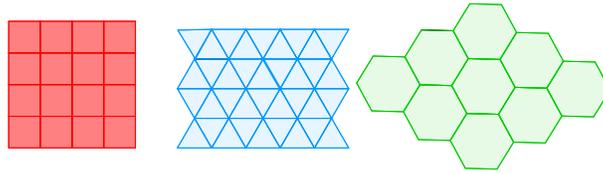


Figura 3.10: Ladrilhagem periódica

regulares e por formas mais complicadas.

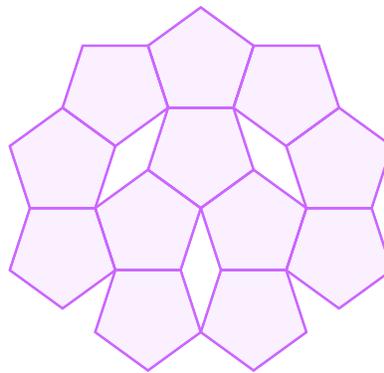


Figura 3.11: Pentágonos justapostos

Podemos perceber também que o perfeito encaixe dos polígonos de três, quatro e seis lados iguais, se deve ao fato de que seus ângulos internos (que medem 60° , 90° e 120° , respectivamente) são divisores exatos de 360° .

O pentágono regular possui simetria quádrupla, mas não é possível preencher totalmente o plano com ele, de forma a se obter um padrão de ladrilhagem periódica (Figura 3.11), visto que a medida de seus ângulos internos é igual a 108° , que não é um múltiplo inteiro de 360° .

Ao analisar a Figura 3.11, subdividindo-a em diversos polígonos elementares, podemos encontrar alguns com características comuns, relacionadas à Razão Áurea. Como, por exemplo, ao observar os espaços deixados entre os pentágonos, são formados dois Triângulos Áureos justapostos pelas bases (Figura 3.12), e que, por possuírem ângulos internos medindo 72° , 72° e 36° , serão chamados de Triângulos Áureos acutângulos. Nessa figura vemos, em vermelho, oito triângulos desse tipo.

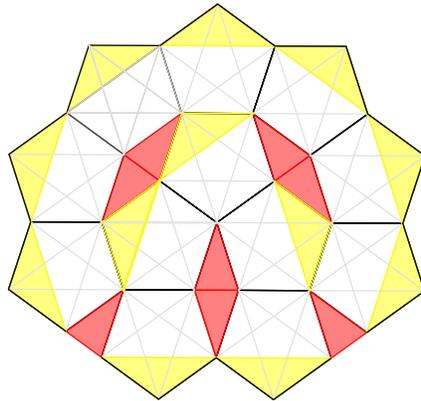


Figura 3.12: Triângulos Áureos acutângulos e obtusângulos

E se traçarmos, na mesma figura, as diagonais dos pentágonos, formamos pentagramas que, por sua vez, nos permitem visualizar um outro tipo de Triângulo Áureo no interior desses polígonos. Por possuírem a razão entre as medidas dos lados igual à Razão Áurea, e ângulos medindo $36^\circ, 36^\circ$ e 108° , serão chamados de Triângulos Áureos obtusângulos. Observe que, em cada pentágono podemos formar cinco triângulos desse tipo, mas na figura estão salientados, em amarelo, apenas um em cada pentágono.

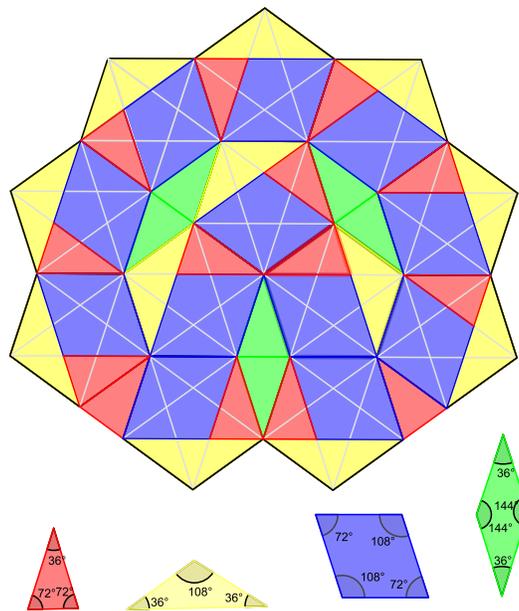


Figura 3.13: Decomposição dos Pentágonos em polígonos elementares

Na verdade, existem diversas possibilidades para subdividir a figura em polígonos distintos, mas,

no nosso caso, a que iremos estudar são aquelas como a que visualizamos na Figura 3.13. Ela foi subdividida de forma que se encontrem apenas quatro polígonos elementares: os Triângulos Áureos acutângulo e obtusângulo (em vermelho e amarelo, respectivamente) e dois losangos, (em azul e verde) formados da união pelas bases de dois Triângulos Áureos iguais. Esses quatro polígonos possuem apenas quatro ângulos internos: 36° , 72° , 108° e 144° .

Se observamos a Figura 3.13 podemos notar que pequenas partes dela são simétricas, mas não o seu todo, e que ela não deixa espaços vazios entre os polígonos que a compõem. E, se ainda, notarmos o seu contorno veremos que podemos acrescentar a ele mais polígonos como os elementares descritos acima, de forma que uma extensão qualquer do plano seja recoberta sem deixar lacunas, ou seja, é possível usar uma combinação destes polígonos elementares derivados de triângulos áureos para revestir uma superfície sem que seja exibida simetria.

Durante muito tempo, acreditou-se que nenhum padrão de ladrilharia poderia revestir inteiramente uma superfície de tal forma que o desenho resultante não fosse periódico e não exibisse qualquer tipo de simetria. Mas, em 1974, Roger Penrose, professor de matemática da Universidade de Oxford, Inglaterra, descobriu que tal problema possuía solução, e, para isso utilizou apenas seis polígonos e, além disso, mostrou uma forma de fazê-lo combinando apenas dois deles. Essas figuras foram denominadas de "ladrilhos de Penrose", e permitem revestir inteiramente uma superfície, sem lacunas, gerando um padrão que revela, após um exame mais minucioso, não apresentar qualquer tipo de simetria ou periodicidade.

Esses ladrilhos são justamente combinações dos Triângulos Áureos e Penrose usou uma nomenclatura própria para designar cada um deles (Figura 3.14). O Triângulo Áureo obtusângulo recebeu o nome de "Flat" (achatado), o Triângulo Áureo acutângulo, o nome de "Sharp" (pontudo), a combinação de dois "Achatados", recebeu a designação de "Dart" (dardo) e a de dois "Pontudos", o nome de "Kite" (pipa). Os outros dois são os losangos que utilizamos na Figura 3.13 e que são chamados de rombos, um obtuso e outro agudo.

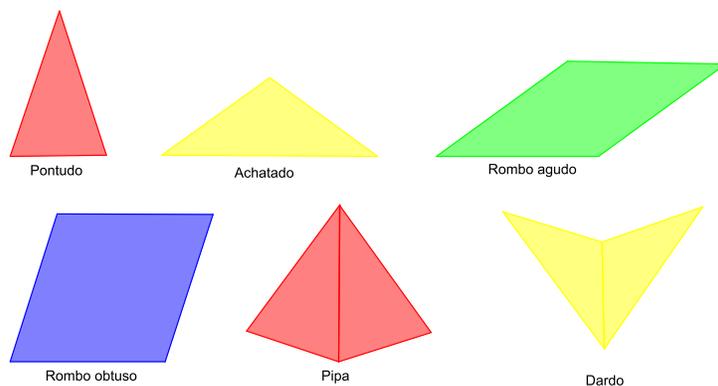


Figura 3.14: Ladrilhos de Penrose

Com esses ladrilhos pode-se formar uma variedade muito grande de desenhos, inclusive, aqueles que utilizam apenas dois tipos de ladrilhos em sua composição, como as formadas apenas por dardos e pipas (Figura 3.15) e aquelas formadas somente por rombos agudos e obtusos (Figura

3.16). Ambas podem ser ampliadas indefinidamente sem jamais se repetir nem apresentar qualquer tipo de simetria.

Penrose e o matemático John Horton Conway de Princeton mostraram que dardos e pipas podem preencher o plano de infinitas maneiras não-periódicas, ficando cada padrão que pode ser distinguido cercado por outro padrão distinto.

Ladrilhos formados somente por dardos e pipas, como os da figura 3.15, possuem uma propriedade muito interessante: o número de pipas é cerca de 1,618 vezes o número de dardos, isto é, a razão entre o número de pipas e o número de dardos se aproxima de Φ à medida que a área do padrão considerado aumenta. O mesmo ocorre para os ladrilhos da figura 3.16, formados somente por rombos agudos e obtusos, em áreas grandes, há 1,618 vezes mais rombos obtusos do que agudos.

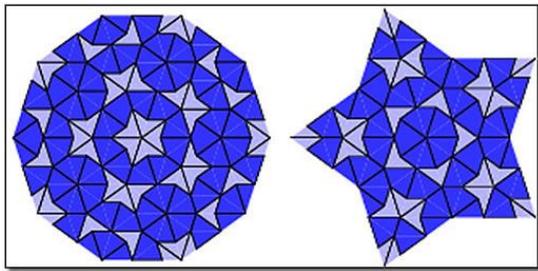


Figura 3.15: Ladrilho com Dardos e Pipas

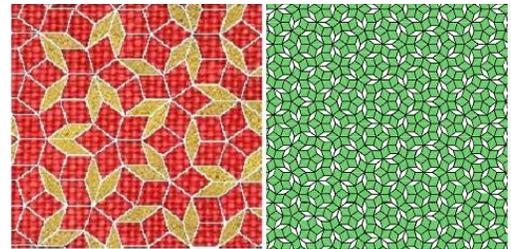


Figura 3.16: Ladrilho com Rombos agudos e obtusos

No pentágono regular e na série de pentágonos regulares e pentagramas formados em seu interior também enxergamos esses ladrilhos. A pipa está representada em DCBA, o dardo em EABC e, os rombos agudo e obtuso, em ABCF e AECD, respectivamente (Figura 3.17).

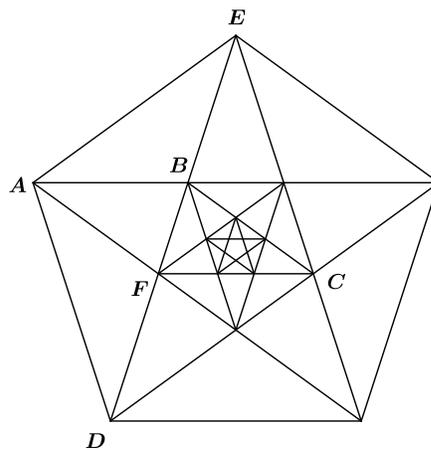


Figura 3.17: Os ladrilhos de Penrose no pentágono e pentagrama

Essa descoberta de Penrose, a princípio, teve um caráter recreativo, mas em 1984, o engenheiro de materiais israelense Dany Schectman e seus colaboradores, mostraram sua aplicação na cristalografia, ciência que estuda a disposição de átomos em sólidos. Durante décadas acreditou-se que átomos só podiam surgir em duas formas nos sólidos, ou eram cristais extremamente ordenados e periódicos, ou eram completamente amorfos. Eles provaram que ligas de alumínio e manganês não exibem a estrutura regular de um cristal, mas têm seus átomos dispostos de maneira semelhante à pavimentação de Penrose. Esses novos tipos de cristais receberam o nome de quasi-cristais e o fato de ser possível pavimentar o espaço de maneira não periódica, abriu grandes expectativas para o estudo destes materiais.

No próximo capítulo, será apresentada uma situação de aprendizagem para alunos do Ensino Médio em que esse assunto será abordado.

Capítulo 4

Aplicações na sala de aula

Nos dias de hoje, o conhecimento é usado de forma intensiva e está diretamente associado à qualidade da educação, do convívio e das competências presentes na vida escolar, e determinam de que forma um indivíduo atuará no seu grupo social e tomará parte nos processos críticos e de renovação. Dessa forma, tornam-se decisivas todas as aprendizagens escolares construídas nas instituições para que haja, por parte dos alunos, uma verdadeira inserção produtiva e solidária na sociedade.

Portanto, conforme lemos em [11], busca-se uma aproximação entre os conteúdos escolares e a instrumentação crítica para o mundo do trabalho, valorizando-se as contextualizações e o universo da cultura. Nesse cenário, a Matemática, em parceria com a língua materna, torna-se um recurso imprescindível para uma expressão e compreensão abrangente, uma argumentação correta e para uma exploração afirmativa de situações-problema.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática[3]:

"As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado."

O desafio dos professores é, então, propor um aprendizado mais significativo, para que seja garantida a construção do pensamento lógico-matemático, através de situações nas quais desenvolvam conceitos, ferramentas e raciocínio dedutivo. Uma metodologia que pode auxiliar é a sequência didática, no sentido de que os conteúdos são apresentados através de atividades ligadas entre si, planejadas etapa por etapa e organizadas de acordo com os objetivos que o professor deseja alcançar.

Nesse capítulo, iremos propor duas sequências didáticas, uma em que o método da Seção Áurea é apresentado como uma alternativa para a resolução de problemas de otimização, e outra sobre ladrilhagem no plano, com ênfase nos ladrilhos de Penrose. Destacamos que as atividades foram produzidas com o objetivo de realizar investigações durante o processo, ou seja, os conceitos envolvidos não foram fornecidos de forma direta e pronta, mas de maneira que os alunos formulem questões e conjecturas, realizem provas, apresentem seus resultados e discutam e argumentem com

os colegas e professor. Assim, o envolvimento na realização de investigações matemáticas torna-se um grande reforço no processo de construção do conhecimento.

Um fator importante que impulsionou a concepção destas propostas se baseou em minha experiência própria. Há algum tempo tenho visto que o ensino da matemática quando realizado da forma tradicional, com ênfase em conteúdos e treino de técnicas de cálculo, não apresenta os resultados esperados. São poucos os alunos que conseguem desenvolver as habilidades previstas dessa forma e o desinteresse pela disciplina acaba se tornando um grande desafio para os docentes no processo de ensino e aprendizagem. Buscando formas de tornar as aulas mais atraentes acabei optando por utilizar ferramentas computacionais que se tornaram aliadas na tentativa de cativar meus alunos. Uma delas, o Geogebra, um *software* gratuito de matemática dinâmica, possui recursos diversos que podem ser explorados em diferentes situações na sala de aula e, por isso, é muito empregada nesta proposta de trabalho.

Cada uma das sequências didáticas foi esquematizada levando-se em consideração que uma aula possui em média 50 minutos e as atividades propostas possam ser desenvolvidas nesse período.

4.1 Sequência didática sobre o método da Seção Áurea

Problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem a obtenção do valor máximo ou do valor mínimo de uma função, em determinado contexto, são, usualmente, estudados no Ensino Médio, e são sistematizados de forma a desenvolver as seguintes competências e habilidades básicas:

- Aplicar a matemática de maneira significativa em situações-problema;
- Identificar questões relevantes, reconhecer variáveis, parâmetros e relações envolvidas, criar suposições e hipóteses que auxiliem a busca do modelo;
- Formular matematicamente soluções, representar dados adequadamente, justificar e discutir o modelo encontrado e validar a solução.

Portanto, iremos apresentar uma sequência didática que permita ao aluno desenvolver tais competências e habilidades, mas cuja resolução seja feita por meio de um método numérico e não pelo estudo dos zeros da função quadrática ou vértices da parábola que a representa, como normalmente é proposto no Ensino Médio, ou ainda através do Cálculo Diferencial, que normalmente não faz parte do currículo estudado pelo nosso público alvo.

A abordagem de um método numérico no Ensino Médio justifica-se pelo fato de que muitas vezes os alunos apresentam dificuldades em achar pontos extremos de funções de grau maior ou igual a três, mas que, em muitos casos, podem ser encontrados facilmente pela aplicação de um algoritmo com um número finito de operações e que envolvem cálculos aritméticos elementares. Assim, além de valorizar os métodos numéricos, mostramos aos alunos outras ferramentas usadas para a obtenção de soluções de problemas matemáticos.

Conteúdos:

- Problemas envolvendo máximos e mínimos;

- Método da Seção Áurea.

Objetivos:

- Aplicar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas de diferentes contextos;
- Compreender que existem diferentes procedimentos e métodos para a resolução de problemas;
- Resolver problemas de máximos e mínimos por meio do método da Seção Áurea.

Público Alvo: terceira série do Ensino Médio.

Tempo Estimado: aproximadamente 5 aulas.

Material Necessário: Calculadora ou computador com planilha eletrônica.

Desenvolvimento:**1º Momento:**

Propomos, nesse momento, que seja trabalhada uma situação-problema como modelo, de fácil entendimento e que possa ser analisada e discutida pela sala. A situação que sugerimos já apresenta, em seu enunciado, a função matemática, mas outros tipos de problemas diferenciados, em que será necessária a determinação da função, deverão também ser abordados.

De acordo com o Currículo Oficial do Estado de São Paulo[11], na terceira série do Ensino Médio, no segundo bimestre, o aluno será introduzido ao estudo da equação do terceiro grau, onde será feita a passagem das equações de segundo grau, para as de grau superior. Dessa forma, optamos por explanar o problema escolhido após esse momento, para que tal função presente na situação problema não seja uma novidade para o aluno.

Problema da velocidade média:

Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre as 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$, onde $v(t)$ é calculado em km/h e t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais lento?

Neste momento, deverá ser feita a leitura do problema e a sua interpretação coletiva, para que seja possível realizar uma sondagem, com o propósito de verificar os conhecimentos dos alunos sobre as ideias presentes no problema e retomar conceitos sobre a equação do terceiro grau e outros que forem pertinentes.

A fim de que ocorra uma exploração mais pontual da situação, orientamos que os alunos sejam distribuídos em grupos para a análise do problema e verificação dos possíveis resultados

e recomendamos que seja solicitado aos grupos que registrem suas observações. Para que haja um direcionamento uniformizado na investigação do problema pelos grupos, achamos oportuno que o professor determine uma comanda de ações a serem cumpridas, como, por exemplo, alguns questionamentos:

- A equação presente no enunciado se refere a qual grandeza? De que forma ela pode nos ajudar na determinação do instante em que o trânsito é mais lento?
- Qual o intervalo que devemos considerar ao realizar estimativas para o instante desejado?
- Faça, no mínimo, quatro suposições e verifique os resultados na equação da velocidade. Se necessário use a calculadora.

Por fim, um representante de cada grupo deverá socializar as conclusões obtidas, apresentando as tentativas realizadas. Seria relevante também construir um plano cartesiano com as coordenadas determinadas pelo tempo e velocidade. Cada grupo anotaria no plano os valores encontrados. Espera-se que a turma avalie a melhor forma de se chegar ao instante procurado, compreenda que cada estimativa apresentada pode possuir uma distorção (erro) em relação à solução e, que quanto menor esse erro, mais próximo estaremos da resposta do problema.

2º Momento:

Podemos agora esclarecer que existem métodos numéricos utilizados na resolução desse tipo de problema e que conduzem a soluções aproximadas ou exatas da situação. E que iremos estudar um desses, conhecido como método da Seção Áurea.

Seria oportuno nesse momento que o professor separasse uma aula para contextualizar historicamente e definir a Seção Áurea, explicar o método, que o número de etapas necessárias em cada situação depende do erro estipulado e que a cada etapa precisamos avaliar e determinar um novo intervalo de incerteza.

O próximo procedimento será o de determinar com que grau de precisão queremos obter a nossa resposta. Juntamente com os alunos, podemos definir o erro \bar{e} , $\bar{e} > 0$, e a partir dele obter o número de etapas k . Vamos supor que, para esse problema, desejamos encontrar o momento em que o trânsito será mais lento com um grau de precisão menor que 15 minutos, ou seja, $\bar{e} = \frac{1}{4}$ hora = 0,25 hora.

Além disso, devemos também definir o intervalo em que a função será avaliada e, pelo enunciado, concluímos que nosso objetivo é determinar o mínimo da função entre as 13 e 18 horas, ou seja, $t \in [1, 6]$. Dessa forma, encontramos o número k de etapas necessárias:

$$\varphi^k \cdot (b - a) < \bar{e} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^k \cdot (6 - 1) < 0,25 \Rightarrow k > 6,2.$$

Portanto, serão necessárias $k = 7$ etapas para obter a aproximação desejada.

Nessa fase, a utilização de uma planilha eletrônica pode ser de grande valia para que os alunos compreendam o processo. Para isso, sugerimos que o professor que tenha acesso a um laboratório de informática utilize uma planilha eletrônica para produzir uma tabela em que sejam visualizados

os valores obtidos em cada etapa do método da Seção Áurea, ficando a seu critério se essa planilha será executada por todos os alunos, individualmente ou em grupos por computador, conforme a disponibilidade, ou se o próprio professor já oferecerá a planilha pronta, permitindo que eles insiram os valores do intervalo de estudo da função. Nesse caso, alguns dados do problema podem ser alterados como, por exemplo, os instantes mínimo e máximo considerados para a análise do trânsito e o valor do erro, que resultarão em mais ou menos etapas e saídas diferentes para os demais valores da tabela.

Para a produção da planilha referente ao problema da velocidade média, utilizamos o *software* Excel do Office. Sugerimos que o professor oriente seus alunos em cada um dos passos abaixo, explicando a utilização das fórmulas nas células.

1. Na linha 1 em cada uma das colunas A, B, C, D, E, F, G e H escrever, respectivamente, Etapa (k), a_k , b_k , m_k , n_k , $v(m_k)$, $v(n_k)$ e $(b_k - a_k)$.
2. Na célula A2 digitar o valor 1.
3. Na célula A3 digitar " $= A2 + 1$ " e arrastar a fórmula clicando no extremo inferior direito até a célula A9.
4. Escrever nas células B2 e C2 os valores 1 e 6, respectivamente (valores do intervalo inicial).
5. Na célula D2 escrever a fórmula " $=C2-0,618*(C2-B2)$ " (menor ponto da Seção Áurea).
6. Na célula E2 escrever a fórmula " $=B2+0,618*(C2-B2)$ " (maior ponto da Seção Áurea).
7. Na célula F2 escrever a fórmula " $=(D2^3)-(10,5*D2^2)+(30*D2)+20$ " (equação da função fornecida no problema).
8. Na célula G2 escrever a fórmula " $=(E2^3)-(10,5*E2^2)+(30*E2)+20$ " (equação da função fornecida no problema).
9. Na célula H2 escrever a fórmula " $= C2 - B2$ " (valor do erro).
10. Na célula B3 escrever a fórmula " $= SE(F2< G2;B2;D2)$ ".
11. Na célula C3 escrever a fórmula " $= SE(F2< G2;E2;C2)$ ".
12. Na célula D3 escrever a fórmula " $= SE(F2 <G2;C3 - (0,618)*(C3 - B3);E2)$ ".
13. Na célula E3 escrever a fórmula " $=SE(F2<G2;D2;B3+(0,618)*(C3-B3))$ ".

14. Arrastar cada uma das fórmulas das células B3, C3, D3, E3, F2, e G2 clicando no extremo inferior direito até a linha 9.

Se a utilização da planilha eletrônica não estiver à disposição do professor, podemos utilizar a calculadora como ferramenta na construção da tabela referente ao problema. Apresentamos a seguir os procedimentos e cálculos executados em cada uma das etapas do problema.

- Para $k = 1$, iniciamos com: $a_1 = 1$, $b_1 = 6$, $m_1 = 6 - \varphi \cdot (6 - 1) = 2,91$ e $n_1 = 1 + \varphi \cdot (6 - 1) = 4,09$, o que nos dá $v(m_1)=43,03$ e $v(n_1)=35,47$. Como $v(m_1) > v(n_1)$, obtemos um novo intervalo.
- Para $k = 2$, temos: $a_2 = 2,91$, $b_2 = 6$, $m_2 = 4,09$, $n_2 = 2,91 + \varphi \cdot (6 - 2,91) = 4,82$ e $v(m_2)=35,47$. Avaliando $v(t)$ em n_2 , ficamos com $v(n_2)=32,64$. Como $v(m_2) > v(n_2)$, o nosso novo intervalo está definido.
- Para $k = 3$, temos: $a_3 = 4,09$, $b_3 = 6$, $m_3 = 4,82$, $n_3 = 4,09 + \varphi \cdot (6 - 4,09) = 5,27$ e $v(m_3)=32,64$. Avaliando $v(t)$ em n_3 , ficamos com $v(n_3)=32,85$. Como $v(n_3) > v(m_3)$, o nosso novo intervalo está definido.
- Para $k = 4$, temos: $a_4 = 4,09$, $b_4 = 5,27$, $m_4 = 5,27 - \varphi \cdot (5,27 - 4,09) = 4,54$, $n_4 = 4,82$ e $v(n_4)=32,64$. Avaliando $v(t)$ em m_4 , ficamos com $v(m_4)=33,35$. Como $v(m_4) > v(n_4)$, o nosso novo intervalo está definido.
- Para $k = 5$, temos: $a_5 = 4,54$, $b_5 = 5,27$, $m_5 = 4,82$, $n_5 = 4,54 + \varphi \cdot (5,27 - 4,54) = 4,99$ e $v(m_5)=32,64$. Avaliando $v(t)$ em n_5 , ficamos com $v(n_5)=32,50$. Como $v(m_5) > v(n_5)$, o nosso novo intervalo está definido.
- Para $k = 6$, temos: $a_6 = 4,82$, $b_6 = 5,27$, $m_6 = 4,99$, $n_6 = 4,82 + \varphi \cdot (5,27 - 4,82) = 5,10$ e $v(m_6)=32,50$. Avaliando $v(t)$ em n_6 , ficamos com $v(n_6)=32,55$. Como $v(n_6) > v(m_6)$, o nosso novo intervalo está definido.
- Para $k = 7$, temos: $a_7 = 4,82$, $b_7 = 5,10$, $m_7 = 5,10 - \varphi \cdot (5,10 - 4,82) = 4,93$, $n_7 = 4,99$ e $v(n_7)=32,50$. Avaliando $v(t)$ em m_7 , ficamos com $v(m_7)=32,52$. Como $v(m_7) > v(n_7)$, o nosso intervalo final está definido.

Como o processo para concluir as etapas envolve muitos cálculos que demandam um tempo maior quando executados com a calculadora, propomos que o professor escolha, em cada etapa, os cálculos que serão realizados pelos alunos e aqueles que serão fornecidos por ele, de forma que a tabela com os valores possa ser construída na lousa em conjunto para a posterior análise e verificação sobre o questionamento do problema.

Seja qual for a opção do professor ao aplicar o método da Seção Áurea com sua turma devemos concluir que qualquer que seja o valor para t no intervalo cujos extremos são $a_8 = 4,93$ e $b_8 = 5,10$, o erro é menor que $0,25$, visto que $b_8 - a_8 = 0,17$. Logo, com relação ao questionamento do problema, podemos escolher $t = 5$ nesse intervalo, e concluir que o trânsito estará mais lento às 17 horas. Note que, nesse momento, a velocidade média no cruzamento será de $32,50$ km/h.

Na tabela abaixo, podemos contemplar todas as saídas em cada uma das etapas realizadas.

etapa(k)	a_k	b_k	m_k	n_k	$v(m_k)$	$v(n_k)$	$b_k - a_k$
1	1	6	2,91	4,09	43,03	35,47	5
2	2,91	6	4,09	4,82	35,47	32,64	3,09
3	4,09	6	4,82	5,27	32,64	32,85	1,91
4	4,09	5,27	4,54	4,82	33,35	32,64	1,18
5	4,54	5,27	4,82	4,99	32,64	32,50	0,73
6	4,82	5,27	4,99	5,10	32,50	32,54	0,45
7	4,82	5,10	4,93	4,99	32,52	32,50	0,28
8	4,93	5,10					0,17

Tabela 4.1: Tabela com as k etapas para determinar o valor mínimo.

Com o propósito de acentuar os conceitos podemos verificar os resultados encontrados até aqui, por meio de um software que gere gráficos, como foi feito na Figura 4.1 com o Geogebra. Nele observamos o gráfico de $v(t)$ e o ponto de mínimo de coordenadas (5 ; 32,50).

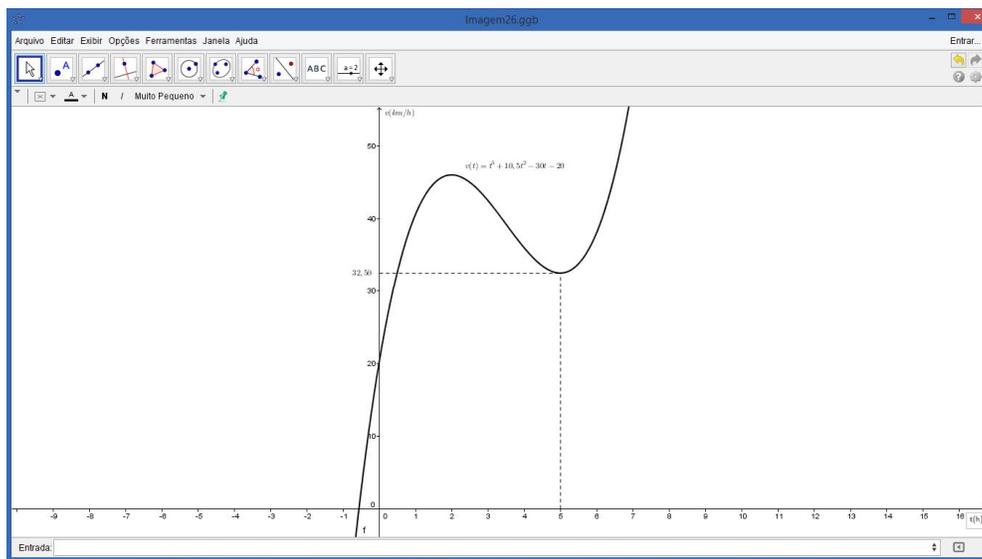


Figura 4.1: Gráfico de $v(t)$ no Geogebra

Seria interessante que, após a exploração do ponto de mínimo do problema, o seguinte questionamento fosse feito: Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? De que forma podemos encontrar esse valor usando o Método da Seção Áurea?

Lembramos que para encontrar esse valor máximo basta tomar a função $V(t) = -v(t)$ e conduzir os cálculos da mesma maneira. Portanto, basta aplicar o método da Seção Áurea à função $V(t) =$

$-t^3 + 10,5t^2 - 30t - 20$, considerando o mesmo erro $\bar{e}=0,25$ e $t \in [1, 6]$, alterar o sinal da função na planilha eletrônica nas células F2 e G2 e encontrar os valores conforme os da tabela 4.2.

etapa(k)	a_k	b_k	m_k	n_k	$v(m_k)$	$v(n_k)$	$b_k - a_k$
1	1	6	2,91	4,09	-43,03	-35,47	5
2	1	4,09	2,18	2,91	-45,86	-43,03	3,09
3	1	2,91	1,73	2,18	-45,65	-45,86	1,91
4	1,73	2,91	2,18	2,46	-45,86	-45,15	1,18
5	1,73	2,46	2,01	2,18	-46,00	-45,86	0,73
6	1,73	2,18	1,90	2,01	-45,96	-46,00	0,45
7	1,90	2,18	2,01	2,07	-46,00	-45,98	0,28
8	1,90	2,07					0,17

Tabela 4.2: Tabela com as k etapas para determinar o valor máximo.

Dessa forma, concluímos que a velocidade no cruzamento é máxima no intervalo $[1,90 ; 2,07]$. E tomando $t = 2$, para simplificar os cálculos, afirmamos que às 14 horas o trânsito no cruzamento apresenta sua maior velocidade, igual a 46 km/h.

3º Momento:

Sugerimos que novas situações problema sejam apresentadas aos alunos, inclusive aquelas em que haja necessidade de modelar o problema, ou seja, em que a função não seja exibida no enunciado. Seguem alguns problemas que podem ser explanados da mesma forma.

1. Problema da estação de rádio:

Uma estação de rádio fez um levantamento dos hábitos dos ouvintes entre 17h e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as 17h é dada por $f(x) = \frac{-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240}{8}$.

- Em que instante, entre 17h e meia-noite, existem mais ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?
- Em que instante, entre 17h e meia-noite, existem menos ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?

Observação 1: Para encontrar o instante de maior audiência, ou seja, o valor máximo da função, através do método da Seção Áurea, será necessário tomar a função $(-f)$. Para definir o intervalo inicial, basta considerar que a variável x se refere ao número de horas em que os ouvintes sintonizam a estação, entre as 17 horas e meia-noite, isto é, x pode assumir valores de zero até sete horas, então $x \in [0, 7]$.

Observação 2: Precisamos também definir o erro $\bar{\epsilon}$, $\bar{\epsilon} > 0$, para que encontremos o número k de etapas necessárias. Suponhamos que admitimos um erro igual a 30 minutos = 0,5 hora, dessa forma, encontraremos:

$$\varphi^k \cdot (7 - 0) < \bar{\epsilon} = 0,5 \Rightarrow k > 5,48 \Rightarrow k = 6.$$

Observação 3: Para a utilização da planilha eletrônica, basta, a partir daquela utilizada no problema da velocidade média, trocar a equação da função que foi definida nas células F2 e G2, pela nova equação desse problema e arrastar a fórmula clicando no extremo inferior direito até a linha que contemple as 6 etapas do processo.

Observação 4: Considerando esses valores definidos acima, seguem na Tabela 4.3, as entradas referentes aos valores encontrados para a função $(-f)$.

etapa(k)	a_k	b_k	m_k	n_k	$f(m_k)$	$f(n_k)$	$b_k - a_k$
1	0	7	2,67	4,33	-13,25	-14,52	7
2	2,67	7	4,33	5,35	-14,52	-16,09	4,33
3	4,33	7	5,35	5,98	-16,09	-16,50	2,67
4	5,35	7	5,98	6,37	-16,50	-16,33	1,65
5	5,35	6,37	5,74	5,98	-16,43	-16,50	1,02
6	5,74	6,37	5,98	6,13	-16,50	-16,48	0,63
7	5,74	6,13					0,39

Tabela 4.3: Tabela do problema da estação de rádio, item (a).

Portanto, concluímos que no intervalo $[5,74 ; 6,13]$, a porcentagem de ouvintes é máxima. Para facilitar os cálculos tomamos $x = 6$ horas e encontramos o valor da função nesse instante, o que nos dá 16,5% de ouvintes.

Observação 5: Para encontrar o instante de menor audiência, levando-se em consideração o mesmo erro, toma-se a função f . No caso do uso da planilha eletrônica, altera-se o sinal da função usada na planilha do item anterior, nas células F2 e G2, e aplica-se o método. Os resultados obtidos em cada iteração estão expostos na Tabela 4.4.

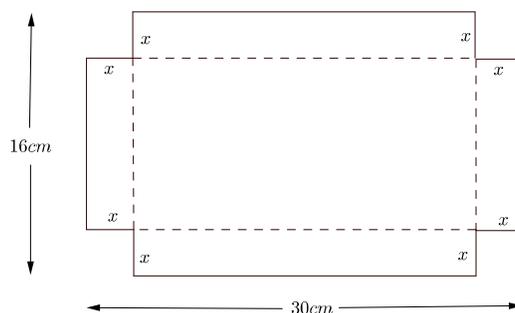
Assim, no intervalo $[2,91 ; 3,30]$ o número de ouvintes será mínimo. Considerando, por exemplo, $x = 3$ horas, temos 13,13% de ouvintes sintonizados.

2. Problema da caixa:

Uma caixa aberta deve ser feita de uma folha de papelão medindo 16 cm por 30 cm, destacando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa com o maior volume?

etapa(k)	a_k	b_k	m_k	n_k	$f(m_k)$	$f(n_k)$	$b_k - a_k$
1	0	7	2,67	4,33	13,25	14,52	7
2	0	4,33	1,65	2,67	15,78	13,25	4,33
3	1,65	4,33	2,67	3,30	13,25	13,22	2,67
4	2,67	4,33	3,30	3,69	13,22	13,58	1,65
5	2,67	3,69	3,06	3,30	13,13	13,22	1,02
6	2,67	3,30	2,91	3,06	13,13	13,13	0,63
7	2,91	3,30					0,39

Tabela 4.4: Tabela do problema da estação de rádio, item (b).



Observação 1: Como são necessários conhecimentos prévios sobre o paralelepípedo e seu volume para resolver esse problema, eventualmente será necessário que ocorra um momento para rever tais conteúdos.

Observação 2: Se o professor julgar interessante poderá acrescentar ao processo a construção de uma caixa, disponibilizando para cada grupo de alunos materiais como cartolina, tesoura, fita adesiva, entre outros. De forma que sejam registrados os tamanhos dos quadrados destacados e calculados os volumes das caixas montadas, para que ocorra, posteriormente, uma socialização dos valores encontrados e discussão sobre o maior valor possível para x . E, então, aplicar o método da Seção Áurea para determinar o tamanho do quadrado como pedido no enunciado do problema.

Observação 3: Nesse problema existe a necessidade de definir a função do volume da caixa. Considerando que as dimensões da caixa serão iguais a $(16 - 2x)$, $(30 - 2x)$ e x , obtemos $V(x) = 4x^3 - 92x^2 + 480x$. Além disso, podemos notar que o lado do quadrado a ser retirado da folha de papelão não pode ser maior que 8 cm, logo, o intervalo inicial será igual a $[0, 8]$. Se considerarmos, por exemplo, um erro $\bar{\epsilon} = 1$ cm, então podemos determinar o número k de etapas necessárias.

$$\varphi^k \cdot (8 - 0) < \bar{\epsilon} = 1 \Rightarrow k > 4,32 \Rightarrow k = 5.$$

Observação 4: Para a utilização da planilha eletrônica a partir daquela utilizada no pro-

blema da velocidade média, novamente precisamos trocar a equação da função que foi definida nas células F2 e G2, pela nova equação desse problema e arrastar a fórmula clicando no extremo inferior direito até a linha que contemple as 5 etapas do processo.

Utilizando a função $(-V(x))$ e os valores encontrados acima, vemos na Tabela 4.5 os resultados em cada uma das etapas realizadas.

etapa (k)	a_k	b_k	m_k	n_k	$V(m_k)$	$V(n_k)$	$b_k - a_k$
1	0	8	3,06	4,94	-721,84	-607,74	8
2	0	4,94	1,89	3,06	-605,33	-721,82	4,94
3	1,89	4,94	3,06	3,78	-721,83	-716,05	3,06
4	1,89	3,78	2,61	3,06	-697,20	-721,83	1,89
5	2,61	3,78	3,06	3,33	-721,83	-725,93	1,17
6	3,06	3,78					0,72

Tabela 4.5: Tabela do problema da caixa.

Escolhendo o valor médio do intervalo $[3,06 ; 3,78]$, encontramos $x = 3,42$ e obtemos o valor do lado do quadrado com o erro definido inicialmente. E, para esse valor de x , o volume da caixa será de aproximadamente $725,53 \text{ cm}^3$.

Em cada um dos problemas aqui apresentados, pode-se, após a aplicação do método e a análise das soluções aproximadas encontradas, utilizar o *software* Geogebra para gerar os gráficos das funções, a fim de verificar e comparar os resultados.

Acreditamos que, além de possibilitar aos alunos um contato diferenciado na resolução de problemas, através de métodos numéricos, e de permitir a familiarização com o recurso das planilhas eletrônicas, essa sequência didática leve o professor a refletir sobre sua prática docente em sala de aula e a importância de incorporar novas metodologias e tecnologias ao ensino de matemática.

4.2 Sequência didática sobre pavimentação do plano e os ladrilhos de Penrose

O preenchimento do plano com polígonos, sem que haja superposições ou buracos entre eles, e o estudo das possibilidades de se fazer isso, serão abordados nessa seção, através do desenvolvimento de atividades que levem o aluno a investigar as relações entre ângulos, exercitar seu raciocínio dedutivo e colocar em prática sua criatividade. E, a partir daí, sugerimos que sejam explorados os ladrilhos de Penrose que possibilitam a pavimentação do plano sem gerar um padrão repetido e que, como já foi apresentado neste trabalho, mostram em sua composição o Triângulo Áureo que, por sua vez, possui a razão entre seus lados igual à Razão Áurea.

Conteúdos:

- Classificação de polígonos regulares, diagonais, ângulos internos e externos;

- Múltiplos e divisores na investigação de ladrilhamento do plano;
- Simetria;
- Razão Áurea;
- Triângulo Áureo.

Objetivos:

- Compreender que existe uma associação entre os ângulos do polígono e a pavimentação do plano;
- Reconhecer os polígonos regulares que recobrem perfeitamente o plano;
- Identificar simetrias;
- Identificar padrões presentes em pavimentações do plano, ou seja, os ladrilhamentos periódicos e os não periódicos de Penrose;
- Construir mosaicos com os ladrilhos de Penrose.

Competências e Habilidades:

- Saber identificar polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais;
- Identificar simetrias por meio da leitura, comparação e interpretação de imagens;
- Levantar e verificar hipóteses e estabelecer generalizações.

Público Alvo: 2ª série do Ensino Médio.

Tempo Estimado: aproximadamente 5 aulas.

Material Necessário: Computador com o *software* Geogebra, cartolina, tesoura.

Desenvolvimento:

1º Momento:

As atividades foram elaboradas para serem aplicadas nas segunda série do Ensino Médio, no momento em que o estudo sobre polígonos regulares já foi realizado, de forma que o aluno seja capaz de aplicar as suas propriedades no problema da pavimentação de superfícies. Dessa maneira, com a intenção de investigar as possibilidades de ladrilhamento do plano, iniciaremos propondo uma atividade no *software* Geogebra.

Com a finalidade de sensibilizar os alunos sugerimos que sejam apresentados exemplos diversos de ladrilhamento, para que ocorra uma contextualização histórica desde as mais antigas peças de ladrilhos conhecidas, que datam de 5000 anos a.C. e foram encontradas no Egito, passando pelas produzidas pelos povos mediterrâneos que retratavam pessoas e cenas naturais; até aquelas elaboradas pelos mouros e árabes que usavam figuras geométricas complexas e entrelaçadas, e que podem ser vistas em Alhambra, um complexo de palácios de Granada na Espanha.

Na internet é possível encontrar uma variedade muito grande de imagens e vídeos de ladrilhamentos que poderão ser selecionados, mas também propomos que os alunos sejam direcionados a exercitar sua capacidade de observação sobre aqueles ladrilhamentos que fazem parte da sua realidade. Como a intenção é fazer um estudo matemático e não artístico dos ladrilhos, nosso foco, nesse momento, será sobre as pavimentações formadas por polígonos regulares.

Para iniciar a atividade, recomendamos que os alunos sejam orientados a usar somente um único tipo de polígono no ladrilhamento e que respondam à pergunta: "Quais são os polígonos regulares que recobrem perfeitamente o plano sem lacunas e sem sobreposição?". Então, a investigação pode ser feita utilizando as ferramentas disponíveis no Geogebra. No menu do *software* podemos selecionar a opção *Polígono Regular* e desenhar esses polígonos e, na opção *Transformações Geométricas*, fazer a *Reflexão em relação a uma reta* para que os polígonos possam recobrir o plano. Na Figura 4.2 podemos ver a reflexão do hexágono no Geogebra. Após esse estudo preliminar, indicamos que seja reservado um momento para verificação de situações em que ocorra a combinação de polígonos regulares não necessariamente congruentes entre si.



Figura 4.2: Reflexão do hexágono no Geogebra

Espera-se que os alunos verifiquem os resultados obtidos na atividade e concluam que, para haver um encaixe perfeito dos polígonos regulares em torno de um vértice, é necessário que a soma das medidas dos ângulos agrupados nele seja igual a 360° e que consiga identificar o Triângulo Equilátero, o Quadrado e o Hexágono Regular como os únicos polígonos regulares que atendem tal condição, quando o objetivo é compor o plano com um único tipo de polígono. A Figura 4.3 ilustra todos os modos de compor o plano dessa maneira e quando são combinados Triângulos Equiláteros, Quadrados e Hexágonos Regulares.

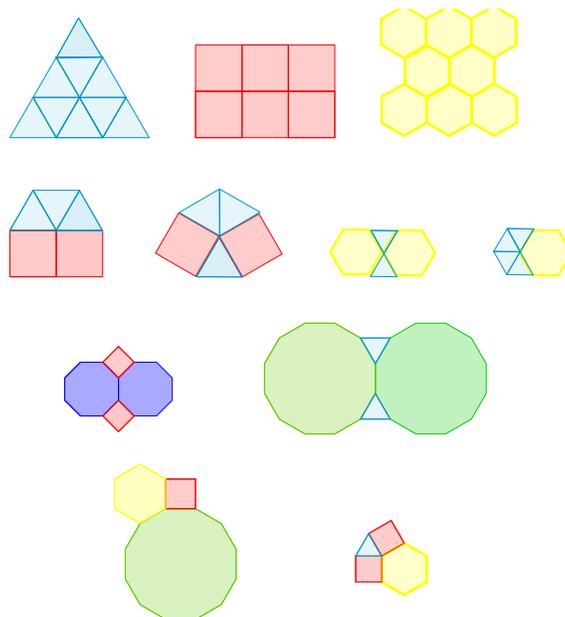


Figura 4.3: Composições possíveis com polígonos regulares

Portanto, a expectativa, até esse momento, é de que o aluno compreenda que existem apenas essas onze possibilidades de ladrilhamentos compostos apenas por polígonos regulares, três usando apenas um tipo de polígono, seis usando dois tipos de polígonos e duas usando três tipos de polígonos. Seria oportuno neste momento que o aluno tivesse um período de tempo para criar algum tipo de ladrilhagem que recobrisse todo o plano e sem sobreposições, a partir dos polígonos regulares que foram estudados. A partir dos mosaicos criados pelos alunos e de outras imagens fornecidas pelo professor pode-se explorar a ideia de simetria e periodicidade. Seria interessante que imagens de contextos diversificados sejam examinadas e que o aluno possa completar figuras para que tenham simetria ou ainda exercitar movimentos de reflexão, translação e rotação de figuras no plano.

Os conceitos de simetria e periodicidade devem ser compreendidos de forma que, no momento em que forem trabalhadas as pavimentações do plano que utilizem os ladrilhos de Penrose, o aluno seja capaz de verificar que o desenho resultante não possui qualquer tipo de simetria e pode preencher o plano de diversas maneiras sem que um padrão se repita continuamente.

2º Momento:

Iniciaremos essa etapa com uma formação aos alunos acerca da Razão Áurea, sua pertinência na História da Matemática, sua definição e o Número de Ouro resultante da razão. Sugerimos que o professor separe uma aula para desenvolver tais assuntos e esclarecer dúvidas que possam surgir. O objetivo é que a partir dessa explanação inicial o aluno seja capaz de acompanhar a próxima construção, validar e verificar a presença da Razão Áurea no pentágono, e que possa identificar o Triângulo Áureo para posteriormente compreender o seu aparecimento nos ladrilhos de Penrose.

Utilizaremos novamente o Geogebra e detalharemos a construção do pentágono no *software* a seguir:

1. Utilizar a ferramenta *Polígono Regular* para construir o pentágono ABCDE.
2. Utilizar a ferramenta *Segmento*, para traçar todas as diagonais do pentágono.
3. A fim de destacar o novo pentágono formado pelas diagonais, utilizar a ferramenta *Interseção de dois objetos*, para marcar os vértices de maneira mais precisa. E, para destacá-lo, clicar com o botão direito do *mouse* sobre ele, em *Propriedades*→*Cor*, escolher uma cor diferente da apresentada pelo pentágono ABCDE. Dessa forma, temos o novo pentágono FGHIJ. Com essa figura formada pode-se contextualizar historicamente o pentágono e o pentagrama formados e sua importância para a Escola Pitagórica, além de, pela facilidade de visualização, fazer com que o aluno perceba que o aparecimento de um novo pentágono e pentagrama pode ocorrer indefinidamente. Sugerimos que seja permitido ao aluno experimentar essa propriedade do pentágono e do pentagrama.
4. Com o objetivo de encontrar as medidas de alguns segmentos, selecionar a ferramenta *Segmento* e clicar nos pontos A e D. Clicar no botão direito do *mouse* e proceder com a sequência de passos: *Propriedades* → *Básico* → *Exibir Rótulo* → *Nome*, e o comprimento de \overline{AD} aparecerá na tela. Fazer o mesmo para encontrar as medidas dos segmentos \overline{FD} e \overline{GD} . (Figura 4.4)

Após essa construção deve-se calcular o valor das razões $\frac{AD}{FD}$ e $\frac{FD}{GD}$ e verificar que o valor encontrado se aproxima do Número de Ouro Φ , concluindo que os pontos F e G dividem a diagonal \overline{AD} e o segmento \overline{FD} , respectivamente, na Seção Áurea. Pode-se também verificar a presença do número Φ tomando a razão entre outros segmentos presentes na construção do pentágono.

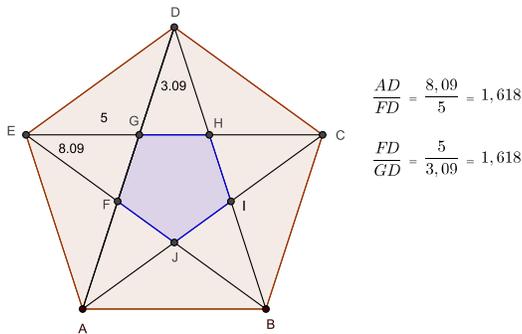


Figura 4.4: Construção do Pentágono no *Geogebra*

Nesse momento, torna-se necessário verificar, através da medida dos ângulos internos dos triângulos, juntamente com os alunos, que o segmento \overline{FD} é congruente ao lado do pentágono, como foi feito no capítulo 2 desse trabalho. Dessa forma, podemos identificar diversos triângulos isósceles

congruentes na Figura 4.4. Podemos tomar, por exemplo, o triângulo EFD e calcular a razão entre as medidas dos seus lados, $\frac{FD}{EF} = \frac{5}{3,09} = 1,618$ (\overline{EF} é congruente a \overline{GD}), e definir todo triângulo cuja razão entre os lados é igual ao Número de Ouro como um Triângulo Áureo.

Da mesma forma, considerando, por exemplo, o triângulo ECD e tomando a razão entre as medidas de seus lados, $\frac{EC}{CD} = \frac{8,09}{5} = 1,618$ (\overline{EC} é congruente a \overline{AD} e \overline{CD} é congruente a \overline{FD}), encontramos outro Triângulo Áureo.

Pode-se propor visualizando o pentágono construído e utilizando os procedimentos descritos no item 4 acima, que os alunos encontrem medidas de diferentes segmentos e calculem a razão entre elas, de maneira que identifiquem a presença ou não do número Φ e identifiquem os triângulos áureos socializando suas descobertas com os colegas.

Ainda investigando o pentágono da Figura 4.4, podemos retomar alguns conceitos que já foram vistos pelos alunos da 2ª série do Ensino Médio, para determinar as medidas dos ângulos internos dos Triângulos Áureos EFD e ECD . Primeiramente, calculando a medida dos ângulos internos do pentágono e, a partir desse valor, determinando as medidas dos ângulos internos do triângulo isósceles ECD . Uma vez que $\widehat{EDC} = 108^\circ$, $\widehat{DEC} = \widehat{DCE}$ e a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180° , obtemos $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = 36^\circ$. E, como os triângulos ECD e ADE são congruentes, temos que $\widehat{ADE} = 36^\circ$ e o triângulo isósceles EFD possui o ângulo EDF medindo 36° e, conseqüentemente, seus ângulos da base medindo cada um 72° . Portanto, podemos trabalhar com a turma mais uma característica do Triângulo Áureo, ou seja, encontramos as medidas de seus ângulos internos iguais a 36° , 72° e 72° (triângulo agudo) ou 108° , 36° e 36° (triângulo obtuso).

Os triângulos EFD e ECD , e todos os que estão presentes na Figura 4.4 e são congruentes a eles, deverão ser definidos como Triângulos Áureos Acutângulos e Obtusângulos, respectivamente, para que possamos, a partir deles, apresentar os ladrilhos de Penrose.

3º Momento:

Nessa terceira etapa iremos propor aos alunos uma atividade que resultará na confecção de um mosaico em que sejam utilizados os ladrilhos de Penrose. Para isso, propomos que o professor, a princípio, lembre que todos os mosaicos estudados até o momento, inclusive os que foram confeccionados pelos alunos no Geogebra na 1ª etapa e os demais apresentados pelo professor, apresentavam algum tipo de simetria e um padrão que se repetia ao longo do plano. E que, durante muito tempo ao longo da história, acreditou-se que somente desenhos com essas características pudessem revestir totalmente o plano sem superposições. Mas que, em 1974, o matemático Roger Penrose criou um padrão de ladrilharia que não apresentava simetria ou periodicidade, e utilizava o Triângulo Áureo como elemento dominante.

Com base no que foi apresentado até o momento, recomendamos que o professor produza alguns Triângulos Áureos agudos e obtusos, com cartolina ou outro material semelhante, a partir de um mesmo pentágono, para que eles tenham uma medida de lado em comum e possam ser encaixados, de forma que o aluno consiga montar o seu mosaico. Para que ocorra uma melhor compreensão, acreditamos que o professor poderá, diante da turma, e utilizando fita adesiva, combinar os triângulos que confeccionou para apresentar aos seus alunos os ladrilhos criados por Penrose.

Seria interessante também apresentar a nomenclatura empregada por Penrose aos seus ladrilhos como verificamos na figura 4.5.

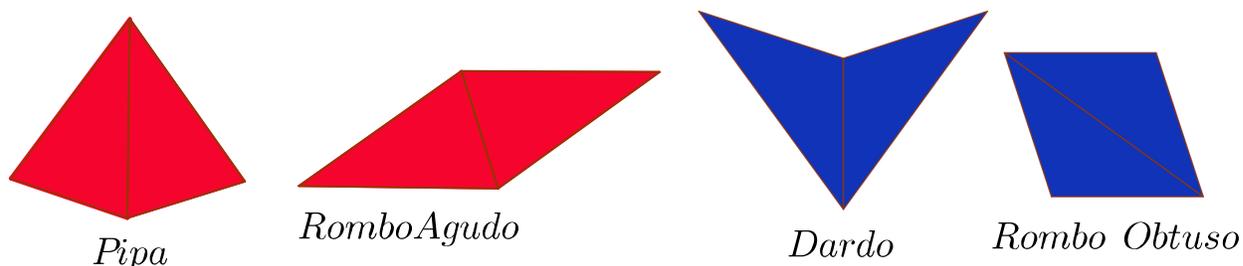


Figura 4.5: Ladrilhos de Penrose formados por dois Triângulos Áureos

Para que sejam confeccionados os mosaicos sugerimos a divisão da sala em grupos e que para cada um deles sejam fornecidos os modelos de Triângulos Áureos acutângulos e obtusângulos e os materiais necessários para a confecção de diversos outros ladrilhos de Penrose, de preferência com cores diversas. Seria interessante que, para auxiliar os grupos de alunos no desenvolvimento da atividade, sejam apresentados alguns exemplos de desenhos que utilizam os ladrilhos de Penrose. Caso o professor ache adequado pode propor a cada um dos grupos que escolha um dos desenhos apresentados e reproduza o mosaico com as cores e ladrilhos disponíveis. Contudo, se o docente perceber que a atividade vem se desenvolvendo dentro dos objetivos traçados pode simplesmente oferecer os ladrilhos e propor que os alunos criem seus próprios mosaicos.

Ao final, cada grupo poderá expor seu trabalho para a sala, identificando quais dos ladrilhos de Penrose foram utilizados e apresentando para o grupo de que forma a simetria e a periodicidade não ocorrem no mosaico.

Lembramos que todas as situações apresentadas nessa sequência didática exigem a orientação e acompanhamento constante do professor junto aos alunos, dessa forma, a avaliação do aprendizado poderá ser feita baseada não somente por meio do resultado final, mas no processo e na prática da investigação, onde os erros também demonstram como o aluno está relacionando os conhecimentos que já possui com os novos que estão sendo adquiridos e possibilitam ao professor traçar estratégias que contribuam para a aquisição das habilidades previstas nas atividades.

Capítulo 5

Conclusão

A Seção Áurea é um assunto que geralmente não faz parte do currículo do Ensino Médio no Brasil. Apesar de existir uma bibliografia extensa e disponível, com abordagens sobre sua história, presença em objetos matemáticos diversos, propriedades únicas e associação com elementos da natureza e criações humanas, não encontramos materiais que apresentem propostas de atividades sobre o Método da Seção Áurea e os ladrilhos de Penrose que possam ser aplicadas em salas de aula. Devido a isso, procuramos discorrer nesse trabalho sobre alternativas para a inserção desse tema de forma que o aluno seja alcançado por meio de atividades diversificadas com o uso de ferramentas que possibilitem uma aprendizagem mais significativa.

Optamos em apresentar aspectos históricos da Razão Áurea a fim de que os discentes possam contextualizar o conceito e promover a compreensão de que a matemática é uma construção humana e propiciar aos alunos uma nova forma de ver e entender a disciplina, mais agradável, mais criativa e mais humanizada.

Na prática, buscamos desenvolver atividades que sejam realmente executáveis e interessantes para os alunos. O método da Seção Áurea aplicado a problemas de otimização foi apresentado de forma que o aluno utilize recursos computacionais como planilhas eletrônicas e o *software* Geogebra na resolução, ao invés da aplicação repetitiva de fórmulas prontas. A sequência didática relacionada aos ladrilhos de Penrose foi criada com a intenção de promover a prática da criatividade e do raciocínio dedutivo, permitindo a construção de um moasico como produto final da atividade.

Além de envolver o aluno esperamos poder levar o professor a refletir sobre sua prática profissional em sala de aula, transformando-a em algo mais próximo da realidade do aluno e incorporando novas metodologias e tecnologias ao ensino de matemática.

Durante a elaboração dessas sequências didáticas não foi possível realizar as atividades propostas com os alunos do Ensino Médio, mas acreditamos que se o material fosse empregado traria ganho ao aprendizado dos alunos.

Nosso objetivo é, portanto, assim que possível, executar as atividades, coletar resultados e reações para verificar a validação da sequência e promover, se necessário, as alterações que as tornarão viáveis e exitosas.

Referências Bibliográficas

- [1] M.S.Bazaraa, H.D.Sherali & C.M.Shetty [1979], *Nonlinear Programming*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] C.B. Boyer [2010], *História da Matemática*; Tradução de Elza F. Gomide. Blucher, São Paulo.
- [3] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental [1999], *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. MEC/SEF, Brasília.
- [4] F. Commandino [1944], *Euclides - Elementos de Geometria*. Cultura, São Paulo.
- [5] H. Eves [2011], *Introdução à História da Matemática*. Unicamp, Campinas.
- [6] R. Knott. *Fibonacci Numbers and the Golden Section*. Disponível em <<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>>. Acesso em: 05/03/2014.
- [7] M. Livio [2006], *Razão Áurea: a História de Φ , um Número Surpreendente*; Tradução de Marco S. Matsumura. Record, Rio de Janeiro.
- [8] J. P. Ponte, J. Brocardo & H. Oliveira [2003], *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Autêntica, Belo Horizonte.
- [9] A. A. Ribeiro & E. W. Karas [2014], *Otimização Contínua: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Cengage Learning, Curitiba.
- [10] T. M. Roque & J.B. Pitombeira [2012], *Tópicos de História da Matemática*; Coleção Profmat. SBM, Rio de Janeiro.
- [11] São Paulo (Estado) Secretaria da Educação [2011], *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias*. Atual, São Paulo.