Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Propriedades e Generalizações dos Números de Fibonacci †

por

Edjane Gomes dos Santos Almeida

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Propriedades e Generalizações dos Números de Fibonacci

por

Edjane Gomes dos Santos Almeida

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos - UNIPÊ

Agosto/2014

Agradecimentos

Quero agradecer a ***Deus***, por me guiar em todas as viagens durante esses dois anos e me dar força para ir em frente.

Ao Professor Dr. **Napoleon Caro Tuesta**, exemplo de profissional e de como é possível exercer essa profissão pouco valorizada com dignidade, dedicação e respeito pelo estudante. Ao senhor, meu respeito e admiração.

Aos meus **familiares**, pelo incentivo e apoio. Em especial ao meu **pai**, por sempre acreditar em minha capacidade de ir além.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, que muito me apoiaram e sem os quais a conclusão do curso seria mais díficil. Meu muito obrigada pela colaboração.

Ao meu querido esposo **João Ricardo**, pela paciência, compreensão e dedicação. Meu maior apoio durante todo o curso.

Um agradecimento especial aos meus filhos **João Paulo, André Ricardo e Isaias Neto**, por me fazerem tão feliz. Mais tarde vocês entenderão minha ausência em vários momentos.

Dedicatória

*Em especial, à minha inesquecível mãe, **Isabel Gomes dos Santos**(in memorian).*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo dos Números de Fibonacci. Apresenta-se inicialmente um breve relato sobre a história de Leonardo Fibonacci, desde sua obra mais famosa, *O Liber Abaci*, até a relação com outros campos da Matemática. Em seguida, apresenta-se algumas propriedades dos Números de Fibonacci, a Fórmula de Binet, os Números de Lucas e a relação com a Sequência de Fibonacci e uma importante propriedade observada por Fermat. Dentro das relações com outras áreas da Matemática, destacamos a relação com as Matrizes, com a Trigonometria, com a Geometria. Apresenta-se também a Elipse e a Hipérbole de Ouro. Concluimos com os Números Tribonacci e algumas propriedades que regem esses números. Realizamos algumas generalizações sobre Matrizes e Polinômios Tribonacci.

Palavras-chave Leonardo Fibonacci, Números de Fibonacci, Números de Lucas, Propriedades, Fórmula de Binet, Razão Áurea, Números Tribonacci.

Abstract

This work is about research done Fibonacci's Numbers. Initially it presents a brief account of the history of Leonardo Fibonacci, from his most famous work, **The Liber Abaci**, to the relationship with other fields of Mathematics. Then we will introduce some properties of Fibonacci's Numbers, Binet's Form, Lucas' Numbers and the relationship with Fibonacci's Sequence and an important property observed by Fermat. Within relationships with other areas of Mathematics, we show the relationship Matrices, Trigonometry and Geometry. Also presents the Golden Ellipse and the Golden Hyperbola. We conclude with Tribonacci's Numbers and some properties that govern these numbers. Made some generalizations about Matrices and Polynomials Tribonacci.

Keywords: Leonardo Finonacci, Fibonacci's Numbers, Lucas' Numbers, Properties, Binet's Form, Golden Ratio, Tribonacci's Numbers.

Sumário

Introdução

Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci nasceu em Pisa, na Itália. Acompanhando sua família, muito cedo foi para a Argélia e lá, recebeu sua educação com professores muçulmanos, tendo contato com a matemática indo-arábica. Fez várias viagens pelo mediterrâneo e ficou convencido da superioridade do sistema decimal indo-arábico. Ao voltar para a Itália, escreveu o Líber Abaci.

O Líber Abaci foi o primeiro livro escrito por Fibonacci, nele, Fibonacci apresentou Europa o sistema de numeração indo-árabe e alguns problemas com conversões monetárias, cálculo de juros e o seu mais famoso, o Problema da Reprodução dos Coelhos. A solução desse problema é exatamente a conhecida Sequência de Fibonacci.

Este trabalho trata das propriedades e generalizações dos Números de Fibonacci, apresenta-se um pouco da história desse notório matemático, sua obra mais importante: O Liber Abaci e a contribuição para o desenvolvimento da Teotia dos Números.

Realiza-se também um importante estudo sobre a relação dos Números de Fibonacci e os Números de Lucas, as principais generalizações e relações com outras áreas da Matemática. Destacando a relação com a trigonometria, com a geometria e com as matrizes.

Trazemos aqui uma breve apresentação dos números Tribonacci, provamos algumas propriedades e generalizamos as Matrizes e os Polinômios Tribonacci.

Capítulo 1

História e Obra de Leonardo Fibonacci

Estudaremos neste capítulo a história e a obra de Leonardo Fibonacci. Ressaltaremos sua obra mais conhecida, o Liber Abaci e o Problema da Reprodução dos Coelhos, destacado no Capítulo 12 do Liber Abaci e que deu origem a Sequência de Fibonacci ou Números de Fibonacci.

1.1 História e Obra

Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, nasceu em Pisa na Toscânia (Itália) por volta de 1.170. Ficou conhecido como Leonardo Fibonacci, Fibonacci significa filho de Bonaccio. Seu pai Guglielmo Bonacci era um grande mercador e fora nomeado coletor das Alfândegas na Argélia, cidade de Bugia (agora Bougie). Ele levou Leonardo para aprender a arte de calcular.

Em Bougie, Leonardo recebeu sua educação de um professor muçulmano, que o apresentou ao sistema de numaração e as técnicas de cálculo indo-arábicos. Foi aí também que Fibonacci teve acesso ao livro de álgebra do matemático persa al-khowarizmi.

Já adulto, Fibonacci fez várias viagens pelo Egito, Síria, Grécia, França e Constantinopla, onde estudou diversos sistemas de numeração. Por volta de 1200, voltou para Pisa. Convencido da superioridade e praticidade do Sistema de Numeração indo-árabe, em 1202, publica seu primeiro trabalho, o Liber Abaci (O livro do Cálculo).

Fibonacci também escreveu três outros livros importantes. Practica de Geometriae (Prática da geometria), escrito em 1220, apresenta geometria e trigonometria com rigor euclidiano a alguma originalidade. Nesse livro, Fibonacci emprega álgebra para resolver problemas geométricos e geometria para resolver problemas algébricos, uma abordagem avançada para a Europa de sua época.

Flos, escrito em 1225, apresenta a solução de três problemas que foram colocados para Fibonacci por João de Palermo, um membro da Corte do Imperador Frederico II.

Liber Quadratorum, também publicado em 1225, é considerado o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo resultados corretos até a nona casa decimal.

1.1.1 O Liber Abaci

Foi escrito por Fibonacci em 1202, baseado em seus estudos realizados no período das viagens pelo Mediterrâneo. Após realizar uma revisão, publicou-o novamente em 1228.

Organizado em 15 capítulos, o livro tem uma forte influência árabe, apresenta a leitura e a escrita dos números no sistema decimal indo-árabe, traz regras de cálculo, diversos problemas que incluem questões de cálculo de juros, conversões monetárias e medidas. Há uma grande coleção de problemas, dentre os quais o que deu origem à sequência de Fibonacci: O Problema da Reprodução dos Coelhos, também considerado o mais famoso dos problemas de Leonardo. Apresenta também, raízes quadradas e raízes cúbicas.

1.1.2 O Problema da Reprodução dos Coelhos

No Capítulo 12 do Líber Abaci, Leonardo apresenta o problema da reprodução dos Coelhos. O qual traz uma situação hipotética descrita a seguir:

Uma pessoa tem um par de coelhos recém nascidos, num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês.

Esse problema, aparentemente de solução simples, está relacionado a uma das mais importantes descobertas da matemática.

Iniciamos com um par jovem, após o primeiro mês, esse par já está adulto e fértil. No segundo mês, esse primeiro par dá a luz a um outro, ficando com 2 pares.

No terceiro mês, o par adulto dá a luz a outro par jovem, enquanto o par de filhotes torna-se fértil, ficando agora com 3 pares.

No quarto mês cada um dos dois pares adultos dá a luz a um par jovem e o terceiro par torna-se adulto e fértil.

A tabela a seguir mostra a reprodução dos coelhos até o décimo segundo mês.

	Número de pares de coelhos recém nascidos	Número de pares de coelhos adultos	Número total de pares de coelhos
Início	1	0	1
Um mês depois	0	1	1
Dois meses depois	1	1	2
Três meses depois	1	2	3
Quatro meses depois	2	3	5
Cinco meses depois	3	5	8
Seis meses depois	5	8	13
Sete meses depois	8	13	21
Oito meses depois	13	21	34
Nove meses depois	21	34	55
Dez meses depois	34	55	89
Onze meses depois	55	89	144
Doze meses depois	89	144	233

A solução do problema nos dá a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,21, 34, 55,89,144,233.

Podemos examinar somente o número de pares de coelhos adultos em um determinado mês, e podemos observar que esse número é formado pela soma dos pares adultos dos 2 meses anteriores, e a mesma experiência vale para os pares jovens.

No século XIX essa sequência foi chamada de Sequência de Fibonacci pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891).

Capítulo 2

Propriedades dos Números de Fibonacci

Estudaremos agora a definição de sequências recursivas e algumas propriedades dos Números de Fibonacci. Este capítulo está organizado em cinco seções. A primeira apresenta a definição de sequências recursivas; na segunda, apresentamos algumas propriedades relacionadas ao mdc e a soma de números da sequência. Na terceira, a Fórmula de Binet; na quarta, a relação com as identidades de Lucas e finalizando o capítulo, na quinta seção, apresentaremos uma fascinante propriedade observada por Fermat.

2.1 Definição de Sequência Recursiva

Ao observarmos a sequência de Fibonacci, verificamos que cada termo, a partir do terceiro é igual a soma de dois termos anteriores. As sequências que são definidas dessa forma são chamadas de Sequências Recursivas.
Sabendo dessa propriedade, podemos determinar a sequência de Fibonacci considerando:

1. $F_0 = 0, F_1 = 1$ (Condição inicial)
2. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ (Relação de Recorrência)

Vejamos:
$\mathrm{F}_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$
$\mathrm{F}_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
$\mathrm{F}_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
$\mathrm{F}_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
$\mathrm{F}_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

Daí, obtemos a sequência: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

A Sequência de Fibonacci foi uma das primeiras sequências recursivas conhecida na Europa.

2.2 Propriedades

Os números de Fibonacci apresentam várias propriedades e muitas delas foram estudadas por vários matemáticos ao longo dos anos. Aqui apresentamos algumas delas.
Ao se observar dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, verifica-se que o máximo divisor comum entre eles é igual a 1. Considere o $F_6 = 8$ e o $F_7 = 13$ e o $(8, 13) = 1$. Isso porque os divisores positivos de $F_6 = 8$ são $1, 2, 4, 8$ e os divisores positivos de $F_7 = 13$ são $1, 13$. Observando outros termos consecutivos, percebemos que há uma regularidade. E daí podemos enunciar a primeira propriedade dos números de Fibonacci. Denotaremos $\mathrm{mdc}(F_6, F_7)$ por (F_6, F_7).

Propriedade 2.2.1 Dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si.

PROVA Mostraremos, por indução matemática, que $(F_{n+1}, F_n) = 1$. De fato, para $n = 1$, temos que:

$$(F_2, F_1) = (1, 1) = 1.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para algum n, isto é, $(F_{n+1}, F_n) = 1$. Temos, pelo algoritmo de Euclides, que:

$$(F_{n+2}, F_{n+1}) = (F_{n+2} - F_{n+1}, F_{n+1}) = (F_n, F_{n+1}) = 1,$$

provando, assim, o resultado.

Propriedade 2.2.2 A soma de seis números consecutivos de Fibonacci é divisível por 4.
Vejamos, para $n \geq 0$ (com n fixo)

$$\sum_{r=0}^{5} F_{n+r} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4F_{n+4}$$

Prova Para $n \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{5} F_{n+r} &= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} \\
&= (F_n + F_{n+1}) + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + (F_{n+3} + F_{n+4}) \\
&= 2F_{n+2} + 2F_{n+3} + 2F_{n+4} \\
&= 2(F_{n+2} + F_{n+3}) + 2F_{n+4} \\
&= 4F_{n+4}
\end{aligned}$$

Propriedade 2.2.3 A soma de quaisquer dez números consecutivos de Fibonacci é divisível por 11.
De fato, para $n \geq 0$ (com n fixo), temos:

$$\sum_{r=0}^{9} F_{n+r} = 11F_{n+6}.$$

Prova Para $n \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{9} F_{n+r} &= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9} \\
&= (F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}) + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + (F_{n+7} + F_{n+8}) \\
&= 4F_{n+4} + F_{n+6} + 2F_{n+7} + 2F_{n+8} \\
&= (4F_{n+4} + 4F_{n+5}) + 7F_{n+6} \\
&= 4F_{n+6} + 7F_{n+6} \\
&= 11F_{n+6}
\end{aligned}$$

Propriedade 2.2.4 Para $n \geq 0$, $\sum_{r=0}^{n} F_r = F_{n+2} - 1$.
Esta propriedade foi descoberta por Edouard Lucas em 1876. Vejamos as seguintes somas:

$$\begin{gathered}
F_0 + F_1 + F_2 = 2 = 3 - 1 = F_4 - 1 \\
F_0 + F_1 + F_2 + F_3 = 4 = 5 - 1 = F_5 - 1 \\
F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = 8 - 1 = F_6 - 1.
\end{gathered}$$

Esses resultados apontam para uma generalização. Então vejamos:
Prova Para provar esta propriedade, vamos utilizar a definição recursiva dos números de Fibonacci. Considere:

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1 \\ \mathrm{F}_1 &= F_3 - F_2 \\ \mathrm{F}_2 &= F_4 - F_3 \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ \mathrm{F}_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ \mathrm{F}_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

Ao somarmos as $n+1$ equações, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n} F_r &= (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \cdots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}) \\ &= -F_1 + (F_2 - F_2) + (F_3 - F_3) + \cdots + (F_n - F_n) + (F_{n+1} - F_{n+1}) + F_{n+2} \\ &= F_{n+2} - F_1 \\ &= F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

Propriedade 2.2.5 Para $n \geq 0, \sum_{r=0}^{n} F_r^2 = F_n \cdot \mathrm{F}_{n+1}$

Utilizaremos Indução Matemática para provar esta propriedade. De fato, para $n = 0$, temos;

$$\sum_{r=0}^{0} F_r^2 = F_0^2 = 0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = \mathrm{F}_0 \cdot \mathrm{F}_1 = F_0 \cdot \mathrm{F}_{0+1}$$

que a propriedade é verdadeira.
Suponha que seja verdadeira para algum $n = k, (k \geq 0)$, com n fixo e arbitrário.
Daí, temos: $\sum_{r=0}^{k} F_r^2 = F_k F_{k+1}$. Voltando para o caso em que $n = k + 1 (\geq 1)$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k+1} F_r^2 &= \left(\sum_{r=0}^{k} F_r^2 \right) + F_{k+1} \\ &= (F_k F_{k+1}) + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o resultado verdadeiro para $n = k + 1$ decorre de $n = k$. Daí, pelo Princípio da indução matemática, o resultado é verdadeiro para todo $n \geq 0$.

Propriedade 2.2.6 A soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar é igual a F_{2n}.

Para $n \geq 1, \sum_{r=1}^{n} F_{2r-1} = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Prova Para provar esta propriedade, vamos utilizar a definição de sequência recursiva:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ \mathrm{F}_3 &= F_4 - F_2 \\ \mathrm{F}_5 &= F_6 - F_4 \\ \vdots & \ \vdots \ \ \vdots \\ \mathrm{F}_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned}$$

Somando as equações obtidas, teremos:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} &= (F_2 - F_2) + (F_4 - F_4) + (F_6 - F_6) + \cdots + (F_{2n-2} - F_{2n-2}) + F_{2n} \\ \sum_{r=1}^{n} F_{2r-1} &= F_{2n}. \end{aligned}$$

Propriedade 2.2.7 Para $n \geq 1, \sum_{r=1}^{n} F_{2r} = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2r} = F_{2n+1} - 1$.

Prova Para provar esta propriedade, utilizaremos os resultados encontrados nas Propriedades 2.2.4 e 2.2.6. Vejamos:
Pela Propriedade 2.2.4, temos que a soma de todos os números de Fibonacci até a ordem $2n$ é:
$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$ (i)
e pela Propriedade 2.2.6, a soma dos números de ordem ímpar até $2n - 1$ é:
$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ (ii)
Fazendo (i)-(ii), temos:

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1 \text{ (iii)}$$

Como $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$, substituimos em (iii), obtemos:

$$\sum_{r=1}^{n} F_{2r} = F_{2n+1} - 1.$$

Propriedade 2.2.8 Para $n \geq 1, F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
Esta propriedade é conhecida como fórmula de Cassini.

Prova Provaremos por Indução Matemática. De fato, para $n = 1$, temos:
$F_0F_2 - F_1^2 = 0.1 - 1^2 = -1$.
Suponhamos que seja válida para algum $n \geq 1$. Provemos que também é válida para $n + 1$.

$$\begin{aligned} F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2 \\ &= F_{n+1}(-F_{n-1}) + F_n^2 \\ &= -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

2.3 Fórmula de Binet

Já vimos que é possível encontrar a sequência formada pelos números de Fibonacci, utilizando a relação de recorrência, dada a condição inicial:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ (Condição inicial)}$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \text{ (Relação de Recorrência)}$$

.

Agora, queremos encontrar um termo qualquer da sequência sem, necessariamente, calcular todos os termos anteriores, ou seja, queremos uma fórmula para determinar o termo geral da sequência de Fibonacci em função do F_n. Para isso, utilizaremos a definição de recorrência.

Para constantes reais $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_k$, com $C_0 \neq 0$ e $C_k \neq 0$, uma expressão da forma:

$$C_0a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_ka_{n-k} = 0, \text{ onde } n,$$

é chamado o k-ésimo termo da relação de recorrência homogênea linear com coeficientes constantes.

Considere o caso em que $k = 2, C_0 = 1$ e $C_2 \neq 0$. Por exemplo:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0, \text{ou ainda,}$$
$$\text{a}_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

obtemos aí, uma relação de recorrência linear homogênea, com coeficientes constantes.

Seja $a_n = Ar^n$, uma progressão geométrica, onde A e r são constantes diferentes de zero. Substituindo na relação de recorrência encontrada, temos:

$$Ar^n = 5Ar^{n-1} - 6Ar^{n-2}$$

Dividindo por Ar^{n-2}, temos:

$$r^2 = 5r - 6 \leftrightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \tag{2.1}$$

uma equação do segundo grau em r. Esta equação é chamada de *equação característica*. Para a equação $r^2 - 5r + 6 = 0$, as raízes são $r = 2$ e $r = 3$ (raízes características).
Uma solução geral para

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

tem a forma

$$a_n = c_1 2^n + c_2 3^n,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Substituindo a solução geral na relação de recorrência $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$, nós encontramos:

$$\begin{aligned}(c_1 2^n + c_2 3^n) - 5(c_1 2^{n-1} + c_2 3^{n-1}) + 6(c_1 2^{n-2} + c_2 3^{n-2}) &= 0 \\ = c_1 2^{n-2}(2^2 - 5(2) + 6) + c_2 3^{n-2}(3^2 - 5(3) + 6) \\ = c_1 2^{n-2}(0) + c_2 3^{n-2}(0) &= 0\end{aligned}$$

Verificamos diretamente que $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n$ é de fato uma solução geral. Mostraremos o valor de a_n para dois valores específicos de a_0 e a_1, com esses valores podemos determinar c_1 e c_2.
Tomemos como exemplo $a_0 = 0$ e $a_1 = 4$.

$$\begin{aligned}1 = a_0 = c_1 2^0 + c_2 3^0 = c_1 + c_2 \\ 4 = \mathrm{a}_1 = c_1 2^1 + c_2 3^1 = 2c_1 + 3c_2,\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema encontrado, obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$. Então,

$$a_n = (-1)2^n + 2.3^n, n \geq 0,$$

é solução (única) da equação inicial:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 4.$$

Também é solução (única) da equação equivalente:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 4.$$

Para resolver a recorrência, é necessário que a equação do segundo grau obtida em r possua duas raízes reais distintas.

Considere agora a recorrência de segunda ordem:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Utilizando o mesmo raciocínio para o primeiro caso que mostramos, vamos substituir $F_n = Ar^n, A \neq 0, r \neq 0$. Substituindo na relação de recorrência encontramos:

$$Ar^n = Ar^{n-1} + Ar^{n-2}$$

Dividindo por Ar^{n-2}, encontramos a equação característica

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos as raízes características:

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

As raízes características obtidas da equação do segundo grau são:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Consequentemente,

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, n \geq 0,$$

com

$$0 = F_0 = c_1 + c_2$$

e

$$1 = F_1 = c_1\alpha + c_2\beta = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

Segue-se que $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Daí, podemos expressar F_n por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n, n \geq 0.$$

Entre as muitas propriedades satisfeitas por α e β, temos:

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$
$$\alpha\beta = -1$$
$$\alpha - \beta = \sqrt{5}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 3$$
$$\alpha^{-1} = -\beta$$
$$\beta^2 = \beta + 1$$
$$\alpha + \beta = 1$$
$$\beta^{-1} = -\alpha$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}$$

Como $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, podemos reescrever a fórmula para F_n da seguinte maneira:

$$F_n = \tfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n \geq 0.$$

Esta representação para F_n é chamada de Fórmula de Binet para os números de Fibonacci.
Utilizando a fórmula de Binet, vejamos duas propriedades envolvendo os números de Fibonacci.

Propriedade 2.3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha.$$

Prova Sendo $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ e $\beta = (1-\sqrt{5})/2$, segue-se que $|\beta/\alpha| = \left|(1-\sqrt{5})/(1+\sqrt{5})\right| < 1$. Consequentemente, como $n \to \infty$, temos $|\beta/\alpha|^n \to 0$ e $(\beta/\alpha)^n \to 0$. Portanto:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{F_n + 1}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n}{1 - (\beta/\alpha)^n} = \frac{\alpha - \beta(0)}{1 - 0} = \alpha.\end{aligned}$$

Propriedade 2.3.2

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k = F_{3n}$$

Observe que essa propriedade envolve números binomiais, por isso, antes de provar esta propriedade, faremos uma breve revisão: Para as variáveis x, y reais e n, um inteiro não negativo, temos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0} x^0y^n + \binom{n}{1} x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n} x^ny^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^ky^{n-k}
\end{aligned}$$

Onde,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0! = 1$$

Prova Para provar esta propriedade considere a fórmula de Binet e as seguintes relações:

$\alpha^2 = \alpha + 1$ e

$2\alpha + 1 = (\alpha + 1) + \alpha = \alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1) = \alpha(\alpha^2) = \alpha^3$.

Da mesma forma, $2\beta + 1 = \beta^3$. Voltando a propriedade, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{\alpha^k - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\alpha^k - \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\beta^k \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\alpha)^k 1^{n-k} - \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\beta)^k 1^{n-k} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(2\alpha + 1^n - \frac{1}{\alpha-\beta}(2\beta+1)^n \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^3)^n - \frac{1}{\alpha-\beta}(\beta^3)^n \\
&= \frac{\alpha^{3n}}{\beta^{3n}} = F_{3n}.
\end{aligned}$$

2.4 Fibonacci e a Sequência de Lucas

Utilizando a relação de recorrência para os números de Fibonacci e diferentes condições iniciais, podemos encontrar novas sequência numéricas. Considere L_n o n-ésimo termo de uma sequência, com $L_1 = 1, L_2 = 3$, e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 3$.

$$L_3 = 1 + 3 = 4$$
$$\mathrm{L}_4 = 3 + 4 = 7$$
$$\mathrm{L}_5 = 4 + 7 = 11$$

Os resultados obtidos $1, 3, 4, 7, 11, ...$ correspondem aos termos da **Sequência de Lucas**.

Os números de Lucas podem ser dados por:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, n \geq 1.$$

Podemos dizer que essa é a primeira propriedades dos números de Lucas. Observe que há uma relação dos números de Lucas com os números de Fibonacci.

Vejamos algumas propriedades que relacionam os números de Fibonacci e os números de Lucas.

Propriedade 2.4.1 Definição recursiva dos Números de Lucas

$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, n \geq 1.$

Propriedade 2.4.2 $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}, n \geq 2.$

Utilizando a Propriedade 2.4.1 temos que $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, e pela sequência de Fibonacci sabemos que $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$ e $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$, substituindo na Propriedade 2.4.1, temos:

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1} \\ &= (F_{n+2} - F_n) + (F_n - F_{n-2}) \\ &= F_{n+2} - F_{n-2}, n \geq 2. \end{aligned}$$

Propriedade 2.4.3 $F_n + L_n = 2F_{n+1}$ para $n \geq 0.$

Para provar esta propriedade utilizaremos a definição recursiva dos Números de Fibonacci e a Propriedade 2.4.1. Vejamos:

$$F_n + L_n = (F_{n+1} - F_{n-1}) + (F_{n+1} + F_{n-1}) = 2F_{n+1}$$

Propriedade 2.4.4 $2L_{n+1} - L_n = 5F_n, n \geq 0.$

Utilizando a propriedade 2.4.3, $L_n = 2F_{n+1} - F_n$, e $L_{n+1} = 2F_{n+2} - F_{n+1}$, daí, podemos determinar:

$$\begin{aligned} 2L_{n+1} - L_n &= 2(2F_{n+2} - F_{n+1}) - (2F_{n+1} - F_n) \\ &= 4F_{n+2} - 2F_{n+1} - 2F_{n+1} + F_n \\ &= 4(F_{n+2} - F_{n+1}) + F_n \\ &= 4F_n + F_n = 5F_n \end{aligned}$$

Propriedade 2.4.5

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n, \quad \text{para} \quad n \geq 0$$

Provaremos esta propriedade utilizando as Propriedades 2.4.1 e 2.4.3 e a Fórmula de Cassini.

Então vejamos:

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n \\ (L_n - F_{n+1})\left(\frac{F_n + L_n}{2}\right) - F_n^2 &= (-1)^n \\ \left[L_n - \left(\frac{F_n + L_n}{2}\right)\right]\left(\frac{F_n + L_n}{2}\right) - F_n^2 &= (-1)^n \\ \left(\frac{L_n - F_n}{2}\right)\left(\frac{F_n + L_n}{2}\right) - F_n^2 &= (-1)^n \\ L_n^2 - F_n^2 - 4F_n^2 &= 4(-1)^n \\ L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n \end{aligned}$$

Teorema 2.4.1 Para $n \geq 0$,

$$F_{n+1} = \frac{F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2} \quad \text{e} \quad L_{n+1} = \frac{L_n + \sqrt{5[L_n^2 + 4(-1)^n]}}{2}$$

Prova Da Propriedade 2.4.3 já sabemos que

$F_n + L_n = 2F_{n+1}$, logo $2F_{n+1} - F_n = L_n$. Substituindo na Propriedade 2.4.5 obtemos:

$$\begin{aligned}(2F_{n+1}-F_n)^2-5F_n^2 &= 4(-1)^n\\ (2F_{n+1}-F_n)^2 &= 5F_n^2+4(-1)^n\\ 2F_{n+1}-F_n &= \pm\sqrt{5F_n^2+4(-1)^n}\\ F_{n+1} &= \frac{F_n\pm\sqrt{5F_n^2+4(-1)^n}}{2}\end{aligned}$$

Como $F_n \geq 0$, teremos:

$$F_{n+1} = \frac{F_n+\sqrt{5F_n^2+4(-1)^n}}{2}$$

Provamos assim a primeira parte do teorema. Vejamos a segunda parte:

Da Propriedade 2.4.4 sabemos que: $2L_{n+1}-L_n = 5F_n$, então $F_n = \frac{2L_{n+1}-L_n}{5}$

Substituindo na Propriedade 2.4.5, obtemos:

$$\begin{aligned}L_n^2-5\left(\frac{2L_{n+1}-L_n}{5}\right)^2 &= 4(-1)^n\\ L_n^2-\frac{(2L_{n+1}-L_n)^2}{5} &= 4(-1)^n\\ (2L_{n+1}-L_n)^2 &= 5[L_n^2+4(-1)^n]\\ 2L_{n+1} &= L_n+\sqrt{5[L_n^2+4(-1)^n]}\\ L_{n+1} &= \frac{L_n+\sqrt{5[L_n^2+4(-1)^n]}}{2}\end{aligned}$$

Teorema 2.4.2 Generalização da Identidade de Cassini

Para $n \geq r > 0$,

$$F_{n+r}F_{n-r}-F_n^2 = (-1)^{n+r+1}F_r^2$$

Antes de generalizar a fórmula de Cassini, vamos utilizar a fórmula de Binet para os números de Lucas.

Para $n \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}L_n^2 &= (\alpha^n+\beta^n)^2 = \alpha^{2n}+\beta^{2n}+2(\alpha\beta)^n\\ &= L_{2n}+2(-1)^n,\ \text{ desde que }\ \alpha\beta=-1\end{aligned}$$

Da Propriedade 2.4.5, temos

$5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n = [L_{2n} + 2(-1)^n] - 4(-1)^n = L_{2n} - 2(-1)^n$

ou $5F_n^2 + 2(-1)^n = L_{2n}$

Prova Usando a Fórmula de Binet para os Números de Fibonacci e substituindo no primeiro membro da Identidade de Cassini:

$$\begin{aligned}
F_{n+r}F_{n-r} - F_n^2 &= \\
&= \frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{n-r}\beta^{n-r}}{\alpha - \beta} - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \alpha^{n-r}\beta^{n+r} + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}
\end{aligned}$$

Como $(\alpha - \beta)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$, e $(\alpha\beta) = -1$, temos que $\alpha^-1 = -\beta, \beta^-1 = -\alpha$. Fazendo uso dessas relações, temos

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(\alpha\beta)^n\alpha^r\beta^{-r} - (\alpha\beta)^n\alpha^{-r}\beta^r + 2(-1)^n}{5} \\
&= \frac{-(-1)^n\alpha^r(\beta^{-1})^r - (-1)^n(\alpha^{-1})^r\beta^r + 2(-1)^n}{5} \\
&= \frac{-(-1)^n\alpha^r(-\alpha)^r - (-1)^n(-\beta)^r\beta^r + 2(-1)^n}{5} \\
&= \frac{-(-1)^n(-1)^r\alpha^{2r} - (-1)^n(-1)^r\beta^{2r} + 2(-1)^n}{5} \\
&= \frac{(-1)^{n+r+1}[\alpha^{2r} + \beta^{2r}] + 2(-1)^n}{5} \\
&= \frac{(-1)^{n+r+1}L_{2r} + 2(-1)^n}{5} \\
&= \frac{(-1)^{n+r+1}[5F_r^2 + 2(-1)^r] + 2(-1)^n}{5} \\
&= (-1)^{n+r+1}F_r^2 + \left(\frac{2}{5}\right)[(-1)^{n+2r+1} + (-1)^n] \\
&= (-1)^{n+r+1}F_r^2 + \left(\frac{2}{5}\right)[(-1)^{n+1} + (-1)^n] \\
&= (-1)^{n+r+1}F_r^2
\end{aligned}$$

2.5 Fermat e Fibonacci

O matemático francês Pierre de Fermat observou que os números $1, 3, 8, 120$ têm uma interessante propriedade.

Um mais o produto de quaisquer dois deles é um quadrado perfeito

$$\begin{gathered} 1+1.3=2^2 \\ 1+1.8=3^2 \\ 1+1.120=11^2 \\ 1+3.8=5^2 \\ 1+3.120=19^2 \\ 1+8.120=31^2 \end{gathered}$$

Em 1969, Alan Baker e Harold Davenport do Trinity College, em Cambridge provaram que se os números $1, 3, 8,$ e x têm essa propriedade, então x deve ser 120. Curiosamente, observe que $1 = F_2, 3 = F_4, 8 = F_6$ e $120 = 4.2.3.5 = 4F_3F_4F_5$. Assim, oito anos mais tarde, V. Hoggatt, Jr., e GE Bergum do Sul Universidade Estadual de Dakota, a partir dessa observação, estabeleceram a seguinte generalização:

Teorema 2.5.1 Os números $F_{2n}, F_{2n+2}, F_{2n+4}$ e $4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}$ têm a propriedade de *um mais o produto de quaisquer dois deles é um quadrado perfeito*.

Prova Pela fórmula de Cassini temos que $1 + F_{2n}F_{2n+2} = F_{2n+1}^2$. Da mesma forma, $1 + F_{2n+1}F_{2n+3} = F_{2n+2}^2$ e $1 + F_{2n+2}F_{2n+4} = F_{2n+3}^2$.

Em seguida, temos:

$$\begin{aligned} 1+F_{2n}(4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}) & \\ &= 1+4(F_{2n}F_{2n+2})(F_{2n+1}F_{2n+3}) \\ &= 1+4(F_{2n+1}^2-1)(F_{2n+2}^2+1)\text{pela fórmula de Cassini} \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4(F_{2n+2}^2-F_{2n+1}^2)-3 \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4(F_{2n+3}F_{2n})-3 \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4F_{2n+3}(F_{2n+2}-F_{2n+1})-3 \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4F_{2n+3}F_{2n+2}+4F_{2n+1}F_{2n+3}-3 \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4F_{2n+3}F_{2n+2}+4(F_{2n+2}^2+1)-3 \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4F_{2n+2}(F_{2n+3}-F_{2n+2})+1 \\ &= 4F_{2n+1}^2F_{2n+2}^2-4F_{2n+1F_{2n+2}+1} \\ &= (2F_{2n+1}F_{2n+2}-1)^2 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Relação dos Números de Fibonacci com outras áreas da Matemática

Estudaremos agora a relação dos Números de Fibonacci com outras áreas da Matemática, entre elas, destacamos a Trigonometria, as Matrizes e a Geometria. Abordaremos a Elipse e a Hipérbole de ouro. Faremos também uma apresentação dos números Tribonacci e algumas de suas propriedades

3.1 Fibonacci e a Trigonometria

A partir de algumas identidades trigonométricas e a fórmula de Binet, é possível determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci.

Essa fórmula foi estabelecida por W. Hope-Jones em 1921.

Considere as identidades trigonométricas:

1. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

2. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

3. $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$

Considerando as identidades e (1) e (2) em (3), obtemos:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos\theta((2\cos^2\theta - 1) - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta + 2\cos^3\theta - 2\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

Agora, considere $\theta = \pi/10$. Temos;

$$\tfrac{\pi}{2} = 5\theta = 2\theta + 3\theta.$$

Daí, temos que 2θ e 3θ são ângulos complementares e, $\sin 2\theta = cos3\theta$.

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Dividindo por $\cos\theta$ (com $\cos\theta \neq 0$),obtemos;

$$\begin{aligned} 2\sin\theta &= 4\cos^2\theta - 3 \\ 2\sin\theta &= 4(1-\sin^2\theta) - 3 \\ 2\sin\theta &= -4\sin^2\theta + 1 \quad \text{e,} \\ 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 &= 0, \end{aligned}$$

uma equação do segundo grau em $\sin\theta$.

Resolvendo a equação obtida, encontramos as raízes:

$$\sin\theta = \tfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4(4)(-1)}}{2(4)} = \tfrac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \tfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Como $\theta = \pi/10$ um arco do primeiro quadrante, temos que o $\sin\theta > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{\pi}{10} = \sin\theta = \tfrac{(-1+\sqrt{5})}{4} = -\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ =\text{-}\left(\tfrac{1}{2}\right)\beta = \left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(-\tfrac{1}{\alpha}\right)\right) = \tfrac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Desde que $\alpha\beta = -1$.

Calcularemos agora o $\cos 2\theta$.

Como $\theta = (\pi/10), (\pi/5) = 2\theta$ e

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{5} &= \cos 2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os termos por β^2, obtemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2\alpha^2)\beta^2}{2\alpha^2\beta^2} \\
&= \frac{2\alpha^2\beta^2 - \beta^2}{2\alpha^2\beta^2}(\text{para } \alpha\beta = -1, \beta^2 = \beta + 1) \\
&= \frac{1-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}.(\text{desde} \quad \text{que } \alpha + \beta = 1)
\end{aligned}$$

Daí, encontramos $\cos(\pi/5) = \alpha/2)$. Calculando o $\cos\frac{3\pi}{5}$, temos,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3\pi}{5} &= \cos 3\left(\frac{\pi}{5}\right) \\
&= 4\cos^3\frac{\pi}{5} - 3\cos\frac{\pi}{5} \\
&= 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha \\
&= \frac{1}{2}\alpha(\alpha^2 - 3)
\end{aligned}$$

Como $\alpha^2 + \beta^2 = 3 \to \alpha^2 - 3 = -\beta^2$, temos que,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3\pi}{5} &= \frac{1}{2}\alpha(-\beta) \\
\text{Como} \quad \alpha\beta = -1, \quad \text{temos} \quad \text{que} : \cos\frac{3\pi}{5} &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\beta}\right)(-\beta^2) \\
\cos\frac{3\pi}{5} &= \frac{1}{2}\beta
\end{aligned}$$

Já encontramos que $\cos(\pi/5) = \alpha/2$, então $\alpha = 2\cos(\pi/5)$ e $\cos(3\pi/5) = (1/2)\beta$. Logo $\beta = 2\cos(3\pi/5)$.

Substituindo as relações encontradas na Fórmula de Binet, podemos determinar a fórmula trigonométrica para os Números de Fibonacci. Vejamos:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(2\cos(\pi/5))^n - (2\cos(3\pi/5))^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2^n)\left[\cos^n\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^n\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right],\ n \geq 0. \end{aligned}$$

3.2 Fibonacci e as Matrizes

Agora, considere as propriedades e operações com matrizes. A partir delas, vamos relacionar os Números de Fibonacci a uma matriz especial, que foi estudada por Charles H. King, em sua Tese de Mestrado em 1960, Califórnia. Ele a chamou de Matriz Q.

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observe os resultados a seguir:

$Q^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$Q^3 = Q.Q^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$Q^4 = Q.Q^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$Q^5 = Q.Q^4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

A partir das matrizes obtidas, vamos escrever cada uma delas substituindo os termos pelos Números de Fibonacci:

Q=$\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$ $Q^2 = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$ $Q^3 = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix}$

$Q^4 = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix}$ $Q^5 = \begin{bmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{bmatrix}$

Partindo desse resultado, foi estabelecido o seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 Para a matriz

$Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ e $n \geq 1$, temos que:

$Q^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$.

Provemos o teorema por Indução Matemática. Vejamos:

Para $n = 1$, temos: $Q = \begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que é verdade.

Suponha que a igualdade seja verdadeira para algum n inteiro positivo. Provemos que é válida para $n + 1$.

Por hipótese, temos $Q^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$. Calculando Q^{n+1}, encontramos:

$Q^{n+1} = Q.Q^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Fn + 1 + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{vmatrix}$

Provamos, assim, a veracidade de $Q^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Podemos provar a Fórmula de Cassini utilizando a relação dos Números de Fibonacci com as matrizes e determinantes. Para isso, faremos uma breve revisão de três propriedades dos determinantes.

Vejamos:

1. det(AB)=det(A).det(B)

2. det(A^n) $= [det(A)]^n$

3. det(A^{m+n}) $= det(A^m A^n) = det(A^m)det(A^n)$

Calculemos o determinante da Matriz Q:

$Q = \begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1.0 - 1.1) = -1$

Agora, considere a matriz Q^n e seu determinante:

$Q^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2$

E, utilizando a Propriedade (2) dos determinantes, temos que:

$det(Q) = -1 \rightarrow det(Q^n) = [det(Q)]^n = (-1)^n$, logo, $F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 = (-1)^n$.

Agora, vamos considerar uma Matriz M. Essa matriz foi estudada por Sam Moore do Colégio Comunidade de Allegheny County na Pensilvânia. $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Podemos verificar pelo Princípio da Indução Matemática que:

$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$ onde $n \geq 1$.

Ainda podemos escrever:
$\frac{M^n}{F_{2n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \\ \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} & \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} \end{bmatrix}$
Sendo $\lim_{k\to\infty} \frac{F_k}{F_{k-1}} = \alpha$, segue-se que:
$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{F_{2n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$
Dessa forma, temos que a sequência (M^n/F_{2n-1}) das matrizes de Fibonacci com entrada um converge para a matriz
$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$
Enquanto que a sequência (Q^n/F_{2n-1}) converge para a matriz:
$\begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

3.3 Fibonacci e a Geometria Euclidiana

3.3.1 O Número de Ouro

O número de ouro é um número irracional representado pela letra grega ϕ. Símbolo da proporcionalidade, aparece na natureza, na música, na arte e na arquitetura. A divisão de um segmento segundo essa proporcionalidade é denominada divisão áurea. Euclides a chamou de divisão em média e extrema razão.

Vejamos a conexão do número de ouro ou razão áurea com a sequência de Fibonacci.

Considere a sequência $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, n > 1$, em que os F_n são termos da sequência de Fibonacci. Essa sequência representa a taxa de crescimento do número de coelhos entre o $(n+1)$-ésimo e o n-ésimo mês. Tal sequência é dada por:
$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} \ldots$
Teorema 3.3.1 Tem-se que $(r_n), n \geq 1$, é dada recursivamente por

$$r_1 = 1 \quad e \quad r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1, n \geq 2.$$

PROVA Considerando a sequência dada por $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, e da definição recursiva dos números de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, segue-se que:

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Utilizando a equação anterior, nota-se que o limite da sequência (r_n), caso exista, é solução da equação $r^2 - r - 1 = 0$, que tem uma única raiz positiva.

De fato, do Teorema anterior sabe-se que

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r_{n-1}} + 1\right),$$

ou seja,

$$r = \frac{1}{r} + 1,$$

em que

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Segue-se, pois, que

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749895...$$

onde r é o número de ouro. A sequência r_n é convergente, então seu limite é

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para justificar a passagem ao limite na expressão

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1,$$

deve-se mostrar que r_n é uma sequência convergente.

Inicialmente, observa-se que

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2}+1}, n \geq 3.$$

Consideremos as subsequências (r_{2n}) e (r_{2n-1}) de (r_n), ou seja, as subsequências de índices pares e ímpares, respectivamente. Mostraremos por indução que (r_{2n}) é decrescente e (r_{2n-1}) é crescente. De fato, temos que:

(i) $r_2 = 2 > r_4 = \frac{5}{3}$.

(ii) Suponha válido para $n = k$, isto é,

$$r_{2k} > r_{2k+2}$$

Como a função

$$f(x) = 2 - \tfrac{1}{x+1}, x \geq 0$$

é crescente, temos que

$$r_{2k+2} < r_{2k} \Rightarrow f(r_{2k+2}) < f(r_{2k}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - \tfrac{1}{r_{2k+2}+1} < 2 - \tfrac{1}{r_{2k}+1}{}_{2k+4} < r_{2k+2}.$$

Com isso, mostramos que (r_{2n}) é decrescente. De forma análoga, prova-se que (r_{2n-1}) é crescente. As duas sequências são convergentes e satisfazem a mesma relação de recorrência

$$r_n = 2 - \tfrac{1}{r_{n-2}+1},$$

Concluimos então que seus limites são iguais e, consequentemente, (r_n) converge para esse mesmo limite, que já foi encontrado anteriormente.

3.3.2 O Retângulo Áureo

Um retângulo $ABCD$ é áureo quando apresenta a seguinte propriedade: se dele retira-se um quadrado $ABEF$, o retângulo $CDEF$ restante será semelhante ao retângulo original.

Observe as figuras a seguir:

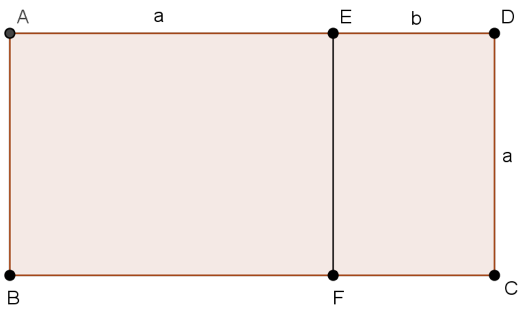

Figura 3.1: O Retângulo $ABCD$

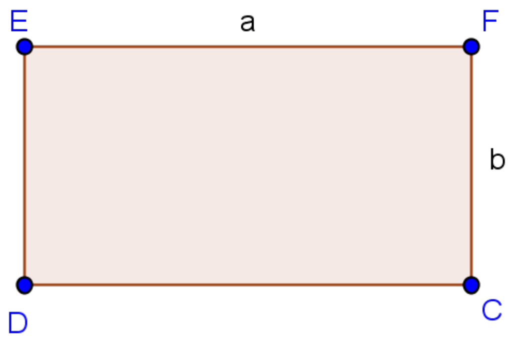

Figura 3.2: Retângulo Áureo

Ou seja,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

A construção de um retângulo áureo pode ser feita a partir dos seguintes passos:

1. Constroi-se um quadrado $ABFE$ de lado a e divide-se um dos lados desse quadrado ao meio. Nomeie de M o ponto que intercepta o lado AE do quadrado.

2. Em seguida, traça-se a diagonal que liga o ponto M ao seu vértice oposto, ou seja, o ponto F.

3. Com o compasso fixado no ponto M, traça-se o arco de comprimento MF até que ele encontre o prolongamento da base. O ponto de intersecção do arco com o prolongamento será o ponto D.

4. A partir do ponto D, traça-se um segmento de reta perpendicular à base do quadrado. Depois, prolonga-se o lado superior até que este encontre o segmento de reta. O retângulo é exatamente o Retângulo Áureo, como mostra a figura 3.3.

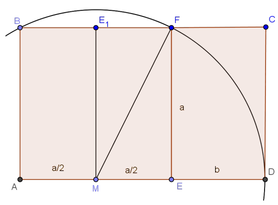

Figura 3.3: Retângulo Áureo

Para comprovar que o retângulo $ABCD$ é de fato áureo, basta observar que

$$MF = MD = b + \tfrac{a}{2}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo MEF, obtêm-se

$$\left(b + \tfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\tfrac{a}{2}\right)^2,$$

Ou seja, $b^2 + ab = a^2$, que é equivalente a $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$.

3.3.3 Divisão Áurea

Dado um segmento AB, diz-se que um ponto C pertencente ao segmento AB divide este segmento em média e extrema razão se

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$$

Considere $AC = a$ e $CB = b$. Substituindo na relação anterior, temos:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \to b^2 + ab = a^2. \quad (2)$$

Considere o número $m = \frac{a}{b}$, ao dividir os membros da equação (2) por b^2, obtemos:

$$m^2 = m + 1$$
$$\mathrm{m}^2 - m - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos uma raiz positiva:

$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para se dividir um segmento em média e extrema razão pode-se seguir os passos:

1. Utilizando o compasso, pode-se obter o ponto médio M do segmento AB.

2. Em seguida, traça-se uma reta perpendiculat ao segmento AB, passando por B.

3. Com o compasso fixado no ponto B, traça-se um arco de comprimento MB até que este cruze a reta perpendicular ao segmento AB. Obtem-se, assim, um segmento BD medindo exatamente a metade do segmento AB.

4. Unindo o ponto D ao ponto A, constroi-se o triângulo ABD.

5. Com o compasso fixado no ponto D, traça-se um arco de comprimento DB até que ele cruze a hipotenusa AD do triângulo, obtendo o ponto E.

6. Com o compasso fixado em A, traça-se um arco de comprimento EA até que este encontre o segmento AB. Chega-se ao ponto C, que divide o segmento AB em média e extrema razão.

Se $AC = a$ e $CB = b$, então, da construção anterior, segue-se que

$$AB = a + b, AE = a, ED = BD = \frac{a+b}{2} \text{ , ou seja, } b(a + b) = a^2$$

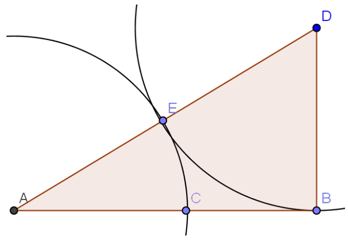

Figura 3.4: Divisão Áurea

3.3.4 Exemplos

Abordaremos alguns exemplos relacionando os Números de Fibonacci e a Geometria Euclidiana.

Exemplo 3.3.1 Este primeiro exemplo foi proposto por J.A.H. Hunter em 1963.

Determine os pontos P e Q em dois lados adjacentes do retângulo $ABCD$, de acordo com a Figura 3.5, de modo que as áreas dos triângulos APQ, BQC, CDP sejam iguais.

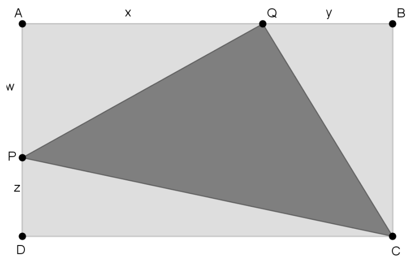

Figura 3.5:

Solução Pela Figura, temos que $AQ = x, QB = y, AP = w$ e $PD = z$. Como as áreas dos triângulos APQ, QBC e CDP devem ser iguais, temos que:

$$\frac{z(x+y)}{2} = \frac{y(w+z)}{2} = \frac{xw}{2}$$
$$z(x+y) = y(w+z) = xw$$

Resolvendo as equações duas a duas, temos $z(x+y) = y(w+z) \rightarrow zx = yw$ e $x/y = w/z$. Da equação $xw = z(x+y)$, temos que $w/z = (x+y)/x$, daí, pode concluir que:

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}$$

Substituindo $x/y = t$, encontramos a equação $t^2 = t + 1$. Como $x/y > 0$, a solução da equação que satisfaz é:

$$\frac{x}{y} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e,

$$\frac{w}{z} = \frac{x}{y} = \alpha$$

Exemplo 3.3.2 Em 1964, H.E. Huntley de Somerset, na Inglaterra, realizou ainda mais estudos com o problema do Exemplo 3.3.1 e enunciou e provou o seguinte problema: Se $ABCD$ é um retângulo áureo, então PQC é um triângulo retângulo isósceles, com ângulo reto em Q.

Solução Sendo $ABCD$ um retângulo áureo,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x+y}{w+z} = \alpha$$

Do exemplo 3.3.1, $x = y\alpha$ e $w = z\alpha$,

$$= \frac{y(1+\alpha)}{z(1+\alpha)} = \alpha \rightarrow y = z\alpha.$$

Mas $z\alpha = w$, então $y = w$. E $AP = BQ$.

Sabemos que $x = y\alpha = (z\alpha)\alpha = z\alpha^2 = z(\alpha+1) = z\alpha+z = w+z$; daí, $AQ = BC$. Pelo caso lado-ângulo-lado (LAL), os triângulos APQ e BQC são congruentes, logo $PQ = QC$, então o triângulo PQC é isósceles de base PC.

Como $\triangle APQ \equiv \triangle BQC, \angle AQP = \angle BCQ$.

Mas $\angle BCQ + \angle BQC = 90^o$. Daí, $\angle AQP + \angle BQC = 90^o$, então $\angle PQC = 90^o$. Logo $\triangle PQC$ é um triângulo retângulo isósceles de base PC. (Veja a Figura 3.6).

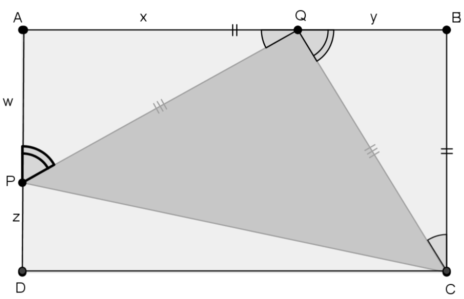

Figura 3.6:

Como $\angle CPQ = 45^o$ temos que $= 45^o$. Logo $\overline{PQ} \| \overline{BD}$

Podemos encontrar uma fórmula para a área do PQC:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}PQ.QC \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{AP^2+AQ^2}.\sqrt{BQ^2+BC^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{w^2+x^2}.\sqrt{y^2+(w+z)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+x^2} \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2) \\
&= \frac{1}{2}(y^2\alpha^2+y^2) = \frac{y^2}{2}(1+\alpha^2) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+2)y^2
\end{aligned}$$

3.4 A Elipse e a Hipérbole de Ouro

3.4.1 A Elipse de ouro

O conceito de uma elipse de ouro foi introduzido em 1964 por H.E. Huntley da Inglaterra. Além disso, realizou estudos de suas propriedades.

Numa elipse de ouro (Figura 3.7), a razão do eixo maior para o eixo menor é a razão áurea.

Denote $2a$ a medida do eixo maior e $2b$ a medida do eixo menor. Sabe-se que $b^2 = a^2(1-e^2)$. Para a elipse de ouro, temos:

$$\tfrac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \tfrac{1}{\alpha^2} = \beta^2$$

Portanto,

$$e^2 = 1 - \beta^2 = -\beta$$

Dessa forma se define a excentricidade de uma elipse de ouro, $e = \sqrt{-\beta}$. Consequentemente, a metade do eixo menor é dado por $b^2 = a^2\beta^2$, então $b = a|\beta|$.

Se inscrevermos uma elipse de ouro em um retâgulo com os seus lados parelelos aos eixos, esse retângulo será áureo.

Sejam os focos da elipse de ouro dados por F e F'. Segue-se que $OF = ae = a/\sqrt{\alpha} = a\sqrt{-\beta}$ e $BF = \sqrt{b^2+a^2e^2} = a$.

Considere $= \theta$. Temos $\sec\theta = BF/OB = a/b = \alpha$ Considere a reta $\overleftrightarrow{ON}$ e é perpendicular a diretriz $\overleftrightarrow{ND}$. Então $ON = a/e = a\sqrt{\alpha}$.

$$\begin{aligned} FN = ON - OF &= a\sqrt{\alpha} - \frac{a}{\alpha} \\ &= \frac{a(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} \\ &= -\frac{a\beta}{\sqrt{\alpha}} = a|\beta|^{3/2} \end{aligned}$$

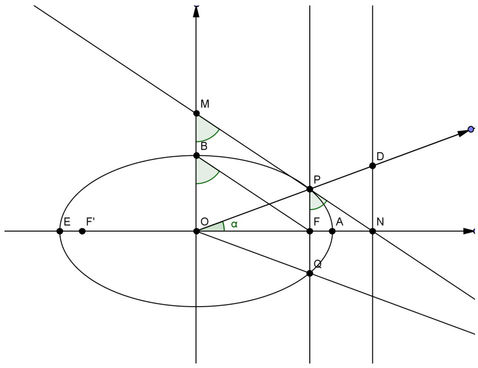

Figura 3.7:

Em qualquer elipse, o semi-eixo menor é média geométrica do semi-eixo maior pela distância do centro ao foco, ou seja $b^2 = al$. Então, na elipse de ouro, temos:

$$PQ = l = \frac{b^2}{a} = b\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{\alpha}$$

mas, $a : b : l = b\alpha : b : b/\alpha = \alpha : 1 : 1/\alpha = \alpha^2 : \alpha : 1$.

Note que:

$$\frac{ON}{FN} = \frac{a\sqrt{\alpha}}{a/\sqrt{\alpha}} = \alpha$$

e,

$$\frac{OF}{FN} = \frac{a/\sqrt{\alpha}}{a(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1} = \alpha$$

Então, o foco F, divide o segmento ON na razão áurea.

Considere PQ um segmento perpendicular ao eixo maior passando pelo foco F. Temos que,

$$\begin{aligned} OP^2 &= OF^2 + FP^2 = \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\alpha^2} \\ &= b^2\alpha + \frac{b^2}{\alpha^2} \\ &= \frac{b^2(\alpha^3+1)}{\alpha^2} \\ &= \frac{b^2(2\alpha+2}{\alpha^2} \\ &= 2b^2 \\ OP &= \sqrt{2}b \end{aligned}$$

Uma elipse tem a propriedade de que a tangente em P passa por N e a $\cot = e$. Desde que $\cot\theta = OB/OF = b/ae$, segue-se, no caso particular da elipse de ouro, que:

$$\cot = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-\beta}$$

e,

$$\cot\theta = \tfrac{1}{ea} = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-\beta}$$

Então $\angle FPN = \theta$. Visto que $MPFB$ é um paralelogramo então $MP = BF = a$.

Ainda podemos verificar que $\triangle OMN \sim \triangle FPN$, então

$$\begin{aligned} \frac{MN}{PN} &= \frac{ON}{FN} \\ \frac{MP}{PN} + 1 &= \frac{ON}{FN} + 1 \\ \frac{MP}{PN} &= \frac{ON}{FN} = \alpha \end{aligned}$$

Daí, P divide $\overline{MN}$ na Razão Áurea.

Observe que $\overline{OP}$ intersecta a diretriz ND no ponto D. Como $\triangle OND \sim \triangle OFP$, temos que:

$$\tfrac{OD}{OP} = \tfrac{ON}{OF} = \alpha$$

Então P divide $\overline{OD}$ na Razão Áurea.

3.4.2 A Hipérbole de Ouro

A Hipérbole de Ouro (Figura 3.8) também foi estudada por Huntley, apresenta um extenso estudo das propriedades em seu livro *A Divina Proporção*.

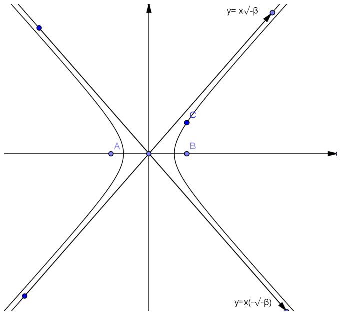

Figura 3.8:

A excentricidade da Hipérbole de Ouro é definida por $e^2 = \alpha$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2(e^2-1) \\ &= a^2(\alpha - 1) \\ &= -a^2\beta \\ \Rightarrow \frac{a}{b} &= \sqrt{\alpha} \\ b &= a\sqrt{-\beta} \end{aligned}$$

As assíntotas da Hipérbole de Ouro são dadas por $y = \pm(b/a)x$, ou ainda, $y = \pm\sqrt{-\beta}x$.

3.5 Números Tribonacci

Vimos que na Sequência de Fibonacci e na de Lucas, dados os dois primeiros termos, podemos determinar os termos seguintes a partir da definição recursiva. Agora, suponha que seja dada uma condição inicial com os três primeiros termos, e para determinar o sucessor imediato basta somar os três primeiros, para calcular o segundo sucessor, somar os três antecessores imediatos. Essa sequência é chamada de Sequência Tribonacci. Essa sequência foi estudado inicialmente em 1963 por M. Feinberg quando ele era um jovem de 14 anos, cursando a nona série na Susquehanna Township High School, na Pensilvânia.

3.5.1 Os Números Tribonacci

Os Números Tribonacci são definidos pela relação de recorrência

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

Em que $T_1 = 1 = T_2, T_3 = 2$, com $n \geq 4$.

Os primeiros Números Tribonacci são:

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, ...$$

Assim, como a sequência das razões entre dois números consecutivos de Fibonacci converge para a razão áurea, a sequência formada pela razão de dois Números Tribonacci consecutivos também converge para um número irracional 1.83928675521416...

3.5.2 Matrizes Tribonacci

Podemos obter os vários Números Tribonacci calculando as somas dos elementos das diagonais crescentes de uma matriz triangular, uma Matriz Tribonacci. Cada elemento $t(m, n)$ da matriz é definido da seguinte maneira, com $m, n \geq 0$:

$$t(m, n) = 0, \quad \text{se} \quad m > n \quad \text{ou} \quad n < 0$$
$$\text{t(m,n)=1}, \quad \text{t(m,n)=t(m-1,n-1)+t(m-1,n)+t(m-2,n-1)}, \quad \text{se} \quad \text{m} \geq 2$$

Usando a relação de recorrência, podemos determinar todos os elementos da matriz adicionando os elementos vizinhos dos dois conjuntos anteriores. A pirâmide a seguir mostra a matriz resultante. Note que os números do centro da matriz são mesmo Números Tribonacci.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 13 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 25 & & 25 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 11 & & 41 & & 63 & & 41 & & 11 & & 1
\end{array}$$

Existe ainda uma outra matriz triangular que também produz os vários Números Tribonacci. Para construir essa matriz, primeiro vamos desenvolver os trinômios para valores de $n \geq 0$:

$(1 + x + x^2)^0 = 1$

$(1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)^1 = 1 + x + x^2$
$(1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$
$(1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$
$(1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)^4 = 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$

Agora,vamos organizar uma matriz com os coeficientes do desenvolvimento dos trinômios e verificar que os números obtidos também correspondem a uma sequência de Números Tribonacci.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 21 & 50 & 90 & 126 & 141 & 126 & 90 & 50 & 21 & 6 & 1
\end{array}
$$

Cada linha é simétrica, com exceção das duas primeiras.

Cada linha pode ser obtida a partir da soma dos elementos da linha precedente, repetindo o primeiro e último termo, que é igual a 1.

A soma dos elementos das diagonais crescentes é um Número Tribonacci.

3.5.3 Compondo Somas com 1, 2 e 3.

Agora vamos compor números inteiros utilizando as somas com 1, 2 e 3. Observemos a quantidade de composições encontradas em cada caso, de acordo com a tabela a seguir:

n	Composições de n usando 1, 2 e 3.	C_n
1	1	1
2	1+1, 2	2
3	1+1+1, 1+2, 2+1, 3	4
4	1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1,2+2, 1+3, 1+3	7
5	1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+3, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+3+1, 3+1+1, 2+3, 3+2, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1	13

Nessa tabela, encontramos a composição dos inteiros de 1 a 5. Observando os resultados, verificamos que os números que representam a quantidade de composições são Números Tribonacci. Verifica-se ainda, que $C_n = T_{n+1}$, onde $n \geq 1$.

Algoritmo Recursivo

Usando a definição recursiva de T_n, podemos desenvolver um algoritmo recursivo para calcular T_n. Esse algoritmo compõe os primeiros Números Tribonacci, utilizando a definição recursiva, onde $n \geq 4$

$$T_1 = T_2 = 1, T_3 = 2$$
$$\mathrm{T}_i = T_{i-1} + T_{i-2} + T_{i-3}, \quad \text{com } i \leq n$$

vamos explorar uma fórmula para o número de adições a_n necessárias para calcular T_n de forma recursiva. Por exemplo, leva duas adições para calcular o T_4, isto é, $a_4 = 2$.

Usando a relação de recorrência $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, podemos definir a_n recursivamente:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2,$$

com $n \geq 4$, e $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Suponha $b_n = a_n + 1 \Rightarrow a_n = b_n - 1$. Substituindo na relação $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2$, encontramos:

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} - 3 + 2 \\ b_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} \end{aligned}$$

com $b_1 = b_2 = b_3 = 1$. Os doze primeiros termos da sequência b_n são

$1, 1, 2, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355$.

Teorema 3.1.5 Seja a_n o número de adições necessárias para calcular T_n de forma recursiva. Com $a_n = T_{n-1} + T_{n-3} - 1$, em que $n \geq 4$.

Prova Provemos por Indução.

Para $T_3 + T_1 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 = a_4$ a fórmula é verdadeira com $n = 4$. Agora, suponha verdadeira para todo inteiro positivo k, com $k \geq 4$. Vejamos:

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}$$

Então

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + 2 \\ &= (T_{n-1} + T_{n-3} - 1) + (T_{n-2} + T_{n-4} - 1) + T_{n-3} + T_{n-5} - 1) + 2 \\ &= (T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}) + (T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5}) - 1 \\ &= T_n + T_{n-2} - 1 \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio da Indução matemática, a fórmula é válida para todo $n \geq 4$.

3.5.4 Função Geradora para T_n

Usando a definição recursiva, podemos desenvolver uma função geradora para o os Números Tribonacci. Para isto, considere,

$$g(x) = \sum_{0}^{\infty} T_n x^n, \quad \text{desde que} \quad T_0 = 0.$$

Segue-se que $(1 - x - x^2 - x^3)g(x) = T_1 x$

Daí, temos

$$g(x) = \tfrac{x}{1-x-x^2-x^3}$$

Assim

$$\tfrac{x}{1-x-x^2-x^3} = \sum_{0}^{\infty} T_n x^n$$

Desde que

$$\tfrac{1}{1-u} = \sum_{0}^{\infty} u^n$$

Segue-se que

$$\tfrac{x}{1-x-x^2-x^3} = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \cdots$$

Os Números Tribonacci aparecem como coeficientes do polinômio do segundo membro.

3.5.5 Polinômios Tribonacci

Em 1973, V.E. Hoggatt e M. Bicknell generalizaram os Polinômios Fibonacci para Polinômios Tribonacci $t_n(x)$. Esses polinômios são definidos por

$$t_n(x) = x^2 t_{n-1}(x) + x t_{n-2}(x) + t_{n-3}(x)$$

Onde, $t_0(x) = 0, t_1(x) = 1$ e $t_2(x) = x^2$. Note que $t_n(1) = T_n$, o n-ésimo Número Tribonacci.

A seguir, apresentamos uma relação com os dez primeiros Polinômios Tribonacci.

$$\begin{aligned}
t_1(x) &= 1 \\
t_2(x) &= x^2 \\
t_3(x) &= x^4 + x \\
t_4(x) &= x^6 + 2x^3 + 1 \\
t_5(x) &= x^8 + 3x^5 + 3x^2 \\
t_6(x) &= x^{10} + 4x^7 + 6x^4 + 2x \\
t_7(x) &= x^{12} + 5x^9 + 10x^6 + 7x^3 + 1 \\
t_8(x) &= x^{14} + 6x^{11} + 15x^8 + 16x^5 + 6x^2 \\
t_9(x) &= x^{16} + 7x^3 + 21x^{10} + 30x^7 + 19x^4 + 3x \\
t_{10}(x) &= x^{18} + 8x^{15} + 28x^{12} + 50x^9 + 45x^6 + 16x^3 + 1
\end{aligned}$$

Já vimos na subsecção das Matrizes Tribonacci que a soma de elementos da matriz produzem Números Tribonacci. Mostraremos na tabela a seguir, elementos de uma diagonal correspondentes aos coeficientes de um Polinômio Tribonacci.

Consedere que $T(n, j)$ denota o elemento em linha n e coluna j da matriz, em que $n > j \geq 0$ e satisfaz a relação de recorrência

$$T(n, j) = T(n - 1, 7) + T(n - 2, j - 1) + T(n - 3, J - 2)$$

onde $n \geq 4$. Veja a tabela a seguir:

n/j								Soma
1	1							1
2	1							1
3	1	1						2
4	1	2	1					4
5	1	3	3					7
6	1	4 $\searrow$	6	2				13
7	1	5	10 $\searrow$	7	1			24
8	1	6	15	16	6			44
				$\downarrow$				
9	1	7	21	30	19	3		81
10	1	8	28	50	45	16	1	149

Uma Fórmula para os Polinômios Tribonacci

Uma fórmula para os Polinômios Tribonacci $t_n(x)$ é dada por

$$t_n(x) = \sum_{j=0}^{[(2n-2)/3]} T(n,j)x^{2n-3j-2}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} t_5(x) &= \sum_{0}^{2} T(5,j)x^{8-3j} \\ &= T(5,0)x^8 + T(5,1)x^5 + T(5,2)x^2 \\ &= x^8 + 3x^5 + 3x^2 \end{aligned}$$

Polinômios Tribonacci e a Matriz Q

Podemos generalizar os Polinômios Tribonacci utilizando a Matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando o Princípio da Indução Matemática, podemos mostrar que

$$Q^n = \begin{bmatrix} t_{n+1}(x) & t_n(x) & t_{n-1}(x) \\ xt_n(x) + t_{n-1}(x) & xt_{n-1} + t_{n-2}(x) & xt_{n-2}(x) + t_{n-3}(x) \\ t_n(x) & t_{n-1}(x) & t_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

Como $|Q| = 1$, segue-se que $|Q^n| = 1$; isto é,

$$\begin{vmatrix} t_{n+1}(x) & t_n(x) & t_{n-1}(x) \\ xt_n(x) + t_{n-1}(x) & xt_{n-1} + t_{n-2}(x) & xt_{n-2}(x) + t_{n-3}(x) \\ t_n(x) & t_{n-1}(x) & t_{n-2}(x) \end{vmatrix} = 1$$

Agora, multiplicando a linha 1 por x^2 e adicionando linha 2, em seguida alterna-se as posições das linhas 1 e 2. Dessa forma obtemos uma Identidade de Polinômio Tribonacci:

$$\begin{vmatrix} t_{n+2}(x) & t_{n+1}(x) & t_n(x) \\ t_{n+1}(x) & t_x & t_{n-1}(x) \\ t_n(x) & t_{n-1}(x) & t_{n-2}(x) \end{vmatrix} = -1$$

Em particular, para $x = 1$, obtemos a seguinte Identidade Tribonacci:

$$\begin{vmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} & T_n \\ T_{n+1} & T_n & T_{n-1} \\ T_n & T_{n-1} & T_{n-2} \end{vmatrix} = 1$$

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl. B., *A History of Mathematics*, Tradução de Ed. Edgard Blucher LTDA, (2001).

[2] EVES, Howard,*História da Geometria*,São Paulo:ATUAL, (1992).

[3] GRIMALDI, Ralph P., *Fibonacci and Catalan Numbers: An Introdution*, New Jersey:Wiley, (2012).

[4] HEFEZ, Abramo, *Elementos de Aritmética*, Rio de Janeiro: SBM, (2011)

[5] KOSHY, Thomas, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, New York: Wiley, (2001).