UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO

LUCIANO GOMES NETO

UFMA - São Luis
Novembro/2014

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO

LUCIANO GOMES NETO

Orientador: Prof. Dr. Josenildo Souza Chaves

Doutor em Estatística

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, como requisito parcial para elaboração da dissertação de mestrado e obtenção de título de Mestre em Matemática.

UFMA - São Luis

Novembro/2014

G633u

Gomes Neto, Luciano
O uso do geogebra no estudo de funções reais no ensino médio / Luciano Gomes Neto. – São Luís, 2014.

64 f., il.
Orientador: Josenildo Souza Chaves
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, 2014.

1. Médio. 2. Funções elementares. 3. Geogebra. I. Título.

CDU: 514:371.31

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE FUNÇÕES REAIS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, como requisito parcial para elaboração da dissertação de mestrado e obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josenildo Souza Chaves.

Doutor em Estatística

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Estatística

Prof. João Coelho Silva Filho

Doutor em Engenharia Elétrica/Telemática

Mauricio de Araujo Ferreira

Doutor em Matemática

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus por está presente em todos os momentos de minha vida;

Ao professor Doutor Josenildo Souza Chaves pela paciência, dedicação, habilidade e competência com que me orientou nesta pesquisa;

A Capes pelo apoio financeiro;

Aos professores e coordenadores da UFMA que contribuiram para o PROFMAT;

Agradeço aos professores do Programa de Pós Graduação PROFMAT, pela iniciativa, dedicação e pelo brilhantismo que demonstraram no decorrer do curso;

A minha mãe Lucira de Fátima Gomes pela dedicação para minha educação quando jovem;

A minha esposa Alana pela compreensão à minha ausência nos momentos destinados ao curso;

Ao meu filho Lucas que nos momentos de cansaço me deu motivos para não desitir;

Aos colegas do curso PROFMAT, pelo companherismo e auxilio nas horas difíceis e pelos momentos de descontração;

Emfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuiram para a realização e conclusão deste Mestrado Profissional.

Resumo

Neste trabalho propomos o uso do software GeoGebra, com a aplicação de atividades para visualização de gráficos de funções elementares. Esperamos que o trabalho possa ser utilizado para motivar os professores do ensino médio a implementar no processo do ensino-aprendizagem de funções, o Geogebra. Eventuais conjecturas que surgem na sala de aula podem ser investigadas com o apoio computacional.

Palavras-chave: Ensino médio, funções elementares, GeoGebra.

Abstract

In this work we propose the use of GeoGebra software, by applying activities for viewing graphs of elementary functions. We hope the work can be used to motivate secondary school teachers to implement in the teaching-learning process functions, Geogebra. Possible conjectures that arise in the classroom can be investigated with computational support.

Keywords: Secondary school, elementary functions, GeoGebra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Para determinar resultados por meios de leis [1] que tem como características a relação entre variáveis de fenômeno da natureza, podemos utilizar o conceito de função. Este conceito está relacionado às variações quantitativas de grandezas que podem ser de fenômenos naturais, consumo de energia, transações financeiras, etc. Como exemplo pode–se estudar a relação existente entre as grandezas espaço e tempo em movimento uniformemente acelerado de uma partícula. Neste movimento podemos ter uma função quadrática.

Na área de Ciências e Exatas, geralmente encontramos alunos que tem bastante dificuldade de aprendizagem no que se refere à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que exige inicialmente o entendimento do conceito de função real e de suas representações em gráficos bem como propriedades e, por exemplo, o domínio e imagem.

Rezende (1994) ressalta que para os alunos de Cálculo dificuldades na aprendizagem que tem relação com limites e funções estão associadas muito mais às dificuldades em manipulação algébricas (relações trigonométricas, fatoração de polinômios, produtos notáveis, etc) do que a interpretação analítica.

Na busca das causas de altos índices de reprovação nessa disciplina, Barufi (1999), citado por Rezende(2003, p.1) revela que o índice de não – aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos

[1] Relações matemáticas que relacionam gradezas escalares ou vetoriais. Surgem em pesquisas nas mais diversas áreas: Física, Economia, Agronomia, Ecologia , Meteorologia, Genética, Engenharia, entre outras.

da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%, isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo.

Para identificar as causas destes altos índices de reprovação na disciplina de cálculo e de vários problemas no ensino-aprendizagem de assuntos tais como limite e continuidade, derivadas e integrais de funções, nos depararamos com um conceito básico: O conceito de função. É um pré-requisito fundamental e aí ocorrem várias dificuldades dos alunos.

Bianchini e Puga (2004), ao aplicarem teste de diagnóstico com os alunos do Curso de Ciência da Computação da PUC/SP na disciplina de Cálculo, observaram que eles forneciam definições por meio de exemplos, relacionavam função com equação. Além disso, apresentavam dificuldades nas representações gráficas.

De fato, no ensino de funções reais no ensino médio, parece não ficar claro qual é o comportamento de uma função quando traçado seu gráfico. Poucos alunos conseguem observar o que acontece com uma grandeza quando variamos outra.

Motivado pela existência dessa situação, este trabalho tem como objetivo principal o uso de programas computacionais de geometria dinâmica [2], em particular o Geogebra para que tenhamos uma evolução qualitativa de forma que diminuam as dificuldades nas interpretações gráficas das funções. A importância do uso de softwares matemáticos é destacada em Campos (1994, p.12). Abordaremos, além do conceito de função, outros elementos presentes no estudo de funções reais.

1.1 Organização dos capítulos

O presente trabalho constitui–se de cinco capítulos. No Capítulo 2, descrevemos o conceito de funções e gráficos das funções reais. No Capítulo 3,

[2] A expressão "geometria dinâmica " refere–se a permição da elabroração de construções eletrônicas nos quais os elmentos básicos podem ser movimentados na tela do computador.

descrevemos as funções reais elementares. No Capítulo 4, apresentamos uma proposta para a introdução e exploração dos primeiros conceitos de função. O Geogebra é utilizado para construção de gráficos de funções elementares. O Capítulo 5 trata das considerações finais e algumas sugestões que possam complementar e contribuir para o ensino–aprendizagem de funções.

Capítulo 2

Conceito de Função

Em diversas situações, práticas, o valor de uma certa quantidade depende do valor de uma outra. Por exemplo, o salário de um funcionário pode depender do total de horas trabalhadas; a distancia percorrida por uma bicicleta pode ser escrita em função do número de pedaladas; em chamadas telefônicas, podemos relacionar o tempo de conversa a quantidades de pulsos a serem cobrados; na geometria podemos relacionar a área de um quadrado com a medida do lado, e assim por diante. A relação de tais quantidades é dada frequentemente por uma função. Para nossos própositos, iremos restringir as quantidades de interesse no conjunto dos números reais.

Definição 2.1 *Leithold (1994). Uma função é um conjunto de pares ordenados de números* (x, y)*, sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjuntos de todos os valores admissíveis de* x *é chamado de* ***domínio*** *da função e o conjunto de todos os valores resultantes de* y *é chamado de* ***imagem*** *da função.*

A Definição 2.1 estabelece que dois pares ordenados distintos não tem o mesmo primeiro número. Significa que y deve ser único para valores específicos de x. Para os valores atribuídos a x e como os valores de y independem dos valores de x, tem–se que x será a **variável independente** e y, a **variável dependente**.

As funções normalmente são conceitualizadas como um tipo especial de relação (Chazan δ Yerushalmy, 2003). De fato, toda a equação linear do tipo

$ax + by = c$, com $a, b \neq 0$, pode ser escrita através de uma equação equivalente $y = -\dfrac{a.x}{b} + \dfrac{c}{b}$, que é, também, uma função afim numa variável. Para construir uma representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis poderá ser útil escrevê–la como uma função linear com uma variável.

Definição 2.2 *IEZZI (2004). Dados dois conjunto A e B, subconjutos de $\mathbb{R}$ não vazios, uma função f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida de A em B com imagem em B se , somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B/(x, y) \in f$$

Exemplo 2.1 *A função $f : X \rightarrow Y$ para $x \in X \subseteq \mathbb{R}$ e $y \in Y \subseteq \mathbb{R}_+$ com $f(x) = x^2$ é tal que o valor $y = f(x) \in Y$ é atribuído o valor x^2 com $x \in X$.*

A Tabela 2.1 fornece o valor de y para alguns valores fixados de x.

Tabela 2.1: *Valores de $y = x^2$ para alguns valores de x*

x	$y = x^2$
1	1
1/2	1/4
1/4	1/16
0	0
-1/4	1/16
-1/2	1/4
-1	1

Usamos símbolos tipos f, g e h para denotar funções e no Exemplo 2.1 o conjunto X de números reais é denominado de *domínio* da função, o conjunto Y de números não–negativos de *contradomínio* e o subconjunto de Y formado pelos elementos y atribuídos a x^2 em X é o conjunto *imagem* da função.

Exemplo 2.2 *A Tabela 2.2, a seguir, que mostra a vazão semanal de água de uma represa.*

Tabela 2.2: *Vazão por dia*

Dia	1	2	3	4	5	6	7
m^3/seg	360	510	870	870	950	497	510

Esta tabela 2.2 representa uma função, pois a cada dia fica associada uma única quantidade de vazão. Note que, possivelmente, não existe uma fórmula matemática para expressar esta função, mas a definição de função é satisfeita.

Exemplo 2.3 *A Tabela 2.3 apresenta os preços (em R$) de produtos da cesta básica em três supermercados:*

Tabela 2.3: *Preço de produtos em R$ em três supermercados.*

Produto	supermercado A	supermercado B	supermercado C
1	2,60	2,90	3,00
2	0,96	0,94	1,00
3	1,80	1,90	2,00
4	1,00	2,60	2,00
5	1,23	1,50	1,70
6	2,40	2,50	2,15
7	4,60	4,00	4,55

Esta tabela não representa uma função, pois a cada produto corresponde mais de um preço.

Exemplo 2.4 *Um tanque para estocagem de oxigênio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro circular reto de 8m de altura, com um hemisfério em cada extremidade. O volume do tanque é descrito em função do raio r.*

O volume do cilindro é $8r^2\pi\ m^3$ e dos dois hemisférios é o $\dfrac{4r^3\pi}{3}m^3$; logo o volume total é

$$V(r) = \frac{4r^2(r+6)\pi}{3}m^3$$

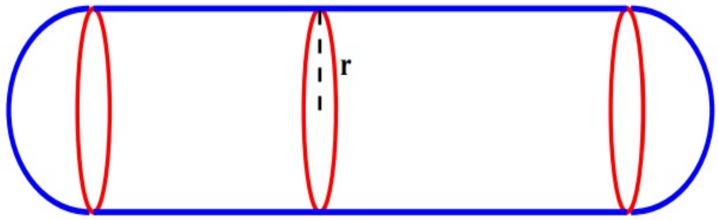

Figura 2.1: Tanque de raio r

Por exemplo, se o raio for $r = 1$, o volume é $V(1) = \dfrac{28\pi}{3}m^3$. Temos também que para cada valor de r teremos um volume $V(r)$.

Uma função caracterizada por uma correspondência entre dois conjuntos (o de partida e o de chegada), onde a cada elemento do conjunto de partida (objetos) corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada (imagens), sendo, desta forma, um conjunto de pares ordenados.

2.0.1 Domínio e Imagem

Podemos imaginar uma função como uma máquina que utiliza uma certa-matéria prima (input) para elaborar algum produto final (output) e o conjunto dos números reais como um depósito de matérias primas. Fica evidente que é fundamental determinar, exatamente, neste depósito, qual matéria prima faz funcionar nossa máquina; caso contrário, com certeza, a estragaremos.

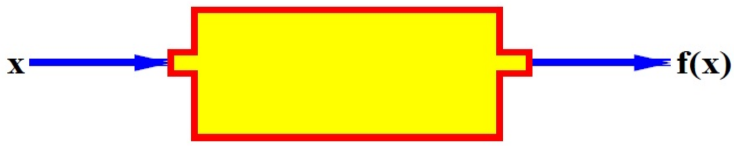

Figura 2.2: Domínio para Imagem da função

Nesta analogia temos a seguinte definição:

Definição 2.3 *O conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a definição de função é chamado* ***domínio de função*** *f e é denotado por $Dom(f)$.*

Definição 2.4 *O conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que $y = f(x)$, onde $x \in Dom(f)$ é chamado de **imagem de d função** f e é denotado por $Im(f)$*

É obvio que $Dom(f) \subset \mathbb{R}$, $Im(f) \subset \mathbb{R}$, e que $Dom(f)$ é o conjunto dos valores da variável independente para os quais f é definida; $Im(f)$ é o conjunto dos valores da variável dependente calculados a partir dos elementos do domínio.

Definição 2.5 *Duas funções f e g são ditas **idênticas** se tem o mesmo domínio D e:*

$$f(x) = g(x), \forall x \in D$$

Como exemplo temos as funções $f(x) = x^2, x > 0$ e $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ são diferentes, pois seus domínios são diferentes.

Exemplo 2.5 *A área de um círculo de raio r é $A(r) = \pi.r^2$; r sendo o raio, temos: $r > 0$; logo,*

$$Dom(A) = Im(A) = (0, +\infty).$$

Exemplo 2.6 *Para a função $f(x) = \sqrt{x}$, uma raiz quadrada existe somente se $x \geq 0$; então:*

$$Dom(f) = [0, +\infty).$$

Para uma função real de variável real temos os seguintes conceitos:

- f diz-se **injetora** se para todos os pontos do domínio $x_1 \neq x_2$ se tem $f(x_1) \neq f(x_2)$. Reconhecemos, graficamente, uma função injetora, quando, uma reta horizontal, qualquer que seja, interceptar o gráfico da função uma única vez.

- f diz-se **sobrejetora** quando todos os elementos do contra-domínio forem imagens de pelo menos um elemento do domínio.Reconhecemos, graficamente, uma função sobrejetora quando, qualquer que seja a reta horizontal que interceptar o eixo do contra–domínio, interceptar, também, pelo menos uma vez o gráfico da função.

- f diz-se **bijetora** quando ela for **sobrejetora** e **injetora** simultaneamente.

- f diz-se **crescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f diz-se **estritamente crescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.
- f diz-se **decrescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f diz-se **estritamente decrescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.
- f diz-se **monótona** se é crescente ou decrescente no seu domínio.
- f diz-se **estritamente monótona** se é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio

Exemplo 2.7 *Uma função estritamente monótona é injetora, mas uma função injetora não é necessariamente monótona.*

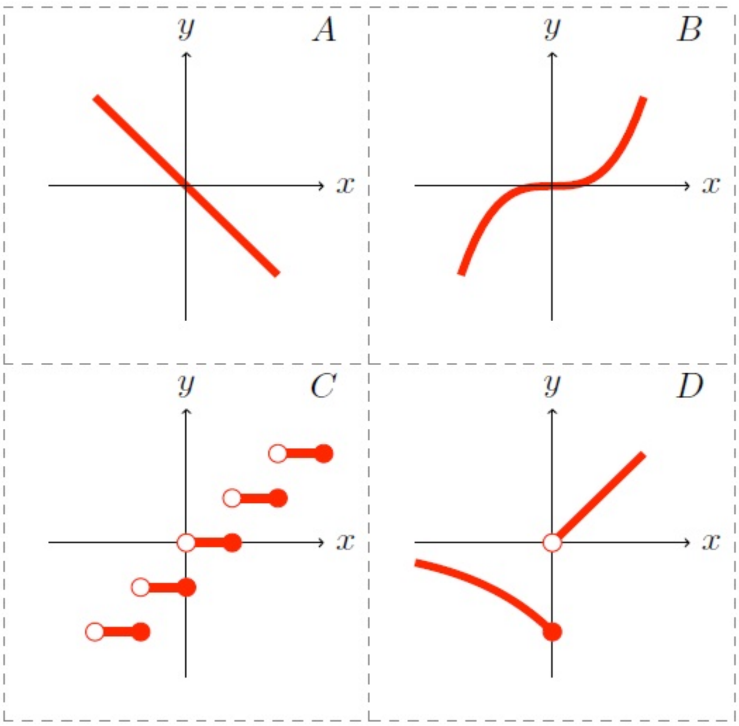

Figura 2.3: Alguns tipos de funções.

- A: f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, logo é injetora em $\mathbb{R}$;

- B: f é estritamente crescente $\mathbb{R}$, logo é injetora em $\mathbb{R}$;
- C: f é crescente em $\mathbb{R}$, mas não estritamente;
- D: f é injetora em $\mathbb{R}$, mas não é (estritamente) monótona em $\mathbb{R}$.

2.0.2 Gráficos das Funções Reais

As representações são a chave para a aprendizagem conceitual e determinam muitas vezes o que é aprendido. A capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações permite aos alunos observar relações importantes e desenvolver uma compreensão profunda do conceito. No estudo das funções, é necessário promover a distinção entre o conceito de função e os seus diferentes tipos de representação (numérica/tabular; algébrica; gráfica; linguagem natural). O uso da representação gráfica tem um papel fundamental na compreensão de tal distinção. As conexões entre as representações gráficas e as expressões algébricas trazem benefícios para a sua compreensão.

Em Elon (2006), $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano pois, afinal de contas, trata–se do caso particular que deu origem à ideia geral. Em $\mathbb{R}^2$ o elementos (x, y) são os pares ordenados de número reais e eles surgem como as coordenadas cartesianas de um ponto do plano $\prod$ (x = abcissa, y = ordenadas) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY, que se interceptam no ponto O, chamado de *origem* do sistema de coordenadas.

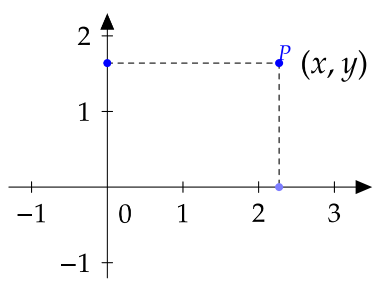

Figura 2.4: Plano Cartesiano

O conceito de uma função é um conjunto de pares ordenados que nos permite dar a definção a seguir do *gráfico de uma função*.

Definição 2.6 *Se f for uma função, então o* ***gráfico*** *de f será o conjunto dos pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ para os quais (x, y) é um par ordenado de f.*

Segue da Definição 2.6 que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$.

Pode-se entender por gráfico de uma função f o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , em que x pertence ao domínio da função e y é a imagem correspondente, tal que a cada x só corresponde um e um só y , ou seja, o gráfico de uma função pertence ao produto cartesiano D_f x CD_f.Entende – se por representação gráfica a representação geométrica, num referencial, do gráfico da função.

De acordo com Elon (2006), é enfatizado que a fim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f : X \to Y$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguntes condições:

- Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada é x.
- Se $p = (x, y)$ e $p' = (x, y)$ são pares pertencentes a G como a mesma primeira coordenada x então $y = y'$ (isto é, $p = p'$)

Fica evidente que tais condições podem ser resumidas a ideia que para cada $x \in X$ existe um e, somente um, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$.

Em Elon (2006), o gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim:

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}$$

Exemplo 2.8 *Gráfico da função $f(x) = x^3$. Notemos que $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.*

A Tabela 2.4 fornece o valor de y para alguns valores fixados de x.

Se $x \geq 0$, então $y \geq 0$ e se $x < 0$, então $y < 0$. Logo, o gráfico está situado no primeiro e terceiro quadrantes.

Tabela 2.4: *Valores de $y = x^3$ para alguns valores de x.*

x	$y = x^3$
-1	1
-1/2	-1/8
-1/4	1/64
0	0
1/4	1/64
1/2	1/8
1	1

Observando a Tabela 2.4, vemos que quando $x > 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y também crescem e mais rapidamente. Quando $x < 0$ e x decresce, os valores correspondentes da ordenada y decrescem e mais rapidamente. O gráfico de f está representado na Figura 2.5.

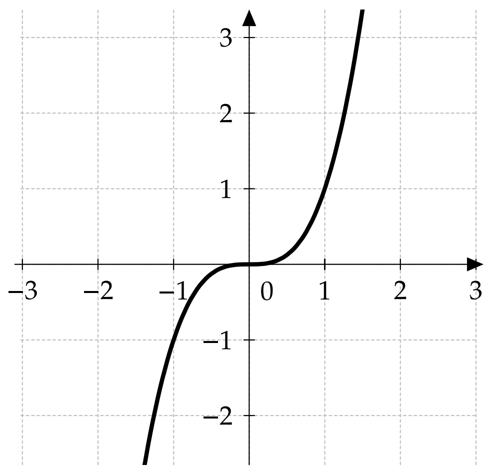

Figura 2.5: Gráfico da função $y = x^3$.

Geometricamente $G(f)$ é, em geral, uma curva no plano.

No Exemplo 2.9, $G(f)$ não é uma curva. Nos casos em que $G(f)$ é uma curva, intuitivamente podemos pensar que os conjuntos $Dom(f)$ e $Im(f)$ representam a "largura" e "altura" máxima da curva, respectivamente. Este processo é demorado e ineficiente e será abandonado nos capítulos seguintes, quando serão dadas técnicas mais eficientes para fazer o gráfico. É importante não confundir a função com seu gráfico, pois o gráfico é um subconjunto do plano.

Exemplo 2.9 *O gráfico da função dada pela seguinte tabela, mostra a vazão semanal de água de uma represa em função do dia.*

Tabela de valores da vazão de água de uma represa.

Dia	m^3/seg
1	360
2	510
3	870
4	870
5	950
6	497
7	510

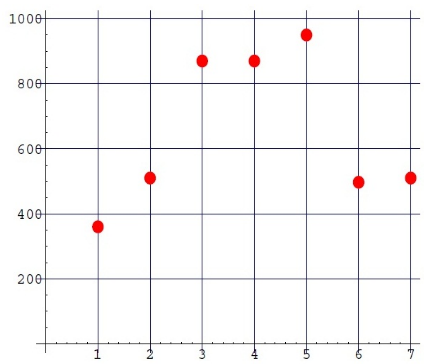

Figura 2.6: Gráfico do exemplo (2.9)

Os gráficos de $f(x) + c$, $f(x + c)$, $cf(x)$ e $f(cx)$, $(c \in \mathbb{R})$ podem ser obtidos diretamente do gráfico de $f(x)$. De fato:

1. O gráfico de $g(x) = f(x + c)$ pode ser obtido a partir do gráfico de f transladando-o ao longo do eixo dos x em c unidades para a esquerda se $c > 0$, ou transladando-o ao longo do eixo dos x em c unidades para a direita se $c < 0$.

2. O gráfico de $g(x) = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ pode ser obtido do gráfico de f transladando-o ao longo do eixo dos y em c unidades para cima se $c > 0$ ou c unidades para baixo se $c < 0$.

3. O gráfico de $g(x) = c.f(x)$, $c > 1$ pode ser obtido "esticando-se" o gráfico de f verticalmente pelo fator c.

4. O gráfico de $g(x) = f(cx)$, $c > 1$ pode ser obtido "comprimindo-se" o gráfico de f horizontalmente pelo fator c.

5. O gráfico de $g(x) = cf(x)$, $0 < c < 1$ pode ser obtido "comprimindo-se" o gráfico de f verticalmente pelo fator c.

6. O gráfico de $g(x) = f(cx)$, $0 < c < 1$ pode ser obtido "esticando-se"o gráfico de f horizontalmente pelo fator c.

7. O gráfico de $g(x) = -f(x)$ pode ser obtido pela reflexão do gráfico de f em torno do eixo dos x.

8. O gráfico de $g(x) = f(-x)$ pode ser obtido pela reflexão do gráfico de f em torno do eixo dos y. Em cada caso é conveniente especificar os domínios e imagens.

Exemplo 2.10 *Gráficos de* $f(x) = x$ *(azul), de* $g(x) = f(-2x) = -2x$ *(vermelho) e* $2f(x+1) = 2(x+1)$ *(verde).*

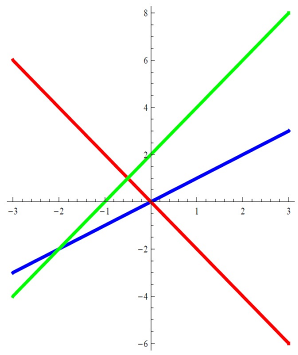

Figura 2.7: Gráfico do Exemplo 2.10

Exemplo 2.11 *Gráficos de* $y = f(x) = x^2$ *(azul), de* $y = f(x+1) = (x+1)^2$ *(vermelho) e* $y = 2f(x+1) = 2(x+1)^2$ *(verde):*

Exemplo 2.12 *Gráficos de* $f(x) = x^3$ *(azul), de* $f(x+1) = (x+1)^3$ *(vermelho) e* $f(-3x) = -27x^3$ *(verde).*

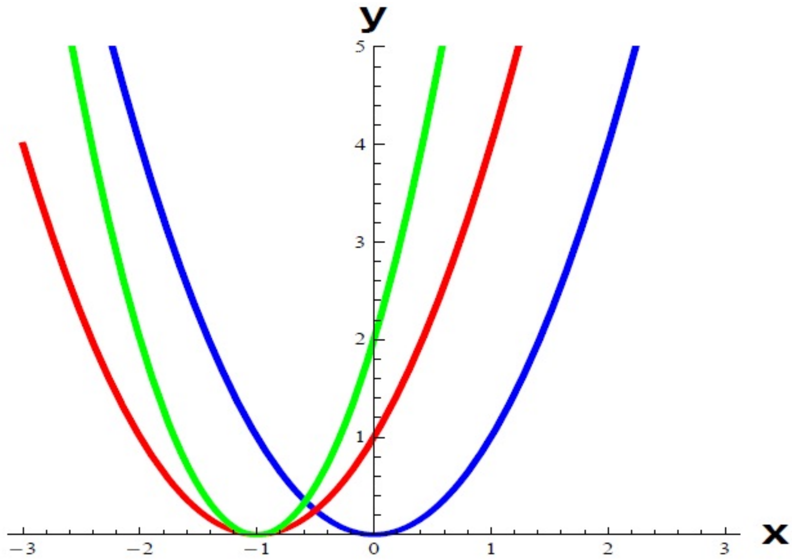

Figura 2.8: Gráfico do Exemplo 2.11

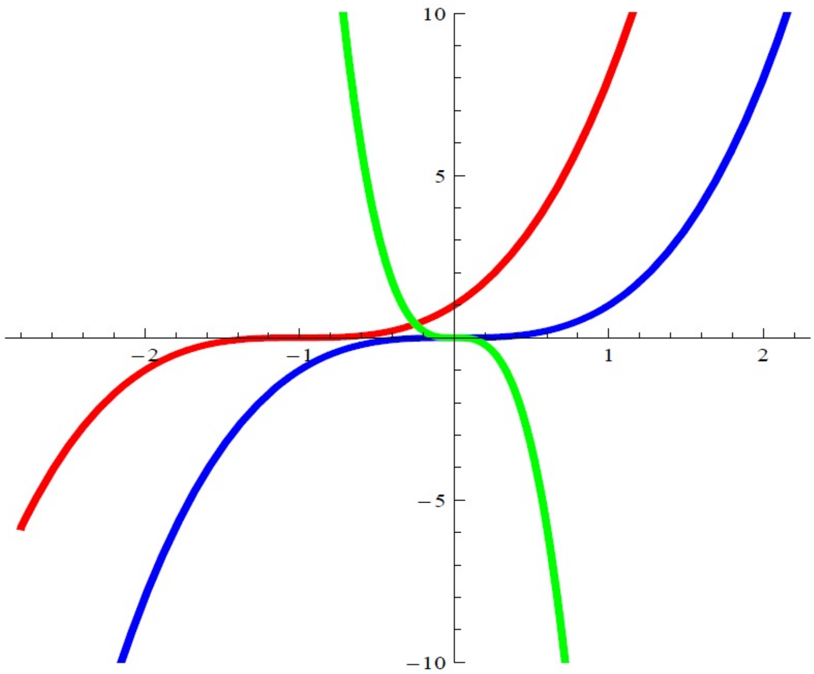

Figura 2.9: Gráfico do Exemplo 2.12

Capítulo 3

Funções Reais Elementares

3.1 Função Polinomial do Primeiro Grau ou Afim

Definição 3.1 *A função real é polinomial do primeiro grau ou afim quando pode ser escrita na forma:*

$$y = f(x) = mx + b \tag{3.1}$$

onde $m, b \in \mathbb{R}$. Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

O gráfico de $f(x) = mx + b$ é uma reta de coeficiente angular m passando por $(0, b)$. Reciprocamente, dados dois pontos que determinem uma reta não vertical existe uma função afim cujo gráfico é a reta.

Observe que:

$$\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = \frac{mc + b - md - b}{c - d} = \frac{m.(c - d)}{c - d} = m \tag{3.2}$$

para todo $c, d \in \mathbb{R}, c \neq d$. Logo, $f(0) = b$, $f(1) = m+b$, $f(2) = 2m+b = f(1)+m$. Em geral:

$$f(k + 1) = f(k) + m, \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $f(0), f(1), f(2).., f(n), ..$ formam uma progressão aritmética de razão m.

Fazendo $h = c - d$, temos:

$$m = \frac{f(d+h) - f(d)}{h} \tag{3.4}$$

A propriedade que caracteriza as funcões polinomiais de primeiro grau é que $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h, isto é a acréscimos iguais dados a x correspondem acréscimos iguais para f. É esta característica que deve ser utilizada nas aplicações.

3.1.1 Valor de uma Função Afim

O valor que pode ser obtido de uma função $f(x) = ax + b$ para $x = x_o$ é dado por $f(x_o) = ax_o + b$. Como exemplo, na função afim $f(x) = 5x + 1$, podemos determinar:

Tabela 3.1: *Valores de $f(x) = 5x + 1$ para alguns valores de x.*

x_o	$f(x) = 5x + 1$
1	$f(1) = 5.1 + 1 = 6$
2	$f(2) = 5.2 + 1 = 11$
-1	$f(-1) = 5.(-1) + 1 = -4$

3.1.2 Taxa de Variação da Função Afim $f(x) = ax + b$

Segundo Dante (2007), temos que na função afim $f(x) = ax + b$ considera-se como taxa de variação (ou taxa de crescimento) o valor de a. Obtem-se esse valor, a partir de dois pontos quaisquer, porém distintos , $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, da função considerada. Assim, fazendo $f(x_1) - f(x_2) = a.(x_1 - x_2) \Rightarrow a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

A taxa de variação da função afim é sempre constante. Isto é uma característica importante das funções afins onde o valor de a é a tangente de inclinação da reta com o eixo x. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1 *Gráficos de $f(x) = x$ (negro), $g(x) = x + 1$ (azul), e $h(x) = x + 2$ (vermelho), respectivamente, temos:*

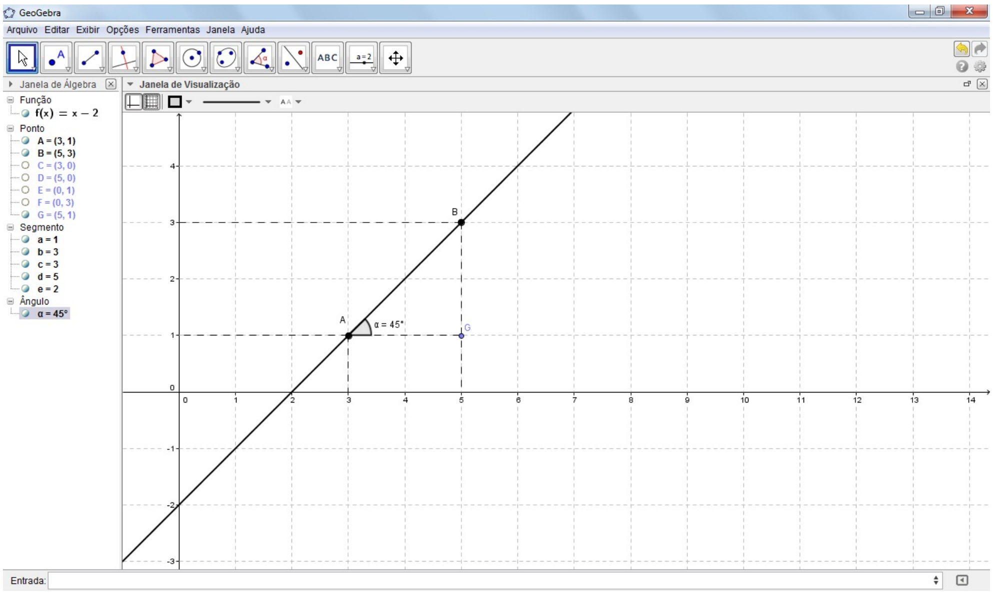

Figura 3.1: Taxa de inclinação da reta.

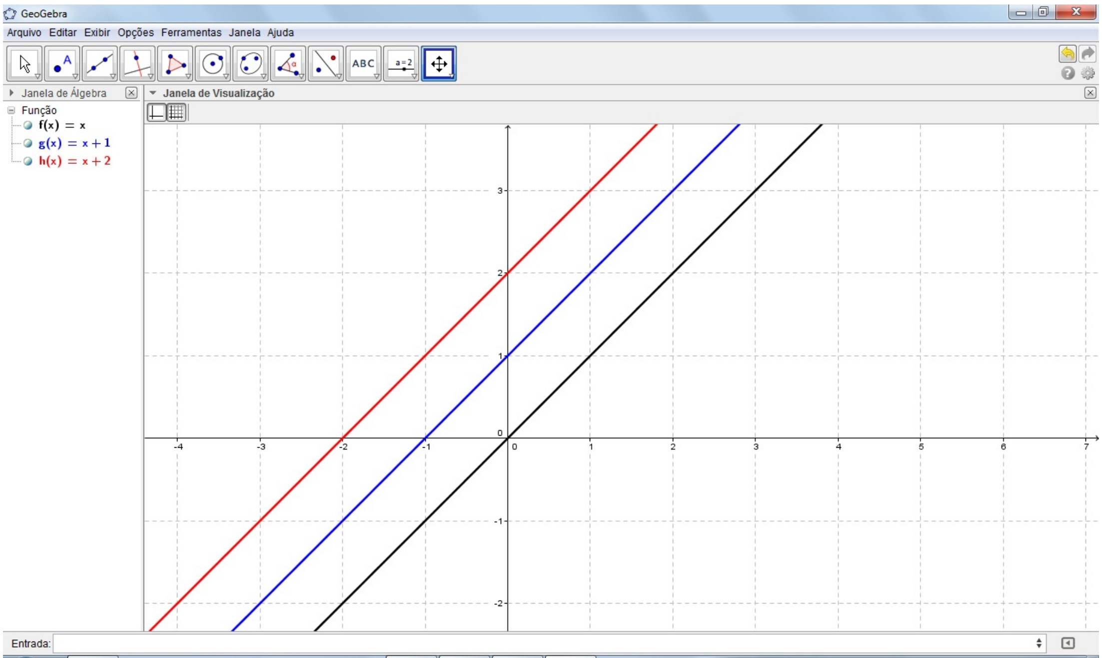

Figura 3.2: Gráfico do Exemplo 3.1 .

Observamos neste exemplo que as retas têm todas a mesma inclinação ($a = 1$) onde as retas são paralelas e que $f(x)$ passa na origem , $g(x)$ passa pelo ponto $(0, 1)$ e a função $h(x)$ passa pelo ponto $(0, 2)$.

Exemplo 3.2 *Os gráficos de $f(x) = x+1$ (negro), e $f(x) = 2x+1$ (azul) e $f(x) = 3x+1$ (vermelho), respectivamente:*

Neste exemplo a reta de maior inclinação está mais vertical do que a reta

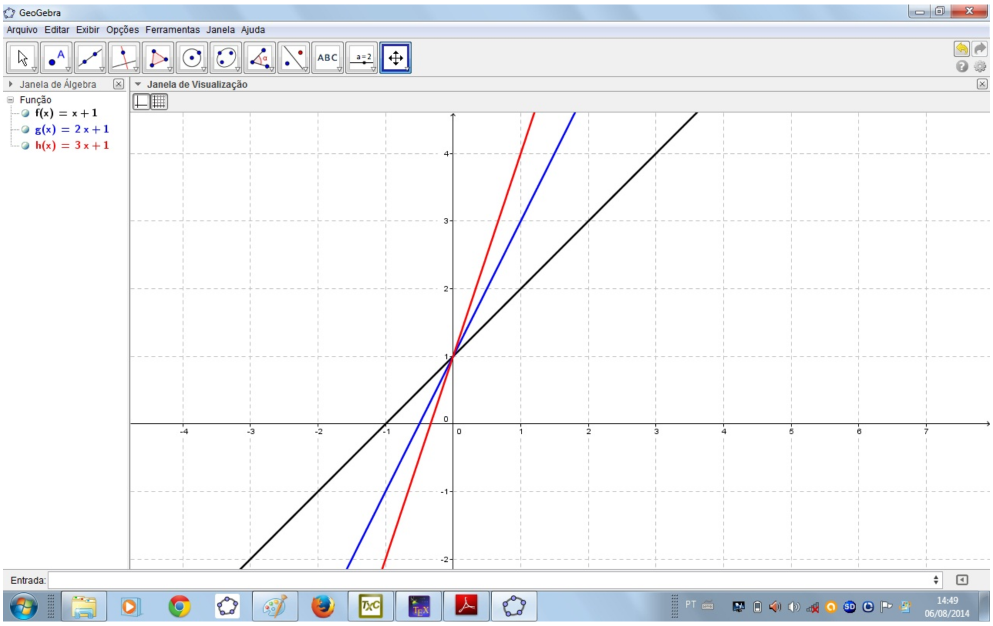

Figura 3.3: Gráfico do Exemplo 3.2.

que tem menor inclinação e como as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tem o mesmo coeficiente linear todas elas passam no ponto $(0, 1)$.

Para $b = 0$ em $y = f(x) = mx + b$, obtemos um tipo importante de função, chamada função linear. Portanto, a função linear é definida por:

$$f(x) = mx, m \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Este é modelo matemático para resolver problemas que envolvem proporcionalidade. Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular m passando pela origem.

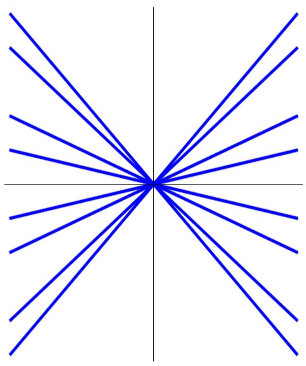

Figura 3.4: Gráfico da função linear $y = mx$, variando o valor de m.

3.1.3 Função Linear

Definição 3.2 *IEZZI (2004). Um função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *recebe o nome de função linear quando a cada elemento* $x \in \mathbb{R}$ *associa-se o elemento* $ax \in \mathbb{R}$ *onde* $a \neq 0$ *é um número real dado.*

O gráfico da função linear é um reta que passa pela origem do plano cartesiano visto que $f(0) = a.0 = 0$. O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe sempre $x = \dfrac{y}{a} \in \mathbb{R}, a \neq 0$, tal que $f(x) = f(\dfrac{y}{a}) = a.\dfrac{y}{a} = y$.

3.1.4 Gráfico da Função Afim

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta. Podemos demonstra isto da seguinte forma;

Consideremos três ponto A , B e C pontos disitintos pertencente ao gráfico de $f(x) = ax+b, a \neq 0$ e (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) suas coordenadas respectivamente.

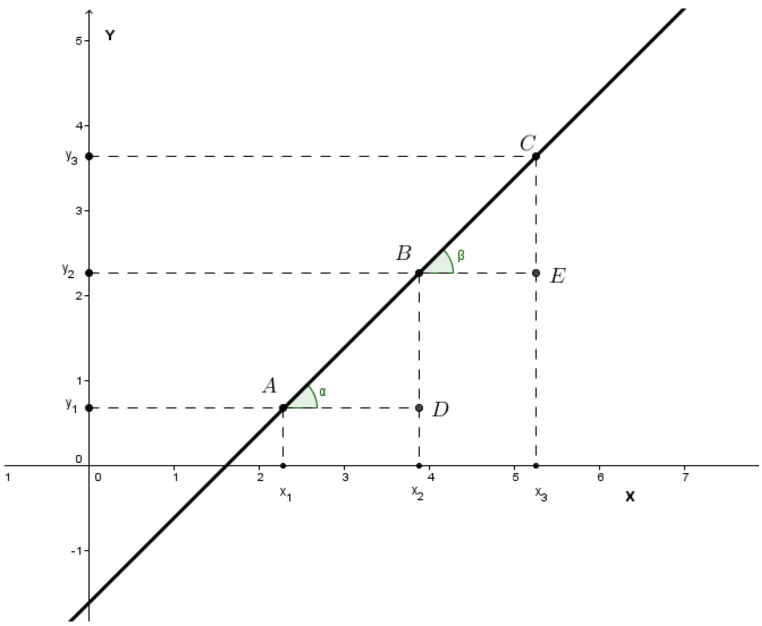

Figura 3.5: Alinhamento dos pontos A, B e C.

Para provarmos que os três pontos estão na mesma reta devemos demostra que os triângulos ABD e BCE são semelhantes. De fato :

$$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b$$
$$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b$$
$$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b$$

Fazendo subtrações membro a membro, temos:

$$y_3 - y_2 = a.(x_3 - x_2)$$
$$y_2 - y_1 = a.(x_2 - x_1)$$

Isolando o valor de a temos:

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3.6}$$

Os triangulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos A , B e C estão alinhados.

Proposição 3.1 *Seja f uma função linear. Então:*

1. *Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos*

$$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2) \tag{3.7}$$

2. *Sendo $f(x) = m$, $f(n.x) = f(x) + f(x) + ... + f(x) = nm$ em geral*

$$f(nx) = nf(x), \tag{3.8}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

3. *Quando $m = 1$, temos:*

$$f(x) = x,$$

que é chamada função identidade. Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular 1.

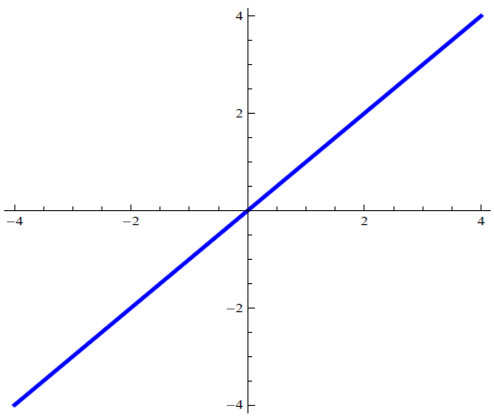

Figura 3.6: Gráfico da função $f(x) = x$.

3.1.5 Função Afim Crescente ou Decerescente

Teorema 3.1 *IEZZI (2004). A função afim é crescente (decescente) se, somente se, o coeficiente angular for positivo (negativo).*

Este teorema pode ser demonstrado partindo do fato que em:

$$f(x) = ax + b \Leftrightarrow \frac{f(x_1 - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

Neste caso a função afim será crescente quando $a > 0$.

Para função afim decrescente devemos ter:

$$f(x) = ax + b \Leftrightarrow \frac{f(x_1 - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$$

Assim a função afim é decescente para $a < 0$.

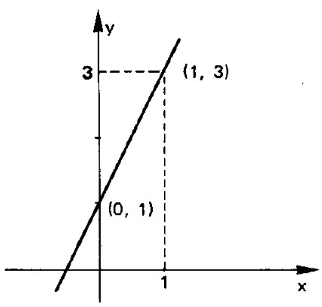

Figura 3.7: Gráfico de $y = 2x + 1$.

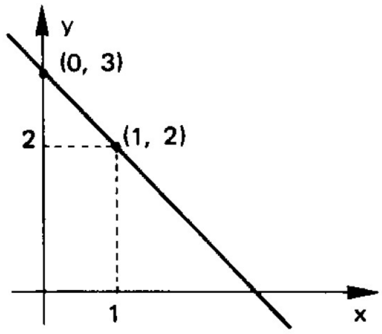

Figura 3.8: Gráfico de $y = -x + 3$.

Na Figura 3.7 a função $f(x) = ax + b$, tem $a = 2 > 0$ e a reta é crecente e na Figura 3.8 tem $a = -1 < 0$ e a reta é decresente.

Exemplo 3.3 *Sabe-se que* $100g$ *(g=gramas) de soja contem* $35g$ *de proteínas e* $100g$ *de lentilhas contem* $26g$ *de proteínas. Um adulto médio, num clima moderado, necessita de* $70g$ *de proteínas diárias em sua alimentação. Uma pessoa deseja prover estas* $70g$ *de proteínas somente com soja e/ou lentilhas. Se x é a quantidade de soja e y a quantidade de lentilhas diárias (x e y medidas em unidades de* $100g$*), qual é a relação entre x e y?*

A quantidade de proteína na soja é $35x$ e a quantidade de proteína nas lentilhas é $26y$ por dia (ambas medida em gramas). O total de proteínas diário é 70; logo, temos a equação de primeiro grau:

$$35x + 26y = 70 \Rightarrow f(x) = -\frac{35x}{26} + \frac{70}{26}$$

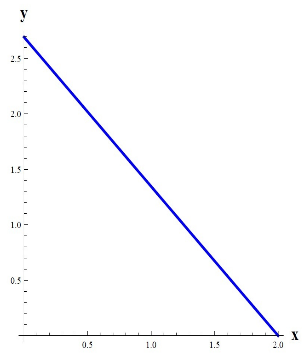

Figura 3.9: Gráfico da função $f(x) = -\dfrac{35x}{26} + \dfrac{70}{26}$

3.2 Função Quadrática

Definição 3.3 *LIMA(2006). Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c como $a \neq 0$, e $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Tem-se que para todo $h \in \mathbb{R}$, $f(x+h) - f(x)$ é uma função afim em x, pois sendo:

$$f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + bx + c + (2ah+b)x + ah^2 + c = f(x) + mx + n$$
$$f(x+h) - f(x) = mx + n$$

A $Im(f)$ e o gráfico de f dependem essencialmente do discriminante $\triangle$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e do coeficiente a do termo principal. O fato de $a \neq 0$ garante que exemplos na forma $f(x) = 0x + bx + c$ não sejam consideradas como função quadrática, do contrário teríamos a função afim como um caso particular da função quadrática.

Um dos problemas procurados nas funções quadráticas são a suas raizes ou zeros que são valores de x que tem imagem igual a 0. Os numeros procurados são as raízes da equação do segundo grau:

$$x^2 - sx + p = 0 \tag{3.9}$$

com efeito, se um dos números é x, o outro é $s - x$ e seu produto é

$$p = x(s-x) = sx - x^2$$
$$x^2 - sx + p = 0$$

Segundo LIMA(2006), a regra para achar dois números cuja soma e cujo produto são dados era assim enuciada pelos babilônios:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Na notação atual, esta regra fornece as raízes

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p} \tag{3.10}$$

e

$$s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p} \tag{3.11}$$

3.2.1 Forma Canônica do Trinômio

Considerando o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \tag{3.12}$$

completando os quadrados temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Podemos assim, rescrever a lei de formação da função quadrática $f(x) = ax^2 = bx + c$ da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{3.13}$$

De forma equivalente:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_o\right)^2 + y_o \tag{3.14}$$

onde $x_o = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_o = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

Esta é a chamada forma canônica da função quadrática e a partir da qual, obteremos propriedades importantes de f.

3.2.2 Valor máximo e valor mínimo

Definição 3.4 *Dado $m \in \mathbb{R}$, dizemos que $f(m)$ é o valor máximo da função f se $f(x) \leq f(m)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e dizemos que $f(m)$ é o valor mínimo se $f(x) \geq f(m)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Da forma canônica de (3.2) da função quadrática f é composta de duas parcelas: a parcela $a(x - x_o)^2$ que varia com x e a parcela $y_o = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, formada apenas por valores constantes.

Se $a > 0$, então $a(x - x_o)^2 \geq 0 \Rightarrow a\,(x - x_o)^2 + y_o \geq 0 + y_o$

Assim :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \geq y_o, \text{ para } a > 0$$

ou seja, f atinge o valor mínimo $y_o = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ quando $x - x_o = 0$, ou ainda, em $x = x_o$.

Se $a < 0$, então $a(x - x_o)^2 \leq 0 \Rightarrow a\,(x - x_o)^2 + y_o \leq 0 + y_o$

Assim :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \leq y_o, \text{ para } a < 0$$

ou seja, f atinge o valor máximo $y_o = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ quando $x - x_o = 0$, ou ainda, em $x = x_o$.

Desta forma o ponto do domínio $x_o = \dfrac{-b}{2a}$ é o ponto que maximiza ou minimiza a função, dependendo do sinal de a. Resumindo:

- Se $a > 0$ a função admite um valor mínimo;
- Se $a < 0$ a função admite um valor máximo.

3.2.3 Zeros da Função Quadrática

Os zeros da função quadrática ou raízes da função f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$ ou de forma equivalente são as raizes da equação $ax\ 2 + bx + c = 0$. Pela forma canônica 3.14 fazendo $f(x) = 0$,temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

cuja a solução é a fórmula de Baskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.15}$$

O termo $b^2 - 4ac$ é representado pela letra grega Δ (delta)

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{3.16}$$

A existência de raízes reais para equação 3.15 fica condicionado ao fato de 3.16 ser real. Portanto, temos três casos a considerar:

Pode-se ter as seguintes configurações de parábola dependendo do sinal de Δ e de a:

1. $\Delta > 0$, equação 3.15 apresenta duas raízes reais e distintas que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.17}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.18}$$

2. $\Delta = 0$ a equação 3.15 apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \tag{3.19}$$

3. $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ na equação 3.15, diremos que ela não apresenta raízes reais.

3.2.4 Gráfico da Função Quadrática

Definição 3.5 *LIMA(2001). O gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, e $x \in \mathbb{R}$ é o subconjunto $G \subset \mathbb{R}$ formados pelos pontos $(x, ax^2 + bx + c)$, cuja abscissa é um número real arbitário x e cuja ordenada é o valor de$f(x)$ que a função assume no ponto x.*

Para mostrar que G é uma parábola consideremos a definição.

Definição 3.6 *A parábla de foco F e diretriz d é um conjunto dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e a reta d (Figura 3.10).*

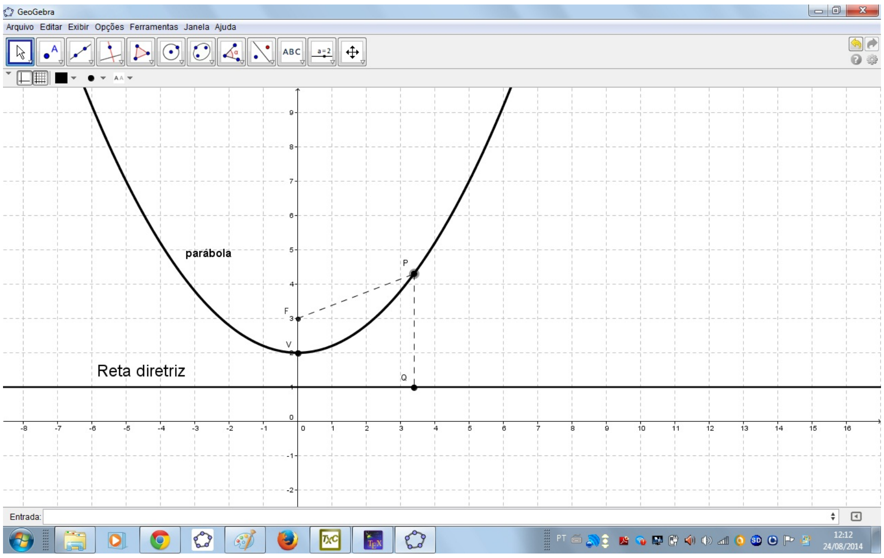

Figura 3.10: Parábola.

A reta que contém o ponto F (foco) e é perpendicular à diretriz é chamada de eixo da parábola. Denomina-se vértice da parábola ao ponto dessa curva que está mais próximo da reta diretriz. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a intersecção do eixo da diretriz.

Ellon (2001) ressalta que, se o ponto P pertencer à parábola e P' é o seu simétrico em relação ao eixo, então $d(P', F) = d(P, F)$ e $d(P', d) = d(P, d)$, logo P' também pertence à parábola.

O gráfico da função quadrática é uma parábola onde temos um vértice que é um ponto da parábola que intersecta seu eixo de simetria. A coordenada do vertice é $v = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Mostremos inicialmente que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é uma parábola em $\mathbb{R}^2$ cujo foco é o ponto $F(0, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{-1}{4a}$. Verificando incialmente que para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \tag{3.20}$$

oonde no primeiro membro temos o quadrado da distancia do ponto $P(x, ax^2)$ do gráfio de $f(x) = ax^2$ ao foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e no segundo membro temos o quadrado da distancia de $F(0, \frac{1}{4a})$ a reta $y = \frac{-1}{4a}$. Isto mostra que todo ponto do gráfico de f pertence a parábola em questão. Nisto, se $P(x, y)$ for um ponto qualquer dessa parábola, o ponto $\bar{P} = (x, ax^2)$ também pertence à parábola. Portanto $y = ax^2$, pois esta curva não contém dois pontos distintos com mesma abscissa. Logo todo ponto da parábola pertence ao gráfico de f.

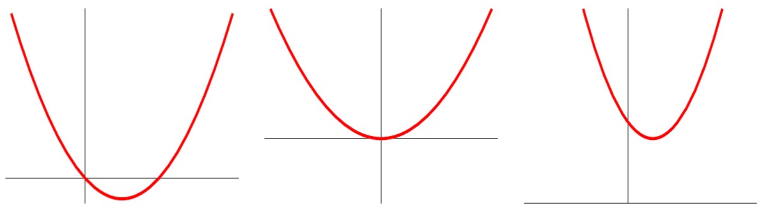

Figura 3.11: Parábolas para $a > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$, respectivamente.

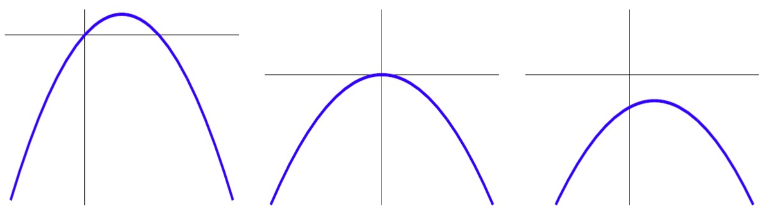

Figura 3.12: Parábolas para $a < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$, respectivamente.

Examinado o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$ temos que ele é uma parábola, cujo foco é o ponto $F(m, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = -1/4a$ (Figura 3.13)

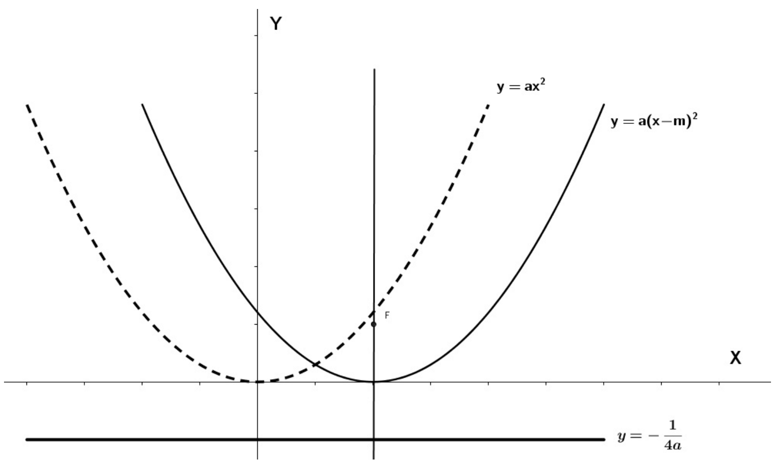

Figura 3.13: Parábola $y = a(x - m)^2$.

Para chegramos a esta conclusão, temos

$$(x - m)^2 + \left[a\,(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a\,(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2 \tag{3.21}$$

Observa-se que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta daquele de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \longmapsto (x+m, y)$ que leva o eixo vertical $x = 0$ na vertical Em LIMA(2001), o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-2)^2 + k$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F(m, k + 1/4a)$ e cuja a diretriz é a reta horizontal $y = k - 1/4a$ (Figura 3.14)

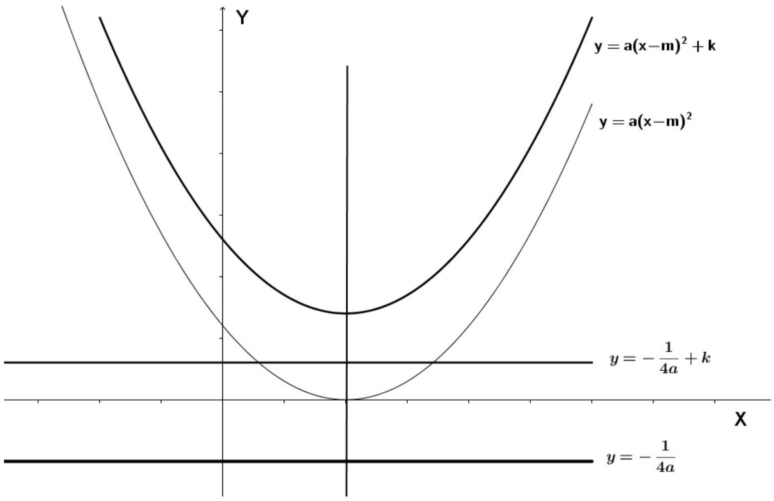

Figura 3.14: Parábola $f(x) = a(x-2)^2 + k$.

O gráfico de $y = a(x-m)^2 + k$ resulta daquele de $y = a(x-m)^2$ pela translação vertical $(x, y) \longmapsto (x, x+k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -1/4a$ a reta $y = k - 1/4a$

3.2.5 Vértice da Parábola

LIMA(2001) resalta que a reta vertical $x = \dfrac{-b}{2a}$ contém o vértice $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ da parábola $y = ax^2 + bx + c$. Logo o eixo de simetria dessa curva é esta reta vertical. Portanto dois pontos (x', y) e (x'', y) da parábola tem a mesma ordenada, ou seja, $f(x') = f(x'')$ se, e somente se, $-b/2a$ é o ponto médio do intervalo cujos extremos são o x' e x''. Noutras palavras,

$$f(x') = f(x'') \Longleftrightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{x' + x''}{2a} \Longleftrightarrow x' + x'' = -\frac{b}{a} \tag{3.22}$$

De fato usando a forma canônica $f(x) = (x-m)^2 + k$, onde $m = \dfrac{-b}{2a}$ e $k = f(m)$ temos:

$$\begin{aligned} f(x') = f(x'') &\Longleftrightarrow (x' - m)^2 + k = (x'' - m)^2 + k \\ &\Longleftrightarrow (x' - m)^2 = (x'' - m)^2 \\ &\Longleftrightarrow x' - m = \pm(x'' - m) \end{aligned}$$

Vemos que $x' - m = x'' - m$ equivale a $x' = x''$, enquanto $x' - m = -(x'' - m)$ equivale a $m = \dfrac{x' + x''}{2}$

Assim temos que $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e que $f(x_v) = a.(x_v)^2 + b.(x_v) + c = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-\Delta}{4a}$

Exemplo 3.4 *MELLO (2005, p.112). O lucro de uma empresa é dado pela lei $L(x) = -x^2 + 8x - 7$, em que x é a quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em reais).*

a) *Determine os valores de x para os quais o lucro é positivo.*

b) *Determine a quantidade que se deve vender para obter lucro máximo.*

Resolução

a) Quando queremos $L(x) > 0$ então vamos resolvera inequação $-x^2+8x-7 > 0$ onde teremos $1 < x < 7$ (Figura 3.15). Logo, o lucro será positivo para x entre 1 milhar e 7 milhares de unidades vendidas.

b) Basta determinarmos o valor de x, da parábola 3.15 associada a função $L(x)$.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2.(-1)} = 4$$

Ou seja, para obter o lucro máximo devem ser vendidas 4 milhares de unidades.

c) Basta determinarmos o valor de y de parábola 3.15 assiciado a função $L(x)$.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{[8^2 - 4.(-1).(-7)]}{4.(-1)} = \frac{36}{4} = 9$$

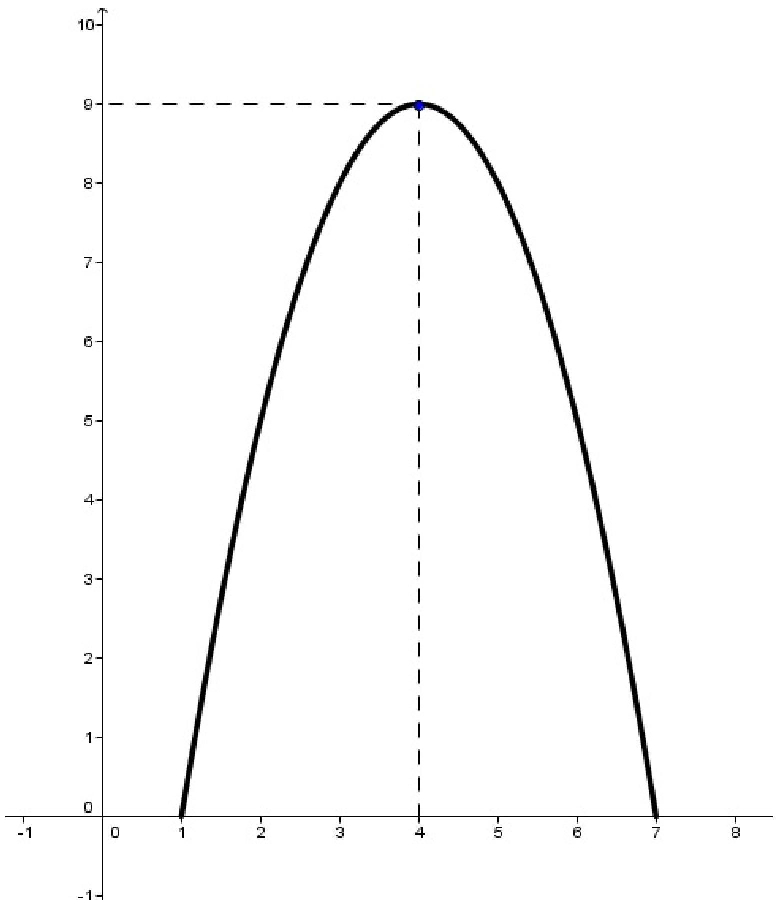

Figura 3.15: Função $L(x) = -x^2 + 8x - 7, 1 < x < 7$.

Logo o lucro máximo será de R$ 9,00.

Exemplo 3.5 *MELLO (2005, p.101) Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco dispara um sinalizador para avisar a gurada costeira. A trajetoria que o sinal luminoso descreve é de um arco de parábola.*

A função que descreve o movimento do sinal luminoso é dado por $h(t) = 80t - 5t^2$*, sendo h a altura do sinal, em metros, e t, o tempo decorrido após o disparo, em segundos.*

a) *Qual a altura máxima que esse sinal luminoso pode atingir?*

b) *Quantos segundos se passaram, após o disparo, até o sinal luminoso atingir a altura máxima?*

Solução

a) Para determinarmos a altura máxima que esse sinal pode atingir precisamos encontrar o valor máximo da função.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[80^2 - 4.(-5).0\right]}{4.(-5)} = \frac{-6400}{-20} = 320$$

Logo a altura máxima que o sinal luminoso pode atingir é de $320m$.

b) O tempo que o sinal luminoso leva para atingir a altura máxima corresponde ao x_v da parábola. Utilizando a fórmula da abscissa do vértice, temos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2.(-5)} = \frac{-80}{-10} = 8$$

Logo, o sinal luminoso atingirá a altura máxima 8 após o disparo.

Exemplo 3.6 *A trajetória de um corpo lançado obliquamente, desprezando a resitência do ar, é dada por uma função polinomial do segundo grau. A partir de seu deslocamento horizontal (ao longo do eixo dos x), obtemos sua altura y. Por exemplo, um objeto é lançado no ar. Se sua altura, em metros, t segundos após o lançamento é dada por* $y = f(t) = 20t + 10t^2$*, qual é a altura máxima atingida pelo objeto e em que instante ele a atinge?*

Determinemos o vértice da parábola $y = 20t - 10t^2, \Delta = 400, a = -10 < 0$ e $b = 20; v = (1, 10)$. Logo, a altura máxima é de $10m$, atingida 1 segundo após o lançamento.

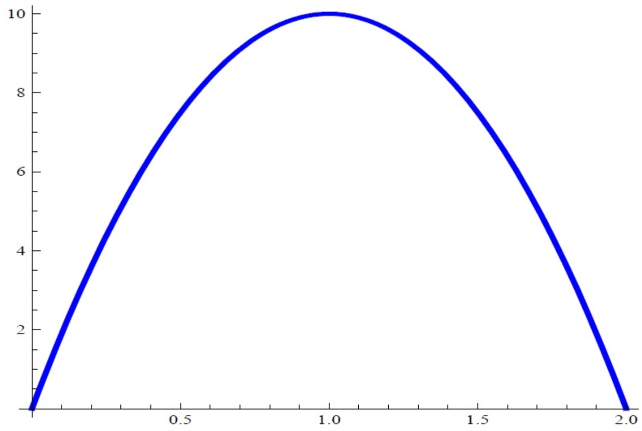

Figura 3.16: Parábola do Exemplo 3.5

Exemplo 3.7 *Mello (2001, p 111) Represente em um mesmo plano cartesiano as parábolas correspondentes às funções a seguir.*

a) $y = 5x^2$

b) $y = -5x^2$

c) $y = \frac{1}{4}x^2$

d) $y = -\frac{1}{4}x^2$

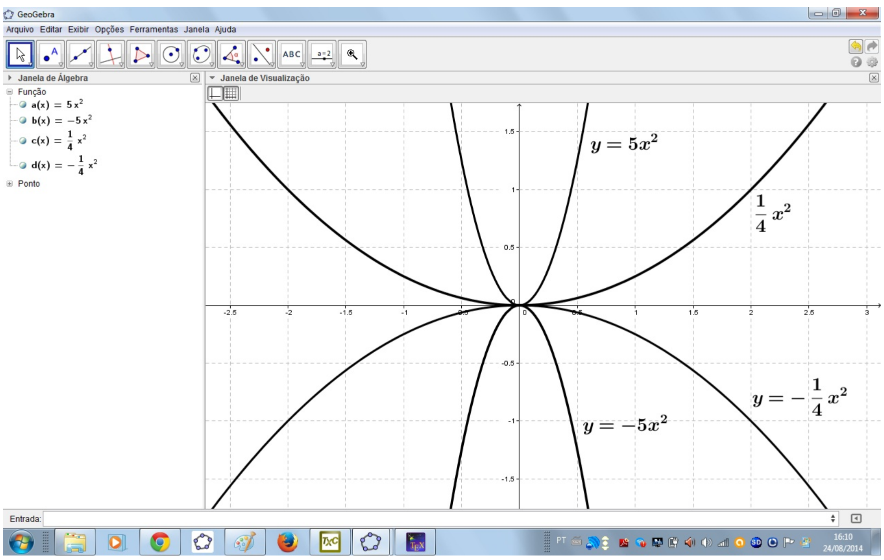

Figura 3.17: Gráfico solução do Exercício 3.7 no Geogebra.

Exemplo 3.8 *Mello (2001, p. 656) Um grupo de amigos alugou um ônibus com 40 lugares para uma excursão. Foi combinado com o dono do ônibus que cada participante pagaria R$ 60,00 pelo seu lugar e mais uma taxa de R$ 3,00 para cada lugar não ocupado. O dono do ônibus receberá, no máximo. quanto?*

Solução

Seja x a quantidade de passageiros e $f(x)$ a função que expressa o quanto o dono do ônibus receberá, temos:

$f(x) = 60x + 3x(40 - x)$

$f(x) = -3x^2 + 180x$

O valor máximo que o dono do ônibus receberá será o maior valor que a função $f(x)$ assume:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[180^2 - 4.(-3).0\right]}{4.(-3)} = 2700$$

Logo, o dono do ônibus receberá R$ 2700,00 no máximo.

3.3 Função Exponencial

A função exponencial está associada a fenômenos de crescimento ou decrescimento, como por exemplo, crescimento populacional e desintegração radioativa.

Definição 3.7 *LIMA(2006). A **função exponencial** de base a, sendo a um número real positivo diferente de zero, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:*

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$;

2. $a^1 = a$;

3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$;

4. $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ *quando* $0 < a < 1$.

Pelas propriedades anteriores, cada vez que a abscissa aumenta uma unidade a ordenada é multiplicada por a e cada vez que a abscissa diminui uma unidade a ordenada é multiplicada por $\frac{1}{a}$.

Se $a > 1$, então, a distância da curva ao eixo dos x cresce quando x cresce e decresce quando x decresce. Se $0 < a < 1$ ocorre o contrário.

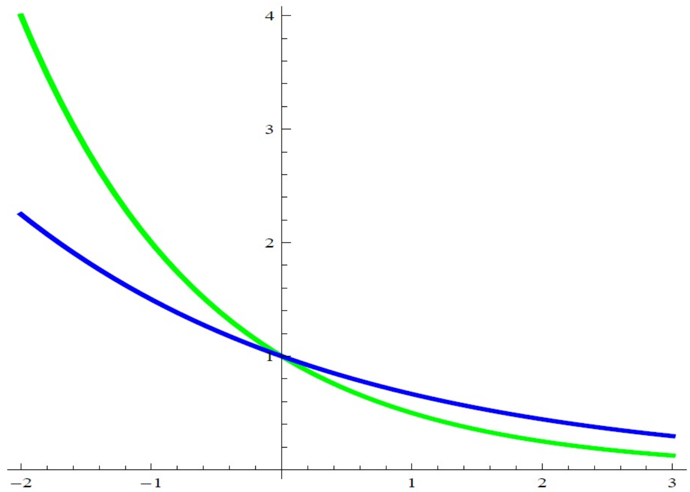

Figura 3.18: Gráficos para $0 < a < 1$; $a = 1/2$ (verde), $a = 2/3$ (azul).

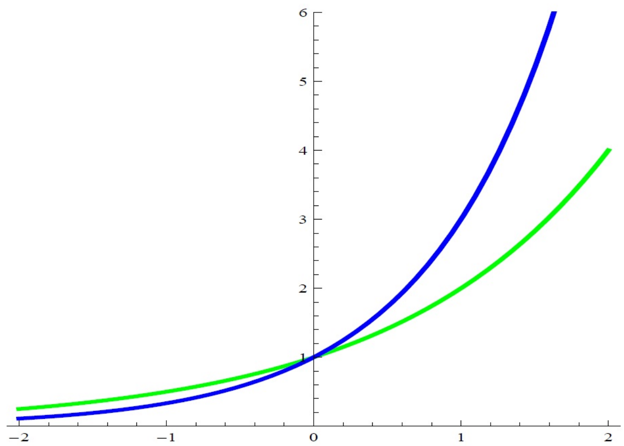

Figura 3.19: Gráficos para $a > 1$: $a = 2$ (verde) e $a = 3$ (azul).

Exemplo 3.9 *Um fabricante de certos componentes eletrônicos fez um estudo estatístico da confiabilidade do seu produto. O estudo indicou que a fração dos componentes que após t anos de uso, ainda estão em condições de funcionamento é, aproximadamente,* $f(t) = e^{-0.2t}$*, sendo e um número Neperiano.*

1. *Que fração dos componentes deve funcionar pelo menos por três anos?*
2. *Que fração dos componentes deve parar de funcionar durante o terceiro ano de uso?*

Resolução

1. Devemos calcular: $f(3) = e^{-0,6} \cong 0.54$, isto é, podemos esperar que aproximadamente 55% dos componentes funcione pelo menos três anos.
2. Para determinar a fração dos componentes que deve parar de funcionar durante o terceiro ano de uso, basta calcular:

$$f(3) - f(4) = e^{-0,6} - e^{-0,8} \cong 0,099$$

Portanto, podemos esperar que, aproximadamente, 10% dos componentes parem de funcionar durante o terceiro ano de uso.

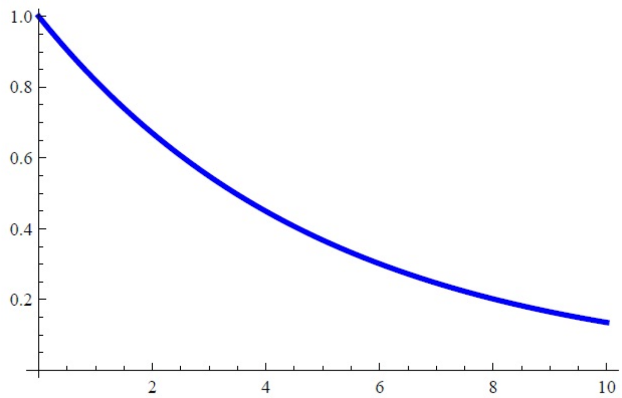

Figura 3.20: Gráfico de $f(t) = e^{-0,2t}$

Exemplo 3.10 *Projeta-se que em t anos, a população de um estado será de* $P(t) = 10e^{0,02t}$ *milhões de habitantes. Qual é a população atual? Qual será a população em* 20 *anos, se a população continuar crescendo nesta proporção?*

A população atual é $P(0) = 10$ milhões e $P(20) = 10e^{0,4} \cong 14.918$ milhões.

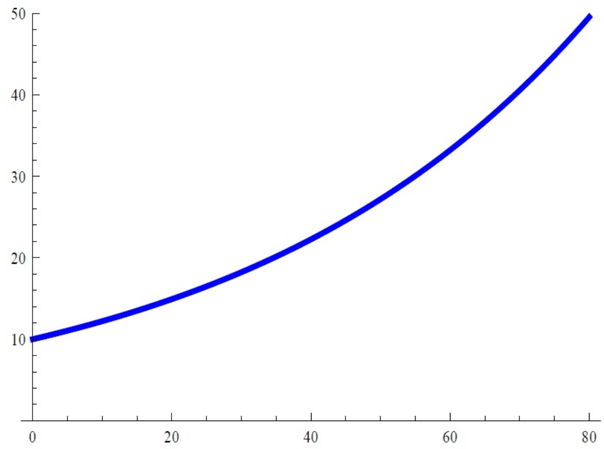

Figura 3.21: Gráfico do Exemplo 3.8

3.4 Função Logarítmica

Como qualquer reta paralela ao eixo dos x intersecta o gráfico da função exponencial $y = a^x$, sendo $a \neq 0$, ela possui uma inversa denominada função logarítmica de base a, que é denotada por:

$$f(x) = log_a x$$

e definida por:

$$y = log_a\ (x\ ) \Leftrightarrow a^y = x,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Note que $Dom(f) = (0, +\infty)$, $Im(f) = \mathbb{R}$, $f(1) = 0$, $f(a) = 1$ e seu gráfico depende de ser $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

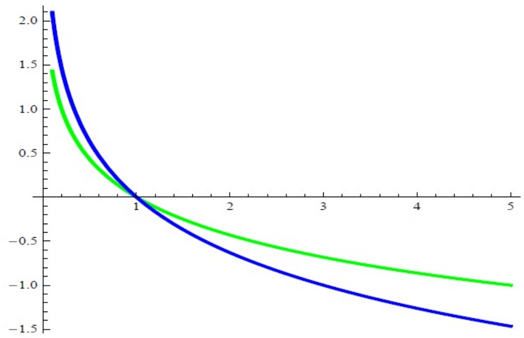

Figura 3.22: Gráfico de $0 < a < 1$;$a = 1/5$ (verde) e $a = 1/3$ (azul).

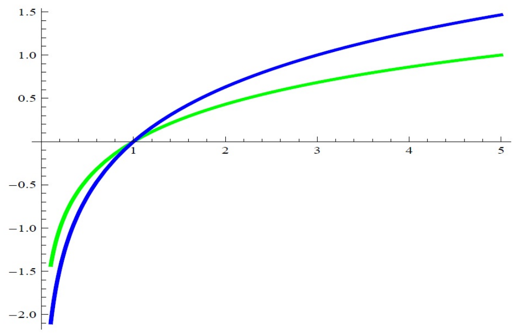

Figura 3.23: Gráfico de $a > 1$;$a = 2$ (verde) e $a = 1/2$ (azul).

Usando o fato de $y = log_a(x)$ ser a inversa da exponencial temos as seguintes identidades: $log_a(a^x) =$ x, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a^{log_a(x)} = x$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

Proposição 3.2 *Seja $y = log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}$ e tal que $0 < a \neq 1$:*

1. $f(x_1.x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, isto é:

$$log_a(x_1.x_2) = log_a(x_1) + log_a(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \in (0, +\infty).$$

2. $log_a(xb) = b.log_a(x)$.

3. $log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = log_a(x_1) - log_a(x_2)$.

4. $log_a(b) = \dfrac{1}{log_b(a)}$

5. $a^x = b^{x.log_b(a)}$.

A mudança de base da função logarítmica é dada por:

$$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$$

3.5 Funções Seno e Cosseno

3.5.1 Função Seno e Função Cosseno

Definição 3.8 *Uma função f é periódica de período t, $t > 0$, quando para todo $x \in Dom(f)$, $x + t \in Dom(f)$ e $f(x) = f(x + t)$.*

O gráfico de uma função periódica de período t se repete em cada intervalo de comprimento t.

As funções períodicas $cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $sen : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas de função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$E(x) = (cos(x); sen(x))$$

Sendo $E(x)$ pontos de uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano e raio unitário.

Noutras palavras:

Definição 3.9 *Função Seno é a ordenada de $E(t)$:*

$$f(x) = sen(x)$$

Definição 3.10 *Função Co-seno é a abscissa de $E(t)$:*

$$g(x)=cos(x)$$

Imediamente desta definição vale, para todo $x \in \mathbb{R}$, a relação fundamental:

$$cos^2x + sen^2x = 1$$

Temos tambem que $x \in \mathbb{R}$:

$$E(x) = (cos(x); sen(x))$$

e

$$E(-x) = (cos(-x); sen(-x))$$

Sendo $cos(-x) = cos(x)$ e $sen(-x) = -sen(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar.

Temos também que sen(2003) indica que estamos calculando o seno de 2003 radianos. Nas duas funções temos que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, 1]$; seno é uma função ímpar e co-seno é uma função par; ambas são periódicas de período 2π

A função $y = a + bsen(cx)$ e $y = a + bcos(cx)$ tem período igual a $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$

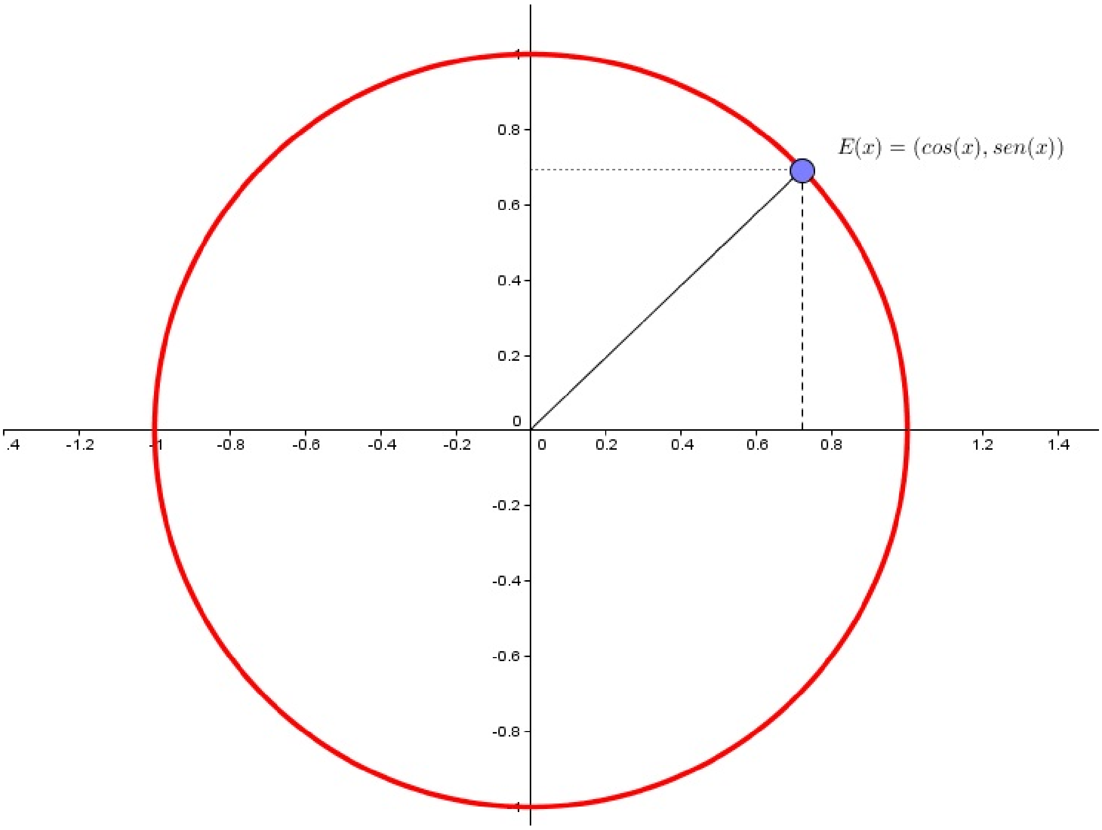

Figura 3.24: Círculo trigonométrico.

Prova 3.1 *Se $P > 0$ e $f(x) = f(x+P)$ então o menor valor positivo de P é o período da função f. Utilizando essa definição temos:*

$f(x) = a + b.sen(cx)$

$f(x+P) = a + b.sen[c.(x+P)]$

fazendo $f(x) = f(x+P)$ temos:

$a + bsen(cx) = a + bsen[c.(x+P)] \Rightarrow sen(cx) = sen(cx + cP)$

Se os senos são iguais os arcos podem ser côngruos, então:

$$cx + cP = cx + 2K\pi; K \in \mathbb{Z}$$

$cP = 2k\pi \Rightarrow P = \dfrac{2\pi}{|c|}$*, como p é o menor valor positivo fazemos $K = 1$ e $|c|$*

Conclusão :$P = \dfrac{2\pi}{|c|}$ *(c.q.d)*

A mesma demonstração vale para $y = a + bcos(cx)$.

Para montagen dos gráficos de $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$ podemos pelas tabelas:

x	$sen(x)$
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0

x	$cos(x)$
0	1
$\pi/2$	0
π	-1
$3\pi/2$	0
2π	1

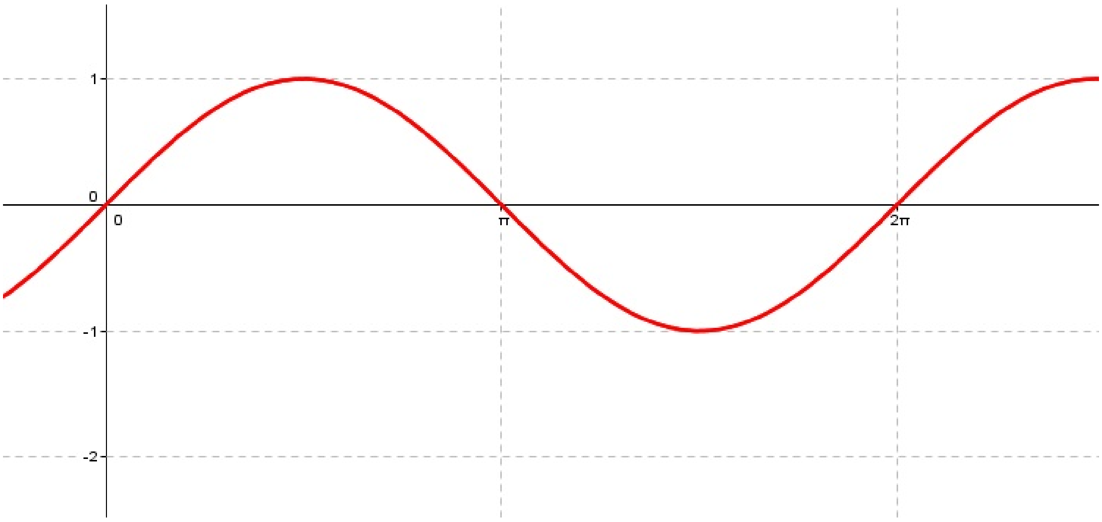

Figura 3.25: Gráfico de $y = sen(x)$.

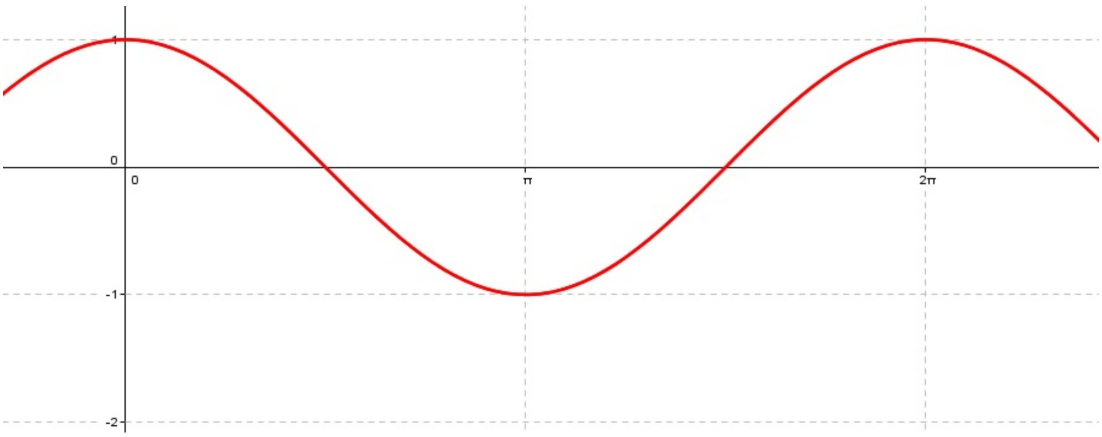

Figura 3.26: Gráfico de $y = cos(x)$.

Capítulo 4

Construção do Gráfico de Funções Elementares com uso do Geogebra

Ao tratar do uso das tecnologias para o ensino-aprendizagem das ideias de função ou família de funções, Rêgo (2000) aponta que as principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas.

Brandão (2013) relata que o uso das novas tecnologias de forma planejada desperta nos estudantes a curiosidade e favorece a investigação, e consequentemente, a aprendizagem de conceitos matemáticos. De fato ao usarmos novas tecnologias na sala de aula, além de potencializarmos o processo ensino - aprendizagem motivamos o aluno para aprender e realizar investigações nos coceitos de matemática a partir dos recursos computacionais.

Com o Geogebra podemos ilustrar facilmente as propriedades das funções, como por exemplo, as que se referem aos coeficientes angular e linear de uma Função Afim. Ao representar uma função afim no Geogebra, podemos ao mesmo tempo, observar o comportamento do gráfico a partir da variação dos coeficientes da mesma. Os gráficos dos elementos da familia de funções podem ser identificados a partir de movimentos geométricos aplicados no gráfico de uma função básica.

Na família dos polinômios de grau 1, por exemplo, na função básica $y = ax$ e na família constituída pelas funções $y = ax + b$ o aluno, no Geogebra, faz variações dos parâmetros a e b e investiga o efeito geométrico da função básica. Não dependendo de uma tabela numérica mas, somente dos movimentos geométricos o aluno passo a passo vai construindo as relações que podem permiti-lo entender as propriedades do gráfico de quaquer elemento da família de funções.

Neste capítulo apresentamos uma proposta para introdução e exploração dos principais conceitos de função presentes nos estudos das funções elementares através de atividades que serão exploradas a partir de problemas reais. Com o software GeoGebra como ferramenta de ensino e conceitos envolvidos nos conteúdos de função afim, função quadrática , trigonométricas, exponenciais e logarítmicas visamos expor um roteiro com algumas atividades a serem realizadas.

4.1 O Geogebra

O Geogebra é um software de matemática dinâmica [1] livre de multiplataforma [2] que pode ser usado em todos os níveis de ensino combinando geometria, álgebra, tabelas , gráficos, estatística e cálculo em um só sistema. Ele foi criado em m 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido e desde então recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo. Segundo PETLA (2008), o Geogebra por ser um software livre, os colaboradores podem fazer alterações em seus códigos fontes da maneira que necessitarem, melhorando e aprimorando atualizando ferramentas nele disponível.

[1] A expressão "Matemática Dinâmica" é utilizada por Markus Hohenwarter, cirador do Geogebra, ao explicar as funções dos mesmo. Seria uma extensão da definição de "Geometria Dinâmica " que permite a elabroração de construções eletrônicas nos quais os elmentos básicos podem ser movimentados na tela do computador.

[2] Segundo o dicionário online Michaelis, multi+plataforma refere-se ao programa que pode funcionar em várias plataformas (equipamentos) diferentes.

No Geogebra pode–se realizar construções usando pontos, vetores, retas, segmentos, secões cônicas, funções e ainda alterar todos esses objetos dinamicamente após a cosntrução ser finalizada.

4.2 Instalação do geogebra

A instalação do Geogebra pode ser feita no site **http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/**.

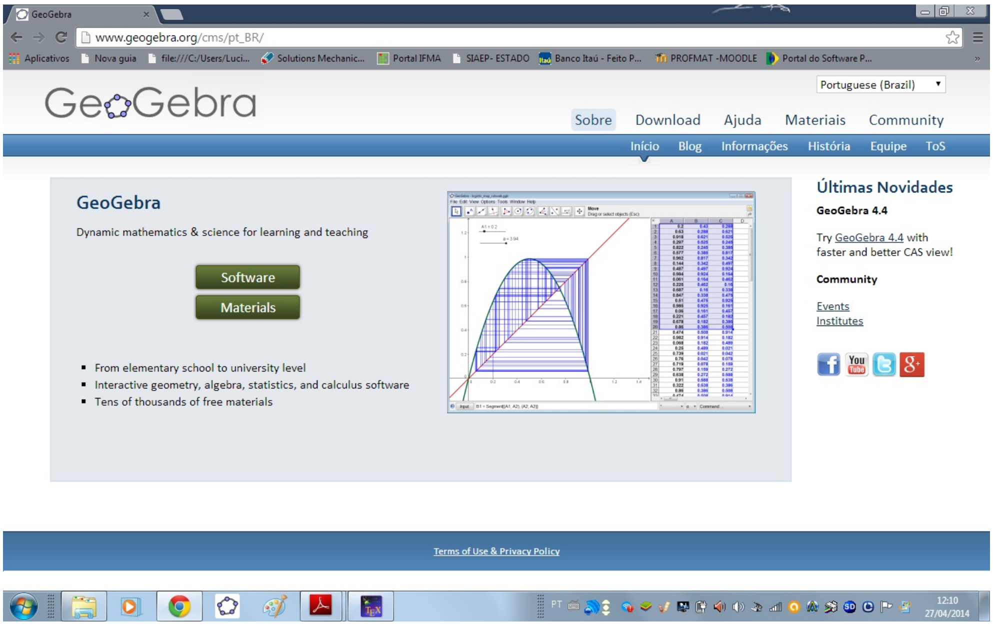

Figura 4.1: Site do Geogebra

Ao clicar no link de download escolhemos em qual sistema operacional será instalado o software. No ambiente Windows podemos salvar e depois executá–lo, ou apenas executar. Porém uma vez salvo o arquivo executável, é possível transportar o instalador em um pendrive e instalar em outros computadores.

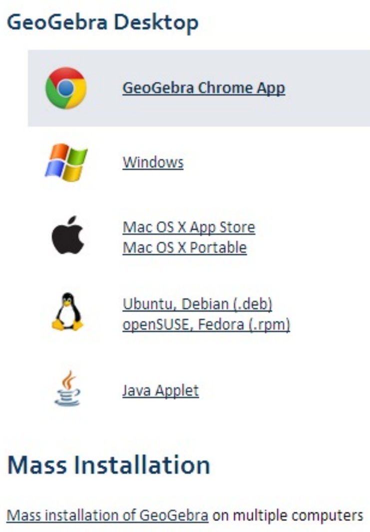

Figura 4.2: Opções de instalações do Geogebra

4.3 Elementos e Comandos do Geogebra

Acessando o programa encontramos uma janela indicada na Figura (4.3):

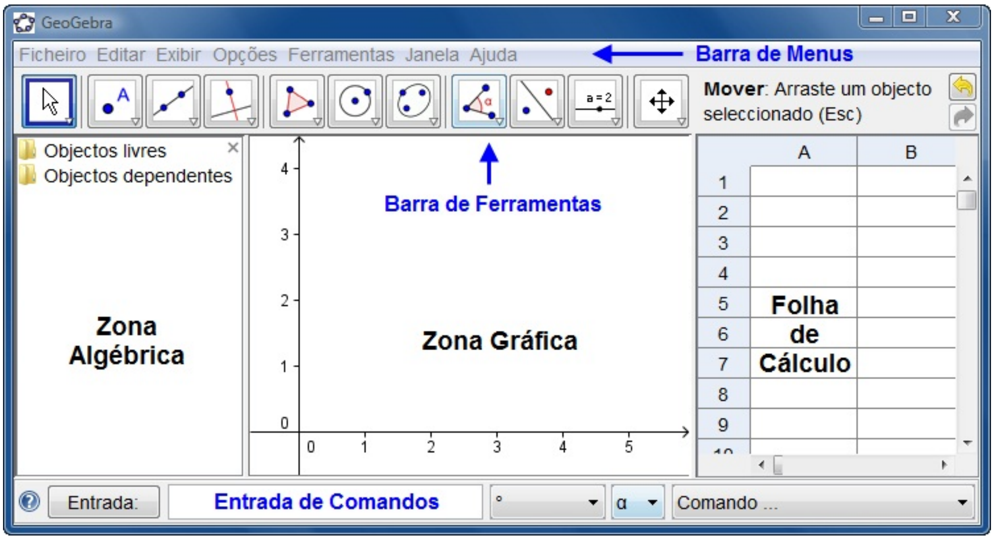

Figura 4.3: Tela inicial do Geogebra

Na janela do Geogebra temos as regiões:

a) **Zona Algébrica:** Para ativar esta região devemos ir em no menu Exibir e clicar em "Janela de Algebra". Nesta região qualquer objeto criado irá apracer como um item e a relação entre eles que podem ser alterados nas saus configurações gerais ou isoladas

b) **Zona Gráfica:** Região onde são exibidos os objetos tipos pontos, funções, poligonos, vetores segmentos , etc. Usando os recursos disponíveis na barra de ferramentas, podemos realizar construções geométricas na Zona Gráfica com a utilização do mouse, sem necessariamente partir da Entrada de Comando.

c) **Folha de Cálculo:** É uma tabela de valores númeriocs, onde cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente. A Folha de Cálculo tem funcionamento análogo ao de uma planilha eletrônica.

d) **Barra de Ferramentas:**. Nesta barra temos todas ferramentas disponíveis no software que têm as seguintes aplicações:

- Permitir a construção intuitiva de pontos, retas, planos, triângulos, círculos e outros objetos básicos;
- Translada, amplia, reduz e gira os objetos geométricos em relação ao seu centro geométricos e centros específicos, além de possibilitar simetria axial e central, além de realizar a inversão de objetos;
- Constrói e mede figuras;
- Utiliza coordenada cartesiana e polar;
- Proporciona a apresentação das equações dos objetos geométricos, retas, circunferências, elipses e coordenadas de pontos;
- Oculta objetos utilizados na construção para melhor organização na tela;
- Permite diferenciar os objetos mediante o uso de cores e linhas variadas;
- Ilustra as figuras mediante a animação;
- Permite guardar arquivos e macros em disco.

Imediatamente, mostraremos algumas ferramentas deste software e seus pormenores, de forma a esclarecer sua estrutura.

a) **Arquivo:** contém as opções Nova Janela, Novo, Abrir, Gravar, Gravar como, Visualização da Impressão, Exportar e Fechar, conforme figura.

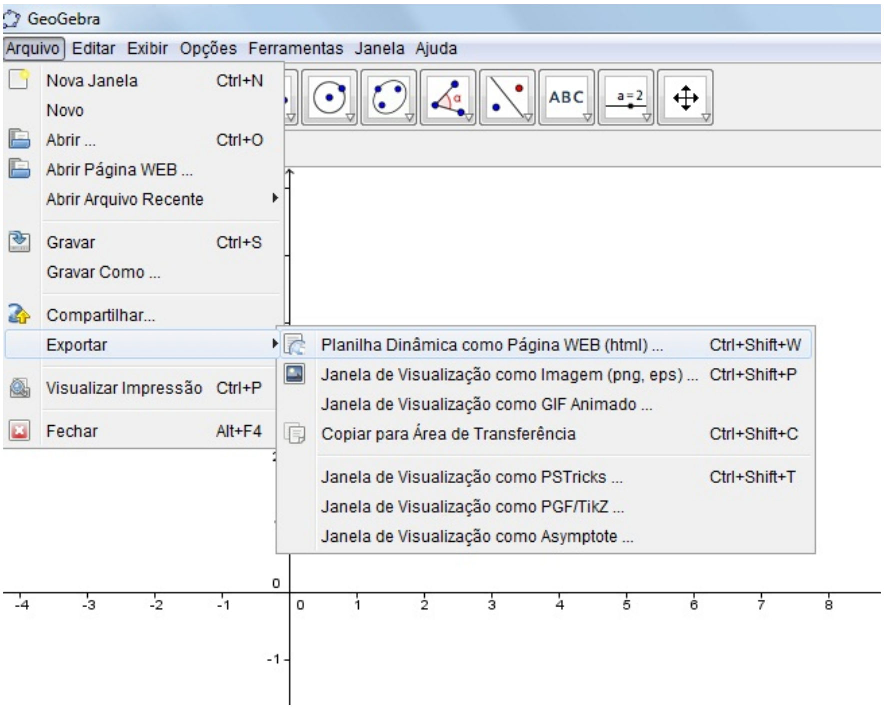

Figura 4.4: Menu Arquivo do Geogebra.

b) **Editar:** Dá acesso às ferramentas: Desfazer, Refazer, Apagar, Selecionar tudo e Propriedade.

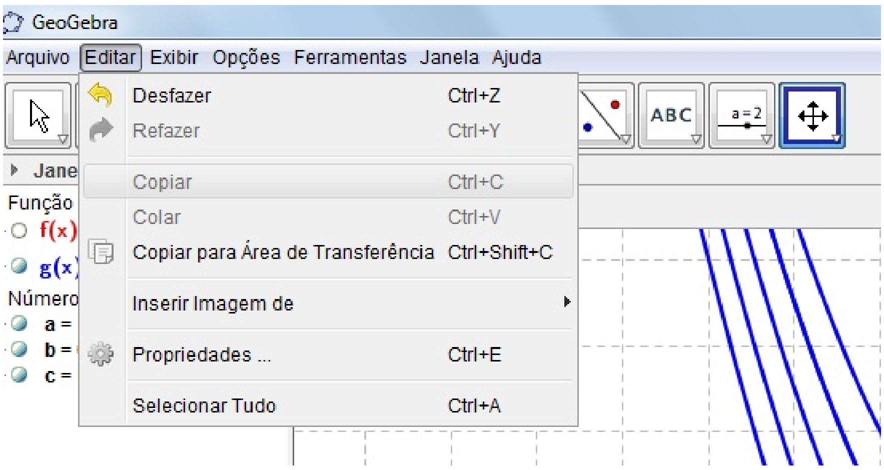

Figura 4.5: Menu Editar do Geogebra.

c) **Exibir**: habilita as opções de Eixo, Malha, Janela de álgebra, Objetos auxiliares, Divisão horizontal, Campo de entrada, Lista de comandos, Protocolo de construção, Barra de navegação para passos da construção e Atualizar Janelas.

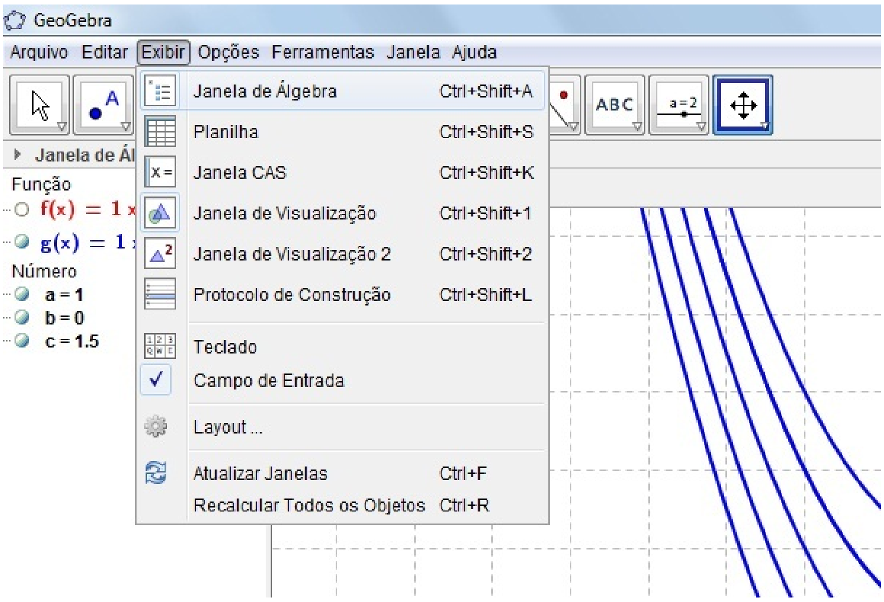

Figura 4.6: Menu Exibir do Geogebra.

d) **Opções:** habilita as opções Pontos sobre a malha, Unidades de ângulo, Casas decimais, Continuidade, Estilo do Ponto, Estilo de ângulo reto, Coordenadas, Rotular, Tamanho da fonte, Idioma, Janela de visualização, Salvar configurações e Restaurar a configuração padrão.

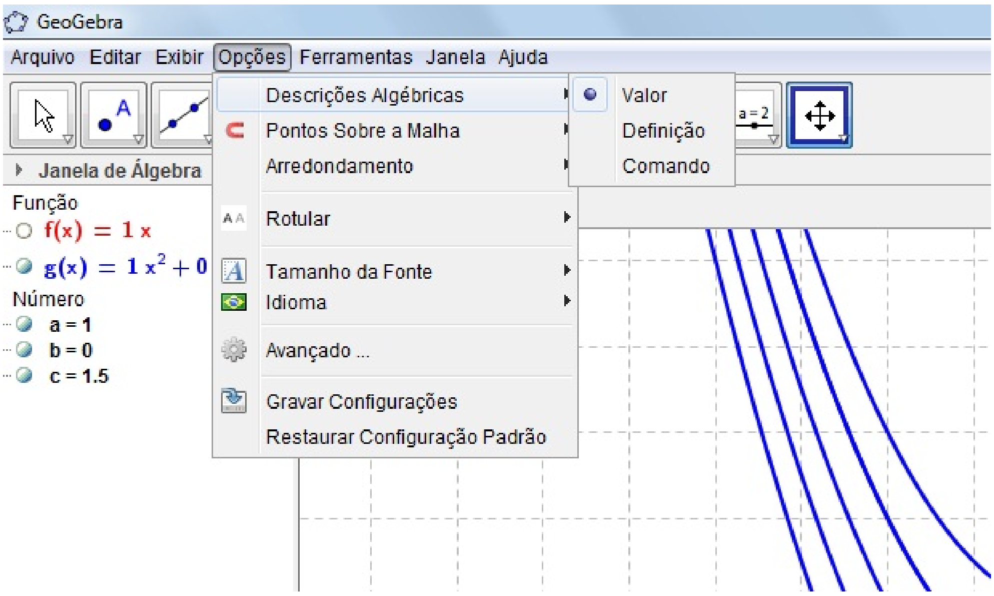

Figura 4.7: Menu Opções do Geogebra.

e) **Ferramentas:** habilita as opções Criar uma nova ferramenta, Ferramentas de controle e Configurar a caixa de ferramenta.

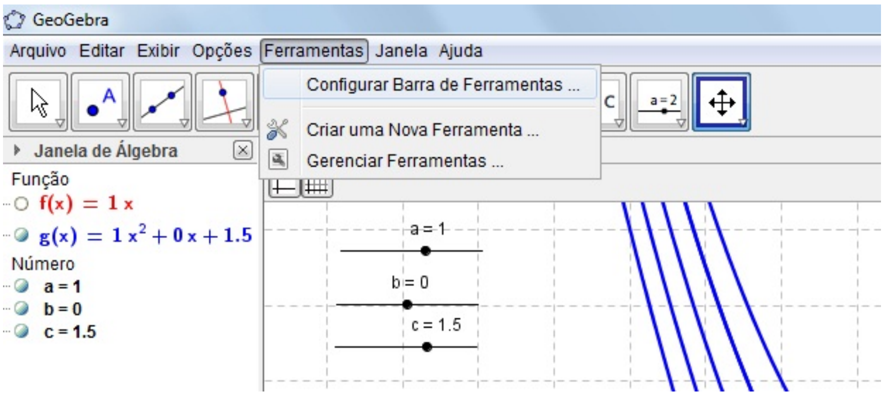

Figura 4.8: Menu Ferramentas do Geogebra.

f) **Janela:** habilita a opção Nova Janela que permite ao usuário abrir uma nova janela.

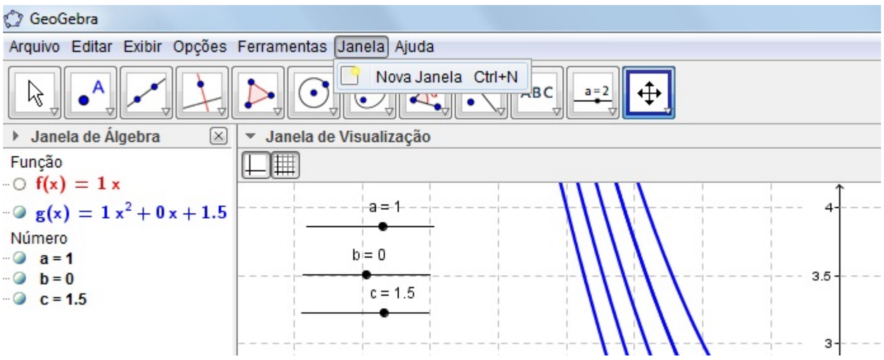

Figura 4.9: Menu Janela do Geogebra.

g) **Ajuda:** disponibiliza endereços de páginas web para consulta ao tutorial e fóruns de discussão de usuários do software. Contém as opções Ajuda, www.geogebra.org, GeoGebra Tube, Reporta Erro e Sobre/Licença.

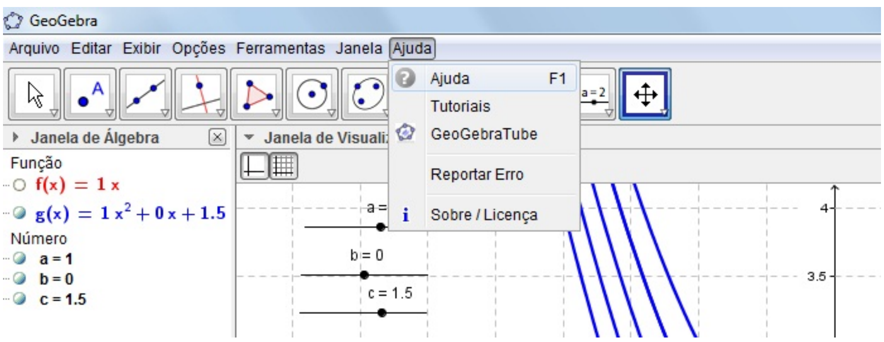

Figura 4.10: Menu Ajuda do Geogebra.

4.4 Personalizar a Interface do Utilizador

A interface do utilizador do GeoGebra é personalizada usando o menu Exibir. Por exemplo, podemos esconder diferentes partes da interface (Zona Algébrica, Folha de Cálculo, Barra de Comandos) desmarcando o correspondente item no menu Exibir.

4.4.1 Exibir e Esconder Objetos

Podemos exibir ou esconder objetos na Zona Gráfica de várias maneiras.

- Pode-se usar a ferramenta Exibir/Esconder objetos para exibir ou esconder objectos.
- Abra o Menu de Contexto e seleccione o item Exibir objeto para alterar o estado de visibilidade do objeto seleccionado.
- Na Zona Algébrica, o ícone à esquerda de cada objeto mostra o seu estado de visibilidade corrente (”visível” ou ”escondido”). Podemos clicar diretamente no pequeno ícone para alterar o estado de visibilidade do respective objeto.
- Também podemos usar a ferramenta Caixa para exibir/esconder objetos para exibir ou esconder um ou mais objetos.

4.4.2 Personalizar os Eixos Coordenados e o Quadriculado

Podemos nos eixos coordenados e o quadriculado personaliza-los usando o Diálogo de Propriedades da Zona Gráfica. Depois de clicar com o botão direito do mouse no fundo da Zona Gráfica, pode-se abrir esta janela de diálogo seleccionando ”Propriedades” no Menu de Contexto da Zona Gráfica.

- No separador ”Eixos coordenados”, podemos, por exemplo, alterar o estilo da linha e as unidades dos eixos coordenados, e estabelecer a distância das graduações para um certo valor. Note que podemos personalizar cada um dos eixos individualmente, clicando no separador ”EixoX” ou

"EixoY". Além disso, podemos também alterar a razão entre os eixos e exibir ou esconder cada eixo individualmente.

- No separador "Quadriculado", pode-se, por exemplo, alterar a cor e o estilo das linhas do quadriculado, e estabelecer a distância entre estas linhas. Também pode-se escolher o quadriculado "Isométrico".

4.4.3 Personalizar a Barra de Ferramentas

A barra de ferramentas pode ser personalizada seleccionando "Personalizar a barra de ferramentas" no menu "Ferramentas". Seleccione a ferramenta ou a caixa de ferramentas que pretende remover da barra de ferramentas, na lista do lado esquerdo da janela de diálogo que aparece, e clique no botão "Remover".

4.4.4 Funções e Operações Pré-definidas

Para inserir números, coordenadas ou equações, (veja a secção Entrada Direta) também pode usar as funções e operações pré-definidas constantes na tabela seguinte. As funções pré-definidas têm que ser inseridas usando parênteses curvos.Não pode deixar espaços entre a função e os parênteses.

4.5 Gráficos de funções com Geogebra

Nesta seção, cada atividade é apresentada com uma sequência de instruções mediante o gráfico em que se deseja chegar, de maneira a permitir aos participantes que têm facilidade a continuidade na construção das atividades. Para aqueles que têm maior dificuldade pode ser necessário um atendimento individual.

4.5.1 Construção da função afim no geogebra

Considerando a função afim $f(x) = ax + b$, de acordo com a Seção 3.1, um procedimento para construir o gráfico desta função é dado pela seguinte atividade.

- **Atividade 1**: Construir um gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ com a utilização do software geogebra com parâmetros a e b variáveis.

  a) Construa dois seletores a e b.

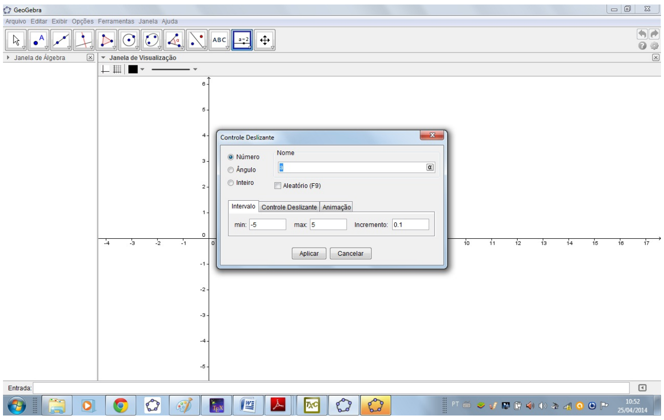

Figura 4.11: Janela para criação de seletores no Geogebra.

  b) Usando a entrada algébrica no campo de entrada digite a função $f(x) = a * x + b$ e tecle ENTER.

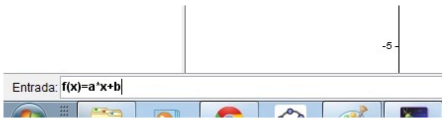

Figura 4.12: Campo de entrada.

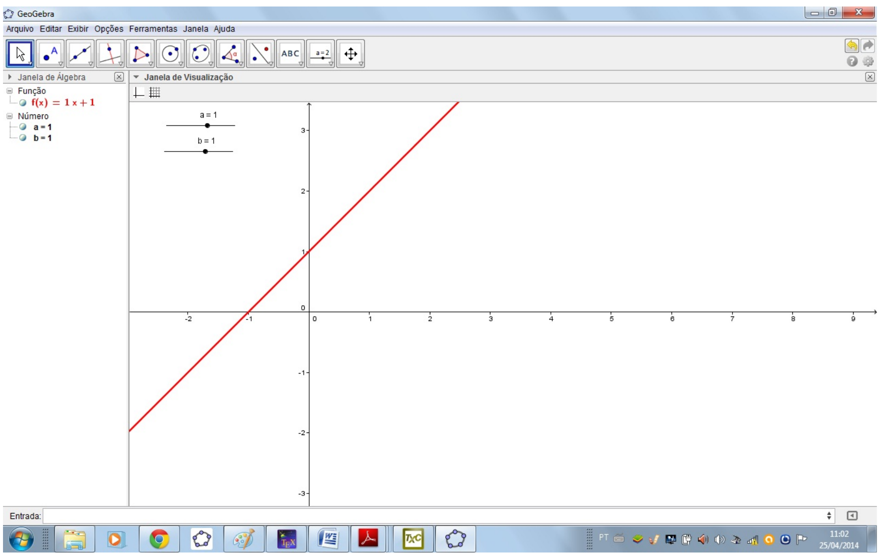

Figura 4.13: Função afim $y = x + 1$ no Geogebra.

c) Deslizando os parâmetros a e b da função $f(x) = ax + b$ e verifique o efeito no gráfico.

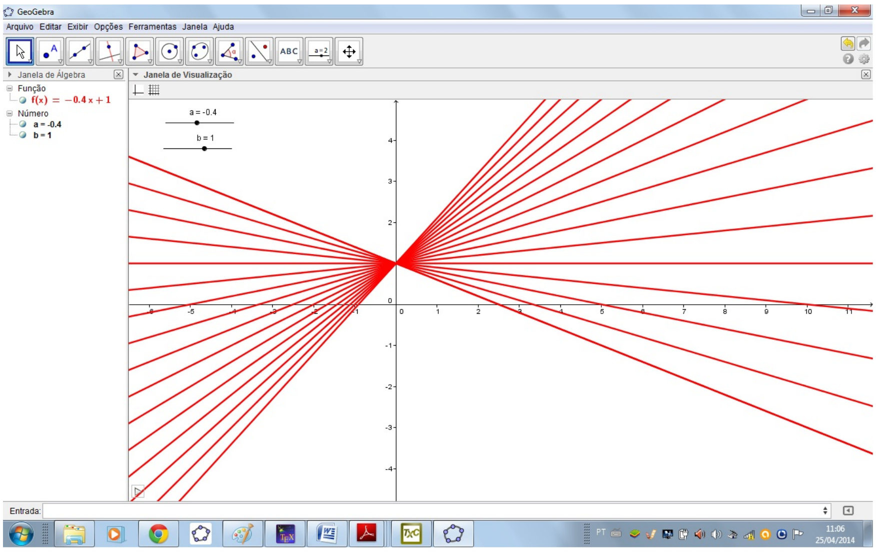

Figura 4.14: Função afim variando o valor de a em $f(x) = ax + b$ no Geogebra.

4.5.2 Construção da função quadrática no geogebra

Considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, de acordo com a seção (3.2), um procedimento para construir o gráfico desta função é dado pela seguinte atividade.

- **Atividade 2**: Construir um gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a utilização o software geogebra com parâmetros a, b e c variáveis.

  a) Construa três seletores a , b e c.

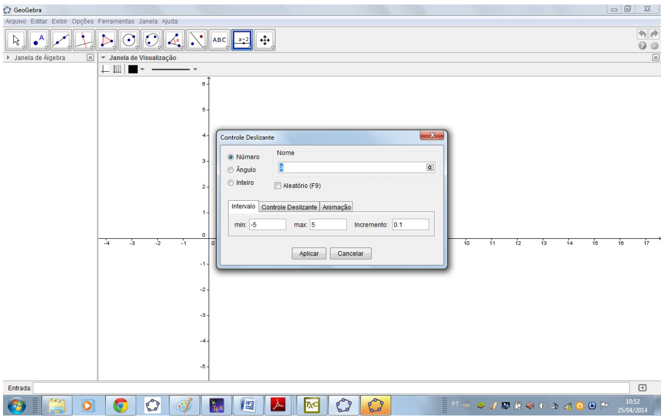

Figura 4.15: Janela para criação de seletores no Geogebra.

  b) Usando a entrada algébrica no campo de entrada digite a função $g(x) = a * x^2 + b * x + c$ e tecle ENTER.

Figura 4.16: Campo de entrada.

  c) Movimente o seletor a e verifique o comportamento da parábola.

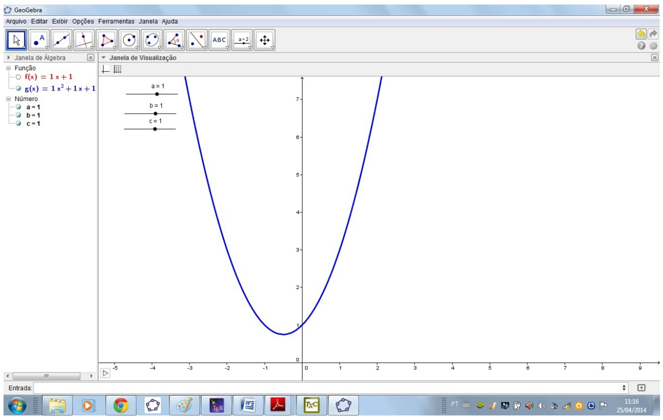

Figura 4.17: Gráfico da função quadrática $y = x^2 + x + 1$ no geogebra.

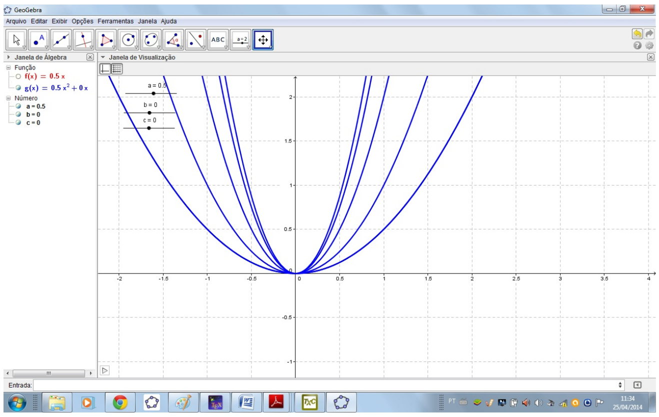

Figura 4.18: Função quadrática $y = ax^2$ no Geogebra variando o a.

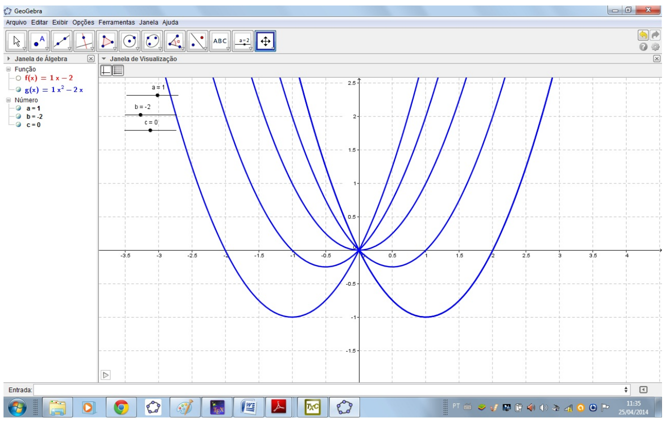

Figura 4.19: Função quadrática $y = x^2 + bx$ no Geogebra variando o b.

d) Movimente o seletor b e verifique o comportamento da parábola.

e) Movimente o seletor c e verifique o comportamento da parábola.

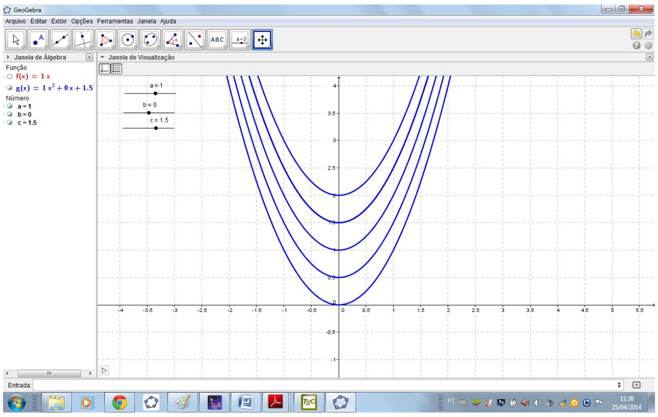

Figura 4.20: Função quadrática $y = x^2 + c$ no Geogebra variando o c.

4.5.3 Construção da função exponencial no geogebra

Considerando a função exponencial $y = b + c * a^x$, de acordo com a seção (3.3), um procedimento para construir o gráfico desta função é dado pela seguinte atividade.

- **Atividade 3**: Construir um gráfico da função exponencial com a utilização o software geogebra com parâmetros a, b e c variáveis.

  a) Construa três seletores a , b e c.

  b) Usando a entrada algébrica no campo de entrada digite a função $y = b + ca^x$ e tecle ENTER.

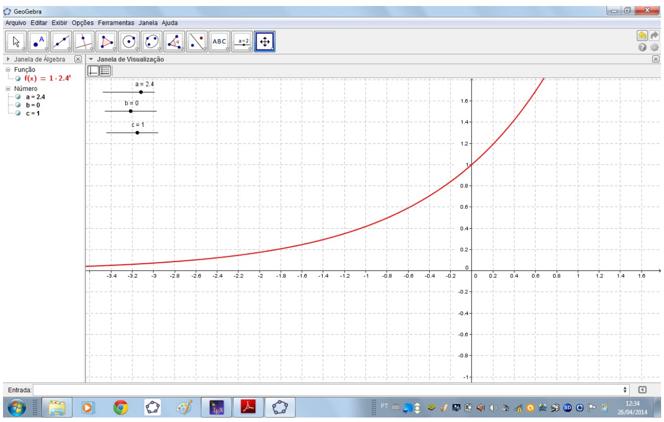

Figura 4.21: Gráfico da função $y = b + ca^x$ para $a = e; b = 0; c = 1$ no geogebra.

  c) Movimente o seletor b e verifique a curva exponencial.

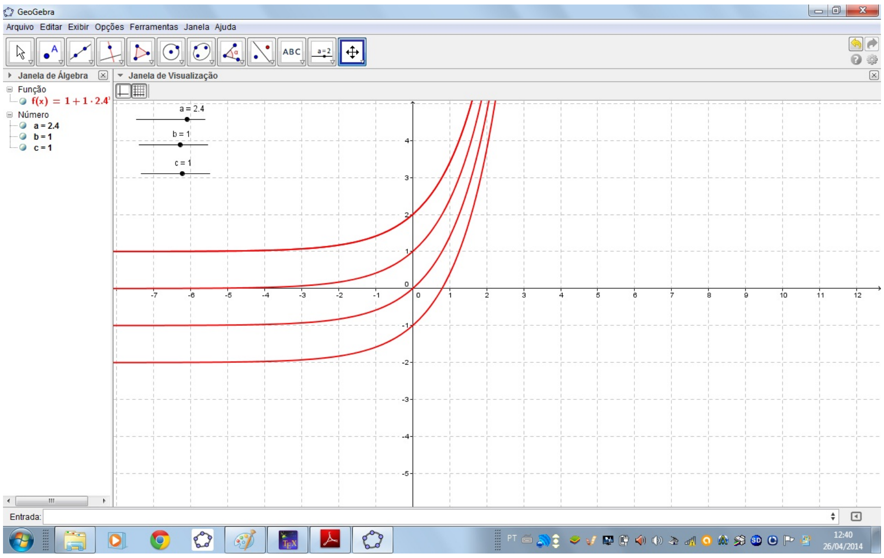

Figura 4.22: Gráfico da função $y = b + a^x$ no geogebra variando o b.

d) Movimente o seletor c e verifique a curva exponencial.

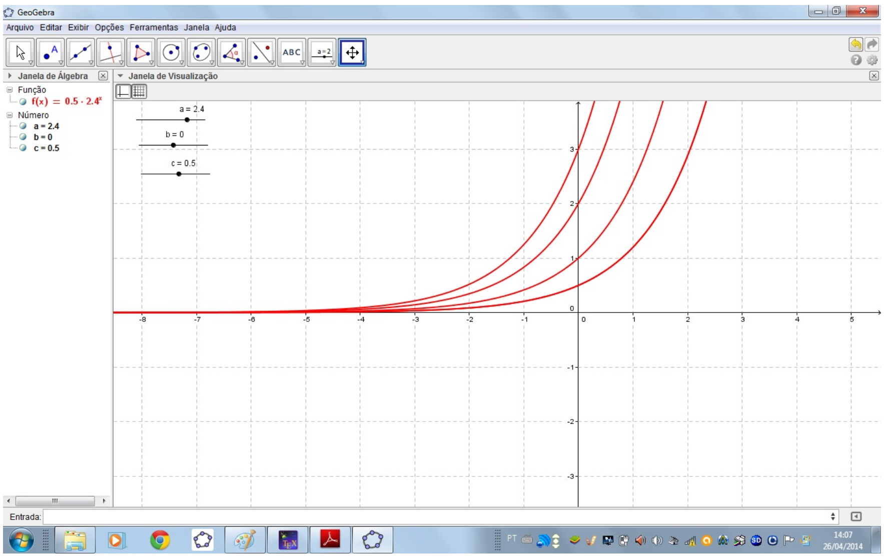

Figura 4.23: Função exponencial $y = ca^x$ no geogebra variando o c.

4.5.4 Construção da função seno no geogebra

Considerando a função seno $y = a + bsen(cx)$, de acordo com a subseção (3.5.1), um procedimento para construir o gráfico desta função é dado pela seguinte atividade.

- **Atividade 4**: Construir um gráfico a função $y = a + bsen(cx)$ com parâmetros a, b e c variáveis.

a) Construa três seletores a , b e c adotando os valores $a = 0; b = 1; c = 1$.

b) Usando a entrada algébrica no campo de entrada digite a função $y = a + b * sin(c * x)$ e tecle ENTER.

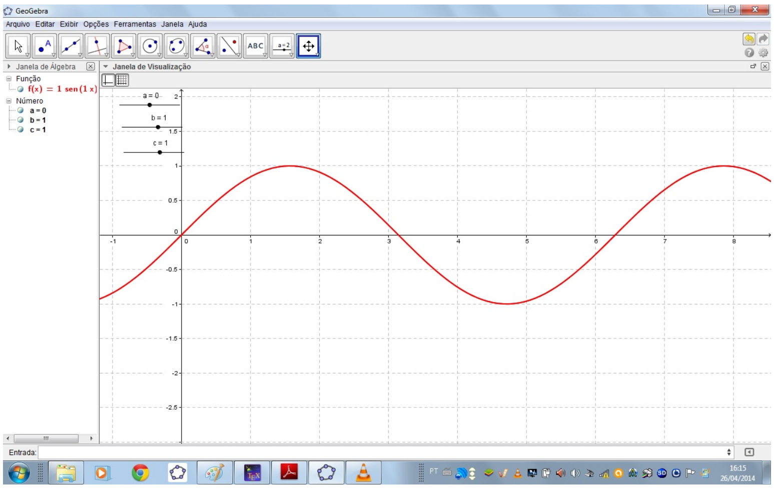

Figura 4.24: Gráfico da função $y = sen(x)$.

c) Movimente o seletor a e verifique a senoide.

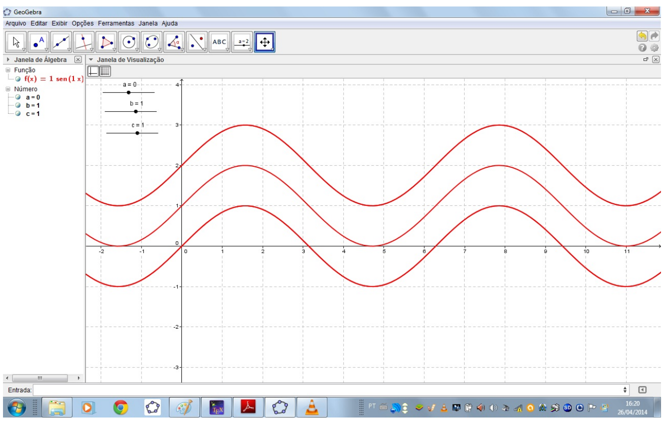

Figura 4.25: Gráfico da função $y = a + sen(x)$ no geogebra variando o a.

d) Movimente o seletor c e verifique a senoide.

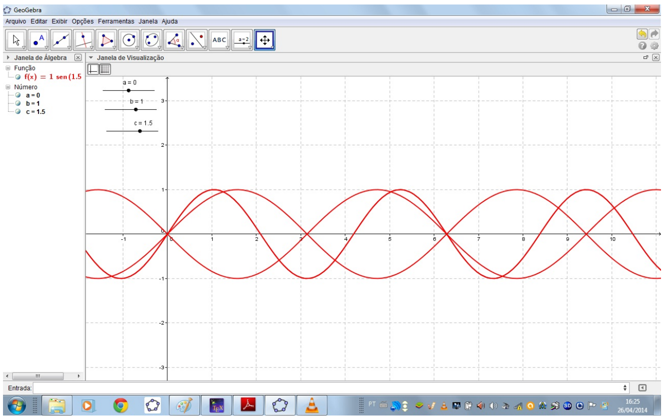

Figura 4.26: Gráfico da função $y = sen(c * x)$ no geogebra variando o c.

4.5.5 Construção da função cosseno no geogebra

Considerando a função cosseno $y = a + bcos(cx)$, de acordo com a subseção (3.5.1), um procedimento para construir o gráfico desta função é dado pela seguinte atividade.

- **Atividade 5**: Construir um gráfico a função $y = a+bcos(cx)$ com parâmetros a, b e c variáveis.

  a) Construa três seletores a , b e c adotando os valores $a = 0; b = 1; c = 1$.

  b) Usando a entrada algébrica no campo de entrada digite a função $y = a + b * cos(c * x)$ e tecle ENTER.

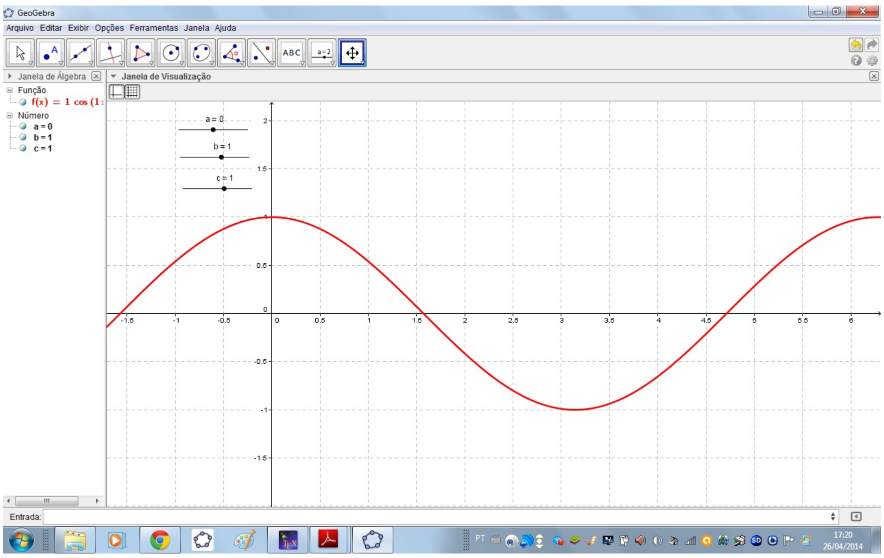

Figura 4.27: Gráfico da função $y = cos(x)$.

c) Movimente o seletor a e verifique a cossenoide.

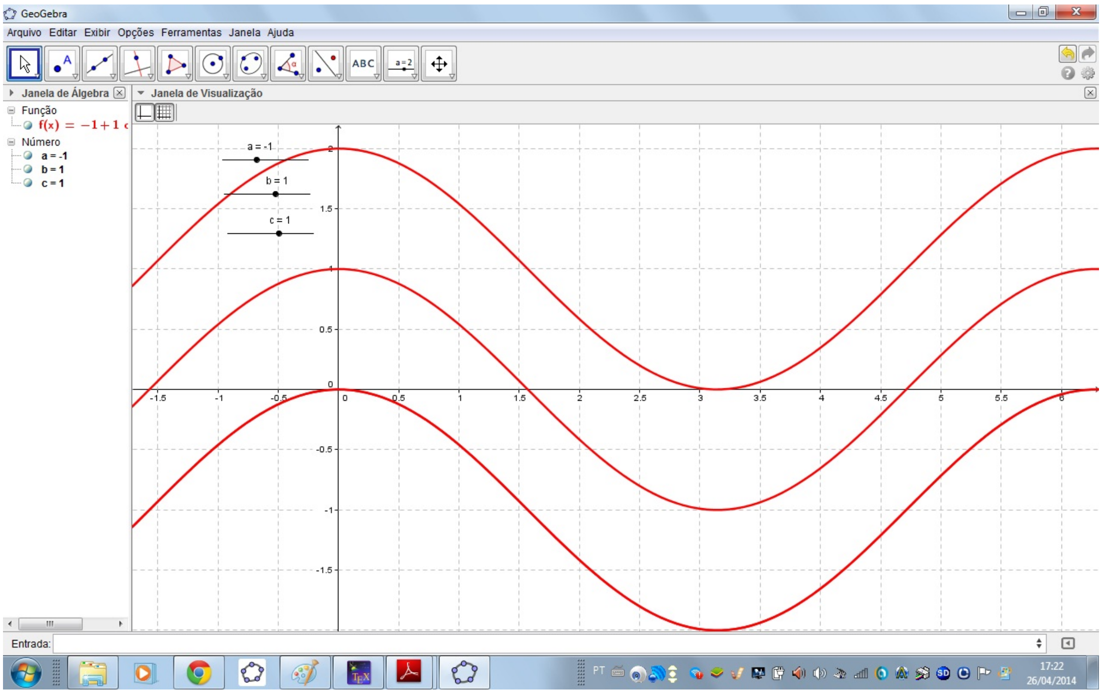

Figura 4.28: Gráfico da função $y = a + cos(x)$ no geogebra variando o a.

e) Movimente o seletor c para ver o comportamento da curva cossenoide.

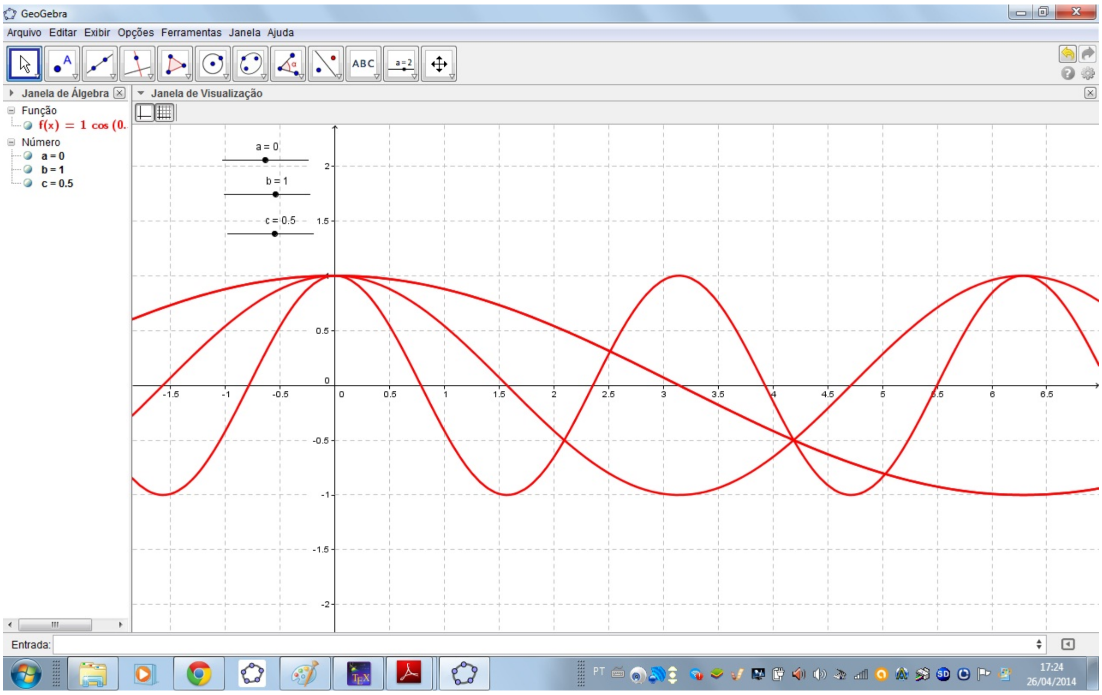

Figura 4.29: Gráfico da função $y = cos(c * x)$ no geogebra variando o c.

f) Movimente o seletor b para ver o comportamento da curva cossenoide.

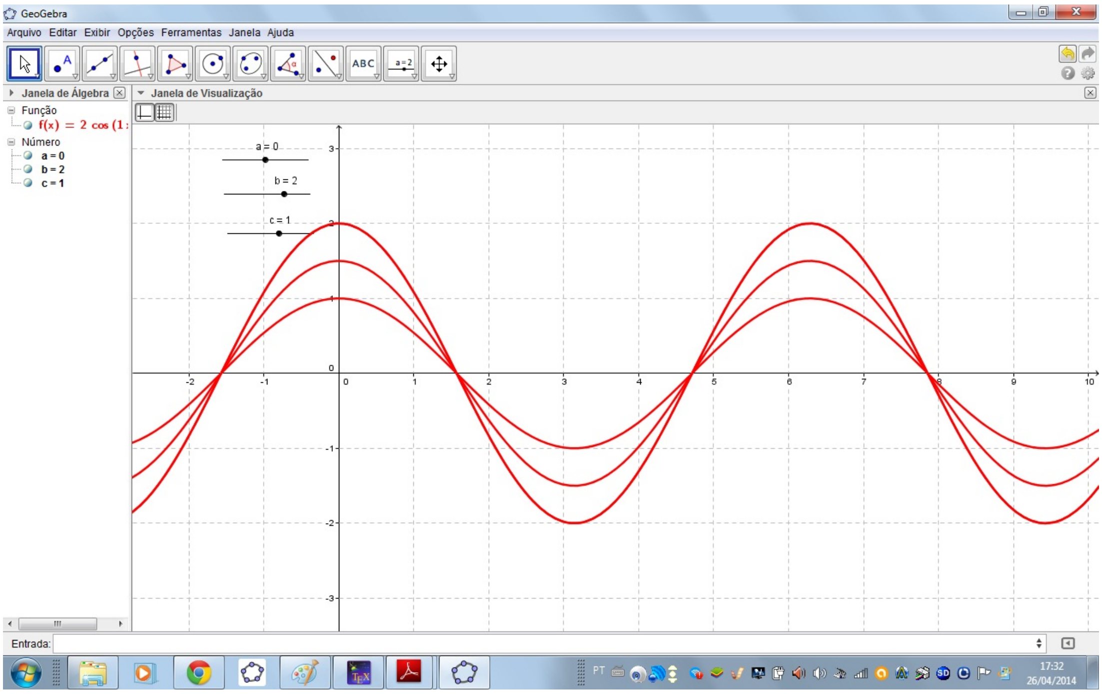

Figura 4.30: Gráfico da função $y = b * cos(*x)$ no geogebra variando o b.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho propusemos o uso do software GeoGebra para melhorar o ensino e aprendizagem de funções no Ensino Médio. Esperamos que isso possa ser feito, com a aplicação de uma sequência apropriada do desenvolvimento da teoria, como mostramos nos Capítulos 2 e 3, além das atividades propostas no Capítulo 4.

O uso de recursos computacionais no ensino de matemática é considerado inevitável. A sua utilização, sem dúvida, melhora o desempenho dos alunos.

No processo de ensino–aprendizagem o conceito de função deve ser levado em consideração no aspecto qualitativo de modo que o aluno compreenda as noções de correspondência, citadas no Capítulo 2.

Ao propormos o uso do Geogebra temos uma contribuição no sentido de permitir aos professores de Matemática do Ensino Médio e alunos uma análise prática do comportamento das principais funções reais elementares.

Referências Bibliográficas

[1] BARUFI, Maria C. Bonomi. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. São Paulo: FE–USP, 1999.

[2] BIANCHINI, B.L.; PUGA, L. Z. Função: Diagnosticando registros de representação semiótica. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, PUC, São Paulo.

[3] BOYER, C. B. História da Matemática. Traducao: Elza Furtado Gomide. Sao Paulo: E. Blucher, 1974. 488 p.

[4] BRAGA, Ciro. Função - a alma do ensino da Matemática. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

[5] DANTE, Luiz Roberto, Matemática contexto e aplicações, 1 ensino médio.ed ática. 4 edição, 2007.

[6] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3ª Edição. Editora HARBRA. São Paulo, v. 1, 1994.

[7] LIMA, Elon Lages et al. Temas e problemas elementares. Sociedade Brasileira de Matematica, 2001.

[8] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio-volume 1/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 2006.

[9] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Conjuntos, funções. Fundamentos de Matemática Elementar, v. 1, 2004.

[10] MEIRA, L. Aprendizagem e ensino de Funções. In: SCHLIEMANN, Analúcia (Org.).Estudos em Psicologia da Educação Matemática. 2 ed. Ampliada. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

[11] MELLO, José Luiz Pastore. MATEMÁTICA construção e significado. Volume Único, Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2005.

[12] PETLA, Revelino José. Geogebra – Possibilidades para o ensino da matemática. 2008.Disponível em: http://www.scribd.com/doc/26819748/Geogebra–possibilidade–para–oensino– da-matematica. Acesso em 10 de março de 2014.

[13] RÊGO, Rogéria Gaudêncio. Um estudo sobre a construção do conceito de função. 2000. 2000. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Educação)?Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN.

[14] REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

[15] ROSSINI, R. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2006.