
Contribuições da otimização de funções
polinomiais no ensino médio utilizando recursos
computacionais

Fábio Vieira Abrão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Contribuições da otimização de funções polinomiais no ensino médio utilizando recursos computacionais

Fábio Vieira Abrão

***Orientadora:* Profa. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA.*

**USP – São Carlos
Fevereiro de 2015**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A158c Abrão, Fábio Vieira
 Contribuições da otimização de funções polinomiais
no ensino médio utilizando recursos computacionais
/ Fábio Vieira Abrão; orientadora Esther Pacheco de
Almeida . -- São Carlos, 2014.
 81 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Funções quadráticas. 2. Otimização. 3. Ensino
Médio. 4. Geogebra. I. , Esther Pacheco de Almeida,
orient. II. Título.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Benedito e Ana, que muitas vezes renunciaram aos seus sonhos para que eu pudesse alcançar os meus.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Fernanda por todo carinho e apoio.

Aos meus sogros Luís e Fátima por todo o apoio.

À Profa. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado por toda paciência e disposição no desenvolvimento do trabalho.

A todos meus colegas de PROFMAT.

À Cooperativa Educacional Cerqueirense por todo o auxílio durante a pesquisa.

RESUMO

Este projeto foi desenvolvido com os alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma Cooperativa educacional do interior do estado de São Paulo, com o objetivo de verificar as contribuições de atividades de otimização de funções quadráticas, utilizando o *software* Geogebra para a observação das variações dos parâmetros da função em questão. A metodologia utilizada foi a da pesquisa qualitativa e os dados foram coletados através da observação do pesquisador e de registros escritos produzidos pelos alunos, direcionados por perguntas previamente elaboradas pelo pesquisador. Os resultados indicam que, de maneira geral, a tecnologia da informação, por se tratar de algo presente no cotidiano dos alunos e por permitir uma melhor visualização do gráfico associado à resolução da situação problema, é uma ferramenta que permite uma melhora no desenvolvimento de conteúdos matemáticos. A pesquisa indicou também que o fato da atividade estar organizada por um tutorial do Geogebra, previamente elaborado pelo pesquisador, não possibilitou a livre exploração do *software* pelos alunos, etapa importante para a compreensão dos alunos e maior interação destes com o mesmo.

Palavras-chave: Funções Quadráticas, Otimização, Ensino Médio, Geogebra

ABSTRACT

This project was developed with students from the 3rd grade of high school of an educational Cooperative in the countryside of the state of São Paulo, with the aim of verifying the contributions of quadratic functions optimization activities using Geogebra software to observe the variations of the parameters of the function in question. The methodology used was the qualitative research and the data were collected through observation of the researcher and written records produced by students, directed by questions previously prepared by the researcher. The results indicate that, in general, information technology, because it is something present in the daily lives of students and to enable better visualization of the graph associated with the resolution of the problem situation, is a tool that allows an improvement in mathematic content development. The survey also indicated that the fact that the activity had been organized by a tutorial Geogebra, previously developed by the researcher, did not allow the free operation of the software by the students, an important step toward the students' understanding and increased their interaction with it.

Keywords: Quadratic Functions, Optimization, High School, Geogebra

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Relações estabelecidas com o uso de situações problema por Silva e Nuñez (2002).....	35
Figura 2: - Termo de consentimento livre e esclarecido (Diretora).....	43
Figura 3: Termo de consentimento livre e esclarecido (Responsáveis)	44
Figura 4: Termo de consentimento livre e esclarecido (Alunos).....	44
Figura 5: Alunos separados em duplas com os materiais em mãos	48
Figura 6: Alunos desenvolvendo a primeira parte da atividade	51
Figura 7: Foto da Tela que configura as opções para o controle deslizante	53
Figura 8: Foto da Tela de configuração da ferramenta Texto	54
Figura 9: Foto da Tela de configuração de ferramenta Texto	55
Figura 10: Foto da Tela de configuração de ferramenta Texto	55
Figura 11: Aparência final do gráfico	56
Figura 12: Dupla de alunos seguindo o tutorial da segunda parte da atividade	57
Figura 13: Quadro com o depoimento do aluno e comentário do pesquisador sobre a questão 1.....	58
Figura 14: Quadro com depoimento do aluno e comentário do pesquisador sobre a questão 2.....	60
Figura 15: Quadro com depoimento do aluno e comentário do pesquisador sobre as questões 3,4 e 5.....	62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 JUSTIFICATIVA	22
3 REFERENCIAL TEÓRICO	25
3.1 Geogebra	29
3.2 Definições acerca das Funções Quadráticas	32
3.2.1 Forma canônica.....	32
3.2.2 Máximo e Mínimo	33
3.2.3 Vértice da Parábola.....	33
3.3 A Resolução de Problemas no Ensino Básico	33
3.4 As abordagens do conceito de funções nas orientações curriculares do estado de São Paulo, 1994 e 2010	37
4 OBJETIVOS	41
5 METODOLOGIA	42
5.1 Descrição da Escola.....	42
5.2 A escolha dos participantes.....	43
5.3 O desenvolvimento da pesquisa	47
5.4 A Atividade escrita.....	49
5.5 O Tutorial.....	52
5.6 Análise das manifestações dos alunos	58
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	68
APÊNDICE A: Plano de aula sobre otimização de funções quadráticas para o 1º ano do Ensino Médio, 2011	70
APÊNDICE B: Situação-problema.....	72
APÊNDICE C: Tutorial para o desenvolvimento das atividades no <i>software</i> Geogebra	73
ANEXO A: Aspectos positivos descritos pelos alunos	78
ANEXO B: Aspectos negativos destacados pelos alunos	79
ANEXO C: Conclusões dos alunos	81

1 INTRODUÇÃO

A atuação do pesquisador como professor teve início em 2002, quando cursou o técnico em Informática na Escola Técnica Estadual (ETEC) no interior do Estado de São Paulo, e foi contratado por uma escola de informática para dar aulas de informática básica e programação em Visual Basic¹. O interesse pela profissão de professor começava a surgir.

Em 2005 durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática, na Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Bauru, o pesquisador foi bolsista do Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental (CECEMCA-UNESP) que responde por ações dirigidas à formação continuada de professores nas áreas de Ciências e Matemática sob a orientação da Prof. Dra. Mara Sueli S. Moraes.

Durante o ano de 2008, foi bolsista do Projeto Suporte Técnico e Pedagógico aos Laboratórios de Informática das Escolas da Rede Pública Estadual de Bauru (STEPE), um projeto do Laboratório de Tecnologia da Informação Aplicada – LTIA da Unesp/Bauru, coordenado pela Prof. Dra. Maria José Lenharo Morgado. Este trabalho proporcionou ao pesquisador maior proximidade com as tecnologias da informação aplicadas ao processo de ensino-aprendizagem.

O projeto STEPE tem por objetivo oferecer suporte pedagógico aos professores de escolas públicas no uso da informática educativa, manter em pleno funcionamento as Salas Ambiente de Informática (SAI) das escolas públicas estaduais, capacitar alunos das escolas públicas para se tornarem monitores das SAI de suas escolas e desenvolver atividades para motivar alunos e professores a se apropriarem dos recursos disponíveis nas SAI. Os resultados deste trabalho favoreceram o uso das tecnologias aplicadas na educação, pois resultavam em aulas mais dinâmicas e professores sempre atualizados.

¹ É uma linguagem de programação de computadores em que "Visual" refere-se ao método usado para criar o que o usuário vê — a interface gráfica do usuário ou GUI. "Basic" refere-se à linguagem de programação BASIC (Beginners All-Purpose Symbolic Instruction Code), uma linguagem usada por mais programadores que qualquer outra linguagem na história da computação. Você pode criar programas úteis aprendendo apenas alguns dos seus recursos. Fonte: <http://msdn.microsoft.com/pt-br/library/xk24xdbe%28v=vs.90%29.aspx>. Acesso em 01 out. 2014.

Em 2008, ano de conclusão da licenciatura, foi o ano de retorno ao interior paulista onde, de 2009 a 2010, o pesquisador atuou como Agente Educacional na Fundação Casa (Unidade Masculina) ministrando aulas de informática básica e reforço escolar na disciplina de Matemática.

No mesmo ano foi contratado por uma cooperativa educacional², no interior paulista, para ministrar aulas de Física e Matemática para o Ensino Médio, esta foi a nossa primeira experiência como professor responsável por uma sala, e não mais substituto.

Em 2011, com a aprovação no concurso para PEBII³ de Matemática do Estado de São Paulo, e iniciamos o trabalho no Ensino Fundamental em uma escola do interior paulista, com carga horária reduzida de 12h.

Concomitantemente a este trabalho, continuamos como PEBII na rede particular ministrando as disciplinas de Matemática e Física somente para o Ensino Médio.

Atualmente atuamos na escola estadual como PEBII na disciplina de Matemática, no Ensino Fundamental, e na cooperativa educacional nas disciplinas de Matemática e Física, no Ensino Médio.

A escola estadual conta com uma SAI com 15 computadores, acesso à internet banda larga e softwares educacionais. A sala é organizada por um aluno monitor do programa “Acessa Escola⁴” que tem a função de agendar as visitas e orientar alunos e professores quanto ao uso dos recursos disponíveis na SAI.

A cooperativa educacional, com relação aos recursos tecnológicos, é limitada, pois os alunos dispõem apenas de acesso à internet banda larga, sendo necessária a utilização dos seus próprios equipamentos eletrônicos tais como *tablets*, celulares ou *notebooks*.

² As cooperativas educacionais são, na maioria, formadas por pais de alunos que se sentem desafiados com a situação educacional de seus filhos. Eles querem assumir o controle, participar e se envolver mais com a formação escolar. Para isso, esses pais se reúnem numa cooperativa e passam a controlar o projeto pedagógico, as práticas e os métodos. Contratam professores e a equipe de apoio. Fonte: <http://portal.aprendiz.uol.com.br/content/spesitrice.mmp>. Acesso em 01 out. 2014.

³ Professor de Educação Básica de Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

⁴ Acessa Escola, programa do Governo do Estado de São Paulo, desenvolvido pela Secretaria de Estado da Educação, sob a coordenação da Fundação para o Desenvolvimento da Educação (FDE), tem por objetivo promover a inclusão digital e social dos alunos, professores e funcionários das escolas da rede pública estadual. Disponível: <http://acessaescola.fde.sp.gov.br/Public/Conteudo.aspx?idmenu=11> . Acesso em 17 ago. 2013.

As principais dificuldades que encontramos ao ministrar aulas de Matemática no Ensino Médio são a ausência de aplicações que se relacionem com o cotidiano dos alunos e a dificuldade na abstração/generalização em alguns conteúdos, como ao calcular raízes de funções polinomiais e relacionar a lei de uma função com sua representação gráfica.

Embora as dificuldades dos alunos sejam relacionadas às funções polinomiais de uma forma geral, neste trabalho nos referiremos particularmente às funções quadráticas, pois entendemos que os procedimentos adotados para as funções quadráticas poderão ser estendidos de maneira análoga para as demais funções polinomiais.

Com o objetivo de tentar diminuir tais dificuldades, acreditamos que o uso da tecnologia pode ser interessante, por se tratar de um recurso familiar aos alunos e por permitir maior dinamismo nas aulas.

O conteúdo de funções no Ensino Médio, presente no material impresso da cooperativa educacional, tem início no primeiro ano com o estudo de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica. No terceiro ano, após o estudo de polinômios, é retomado o estudo de funções, abordando as funções polinomiais de grau superior a dois, enfatizando a construção e interpretação de gráficos bem como o estudo dos significados dos pontos críticos e raízes.

No desenvolvimento dos conteúdos de funções, frequentemente, temos recorrido ao uso da tecnologia. Solicitamos aos alunos que levem seus *notebooks*, um para cada dois alunos, com o *software Geogebra* instalado. O objetivo de tal prática é construir gráficos e analisar sua relação com a lei da função, particularmente a relação com os coeficientes da lei. Estudamos as variações de coeficientes e suas consequências no desenho do gráfico, a localização e condições de existência de pontos críticos e raízes, bem como seu significado em exercícios e situações problema presentes no material impresso adotado.

Durante o desenvolvimento do conteúdo de funções, temos observado que as principais dificuldades encontradas pelos alunos são: a) a interpretação de uma situação problema e sua resolução algébrica e analítica utilizando o conhecimento teórico de funções; b) a interpretação de pontos críticos no gráfico de funções quadráticas e a atribuição de significados ao conceito de funções.

Nossas preocupações com o ensino de função tiveram início quando observamos que, no 1º ano do Ensino Médio da cooperativa educacional, os alunos compreendiam cada representação de uma função, gráfico, tabela e lei, de maneira isolada sem relacioná-las entre si, principalmente quando o problema presente no material impresso solicitava o valor máximo ou mínimo de uma função relacionando-o à solução de uma situação problema.

Com este grupo de alunos, em 2011, no 1º ano do Ensino Médio, o pesquisador também atuou como professor e o conceito de função foi desenvolvido somente com os recursos da lousa, giz e material impresso. Nessa época, discutimos as ideias de otimização de funções quadráticas (Apêndice A). O objetivo principal era a interpretação do ponto ótimo da função e as condições para sua obtenção, visando à construção de argumentos matemáticos para a solução de problemas.

Foram necessárias aproximadamente cinco aulas de cinquenta minutos cada para o desenvolvimento do conteúdo e avaliação do aprendizado por meio de resolução de exercícios utilizando apenas papel, lápis e borracha.

Os exercícios de construção de gráficos eram realizados no caderno dos alunos com régua, lápis e papel, com pouca precisão quando tratávamos de parábolas, pois calculávamos somente os pontos principais de intersecção com os eixos coordenados e o vértice. Os demais pontos do gráfico eram esboçados à mão livre, seguindo a forma aproximada de uma parábola. Posteriormente, fazíamos a correção dos exercícios na lousa da mesma maneira, utilizando somente régua e giz. Assim, calculávamos os mesmos pontos já citados e esboçávamos os demais pontos do gráfico seguindo a forma aproximada de uma parábola.

Nessa época, 2011, observamos que a principal dificuldade manifestada pelos alunos foi a interpretação dos pontos da parábola como sendo a resposta para cada mudança no valor da variável do problema.

Os alunos calculavam os valores correspondentes às coordenadas do ponto crítico da parábola corretamente, utilizando a lei da função, faziam também corretamente o esboço da parábola, mas não compreendiam a relação entre estas duas linguagens para a mesma situação - linguagem algébrica que expressa a lei da função e a linguagem geométrica, que expressa o seu gráfico. Não entendiam que cada ponto da parábola

correspondia a um valor diferente atribuído à variável da função e que cada mudança no valor da variável provocava uma alteração também no valor da função. Enfim, os alunos não compreendiam a relação entre o gráfico e a lei da função.

O presente trabalho tem como objetivo principal aliar a Matemática ao cotidiano dos alunos com a finalidade de atribuir significados ao estudo de funções quadráticas e seus pontos críticos com o uso do *software Geogebra* que permitirá a construção imediata e dinâmica dos gráficos e a observação das consequências causadas pela variação nos parâmetros de uma situação-problema.

Nossa **questão de pesquisa** é compreender quais são as contribuições do uso do *Geogebra* no ensino de funções quadráticas através das opiniões manifestadas pelos alunos ao vivenciarem atividades de ensino⁵ que relacionam o gráfico da função com sua solução algébrica em uma situação problema.

⁵ A expressão atividade de ensino será utilizada neste trabalho, no sentido comum, isto é, são atividades elaboradas pelo professor para a mediação do desenvolvimento de conteúdos.

2 JUSTIFICATIVA

A motivação inicial para estudar as contribuições da informática ao ensino da Matemática surgiu após atuar como estagiário no projeto STEPE.

A função do estagiário era treinar professores da rede pública estadual quanto ao uso da tecnologia. As principais atividades desenvolvidas no projeto STEPE foram:

- Elaboração de um plano de unidade, pelo professor-cursista, para ser executado com os seus alunos.
- Estudo de estratégias de pesquisa na internet e na enciclopédia Encarta.
- Estudo sobre direitos autorais
- Construção, em conjunto com o professor-cursista, de um *website* para servir de apoio ao desenvolvimento da unidade.
- Estudo de *softwares*, como *PowerPoint* e *Publisher*, os quais posteriormente serviriam para apresentar os resultados obtidos na pesquisa realizada.

O plano de unidade contava com uma questão aberta, cuja função era despertar o interesse e a curiosidade dos professores, e outras questões que aos poucos delinearam melhor um campo de interesse, levando à discussão de conteúdos mais específicos da disciplina em que atuavam.

Um exemplo que pode ser citado é o seguinte: Um professor de Matemática queria desenvolver o tema “Juros Simples e Compostos” lançou a seguinte questão central “Como posso obter o que desejo?” e posteriormente lançou questões como “Qual o valor de um carro?”, “Qual o valor de uma casa?”, “Como funcionam os empréstimos?”. Essas questões iam aos poucos especificando o conteúdo e estimulando o desenvolvimento dos conteúdos por parte dos estudantes do Ensino Fundamental ou Médio.

Como professor da educação básica, temos observado que, assim como a tecnologia vem sendo incorporada às diversas áreas da sociedade, a educação básica tem recebido incentivo de programas governamentais para utilização dos recursos

tecnológicos por meio de projetos como o STEPE entre outros. Acreditamos que as escolas necessitam promover o uso das tecnologias para ficar mais próximas do cotidiano dos alunos.

Concordamos com Borba e Penteado (2001, p. 43) quando consideram que a informática é uma nova mídia que “[...] abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento”.

Em relação às possibilidades de mudanças com o uso da informática, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, lançou, em 1997, o programa “A escola de cara nova na era da informática” que visava, dentre outros pontos, informatizar a parte pedagógica escolar. A fase inicial deste programa possibilitou que cerca de duas mil escolas montassem uma SAI, com microcomputadores e mais de quarenta títulos de *softwares*.

Entendemos que a criação de novas maneiras de pensar, mediadas pelas tecnologias da informação, devem ser observadas pela escola e pelos seus professores. Embora nas escolas em que atuamos tal preocupação não tenha sido frequente, consideramos que, como professor de Matemática, é necessário reunir esforços e os recursos possíveis para caminhar nessa direção.

Programas de incentivo à incorporação de novas tecnologias na educação, como no caso do Estado de São Paulo, “A escola de cara nova na era da informática” e mais recentemente o “Acessa Escola” que levam ao ambiente escolar equipamentos e *softwares*, justificam a realização da presente pesquisa, pois como orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2006):

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (BRASIL, 2006, p.87).

É nesse sentido que vemos a necessidade de criar novas práticas para o ensino da Matemática, visto que, ao ingressar no ambiente da informática, podemos aproximar a Matemática do cotidiano dos alunos já tão imerso em tecnologia. Acreditamos que,

além de facilitar a aprendizagem, é importante ressaltar que, ao utilizar o recurso tecnológico, no ensino de Matemática podemos garantir o direito ao acesso e à alfabetização tecnológica e Matemática dos alunos.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Além de responder à questão de pesquisa buscamos, com o presente trabalho, atender às recomendações da Currículo do estado de São Paulo (São Paulo, 2010) no que se refere a elaboração de atividades complementares para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos do Ensino Médio.

O Currículo do estado de São Paulo prioriza aspectos como a contextualização e a interdisciplinaridade e foi subdividido em quatro grandes áreas de modo que as disciplinas tenham características e desenvolvimentos entrelaçados entre si. As grandes áreas são:

1. Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
Contempla as disciplinas de Física, Química, Biologia e Ciências;
2. Área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias:
Contempla as disciplinas de Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Arte e Educação Física;
3. Área de Ciências Humanas e suas Tecnologias:
Contempla as disciplinas de História, Geografia, Filosofia e Sociologia;
4. Área de Matemática e suas Tecnologias:
Contempla a disciplina de Matemática.

Cada disciplina tem seu conteúdo dividido em bimestres em cadernos denominados cadernos do aluno. Para cada caderno do aluno existe o correspondente caderno do professor com indicações de sugestões quanto à forma de desenvolvimento dos conteúdos criando relações entre as demais disciplinas.

O documento paulista prioriza o desenvolvimento das competências leitora e escritora em todas as disciplinas do Ensino Médio pois entende que

A linguagem verbal, oral e escrita, representada pela língua materna, viabiliza a compreensão e o encontro dos discursos utilizados em diferentes esferas da vida social. É com a língua materna e por meio dela que as formas sociais arbitrárias de visão de mundo são incorporadas e utilizadas como instrumentos de conhecimento e comunicação. (SÃO PAULO, 2010, p.14)

O documento ainda reitera que a escola constitui-se um local adequado para o desenvolvimento de tais habilidades pois:

A utilização dessa variedade [de formas de discursos e usos de códigos diversos] dá-se por meio de um exercício prático em situações de simulação escolar. A competência performativa exige mais do que uma atitude de reprodução de valores. (SÃO PAULO, 2010, p.15)

Em matemática esperamos que o aluno possa, a partir da solução de determinada situação problema, posicionar-se criticamente, ao invés de meramente chegar a um número como resposta. Esperamos que a partir do desenvolvimento de determinado conteúdo matemático o aluno possa interferir no seu próprio cotidiano, sugerindo transformações positivas com embasamento matemático adequado.

Concordamos com o Currículo do estado de São Paulo (2010) quando afirma que ao dominar o uso da argumentação pautada em conhecimentos matemáticos sólidos, o aluno

[...] deixaria de ser um mero espectador ou reproduzidor de saberes discutíveis para se apropriar do discurso, verificando a coerência de sua posição em face do grupo com quem partilha interesses. [...] Isso pressupõe a formação crítica diante da própria produção e a necessidade pessoal de partilhar dos propósitos previstos em cada ato interlocutivo. (SÃO PAULO, 2010, p.17)

Outro aspecto a ser destacado nas orientações presentes no documento paulista é a articulação dos saberes desenvolvidos no Ensino Médio como o mundo do trabalho e a articulação entre teoria e prática em cada disciplina do currículo.

Sobre a relação entre teoria e prática o documento relata que:

A relação entre teoria e prática não envolve algo observável ou manipulável, como um experimento de laboratório ou a construção de um objeto. Tal relação pode acontecer ao se compreender como a teoria se aplica em contextos reais ou simulados. (SÃO PAULO, 2010, p. 21)

Optamos também pelo uso da tecnologia da informática a fim de propiciar aos alunos maior tempo de contato e experimentação com *softwares* educacionais.

O currículo do estado de São Paulo (São Paulo, 2010) associa o uso da tecnologia na educação de acordo com duas acepções: a) como educação tecnológica básica que busca a alfabetização tecnológica e o posicionamento de tal tecnologia como produção humana e parte importante nas práticas produtivas atuais.

Em outras palavras, garantir o acesso e promover a alfabetização tecnológica do aluno é proporcionar a ele a inserção futura em meios culturais e produtivos e b) como compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos de produção.

Esta segunda acepção relaciona diretamente o currículo escolar à produção de bens e serviços segundo São Paulo (2010, p. 22).

Ao escolher uma situação problema que contextualiza um conteúdo matemático utilizando um fato próximo ao cotidiano dos alunos esperamos desenvolver a capacidade de questionar ou inferir sobre determinado assunto, fazendo perguntas pertinentes que os conduza a solução correta do problema.

O currículo do estado de São Paulo aponta ainda que as ações dirigidas aos alunos do Ensino Médio também deve levar em conta uma possível inserção do mesmo no mundo do trabalho e a escola além de formá-lo deve também prepara-lo para o exercício futuro de uma profissão:

A preparação básica para o trabalho em determinada área profissional, portanto, pode ser realizada em disciplinas de formação básica do Ensino Médio. As escolas, nesse caso, atribuiriam carga horária suficiente e tratamento pedagógico adequado às áreas ou disciplinas que melhor preparassem seus alunos para o curso de nível técnico escolhido. (SÃO PAULO, 2010, p.24)

De acordo com São Paulo (2010) a “problematização⁶ está intimamente relacionada ao desenvolvimento da inteligência e se torna mais importante que o fato de elaborar as respostas certas às perguntas.” (SÃO PAULO, 2010, p. 47).

Uma abordagem interessante das problematizações é o uso de problemas de otimização, ou seja, problemas que busquem resultados máximos ou mínimos.

O documento paulista afirma ainda que:

Um caso especialmente importante para a criação e exploração de centros de interesse é o dos problemas que envolvem situações de otimização de recursos em diferentes contextos, ou seja, problemas de máximos ou de mínimos. Procurar em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução para minimizar custos ou maximizar os retornos, por exemplo, pode constituir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados. (SÃO PAULO, 2010, p.47)

Autores como Borba e Penteadó (2001) e Borba, Malheiros e Zulatto (2008) defendem a utilização da tecnologia informática na educação por ser uma área em expansão, cada vez mais presente no cotidiano dos alunos e pode promover a inserção

⁶ Problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de um determinado tema. (SÃO PAULO, 2010, p. 46)

da tecnologia no ensino de Matemática. Nesse sentido, de acordo com Borba, Malheiros e Zulatto (2008) o:

Acesso à informática em geral, e à internet em particular, tem se tornado algo tão importante quanto garantir lápis, papel e livros para todas as crianças. [...] Não se trata de propor que o acesso à internet resolverá os problemas de desigualdade que se acumulam em países como Brasil há séculos, ou há décadas, dependendo da ótica que se queira tomar, mas, sim, de entender que ele é análogo ao que representou o acesso à escola no passado, e ainda hoje representa quando se pensa no ingresso à escola de qualidade. (BORBA, MALHEIROS E ZULATTO, 2008, p.17)

Em relação ao acesso à informática na educação, Borba e Penteadó (2001) consideram que:

[...] deve ser visto não apenas como um direito, mas como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. É dessas duas formas que a informática na educação deve ser justificada: alfabetização tecnológica e direito ao acesso. (BORBA E PENTEADO, 2001, p.17)

Neste texto, nos apoiaremos nas indicações de Borba, Malheiros e Zulatto (2008) quanto à importância do acesso à informática em geral, pois a escola pode e deve proporcionar isso aos seus alunos. Já quanto à alfabetização tecnológica nas aulas de Matemática, a indicação de Borba e Penteadó (2001), nesta pesquisa, é que para o estudo das contribuições da otimização de funções polinomiais, deve-se buscar investigar o ponto crítico da função quadrática e associá-lo à solução de uma situação-problema no Ensino Médio, utilizando para isso recursos computacionais.

A noção de otimização é discutida por Rocha (2013) e Carmo (2013) como uma necessidade presente em diversas áreas do conhecimento e se constitui em um ramo da Matemática.

Para Rocha (2013), a noção de otimização está presente “em diversas áreas do conhecimento humano” nas situações ou problemas cujo:

(...) principal objetivo é **determinar o ponto ótimo de uma função**. Problemas como este possuem uma grande aplicabilidade em situações cotidianas. Minimizar gastos, maximizar lucro, obter a melhor maneira de se programar um dispositivo eletrônico qualquer, como, por exemplo, um elevador para reduzir o tempo e o consumo de energia em seu deslocamento, distribuir adequadamente água, luz e esgoto a uma região habitacional reduzindo os gastos, são alguns exemplos de situações cotidianas em que a otimização é o ramo da Matemática responsável por estudá-las (grifos nossos) (ROCHA, 2013, p. 18).

Entendemos que essas situações sempre estiveram presentes nas sociedades de várias épocas, mas Carmo (2013) as situa na sociedade moderna e considera que,

em muitas situações da vida moderna somos levados a questões do tipo: "Qual é o custo mínimo de produção?" ou "Qual é a forma que um recipiente deve ter para comportar o maior volume possível?" ou ainda, "Qual é a maior área que conseguimos cercar com uma quantidade conhecida de tela?" entre muitas outras. A Matemática tem um ramo destinado a tentar responder questões como essas: a Otimização (CARMO, 2013, p.11).

Nesta pesquisa, consideramos, pelas indicações de Rocha (2013) e Carmo (2013), que a otimização é um ramo da Matemática que pode auxiliar o professor a atribuir significado para os conteúdos desenvolvidos no Ensino Médio, em particular no ensino de funções.

Isso atende às orientações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2010) que ressaltam a importância da contextualização dos conteúdos da Matemática, com a noção de otimização e a análise de suas situações problema esse aspecto é contemplado.

3.1 Geogebra

Para a escolha do software para o ensino de funções nos baseamos nos critérios de análise elaborado por Siqueira (2013) que analisou os *softwares* Geogebra, Graphmatica e Winplot, e optamos pelo Geogebra por:

- a) possibilitar o estudo do gráfico de funções em geral;
- b) oferecer uma interface agradável;
- c) ter vários recursos para a análise gráfica;
- d) ser em português
- d) ser possível o download gratuito (SIQUEIRA, 2013, p. 28).

O Geogebra é um *software* gratuito e livre⁷, desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade Johannes Kepler de Linz – Áustria⁸, que permite o estudo de álgebra e

⁷ O Software Livre caracteriza-se pela oferta de 4 liberdades básicas: A liberdade de usar o programa, para qualquer propósito (liberdade 0). A liberdade de estudar como o programa trabalha, podendo adaptá-lo às necessidades próprias (liberdade 1). Acesso ao código fonte é pré-condição para tanto. A liberdade de redistribuir cópias, para que você possa ajudar ao seu próximo (liberdade 2). A liberdade de melhorar o programa, e lançar suas melhorias para o público em geral, para que assim toda a comunidade se beneficie (liberdade 3). Acesso ao código fonte é pré-condição para isto. Disponível em: https://pt.opensuse.org/Software_Livre_e_de_C%C3%B3digo_Aberto. Acesso em 26 jun. 2014.

⁸ Disponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/team. Acesso em 26 jun. 2014.

geometria de maneira dinâmica com ferramentas que possibilitam a construção de gráficos ou objetos geométricos juntamente com suas respectivas equações algébricas.

Gutiérrez (2014), em sua pesquisa sobre a contribuição do *software* Geogebra no estudo da geometria, evidenciou que:

Programas de geometria dinâmica, promovem a integração de processos de visualização, ao possibilitar o estudo de objetos e suas propriedades geométricas, graças a sua capacidade translação e animação das figuras. Entre os vários softwares de geometria dinâmica, se destaca o Geogebra pela sua gratuidade, sua facilidade de acesso e por fornecer os princípios básicos para reconhecer as invariantes de uma construção e animação como esta. (tradução nossa).⁹ (GUTIÉRREZ, 2014, p.15)

Assim, entendemos que uma das contribuições de *Softwares*, como o Geogebra, é possibilitar o teste de proposições e a observação das mudanças causadas na representação gráfica de um objeto matemático ou vice-versa, pois sua animação (Gutiérrez, 2014) é o que o diferencia da imobilidade das diferentes situações quando expressas apenas na lousa/giz ou no caderno/lápis.

Dada a popularidade do *software* Geogebra, em muitos países já existem grupos de pesquisadores que destinam seus estudos para desenvolver atividades, criar aplicações, além de promover a colaboração entre os profissionais e pesquisadores, buscando estabelecer parcerias e formar uma comunidade de usuários dessa ferramenta¹⁰. São os chamados Institutos Geogebra.

Dentre autores que pesquisam sobre o uso do Geogebra em sala de aula, o trabalho de Nascimento (2012) destaca como vantagens do *software*:

[...] verificou-se que se pode aplicar e utilizar [o software Geogebra], também, em ambiente virtual, os recursos que a internet utiliza no dia a dia, na nova versão do Geogebra 4.0, pode-se usar Applets (programa Java, especialmente, projetado para a Web) para mostrar as experiências utilizadas em sala de aula em qualquer computador e sem precisar que o aluno tenha o Geogebra instalado em seu computador, pois utiliza o browser para executá-lo, constituindo, assim, outro recurso deste software.

Para isso, o programa Geogebra é disponibilizado gratuitamente e implantado na linguagem de programação Java (Java, 2004), por esta permitir grande portabilidade, isto é, possibilidade de uso em diferentes computadores e sistemas operacionais, ademais, possibilita o uso diretamente em páginas da Internet, na forma de *applet* (NASCIMENTO, 2012, p.20).

⁹ Los programas de geometría dinámica, favorecen la integración de procesos de visualización, la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas, gracias a su capacidad de arrastre y animación de las figuras. Entre los diferentes software de geometría dinámica, se rescata Geogebra por su gratuidad, su fácil acceso y porque proporciona los principios básicos para reconocer las invariantes de una construcción y la animación de esta.

¹⁰ Disponível em: http://www.pucsp.br/geogebra/sobre_instituto.html. Acesso em 30 jun. 2014.

O fato do *software* ser utilizado em ambiente virtual configura-se como uma vantagem por não exigir que seja instalado nos computadores, permitindo o seu uso em computadores sem muita capacidade de armazenamento ou processamento. Por outro lado, isso pode se revelar inviável em locais onde não exista conexão com a internet ou exista e não tenha uma capacidade adequada de transmissão de dados.

Nascimento (2012) investigou a contribuição do *software* Geogebra no ensino de geometria como uma ferramenta psicopedagógica que o integra com os conteúdos curriculares de alunos de 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio de duas cidades cearenses: São Gonçalo do Amarante e Fortaleza.

Concluiu que a utilização do *software* Geogebra:

[...] constitui um caminho que o professor pode seguir na perspectiva de chegar a uma maior satisfação em relação à aprendizagem e, por conseguinte, o uso dessa aprendizagem no contexto de sua vida. Bem como a recepção dos alunos nesta nova forma de aprendizagem num contexto atual e moderno. (NASCIMENTO, 2012, p.56)

Ao entrevistar os alunos e professores que acompanharam sua pesquisa, Nascimento (2012, p. 87) obteve, dentre outras conclusões, que “[...] os professores que acompanharam a aplicação do programa (total de 3) e coordenadores (total de 2) fizeram as mesmas considerações dos alunos, isto é, mostraram-se favoráveis a adoção do Geogebra [como ferramenta didática]”.

Outras autoras que pesquisaram sobre o uso de Geogebra em sala de aula foram Mognon e Barros (2012). No artigo publicado na 1ª Conferência Latino Americana de Geogebra, afirmam:

Nesse sentido, ofertamos um curso de extensão para professores da Rede Pública com o objetivo de capacitá-los para o uso do *software* GeoGebra em atividades docentes, com intuito de melhorar a qualidade de ensino e aprendizagem. Escolhemos o GeoGebra porque além de ser um *software* de fácil entendimento e disponível livremente, encontra-se à disposição nos laboratórios das escolas estaduais do estado do Paraná.

O curso, com duração de trinta horas, foi realizado no laboratório de informática de um colégio estadual de Campo Mourão, em parceria com o Núcleo Regional de Educação (NRE) e contou com a participação de nove professores de Matemática e Física. Utilizamos a versão 3.0 por ser a versão disponível nos colégios (MOGNON; BARROS, 2012, p.2).

Ao elaborar o curso de extensão para professores da rede pública de ensino do Paraná, as autoras concluíram que:

[...] as novas tecnologias oferecem contribuições importantes para o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que podem auxiliar na construção do conhecimento. Em particular, o software GeoGebra apresenta recursos, os quais foram explorados no decorrer do curso por meio das atividades, que permitem simular, fazer conjecturas, possibilitando melhor visualizar o significado de conceitos, enriquecendo a aprendizagem (MOGNON; BARROS, 2012, p. 14).

Analisando os trabalhos expostos acima, percebemos que tiveram por objetivo analisar as contribuições do Geogebra no ensino básico e coletar informações sobre alunos e professores que utilizaram o *software*. Acreditamos que o mesmo está sendo amplamente divulgado e tem se mostrado eficaz no ensino de geometria, álgebra e funções em diversos segmentos de ensino, fato que justifica sua utilização na presente pesquisa.

3.2 Definições acerca das Funções Quadráticas

3.2.1 Forma canônica

Com a finalidade de definir os conceitos de ponto máximo ou mínimo de uma função quadrática, vamos recorrer à definição de uma função quadrática em sua forma canônica.

Seja a função quadrática definida por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c$$

Podemos representá-la:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Desta forma teremos a representação canônica da função quadrática onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante do trinômio quadrático:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

3.2.2 Máximo e Mínimo

Definição segundo Iezzi (1977):

Dizemos que um número $y_M \in Im(f)$ ($y_m \leq y$) é o valor de máximo (mínimo) da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ ($y_m \leq y$) para qualquer $y \in Im(f)$ e o valor de $x_M \in D(f)$ ($x_m \in D(f)$) tal que $y_M = f(x_M)$ ($y_m = f(x_m)$) é chamado de ponto de máximo (mínimo) da função. (IEZZI, G., 1977, p. 130-A).

Teorema:

A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor de máximo (mínimo)

$y = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$ ($a > 0$).

Demonstração:

Consideremos a função quadrática na forma canônica:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Considerando que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\frac{-\Delta}{4a^2}$ para uma dada função tem valor constante, então y assumirá valor máximo (mínimo) quando $a < 0$ ($a > 0$) e a diferença $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ for a menor possível, isto é $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$.

3.2.3 Vértice da Parábola

Definição segundo Iezzi (1977, p. 131-A): O ponto $V \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

3.3 A Resolução de Problemas no Ensino Básico

Procuramos entender quais são as contribuições do uso de recursos computacionais aplicados ao estudo da otimização de funções quadráticas, por meio do

uso de uma situação problema com assunto do cotidiano dos alunos, procurando agregar significado à teoria de funções quadráticas.

Entendemos que atividades como estas motivem o aluno a buscar uma possível solução para o problema, além de possibilitar uma ampliação na busca por situações similares e compreender que eventos como estes exigem conhecimentos matemáticos sólidos para a intervenção na realidade.

Silva e Núñez (2002) entendem que o uso de uma situação problema

(...) pode ajudar os alunos a desenvolverem atitudes, questionarem suas próprias ideias, construir metodologias que revelem o caráter contraditório do conhecimento para comprovarem suas hipóteses, em função de um determinado fundamento teórico. (SILVA E NÚÑEZ, 2002, p.1199)

Ao utilizar a situação problema neste trabalho, pretendemos conduzir o aluno a um conflito cognitivo que o leve a reconsiderar suas conclusões iniciais a respeito da solução do problema.

A situação problema utilizada foi a seguinte:

Numa grande papelaria o preço de uma lapiseira é R\$ 1,60 e são vendidas 2600 unidades num dia sem promoção.

Entretanto, o proprietário da papelaria sabe que para cada redução de R\$ 0,01 no preço de cada lapiseira são vendidas 25 unidades a mais que num dia sem promoção.

a) Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia sem promoção.

b) Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia em que o preço de cada lapiseira é R\$ 1,46.

c) Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia em que o preço de cada lapiseira é R\$ 0,90.

d) Pelos valores calculados nos itens b e c, você pode concluir que deve existir um valor para a unidade da lapiseira para o qual o valor recebido pelo proprietário da papelaria seja o maior possível. Este valor é chamado de valor ótimo. Escreva a expressão que determina o valor "V" recebido pelo proprietário da papelaria em função do número x de reduções de R\$ 0,01 no preço de cada lapiseira.

e) *Utilizando as coordenadas do vértice da parábola, calcule o valor ótimo para o preço unitário da lapiseira e o valor máximo recebido pelo proprietário da papelaria com a venda das mesmas.*

Esperamos que ao analisar o enunciado da situação o aluno infira que quanto maior a quantidade de itens vendidos, maior será o valor total arrecadado pelo comerciante.

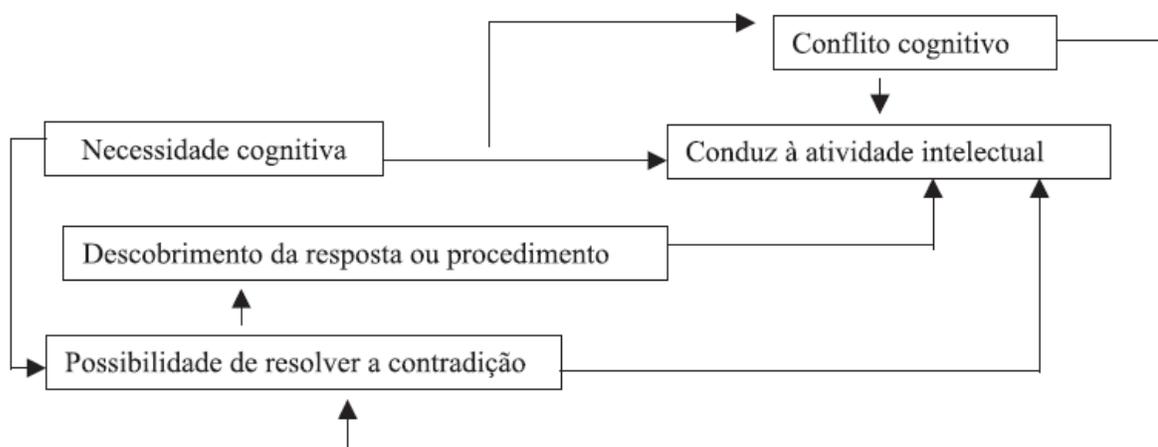
Durante a resolução das questões subsequentes, propostas pelo professor/pesquisador, o aluno foi delineando sua estratégia de resolução do problema apresentado, ao perceber que para vender maior quantidade de itens o comerciante precisa reduzir o valor unitário do item, fato este que se configura como um fator negativo na busca de maior lucro.

Silva e Núñez consideram que

A contradição expressa-se entre o conhecido e o não conhecido, funciona como fonte do desenvolvimento da atividade cognitiva do aluno e contribui com o desenvolvimento do pensamento dialético, possibilitando ao aluno penetrar em diferentes níveis da essência dos fenômenos estudados nas regularidades, desenvolvimento e contradições explicitadas. (SILVA E NÚÑEZ, 2002, p. 1199)

Segundo Silva e Núñez o uso da situação problema estrutura-se da seguinte maneira:

Figura 1: Relações estabelecidas com o uso de situações problema por Silva e Nuñez (2002)



Entendemos que situações problema favorecem a reflexão dos alunos sobre a utilidade dos novos conhecimentos adquiridos e sua relação com o seu cotidiano.

O uso dos novos conhecimentos, adquiridos durante o desenvolvimento das atividades sugeridas pelo professor, não implica no abandono dos conhecimentos prévios dos alunos, as buscas por novos conhecimentos somente evidenciam a necessidade de aumento no grau de generalização de um conhecimento ou procedimento já dominado pelo aluno (Silva e Núñez, 2002, p.1201).

Autores como Polya (1980) já se dedicaram a compreender os benefícios da resolução de problemas. Polya (1980) entende que resolver um problema:

Consiste em encontrar um caminho previamente não conhecido, encontrar uma saída para uma situação difícil, para vencer um obstáculo, para alcançar um objetivo desejado que não se pode ser imediatamente alcançado por meios adequados. (POLYA, 1980 apud WILSEK, M. A. G e TOSIN, J. A. P, 2009, p.12)

Consideramos que as situações problema podem ser delineadas por problemas abertos ou não. Mas consideraremos com Paterlini (2010) e com as orientações dos elaboradores do documento oficial nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2006) a importância de se desenvolver problemas abertos com os alunos em qualquer disciplina dos currículos oficiais.

Paterlini (2010) entende que problemas abertos são:

(...) questões com um enunciado que delimitam um contexto, e o estudante é convidado a explorar aquela situação. O problema aberto se contrapõe ao problema fechado, e a diferença entre eles pode, de forma simples, ser caracterizada pelo fato de que este último diz o que o estudante deve demonstrar, enquanto o primeiro o deixa livre para perceber quaisquer relações matemáticas naquele contexto. (PATERLINI, 2010, p. 2)

E os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2006) orientam que

O problema do tipo “aberto” procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas. A prática em sala de aula desse tipo de problema acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e o conhecimento matemático. O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de “provas escritas”. Enquanto o “problema aberto” visa a levar o aluno a certa postura em relação ao conhecimento matemático, a situação-problema apresenta um objetivo distinto, porque leva o aluno à construção de um novo conhecimento matemático. De maneira bastante sintética, podemos caracterizar uma situação-problema como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa (BRASIL, 2006, p.84)

Concordamos com Partelini (2010) e com as orientações (Brasil, 2006) quando apontam que o uso de problemas abertos e contextualizados com o cotidiano dos alunos estimula a busca pelo conhecimento matemático.

Consideramos que ao resolver um problema pode-se realizar uma crítica mais profunda do que a habitual.

A capacidade de posicionar-se criticamente diante de determinada situação está relacionada ao desenvolvimento da leitura e da escrita, como orientam os elaboradores do currículo do estado de São Paulo (São Paulo, 2010) quando indicam que os

(...) atos de leitura e de produção de textos ultrapassam os limites da escola, especialmente os da aprendizagem em língua materna, configurando-se como pré-requisitos para todas as disciplinas escolares. A leitura e a produção de textos são atividades permanentes na escola, no trabalho, nas relações interpessoais e na vida. Por isso mesmo o Currículo proposto tem por eixo a competência geral de ler e produzir textos, ou seja, o conjunto de competências e habilidades específicas de compreensão e de reflexão crítica intrinsecamente associado ao trato com o texto escrito. (SÃO PAULO, 2010, p.16)

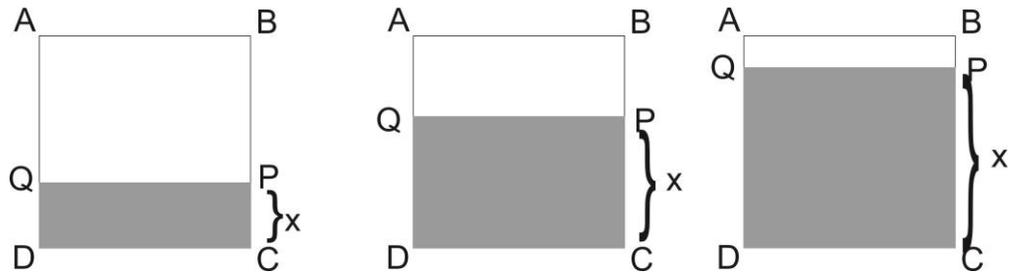
Ao trabalhar com a resolução de problemas, esperamos fornecer subsídios aos alunos para argumentarem correta e coerentemente utilizando-se da linguagem matemática, atendendo assim às recomendações presentes no currículo do estado de São Paulo que orienta a mobilização de esforços, de todos os docentes, de todas as disciplinas presentes no currículo paulista, em desenvolver prioritariamente a competência de leitura e escrita em todos os anos do Ensino Básico.

3.4 As abordagens do conceito de funções nas orientações curriculares do estado de São Paulo, 1994 e 2010

Neste item, descreveremos duas abordagens para o ensino de funções dos documentos oficiais da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo que evidenciam os diferentes enfoques do desenvolvimento da introdução ao conteúdo de funções, a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Estado de São Paulo (São Paulo, 1994) e a Proposta Curricular de São Paulo (São Paulo, 2010)

Neste primeiro exemplo, da Proposta Curricular para o ensino de Matemática do Estado de São Paulo (São Paulo, 1994), verificamos que propõe para o desenvolvimento de funções:

As primeiras noções de funções são introduzidas a partir de situações que tem significado para o aluno, significado esse que pode ter sua compreensão facilitada por meios visuais. Vejamos um exemplo: No quadrado ABCD, com lados 5 cm o ponto P se movimenta sobre o lado BC, sem atingir suas extremidades. Considere então um retângulo móvel QPCD. Sua área y (em cm^2) depende de x , medida de PC (em cm).



- Atribuindo a x os valores 1, 2, 3, 4, quais são os correspondentes valores de y ? Faça uma tabela com esses valores de x e de y .
- Qual é a expressão que dá y a partir de x ? (SÃO PAULO, 1994, p.46)

Podemos perceber que a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 1994) propõe uma situação que tenha significado para o aluno, mas consideramos que tal situação pode ser muito abstrata para o aluno do Ensino Médio. Pois embora o estudo de figuras geométricas e suas respectivas áreas façam parte de estudos anteriores dos alunos nesse nível de ensino, a situação problema tem finalidade na própria Matemática, isto é, não relaciona com situações fora da Matemática. Não possibilita ao aluno pensar e elaborar estratégias com outras áreas do conhecimento, sendo ou não do seu cotidiano.

A atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2010) separa os tópicos de Matemática em três blocos: Números, Geometria e Relações. O conceito de função encontra-se no bloco Relações, juntamente com conceitos de proporcionalidade, medidas e aproximações.

O documento orienta que:

A caracterização dos três grandes blocos de conteúdos, no entanto, não apresenta grandes dificuldades no que se refere ao acolhimento dos temas curriculares usualmente tratados na escola básica. E, justamente por causa da existência de tantas temáticas comuns a mais de uma delas, pode desempenhar papel importante na construção de uma articulação entre diversos conteúdos, favorecendo uma

aproximação entre variados assuntos e sua apresentação de modo a favorecer uma espécie de 'interdisciplinaridade interna' da própria Matemática (SÃO PAULO, 2010, p.39).

E sobre o desenvolvimento do bloco Relações, a Proposta Curricular de São Paulo (São Paulo, 2010) indica que:

Um caso especialmente importante para a criação e a exploração de centros de interesse é o dos problemas que envolvem situações de otimização de recursos [...] [o uso de problemas de otimização] pode construir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados. (SÃO PAULO, 2010, p.47)

Embora tenha o objetivo de criar significados dentro da própria Matemática, a atual proposta apresenta exemplos que ajudam a caracterizar as funções, no cotidiano dos alunos. Isto é possível perceber com o modelo indicado no Caderno do Professor (São Paulo, 2014), da primeira série do Ensino Médio, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo:

Um prêmio P da loteria deve ser dividido em partes iguais, cabendo um valor x a cada um dos n ganhadores. Considerando um prêmio P de R\$ 400 mil, preencha a tabela a seguir e expresse a relação de interdependência entre x e n .

n	1	2	3	4	5	8	10	20
x								

(SÃO PAULO, 2014, p.58)

O caso acima não cria a dependência de um pré-requisito abstrato dentro da Matemática, como na proposta de 1994, área – função, exige apenas o conceito básico de divisão em partes iguais e o assunto sendo financeiro pode se aproximar mais do cotidiano dos alunos. Os alunos do ensino médio já utilizam quantidades de dinheiro, seja por exercer alguma atividade remunerada ou por auxiliar os familiares nas tarefas diárias que envolvam pagamentos ou recebimentos em dinheiro.

Percebemos que a atual proposta paulista procura contextualizar a situação problema para o estudo de funções. Podemos entender que é uma forma de atribuir significado aos conceitos matemáticos, relacionando-os a situações discutidas em outras áreas do conhecimento e no cotidiano dos alunos. Não se restringe a resolver um problema interno da Matemática, como no exemplo da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1994.

Portanto, na presente pesquisa, nos apoiaremos nas indicações do documento paulista de 2010 e desenvolveremos atividades que busquem associar o conceito matemático formal a uma situação presente no cotidiano do aluno.

4 OBJETIVOS

Nosso objetivo é responder à **questão de pesquisa**, quais são as contribuições do uso do *Geogebra* no ensino de funções quadráticas através das manifestações dos alunos ao vivenciarem atividades de ensino que relacionam o gráfico da função com sua solução algébrica em uma situação problema.

O que nos leva a refletir sobre o acesso do aluno aos recursos tecnológicos no ensino da Matemática. Ao nos questionarmos sobre a forma de inserção da tecnologia no cotidiano dos alunos, no desenvolvimento dos conteúdos de Matemática, surgem novas subquestões, como: É possível tal inserção? Quais as formas de proporcionar aos alunos o uso de *softwares* livres, de maneira autônoma, que explorem a álgebra, geometria e outros conteúdos de forma dinâmica de maneira que seu uso possa beneficiar a aprendizagem do aluno e o ensino do professor? A otimização contribui para tais aspectos? É possível mobilizar recursos tecnológicos e humanos que garantam a inserção das tecnologias informáticas em escolas sem que a escola possua a infraestrutura adequada? A tecnologia utilizada pelos alunos, como os aplicativos de dispositivos móveis, facilita o uso dos softwares educacionais e de que modo podemos favorecer esta relação?

Neste trabalho, não será possível responder à todas elas, mas é nossa intenção responder a pelo menos duas delas a) É possível tal inserção? b) A tecnologia utilizada pelos alunos, como os aplicativos de dispositivos móveis, facilita o uso dos softwares educacionais?

Entendemos que a escola pode e deve proporcionar aos seus alunos a alfabetização tecnológica (Borba e Penteado, 2001) nas aulas de Matemática, por isso nesta pesquisa analisaremos as contribuições da otimização de funções quadráticas no Ensino Médio utilizando recursos computacionais, com alunos do Ensino Médio apoiados também por indicações presentes nos documentos que regem a educação paulista e nacional.

5 METODOLOGIA

Esta pesquisa tem caráter qualitativo, pois supõe o contato direto e prolongado do pesquisador no ambiente e a na situação que investigada e o interesse estar mais voltado ao processo do que nos resultados (Bogdan e Biklen, 1994). Os participantes são os alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola básica, particular, do interior do Estado de São Paulo, durante as aulas da disciplina de Matemática.

5.1 Descrição da Escola

O local escolhido para desenvolvimento da presente pesquisa foi uma cooperativa educacional, neste trabalho denominada apenas como escola particular, de uma cidade no interior de São Paulo.

A escola foi fundada em 2000 e contava somente com o Ensino Fundamental e com cerca de 112 matrículas da 1ª a 7ª séries.

Por se tratar de uma cooperativa educacional todas as decisões são feitas em assembleias regulares. A formação do estatuto e toda parte formal da cooperativa contou com a ajuda de diversos cooperantes que através de um trabalho contínuo de reuniões escreveram as principais diretrizes que iriam formar os pilares para o funcionamento da cooperativa.

A escola nestes 15 anos de existência sempre contou com a parceria da comunidade na participação de eventos e por ser uma instituição sem fins lucrativos foi declarada instituição de utilidade pública no ano 2000.

Atualmente a escola atende o Ensino Infantil, Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio, contando com aproximadamente 278 alunos.

De acordo com a característica da escola de promover o debate e tomar decisões pautadas sempre num bem coletivo, decidimos escolhe-la como fonte de nossa pesquisa

visando a obtenção de dados claros e posicionamento crítico por parte dos alunos envolvidos no projeto.

Após a apresentação das expectativas da pesquisa para a diretora e a informação de que os alunos não seriam prejudicados em seu conteúdo previsto para o ano letivo, a diretora concordou em assinar o termo de consentimento livre e esclarecido proposto pelo pesquisador (Figura 2).

Figura 2: - Termo de consentimento livre e esclarecido (Diretora)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, compreendo os direitos dos participantes desta pesquisa intitulada “**Contribuições da otimização de funções polinomiais no Ensino Médio utilizando recursos computacionais**” orientada pela **Prof. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado** e que tem como pesquisador responsável o **Prof. Fábio Vieira Abrão** do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo, que podem ser contatados pelo e-mail **epaprado@icmc.usp.br**. E autorizo a participação dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio na qualidade de responsável por esta instituição. Compreendo como e por que este estudo está sendo feito. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo que assegure a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

Cerqueira César, 10 de junho de 2013.

(Diretora da Cooperativa Educacional Cerqueirense)

Fonte: Autoria Própria

5.2 A escolha dos participantes

Após a autorização da direção da escola particular, elaboramos o termo de consentimento livre e esclarecido para os responsáveis pelos alunos participantes (Figura 3) e para os alunos participantes (Figura 4).

Figura 3: Termo de consentimento livre e esclarecido (Responsáveis)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, RG _____
 declaro saber da participação de meu (minha) filho(a) _____
 na pesquisa “**Contribuições da otimização de funções polinomiais no Ensino Médio utilizando recursos computacionais**”
 desenvolvida no Instituto de ciências matemáticas e computacionais da
 Universidade de São Paulo pelo pesquisador **Prof. Fábio Vieira Abrão**
 orientado pela **Prof. Dra. Esther Pacheco Almeida Prado** que podem ser
 contatados pelo e-mail epaprado@icmc.usp.br. O presente trabalho tem por
 objetivo verificar as contribuições da tecnologia da informação no ensino de
 funções polinomiais e os instrumentos utilizados serão a apostila Módulo 12 do
 sistema Pueri Domus, notebook (ou netbook) e softwares matemáticos.
 Compreendo que tenho a liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer
 fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento posso buscar
 maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os
 responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo que assegure a privacidade dos
 sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as
 informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a
 ética na pesquisa e que esta participação não comporta qualquer remuneração.

Cerqueira César, 10 de junho de 2013.

 Responsável

Fonte: Autoria Própria

Figura 4: Termo de consentimento livre e esclarecido (Alunos)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu _____ concordo em participar, como
 voluntário, do projeto de pesquisa intitulado “**Contribuições da otimização de
 funções polinomiais no Ensino Médio utilizando recursos computacionais**”
 que tem como pesquisador responsável o **Prof. Fábio Vieira Abrão** do Instituto
 de Ciências Matemáticas e Computacionais da Universidade de São Paulo,
 orientado pela **Prof. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado** que podem ser
 contatados pelo e-mail epaprado@icmc.usp.br. O presente trabalho tem por
 objetivo verificar as contribuições da tecnologia da informação no ensino de
 funções polinomiais. E minha participação consistirá em fornecer informações
 escritas, orais, em fotos ou em vídeo. Compreendo que este estudo possui
 finalidade de pesquisa, que os dados obtidos serão divulgados seguindo as
 diretrizes éticas da pesquisa, com a preservação do anonimato dos
 participantes, assegurando, assim minha privacidade. Sei que posso abandonar
 a minha participação na pesquisa quando quiser e que não receberei nenhum
 pagamento por esta participação.

Cerqueira César, 10 de junho de 2013.

Fonte: Autoria Própria

Analisando as linhas metodológicas da pesquisa qualitativa, identificamos, em Bogdan e Biklen (1994, p. 292), o aspecto investigativo que nos identificamos, “a investigação é uma atitude – uma perspectiva que as pessoas tomam face a objectos e actividades”. Desse modo, identificamos cinco características da investigação qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994):

1. [...] a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituído o investigador o instrumento principal. [...]. Os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contacto directo. Além do mais, os materiais registrados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise. (Ibid., p. 47).
2. A investigação qualitativa é descritiva. [...]. A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idêia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo (Ibid., p. 48).
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. [...]. (Ibid., p. 49).
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. [...] as abstracções são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. (Ibid., p. 50).
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. [...]. Centram-se em questões [...] ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior (Ibid., p. 50).

Como a nossa fonte de dados foi a sala de aula do 3º ano do Ensino Médio na disciplina de Matemática, consideramos que se constitui como o um “ambiente natural” dos alunos e do pesquisador que também é o professor.

Os nossos principais procedimentos para a pesquisa foram com o intuito de organizar as ações para atender aos objetivos do plano de ensino da escola e que fossem significativos para a coleta de dados da pesquisa.

Sendo assim, pesquisa e ensino se combinam e se complementam, pois os dados coletados têm como fonte a sala de aula. Detalharemos os procedimentos que realizamos pois também se constituem como procedimentos de pesquisa.

Consideramos três etapas principais:

1. a percepção do professor/pesquisador das manifestações das dificuldades dos alunos em 2011, no 1º ano do Ensino Médio, durante o desenvolvimento do conceito de funções com o uso de giz, lousa e material

impresso;

2. a escolha do método mais adequado para a investigação, bem como a escolha do software Geogebra para o desenvolvimento das atividades digitais;
3. elaboração da situação-problema e do tutorial eletrônico contendo atividades em papel, com uso de lápis , juntamente com as atividades a serem desenvolvidas no *software* Geogebra de modo a criar significado para as respostas obtidas com papel e lápis.

Como já dissemos, a pesquisa foi realizada com os alunos do único 3º ano do Ensino Médio, em duas aulas de cinquenta minutos, de uma escola particular do interior do Estado de São Paulo onde o pesquisador atua como professor. A classe conta com 16 alunos, sendo 12 são meninas e 4 meninos com idades entre 16 e 17 anos.

O material didático utilizado pela escola é apostilado, isto é, o conteúdo das disciplinas do Ensino Médio é distribuído em fascículos consumíveis que contêm o desenvolvimento do tema e exercícios variados para que o aluno verifique seu aprendizado.

A escolha dessa classe foi motivada pelo fato de que nos 1ºano, 2º ano e metade do 3º ano do Ensino Médio todo o conteúdo de Matemática já foi desenvolvido e os dois últimos bimestres, são destinados à revisão preparatória para o vestibular. Portanto, no momento da realização desta pesquisa, os alunos já estudaram as funções quadráticas, utilizando o material impresso e o professor utilizando a lousa, e estão revendo o conteúdo com o uso do *software* Geogebra.

E as atividades de ensino se caracterizam por uma situação problema que trata da otimização de uma função quadrática.

Com este grupo de alunos, em 2011, no 1º ano do Ensino Médio, o pesquisador também atuou como professor. Nessa época, discutimos as ideias de otimização de funções quadráticas (Anexo A).

O objetivo principal era a interpretação do ponto ótimo da função e as condições para sua obtenção, visando à construção de argumentos matemáticos para a solução de problemas. Foram necessárias aproximadamente cinco aulas, de cinquenta minutos cada, para o desenvolvimento do conteúdo e avaliação do aprendizado por meio de

resolução de exercícios. Os exercícios trabalhados nesta época foram classificados como fáceis, médios e difíceis sendo estes últimos utilizados em grande quantidade e de maneira semelhante à situação problema tratada neste trabalho.

Observamos que na construção dos gráficos os alunos utilizavam seus cadernos de apoio, lápis, borracha e régua e o professor, a lousa.

No traçado das parábolas, marcávamos, no plano cartesiano, os pontos principais, como raízes, vértice e intersecções com os eixos, e os demais pontos eram esboçados seguindo a forma aproximada de uma parábola.

Nessa época, 2011, observamos que a principal dificuldade manifestada pelos alunos foi a interpretação da variação dos pontos da parábola como sendo a resposta a cada mudança no valor da variável do problema.

Os alunos calculavam os valores correspondentes às coordenadas do ponto crítico da parábola corretamente, utilizando a lei da função. Faziam também corretamente o esboço da parábola, mas não compreendiam a relação entre estas duas linguagens distintas para a mesma situação, linguagem algébrica que expressa a lei da função e a linguagem geométrica, que expressa o seu gráfico.

Também não entendiam que cada ponto da parábola correspondia a um valor diferente atribuído à variável da função. Enfim, os alunos não compreendiam a relação entre o gráfico e a lei da função.

Com a finalidade de minimizar este problema no 3º ano do Ensino Médio, ano em que é realizada a revisão pré-vestibular, optamos por utilizar o *software* Geogebra, uma vez que acreditamos que o recurso permitirá a visualização de cada ponto da parábola de acordo com a mudança no valor da variável do problema, na lei da função.

5.3 O desenvolvimento da pesquisa

A escola não conta com laboratórios didáticos de informática, mas realizamos um levantamento prévio com a classe e verificamos que a metade dos 16 alunos tinha notebook e poderiam trazê-los à escola.

Combinamos com a classe que no dia 07 de outubro de 2013 iríamos realizar a atividade com o uso do *software* Geogebra, pois neste dia desenvolveríamos a ideia de otimização de funções quadráticas previsto no material didático adotado pela escola.

Neste dia, organizamos a classe em oito duplas, cada uma com um notebook com o *software* Geogebra, previamente instalado e com o tutorial em texto digital já salvo em todos os notebooks, além de papel, lápis e borracha para o desenvolvimento das atividades que necessitassem de registros com essas mídias, conforme podemos verificar na Figura 5.

Figura 5: Alunos separados em duplas com os materiais em mãos



Fonte: Autoria própria.

A situação-problema proposta para esta pesquisa contempla conteúdos matemáticos relacionado à otimização de funções quadráticas baseada nas orientações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2010), destinadas a alunos do Ensino Médio.

O objetivo desta atividade é a interpretação do enunciado, a resolução do problema com o uso de lápis e papel e construção do gráfico no *software* Geogebra para posterior análise do comportamento dos pontos do gráfico de acordo com a mudança nos valores da variável e interpretação do ponto crítico da função quadrática mediante a resolução realizada com lápis e papel.

5.4 A Atividade escrita

A primeira parte da atividade consistiu na resolução de uma situação problema, utilizando como ferramentas o conhecimento prévio dos alunos acerca das funções quadráticas e posteriormente o uso do *software* Geogebra para a construção do gráfico. E dos pontos principais do mesmo que evidenciaram a correlação entre a mudança na variável do problema e o valor da função.

Situação-problema: Numa grande papelaria o preço de uma lapiseira é R\$ 1,60 e são vendidas 2600 unidades num dia sem promoção. Entretanto, o proprietário da papelaria sabe que para cada redução de R\$ 0,01 no preço de cada lapiseira são vendidas 25 unidades a mais que num dia sem promoção.

Item “a”: *Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia sem promoção.*

O item “a” verifica se houve o entendimento da primeira parte do enunciado que menciona a situação de um dia sem promoção na papelaria.

Item “b”: *Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia em que o preço de cada lapiseira é R\$ 1,46.*

O item “b” verifica se houve o entendimento da segunda parte do enunciado que determina o fenômeno regido pela quantidade de reduções no preço unitário da lapiseira.

Item “c”: *Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia em que o preço de cada lapiseira é R\$ 0,90.*

O item “c”, embora semelhante ao item “b”, permite ao aluno perceber que não há proporcionalidade entre o preço unitário da lapiseira e o valor arrecadado, pois,

desenvolvendo o exercício até o item anterior pode haver o pensamento de que quanto menor o preço unitário, maior a quantidade vendida e, conseqüentemente, maior arrecadação.

Item “d”: *Pelos valores calculados nos itens b e c, você pode concluir que deve existir um valor para a unidade da lapiseira para o qual o valor recebido pelo proprietário da papelaria seja o maior possível.*

Este valor é chamado de valor ótimo.

Escreva a expressão que determina o valor “V” recebido pelo proprietário da papelaria em função do número x de reduções de R\$ 0,01 no preço de cada lapiseira.

No item “d”, caso o aluno não tenha concluído que deve haver um valor “ideal” para o preço unitário da lapiseira, o enunciado pode auxiliar para que o aluno chegue a este raciocínio e fornece a informação de que existe um valor ótimo.

Ao escrever a lei que determina o valor arrecadado em função do número de reduções no preço unitário da lapiseira, o aluno percebe que se trata da lei de uma função do 2º grau. A interpretação Matemática do exercício está concluída.

Item “e”: *Utilizando as coordenadas do vértice da parábola, calcule o valor ótimo para o preço unitário da lapiseira e o valor máximo recebido pelo proprietário da papelaria com a venda das mesmas.*

O item “e” conclui a resolução tradicional do exercício, solicitando que os alunos calculem este valor ótimo utilizando as coordenadas do vértice da parábola, relacionando-o ao ponto em que o valor recebido pela papelaria seja máximo, concluindo assim a resolução do problema.

Os alunos desenvolveram a atividade escrita em duas partes: primeiramente fizeram a leitura do enunciado da situação-problema e dos cinco itens propostos (Figura 6). Em seguida resolveram o problema no papel.

Figura 6: Alunos desenvolvendo a primeira parte da atividade



Fonte: Autoria própria.

Com os resultados da primeira parte em mãos, os alunos utilizaram o *software* Geogebra para construir o gráfico da função que rege o fenômeno estudado. Com a construção de pontos móveis que permitem a interação e a visualização das variações envolvidas na situação.

O tutorial apresenta de maneira detalhada cada ação do aluno ao inserir os dados do problema no *software*.

5.5 O Tutorial

Devido ao pouco tempo de contato dos alunos com o Geogebra decidimos utilizar um tutorial, desenvolvido pelo pesquisador, que permitiu a construção do gráfico e dos pontos móveis que simbolizam as variáveis do problema, previamente solucionado pelos alunos.

O tutorial apresenta de maneira detalhada cada ação do aluno ao inserir os dados do problema no software. Na tabela abaixo transcrevemos o tutorial entregue aos alunos em formato de texto pdf.

O *software* Geogebra permitirá a obtenção do valor ótimo através da construção do gráfico da expressão escrita no item d. Abra o Geogebra e siga as instruções para a construção do gráfico:

- ✓ Na caixa entrada, digite a expressão encontrada no item *d* iniciando-a com $V(x)$.

- ✓ Para permitir a visualização do gráfico, vamos alterar a escala dos eixos. Clique com o botão direito sobre uma área em branco próxima aos eixos x ou y e no *box* que se abre escolha “Janela de visualização”.

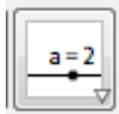
- ✓ Na aba “Básico”, altere o valor da caixa “ x Máx:” para 800.

- ✓ Na aba “Básico”, altere o valor da caixa “ y Máx:” para 8000.

- ✓ Nas caixas “Eixo x : Eixo y ”, digite 1 e 20 respectivamente.

- ✓ Feche a Janela. Seu gráfico deve estar visível agora.

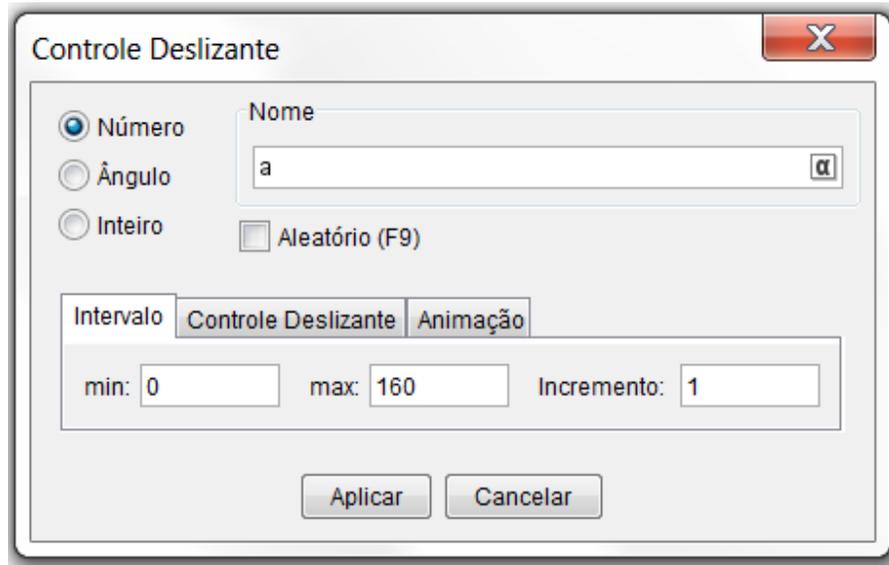
- ✓ Vamos colocar um controle deslizante que permitirá variar o preço da



lapiseira. Clique na ferramenta e depois clique numa área em branco.

- ✓ Preencha as caixas conforme a figura:

Figura 7: Foto da Tela que configura as opções para o controle deslizante



Fonte: Autoria própria

Vamos inserir um ponto móvel sobre o gráfico para visualizar melhor os valores

alterados pelo controle deslizante. Clique em  e em seguida clique sobre qualquer lugar do gráfico.

Clique com o botão direito sobre o ponto criado, depois escolha a aba “Básico” e na caixa definição digite: $(a, V(a))$. Feche esta janela.

✓ Vamos criar caixas de texto que mostrem o preço da unidade da lapiseira, o valor recebido e a quantidade de unidades vendidas de acordo com a quantidade de reduções no preço unitário. Para isso, criaremos variáveis para calcular as informações necessárias. Clique “Entrada” e digite: $r=V(a)$ e tecele enter. Essa variável vai armazenar o valor recebido.

✓ Clique em “Entrada” e digite: $p=(1.6-a*0.01)$ e tecele *enter*. Essa variável vai armazenar o preço unitário da lapiseira.

✓ Clique em “Entrada” e digite: $q=(2600+20*a)$ e tecla enter. Essa variável vai armazenar a quantidade de lapiseiras vendidas.

✓ Agora vamos exibir as informações. Clique em  e, depois, clique acima do controle deslizante que está na tela. Um cursor piscará na tela, nele digite: “Quantidade de reduções no valor unitário da lapiseira”. Clique novamente em , em seguida clique numa área em branco da tela e digite: “Preço unitário: R\$”, clique em :

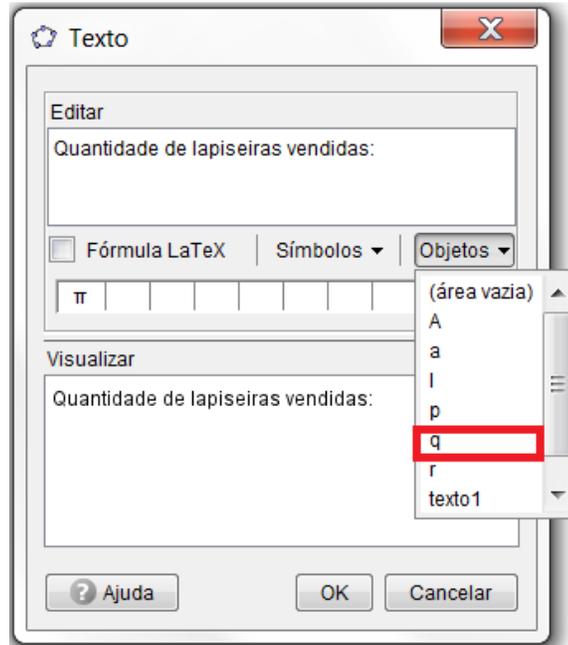
Figura 8: Foto da Tela de configuração da ferramenta Texto



Fonte: Autoria própria

Clique em , clique numa área em branco da tela e digite: “Quantidade de lapiseiras vendidas:” , clique em

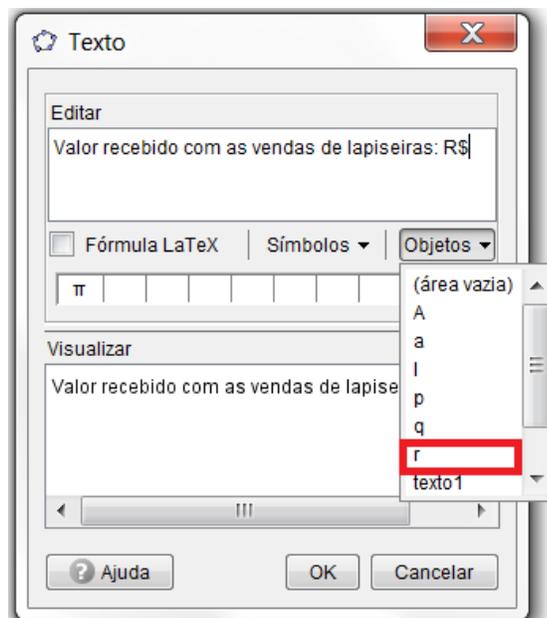
Figura 9: Foto da Tela de configuração de ferramenta Texto



Fonte: Autoria própria

- ✓ Clique em , clique em numa área em branco da tela e digite: “Valor recebido com as vendas de lapiseiras: R\$” e em seguida clique em:

Figura 10: Foto da Tela de configuração de ferramenta Texto

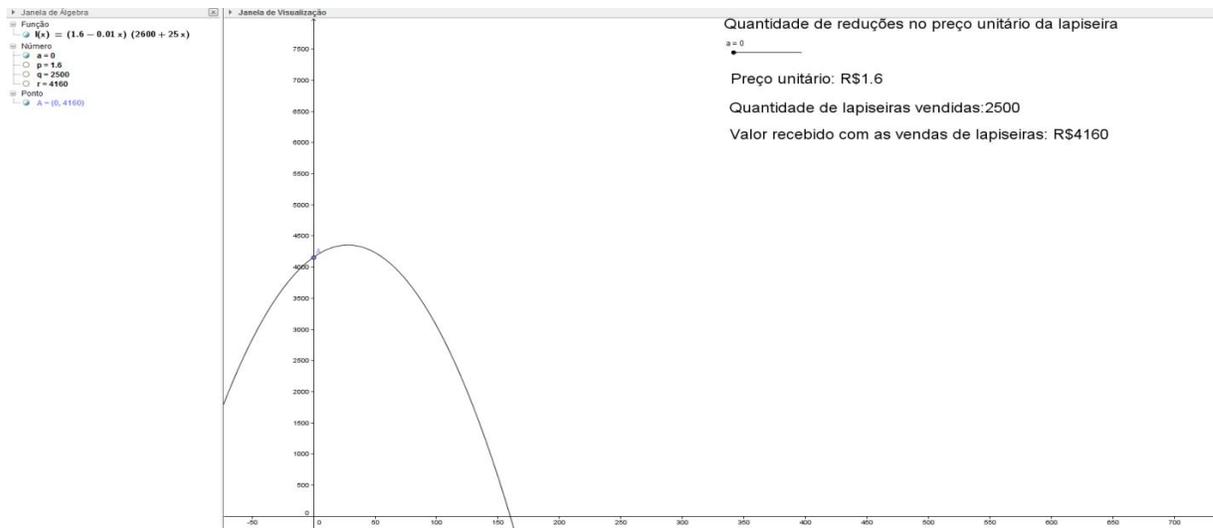


Fonte: Autoria própria

✓ Caso queira alterar tamanho, cores ou fonte dos textos clique com o botão direito no texto desejado e escolha a opção “Propriedades...”

✓ Ao final dessas etapas sua tela deverá estar parecida com esta:

Figura 11: Aparência final do gráfico



Fonte: Autoria própria.

✓ Agora vamos variar o preço da lapiseira. Clique em , depois clique no controle deslizante  e para aumentar ou diminuir o valor **a** use as teclas direita e esquerda do teclado. Você perceberá que a medida que muda o valor de **a** o ponto A - sobre o gráfico e as variáveis mudam.

Ao final do desenvolvimento do tutorial, as informações obtidas na resolução tradicional e os dados do enunciado foram inseridos no software com o objetivo de permitir ao aluno uma visualização mais clara dos efeitos da variação no preço das lapiseiras no total arrecadado pela papelaria. Para auxiliá-los nas conclusões, propusemos as seguintes questões:

- Qual é o valor ótimo para o preço unitário da lapiseira? Justifique.
- Qual o valor máximo recebido com a venda de lapiseiras?

c) *Quantas lapiseiras serão vendidas quando o preço unitário for o ótimo?*

Figura 12: Dupla de alunos seguindo o tutorial da segunda parte da atividade



Fonte: Autoria própria

Nesta parte, os alunos seguiram o tutorial desenvolvido pelo pesquisador e, juntamente com as conclusões obtidas na primeira parte da atividade, construíram o gráfico da função com o controle do ponto móvel. Já as variáveis mostraram, a cada mudança de preço unitário da lapiseira, o total de lapiseiras vendidas e o valor total arrecadado pela papelaria.

No tutorial, o gráfico construído refere-se a uma função contínua, embora a situação problema trate de uma variável discreta (número de reduções de R\$ 0,01 no preço unitário da lapiseira), tal discrepância foi solucionada com o uso de um ponto móvel sobre a parábola evidenciando sua característica discreta.

Os dados obtidos até o momento, de duas formas diferentes, isto é, com e sem o uso da tecnologia informática, podem ser classificados, segundo Goldenberg (2001), como quantitativos e para agregar maior credibilidade à coleta de dados propusemos as questões, enumeradas no item 5.6, que têm o objetivo de fornecer dados qualitativos à pesquisa.

Após o término das atividades práticas, os alunos foram convidados a responder aos itens, que serão apresentados na próxima seção, que servem como orientação na análise dos dados coletados pela pesquisa.

5.6 Análise das manifestações dos alunos

Ao final das atividades escritas e práticas os alunos foram convidados a responder, numa folha à parte, um questionário cujo objetivo é auxiliar o pesquisador na análise qualitativa das atividades práticas propostas pelo tutorial.

Puderam ser observados aspectos positivos e negativos, destacados nas respostas dos próprios alunos, conforme vemos no quadro abaixo.

Questão 1: Cite as principais vantagens encontradas no desenvolvimento da atividade. Justifique-as.

Figura 13: Quadro com o depoimento do aluno e comentário do pesquisador sobre a questão 1

Depoimento dos alunos	Análise do pesquisador
<p><i>Aluna LC:</i> <i>“A vantagem nesse tipo de desenvolvimento, é principalmente o tempo de cálculo. O programa já faz as contas necessárias instantaneamente, obtendo um resultado mais preciso do que está sendo trabalhado e de todas as variáveis. Outra vantagem também é que graficamente o resultado é mostrado de forma perfeita, sem erros. É uma ferramenta não muito difícil de usar”.</i></p>	<p>O software proporciona maior dinamismo ao resolver a situação problema por permitir que as variáveis sejam mudadas e os resultados observados, instantaneamente, pelo aluno, sem necessidade de realizar os cálculos.</p>

<p>Aluna MB: <i>“É mais interessante observar valores de uma parábola no computador pois a cada mudança no valor de ‘a’ (reduções) já é possibilitado todas as informações do produto ao lado do gráfico”.</i></p> <p>Aluna MV: <i>“Usando o software Geogebra foi possível visualizar o gráfico da função e dos valores referentes às vendas de lapiseiras e modificar de forma rápida qualquer um dos dados determinantes, analisando diferentes situações de modo experimental”.</i></p>	<p>Conforme destacado por Nascimento (2012).</p>
<p>Aluno LG: <i>“A principal vantagem é a praticidade, sendo que qualquer computador tem potencial para adquirir o programa, e levando em conta também que o programa é de fácil manuseio”.</i></p>	<p>O software Geogebra exige poucos requisitos físicos do computador, exige pouca capacidade de processamento, possui interface agradável, comandos intuitivos e, por ser gratuito, permite que qualquer aluno possa usá-lo. De acordo com as indicações de Siqueira (2013).</p>
<p>Aluna MA: <i>“Esse tipo de atividade chama a atenção do aluno mais do que quando o método tradicional é usado, e desta forma o aluno demonstra mais interesse pelos conteúdos de Matemática”.</i></p>	<p>Talvez, a proximidade que o aluno tenha com a tecnologia o faça estar mais receptivo às atividades escolares que envolvam informática.</p>
<p>Aluna CC: <i>“Quanto a formação do aluno, é muito importante que haja tal conhecimento para possíveis aplicações futuras no campo da tecnologia e no uso de softwares”.</i></p> <p>Aluno LR: <i>“A inclusão digital que acaba acontecendo no decorrer da atividade, onde os alunos desenvolvem a habilidade de manusear um software que resolve problemas matemáticos com perfeição e dinamismo”.</i></p>	<p>O desenvolvimento de atividades com o uso da informática proporciona o acesso do aluno ao mundo moderno da tecnologia e favorece a chamada alfabetização informática, dois dos aspectos defendidos por Borba e Penteadó (2001).</p>

Questão 2: *Cite as principais desvantagens encontradas no desenvolvimento da atividade. Justifique-as.*

Figura 14: Quadro com depoimento do aluno e comentário do pesquisador sobre a questão 2

Depoimento dos alunos	Análise do pesquisador
<p><i>Aluno JF:</i> <i>“A única desvantagem encontrada foi a dificuldade de quem nunca havia utilizado-o, de manusear o programa utilizado, Geogebra.”</i></p> <p><i>Aluna CC:</i> <i>“Uma possível desvantagem é não haver um certo entendimento da atividade por parte do aluno, já que não existe tanto costume em relação a atividades assim.”</i></p> <p><i>Aluna LC:</i> <i>“Apesar de não ser uma ferramenta difícil de usar, é necessário um conhecimento prévio, um conhecimento básico para mexer com as variáveis do problema matemático. Para isso, utilizamos um tutorial, que mostrava de forma simples como utilizá-lo, e eficiente. Apesar de ter sido um bom tutorial e ter atingido o objetivo (que é a construção do gráfico com as variáveis), logo no começo há um duplo sentido de qual é a ‘janela de visualização’. De forma geral, a desvantagem é como saber usar, precisaria necessariamente de um tutorial”.</i></p> <p><i>Aluno LR:</i> <i>“Falta de alguns detalhes para o aluno individualmente realizar a tarefa caso tenha dificuldades com a tecnologia, o que torna a presença do professor muito necessária para vários alunos ao mesmo tempo”.</i></p> <p><i>Aluna MB:</i> <i>“Uma desvantagem, ou algo que poderia ter sido tratado antes, foi que poderia ter sido apresentado o programa</i></p>	<p>Durante a realização da parte prática, no Geogebra, os alunos sentiram certo desconforto por terem que seguir o tutorial elaborado pelo pesquisador. Isso mostra que há a necessidade de aulas específicas para a análise do software para que os alunos possam desenvolver seus experimentos de maneira mais independente.</p> <p>Ao realizar as tarefas da parte prática, muitos alunos questionavam a utilidade de algumas ferramentas que não estavam presentes no tutorial, revelando uma curiosidade não esperada pelo pesquisador e não prevista na elaboração do tutorial. Ou seja, o tutorial não foi flexível às curiosidades dos alunos.</p> <p>Este fato revela que o tutorial deva talvez incluir passos que deixem o aluno explorar as ferramentas do software e abra espaço para a experimentação de possíveis soluções, corretas ou não.</p>

Geogebra antes para os alunos, mostrando como ele funciona e quais suas ferramentas e utilidades. Assim, no momento em que nós alunos fossemos realizar as atividades nós já teríamos uma base melhor sobre como e o que fazer”.

Aluna MM:

“Apesar de proporcionar a visualização o processo é regido por regras e passos a serem seguidos fazendo com que não haja um alto ‘desenvolvimento mental’ visto que as etapas já estão ditas, não precisa pensar qual seria o próximo passo, caracterizando-se desvantajoso”.

Aluna MV:

“No desenvolvimento da atividade as ações foram um tanto mecânicas, sem muito entendimento sobre o processo, apesar de ser possível chegar corretamente e com certeza às respostas finais. Houve também uma sensação de dependência da tecnologia, o que é menos confortável do que quando se consegue fazer a atividade no papel. Além disso, no papel conseguimos associar os conhecimentos que estamos colocando em prática (coordenada do vértice, por exemplo), o que não ficou tão claro no uso do software”.

Fonte: Autoria própria

Ao final das atividades, os alunos responderam às questões 3, 4 e 5 que pretendem concluir sobre a validade, ou não, de atividades que envolvam a tecnologia informática aplicada à Matemática.

Questão 3: *Na sua opinião, a tecnologia informática pode ser utilizada como auxiliar no desenvolvimento dos conteúdos da matemática?*

Justifique sua resposta.

Questão 4: *Na sua opinião, a tecnologia informática pode substituir o desenvolvimento tradicional (giz e lousa) dos conteúdos da matemática?*

Justifique sua resposta.

Questão 5: *Comente sobre algum ponto relevante que queira destacar e não foi perguntado.*

As repostas foram as seguintes:

Figura 15: Quadro com depoimento do aluno e comentário do pesquisador sobre as questões 3,4 e 5

Respostas dos alunos às questões 3,4 e 5	Análise do pesquisador
<p><i>Aluna CC:</i></p> <p><i>“A tecnologia pode ser um ótimo auxiliador no entendimento e aprendizagem; pois além de despertar curiosidade e maior interesse no aluno, amplia conhecimentos... (A tecnologia não deve substituir o ensino tradicional), pois é também importante a formação tradicional para o aluno. O ideal seria uma parceria dos dois métodos no currículo escolar, sem que um anule o outro”.</i></p> <p><i>Aluna MA:</i></p> <p><i>“Na minha opinião a tecnologia pode auxiliar no desenvolvimento dos conteúdos, porém o que dificulta isso é que nem todos tem acessibilidade a essas tecnologias.</i></p> <p><i>Pode (substituir o ensino tradicional), desde que todos possam ter acesso à tecnologia e que o conteúdo seja entendido com maior facilidade. Caso contrário, o desenvolvimento tradicional (giz e lousa) ainda funciona muito bem”.</i></p> <p><i>Aluna RL:</i></p> <p><i>“Como auxiliar, pois ilustra o aprendizado e facilita a compreensão do aluno, que pode ver com exatidão a precisão Matemática e interagir com a questão, além de facilitar a absorção do conhecimento.</i></p> <p><i>A lousa é um método de interação com o aluno que não está mecanizado, que é flexível, (mais que o</i></p>	<p>Ficou clara a importância de ambos os métodos e que um pode complementar o outro.</p> <p>Cada método possui suas funcionalidades e até o momento um não pode substituir o outro.</p> <p>Há ainda a preocupação de que nem todos podem ter acesso a essa tecnologia, como visto na fala de MA, ainda é necessário que haja maior popularização de tais avanços tecnológicos. Ao inserir atividades que envolvam <i>softwares</i> educacionais no ambiente natural do aluno estaremos garantindo seu direito ao acesso à tecnologia (Borba e Penteadó, 2001)</p> <p>A opinião da aluna RL mostra o desconforto sentido ao utilizar um tutorial não flexível.</p> <p>A falta de autonomia do aluno ao comandar as ações do software faz com que ele prefira o método tradicional de ensino, no qual ele elabora a solução para o problema do início ao fim, sem a</p>

<i>trabalhado), além de ser o método que ensina, é o que faz o aluno aprender exatas mais fácil, pois nele que se resolvem exercícios”.</i>	necessidade de seguir instruções ou depender muito do professor.
---	--

Fonte: Autoria própria

Podemos perceber pelas opiniões dos alunos que no geral a atividade foi válida no sentido de aproximar um conteúdo matemático do cotidiano dos alunos e ao utilizar um software para entender as relações estabelecidas entre os dados e a variável do problema, tornou o aprendizado mais claro e dinâmico, além de permitir a inserção da tecnologia da informática na sala de aula, de acordo com Borba e Penteado (2001).

Por se tratar de um software com comandos intuitivos e de fácil acesso a manipulação do Geogebra não foi empecilho para as realizações das atividades, configurando-se um software adequado ao desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, fato que corrobora com as conclusões de Nascimento (2012) e Mognom e Barros (2012). Porém a presente pesquisa aponta para a necessidade de proporcionar ao aluno um contato prévio com os softwares matemáticos, que permita a exploração de suas funcionalidades, fato que permitirá ao aluno o domínio destas tecnologias ampliando suas formas de pensar na solução de situações problema, sem a necessidade da presença tão constante do Professor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento deste trabalho procuramos seguir as orientações dos documentos oficiais do estado de São Paulo e as orientações curriculares nacionais no que se referem à resolução de problemas no ensino básico, ao uso de problemas de otimização com o objetivo de aproximar as atividades escolares do cotidiano do aluno e concomitantemente relacioná-las ao mundo do trabalho e a inserção de tecnologias, como a informática, neste caso com o *software* educacional Geogebra, com o objetivo de garantir o direito dos alunos ao acesso a essas tecnologias e promover a alfabetização tecnológica dos mesmos.

Procuramos embasar nossas ações em autores e pesquisadores que se dedicam ao estudo dos objetos educacionais utilizados neste trabalho, pautando-nos nos pontos positivos destacados por seus trabalhos.

Ao final das atividades, percebemos, através das observações realizadas pelo pesquisador em campo e de acordo com os depoimentos escritos pelos alunos que o uso da problematização motivou os alunos a buscar uma solução satisfatória e o fato de envolver um problema de otimização aplicado à atividades comerciais rotineiras também foi positivo no sentido de motivá-los.

O desenvolvimento de atividades que envolvem tecnologia informática é uma tarefa mais complexa do que considerávamos no início da pesquisa. Embora saibamos da familiaridade que os alunos possuem com essas ferramentas, podemos superestimar suas habilidades em usar alguns *softwares* mais específicos, como no caso o Geogebra.

Por meio da análise das respostas dos alunos a estas questões, juntamente com as observações do pesquisador no desenvolvimento das atividades, podemos concluir que o uso da tecnologia informática na escola proporciona uma motivação maior que nos dias de aulas em sala, por trazer ao cotidiano escolar uma ferramenta que os alunos têm interesse em aprender.

O domínio desta tecnologia traz o aluno para uma zona de conforto e os torna mais receptivos às atividades escolares.

Por outro lado, é nítido o desconforto dos alunos ao seguir um tutorial que não permitiu a exploração do *software* de maneira livre. A todo momento, durante o

desenvolvimento da atividade, os alunos alteravam cores, inseriam imagens e exploravam ferramentas que não estavam presentes no tutorial. Talvez seja necessária a elaboração de atividades que permitam essa exploração, ao mesmo tempo que possam desenvolver o conteúdo matemático pretendido.

Assim, esta pesquisa indicou que o uso de um *software* deve prever, em um primeiro momento, a exploração livre das ferramentas do *software*.

Ao trazer *softwares* de natureza pedagógica para a sala de aula, com a expectativa de que o aluno tenha facilidade no uso dessa ferramenta voltada para a Matemática, estamos habituando ao uso das tecnologias no seu cotidiano.

Contudo, o professor deve estar atento aos seguintes fatos:

- a) os *softwares* utilizados pelos alunos geralmente os colocam como protagonistas;
- b) os *softwares* permitem a exploração de ferramentas livremente e de maneira intuitiva;
- c) os recursos proporcionam a troca de experiência entre os usuários, e
- d) tais ferramentas propiciam muitas horas de uso.

Esses fatos não ocorrem com o uso do *software* no ensino de Matemática. Portanto, ao perceber que o aluno demonstra certa resistência ao realizar as tarefas propostas, devemos avaliar se as tarefas elaboradas pelo docente se assemelham às tarefas ou desafios dos *softwares* que os alunos utilizam no seu cotidiano. Ou se o modo como as tarefas são propostas aos alunos permitem o protagonismo deles frente à solução do problema.

Os alunos são, de maneira geral, estimulados pelos professores de Matemática, durante o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, a ler com atenção os enunciados dos problemas, coletar informações, selecionar as estratégias de resolução e, por fim, apresentar uma solução ao problema. Durante todo o processo de resolução de uma situação problema, o professor limita-se a fornecer os subsídios matemáticos necessários, mas quem escolhe os meios mais adequados para resolver este ou aquele problema é o aluno. Desse modo, atividades que envolvam o uso de *softwares* na sala de aula devem seguir as mesmas premissas adotadas numa aula tradicional, permitindo a autonomia do aluno.

O desconforto sentido por grande parte alunos que fizeram parte desta pesquisa, ao seguir um tutorial, talvez nos indique a importância do trabalho conjunto entre ensino de Matemática com uso do giz, lousa e material impresso e o ensino de Matemática com o uso de *softwares*.

Embora entendamos que ambos devem ser realizados, pois por meio do ensino com uso do giz, lousa e material impresso é que podemos desenvolver com o aluno, de modo inicial os subsídios para a escolha da melhor forma de resolução de determinada situação problema, vimos que o uso das tecnologias da informação, isto é, os *softwares* para o ensino da Matemática, proporcionam o movimento das imagens digitais que possibilitam aos alunos relacionar a linguagem algébrica, que expressa a lei da função, com os movimentos no seu gráfico provocados pelas alterações dos valores variáveis.

Retomando nossas questões de pesquisa:

- a) É possível tal inserção (de softwares educacionais para o ensino da matemática)?
- b) A tecnologia utilizada pelos alunos, como os aplicativos de dispositivos móveis, facilita o uso dos softwares educacionais?

Percebemos que a inserção da tecnologia é possível, porém depende de requisitos mínimos presentes na escola, como o acesso à *internet* computadores com capacidades mínimas de processamento, sejam de propriedade da própria escola ou de propriedade dos alunos e desenvolvimento de atividades, por parte do professor, que contemplem conteúdos condizentes com o uso da tecnologia.

A experiência dos alunos com a tecnologia é um fator mais motivacional do que facilitador da aprendizagem da Matemática. A motivação aparece quando oferecemos a eles uma aula diferente das usuais e com um equipamento conhecido por eles, mas o fato da atividade estar organizada por um tutorial não permitiu a livre exploração do *software*, fato importante na concepção dos alunos.

Para utilizações futuras de *softwares* em sala de aula, recomendamos que o *software* seja apresentado previamente aos alunos com possibilidade de livre exploração de seus recursos e ferramentas, desta maneira acreditamos que a tecnologia possa estar presente na escola de maneira efetiva, pois, estando o aluno no domínio das ferramentas do *software*, sabendo a função de cada ferramenta, a tecnologia se torna mais um

recurso, ou seja, mais uma forma de pensar na solução de problemas, sejam eles de quaisquer disciplinas.

De maneira geral, nesta pesquisa, consideramos que as atividades estimularam os alunos, uma vez que foi feito o uso do computador, ferramenta muito presente no cotidiano dessa faixa etária para resolver uma situação problema de maneira dinâmica. Houve a possibilidade traçar a parábola e observar instantaneamente o efeito produzido a cada modificação na variável do problema.

Ao aliar a resolução de problemas de otimização à tecnologia informática, podemos antecipar algumas conclusões Matemáticas, pois mesmo sem o desenvolvimento de teorias complexas, ao trabalhar com funções de grau superior a dois, a interpretação do ponto ótimo será muito próxima da interpretação que encontramos na função quadrática.

A tecnologia informática permite o desenvolvimento de habilidades diferentes daquelas realizadas pelo ensino com uso de giz, lousa e material impresso, principalmente no que diz respeito a dinamicidade na obtenção de resultados e na experimentação, visto que para cada mudança nos valores das variáveis a consequência pode ser observada instantaneamente.

Dentro dessa perspectiva, há a necessidade de um trabalho conjunto entre o uso das mídias, materiais tradicionais e tecnologia informática, já que cada modalidade possui suas especificidades e conjuntamente permitem ao professor desenvolver um ensino com qualidade que torne o aluno protagonista nesse processo.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOGDAN, R. C., BIKLEEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos.** Tradução M. J. Alvarez, S. B. dos Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto, 1994.
- BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** São Paulo: Autêntica, 2004.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** São Paulo: Autêntica, 2001.
- BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO R. B. A. **Educação a Distância online.** São Paulo: Autêntica, 2008.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnologia/MEC, 1999.
- CARMO, A. P. **Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio.** 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- CORDEIRO, E. C. A. **Manual simplificado de normas de elaboração de teses e dissertações.** 4. ed. São Carlos. 2013. 52 p.
- FIORENTINI, D., LORENZATO. **Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados. (Coleção formação de professores), 2006.
- GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar.** Rio de Janeiro/São Paulo: Record, 2001.
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar.** 3.ed. São Paulo: Atual, 1977.
- MOGNON, A., BARROS, M. C. **O uso do software GeoGebra no ensino da Matemática.** In: CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, São Paulo. São Paulo: Instituto Geogebra – PUC-SP, 2012.
- NASCIMENTO, E. G. A. **Avaliação do software Geogebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria.** 2012. 113f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza, 2012.
- PATERLINI, R. R. **Aplicação da metodologia resolução de problemas abertos no ensino superior.** 2010. Disponível em:

<http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_metodol_invest.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2014.

ROCHA, A. M. **Problemas de otimização utilizando a Matemática do Ensino Médio**. 2013. 52 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo, SP: SEE, 2010.

_____. Secretaria da Educação **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor; Matemática, Ensino Médio, 1ª série**. São Paulo, SP: SEE, 2014.

_____. Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau**. 3.ed. São Paulo, SP: SE/CENP, 1994.

SILVA, S. F. e NUÑEZ, I. B. **O Ensino por Problemas e Trabalho Experimental dos Estudantes**. In: Química Nova, v. 25, nº 6B. 2002. Natal, RN. 2002.

SIQUEIRA, D. M. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio**. 2013. 61f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

WILSEK, M. A. G. e TOSIN, J. A. P. **Ensinar e Aprender Ciências no Ensino Fundamental com Atividades Investigativas através da Resolução de Problemas**. 2009. Paraná, PR.

APÊNDICE A: Plano de aula sobre otimização de funções quadráticas para o 1º ano do Ensino Médio, 2011

<p>I. Plano de Aula: Cálculo e interpretação das coordenadas do vértice da parábola</p>
<p>II. Dados de Identificação: Local: Colégio particular do interior de São Paulo Professor: Fábio Vieira Abrão Disciplina: Matemática Turma: 1º EM</p>
<p>III. Tema: - Função Quadrática – Otimização</p>
<p>IV. Objetivos:</p> <p>Competência desenvolvida: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.</p> <p>Habilidades desenvolvidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar a relação de dependência entre grandezas; - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso pra a construção de argumentação; - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
<p>V. Conteúdo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Interpretação de situação-problema; - Resolução de situação-problema que envolva função quadrática; - Construção e análise do gráfico.
<p>VI. Desenvolvimento do tema:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Apresentação do tema -Levantamento de conhecimentos prévios -Apresentação de conceitos fundamentais -Resolução de situação-problema -Aplicações no cotidiano -Discussões derivadas do conteúdo
<p>VII. Recursos didáticos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Giz e lousa - Livro Didático
<p>VIII. Avaliação:</p>

- Avaliação Somativa com o propósito de aferir o conhecimento adquirido ao final do desenvolvimento do tema.

- Avaliação Formativa com o propósito de acompanhar o desenvolvimento procedimental do aluno em direção aos objetivos da aula.

Avaliação de aspectos atitudinais com o propósito de desenvolver o interesse pelo tema tratado.

As avaliações podem ser escritas, na forma de pesquisa, orais ou observações realizadas pelo professor.

XIX. Bibliografia:

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações** v.1. São Paulo: Ática, 2011.

APÊNDICE B: Situação-problema

Numa grande papelaria, o preço de uma lapiseira é R\$ 1,60 e são vendidas 2600 unidades num dia sem promoção.

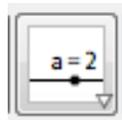
Entretanto, o proprietário da papelaria sabe que para cada redução de R\$ 0,01 no preço de cada lapiseira são vendidas 25 unidades a mais que num dia sem promoção.

- a) Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia sem promoção.
- b) Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia em que o preço de cada lapiseira é R\$ 1,46.
- c) Calcule o valor recebido pela papelaria, com as vendas de lapiseiras, num dia em que o preço de cada lapiseira é R\$ 0,90.
- d) Pelos valores calculados nos itens *b* e *c* calculados, você pode concluir que deve existir um valor para a unidade da lapiseira para o qual o valor recebido pelo proprietário da papelaria seja o maior possível. Este valor é chamado de valor ótimo. Escreva a expressão que determina o valor “V” recebido pelo proprietário da papelaria em função do número *x* de reduções de R\$ 0,01 no preço de cada lapiseira.
- e) Utilizando as coordenadas do vértice da parábola, calcule o valor ótimo para o preço unitário da lapiseira e o valor máximo recebido pelo proprietário da papelaria com a venda das mesmas.

APÊNDICE C: Tutorial para o desenvolvimento das atividades no *software* Geogebra

O software Geogebra permitirá a obtenção do valor ótimo através da construção do gráfico da expressão escrita no item d. Abra o Geogebra e siga as instruções para a construção do gráfico:

- ✓ Na caixa entrada, digite a expressão encontrada no item d iniciando-a com $V(x)$.
- ✓ Para permitir a visualização do gráfico, vamos alterar a escala dos eixos. Clique com o botão direito sobre uma área em branco próxima aos eixos x ou y e no *box* que se abre escolha “Janela de visualização”.
- ✓ Na aba “Básico”, altere o valor da caixa “x Máx:” para 800.
- ✓ Na aba “Básico”, altere o valor da caixa “y Máx:” para 8000.
- ✓ Nas caixas “Eixo x : Eixo y” digite 1 e 20 respectivamente.
- ✓ Feche a Janela. Seu gráfico deve estar visível agora.
- ✓ Vamos colocar um controle deslizante que permitirá variar o preço da lapiseira. Clique



na ferramenta e depois clique numa área em branco.

- ✓ Preencha as caixas conforme a figura:

- ✓ Vamos inserir um ponto móvel sobre o gráfico para visualizar melhor os valores

alterados pelo controle deslizante. Clique em  e em seguida clique sobre qualquer lugar do gráfico.

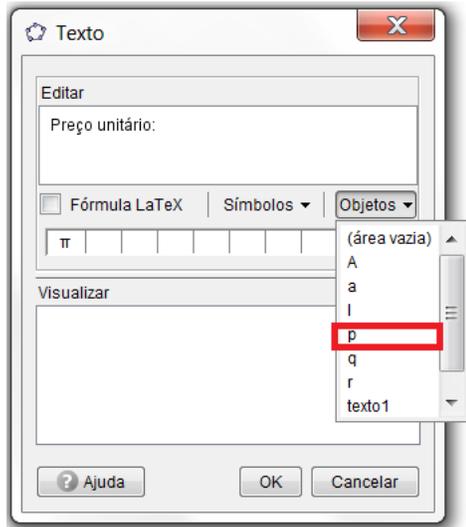
Clique com o botão direito sobre o ponto criado, escolha a aba “Básico” e na caixa definição digite: $(a, V(a))$. Feche esta janela.

- ✓ Vamos criar caixas de texto que mostrem o preço da unidade da lapiseira, o valor recebido e a quantidade de unidades vendidas de acordo com a quantidade de reduções no preço unitário. Para isso, criaremos variáveis para calcular as informações necessárias. Clique “Entrada” e digite: $r=V(a)$ e tecele *enter*. Essa variável vai armazenar o valor recebido.

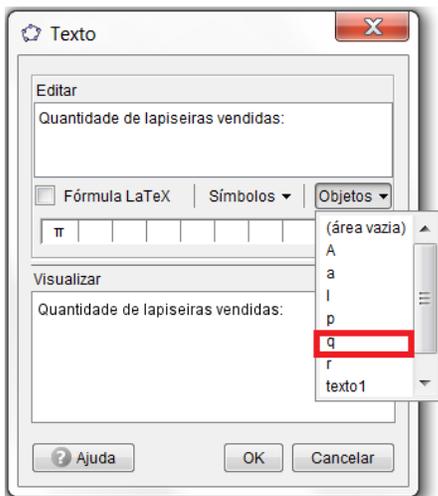
- ✓ Clique em “Entrada” e digite: $p=(1.6-a*0.01)$ e tecele *enter*. Essa variável vai armazenar o preço unitário da lapiseira.

- ✓ Clique em “Entrada” e digite: $q=(2600+20*a)$ e tecele *enter*. Essa variável vai armazenar a quantidade de lapiseiras vendidas.

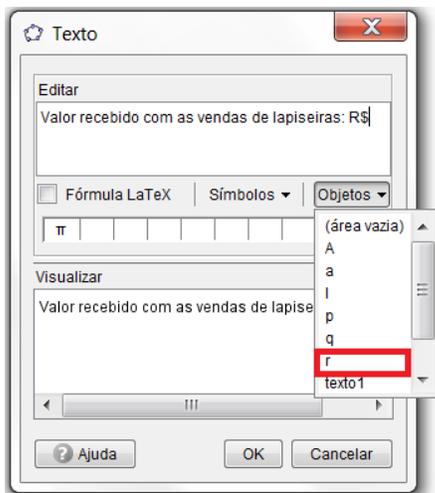
- ✓ Agora vamos exibir as informações. Clique em  e em seguida clique acima do controle deslizante que está na tela. Um cursor piscará na tela, nele digite: “Quantidade de reduções no valor unitário da lapiseira”. Clique novamente em , em seguida clique numa área em branco da tela e digite: “Preço unitário: R\$”, clique em.



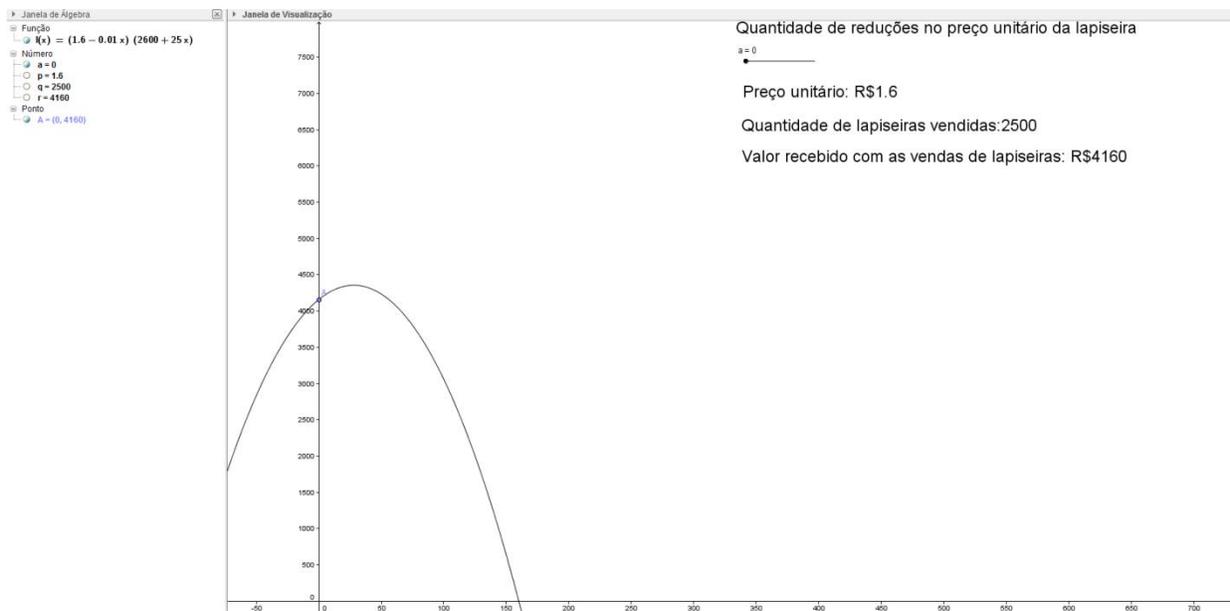
- ✓ Clique em , clique numa área em branco da tela e digite: “Quantidade de lapiseiras vendidas:”, clique em



- ✓ Clique em , clique numa área em branco da tela e digite: “Valor recebido com as vendas de lapiseiras: R\$” e em seguida clique em:



- ✓ Caso queira alterar tamanho, cores ou fonte dos textos clique com o botão direito no texto desejado e escolha a opção “Propriedades...”
- ✓ Ao final dessas etapas sua tela deverá estar parecida com esta:



- ✓ Agora vamos variar o preço da lapiseira. Clique em , depois clique no controle deslizante $a = 0$ e para aumentar ou diminuir o valor a use as teclas direita

e esquerda do teclado. Você perceberá que a medida que muda o valor de a o ponto A sobre o gráfico e as variáveis mudam.

- d) Qual é o valor ótimo para o preço unitário da lapiseira? Justifique.
- e) Qual o valor máximo recebido com a venda de lapiseiras?
- f) Quantas lapiseiras serão vendidas quando o preço unitário for o ótimo?

ANEXO A: Aspectos positivos descritos pelos alunos

A vantagem neste tipo de desenvolvimento, é principalmente o tempo de cálculo. O programa já faz as contas necessárias instantaneamente, obtendo um resultado mais preciso do que está sendo trabalhado e de todas as variáveis. Outra vantagem também é que graficamente, o resultado é mostrado de forma perfeita, sem erros. É uma ferramenta não muito difícil de usar.

É mais interessante observar valores de uma parábola no computador, pois a toda mudança no valor de a (coeficiente) já é possível obter todas as informações dos pontos ao lado do gráfico.

Usando o software Geogebra foi possível visualizar o gráfico da função dos valores referentes à vendas de lapiseiras, ~~de acordo com~~ e modificar de forma rápida qualquer um dos dados determinantes, analisando diferentes situações de modo experimental.

A principal vantagem é a praticidade, sendo que qualquer computador tem potencial para adquirir o programa, e levando em conta também que o programa é de fácil manuseio.

Este tipo de atividade chama a atenção do aluno mais do que quando o método tradicional é usado, e desta forma o aluno demonstra mais interesse pelas conteúdos da matemática.

Quanto à formação do aluno, é muito importante que haja tal conhecimento para possíveis aplicações futuras no campo da tecnologia e no uso de softwares.

A inclusão ~~social~~ digital que acaba acontecendo no decorrer da atividade, onde os alunos desenvolvem a habilidade de manusear um software que resolve problemas matemáticos com perfeição e dinamismo.

ANEXO B: Aspectos negativos destacados pelos alunos

A única desvantagem encontrada foi a dificuldade, de quem nunca havia utilizado, de manusear o programa utilizado, Geogebra.

Uma possível desvantagem é não haver um certo entendimento da atividade por parte do aluno; foi que não existe tanto costume em relação a atividades assim.

Apesar de não ser uma ferramenta difícil de usar, é necessário um conhecimento prévio, um conhecimento básico para mexer com as variáveis do problema matemático. Para isso, utilizamos um tutorial, que mostrava de forma simples como utilizá-lo, e eficiente. Apesar de ter sido um bom tutorial e de ter atingido o objetivo (que é a construção do gráfico com as variáveis), logo no começo há um duplo sentido de qual é a "janela de visualização". De forma geral, a desvantagem é como saber usar, precisaria necessariamente de um tutorial.

Falta de alguns detalhes para o aluno individualmente realizar a tarefa caso tenha dificuldades com a tecnologia, o que torna a presença do professor muito necessária para vários alunos do mesmo tempo.

Uma desvantagem, ou algo que poderia ter sido tratado antes, foi que poderia ter sido apresentado o programa Geogebra, antes para os alunos, mostrando como ele funciona e quais as suas ferramentas e utilidades. Assim, no momento em que nós alunos fossemos realizar as atividades nós já teríamos uma base melhor sobre como e o que fazer.

Apesar de proporcionar a visualização o processo é regido por regras e passos a serem seguidos fazendo com que não haja um certo "desenvolvimento mental" visto que as etapas já estão dadas, não precisa pensar qual seria o próximo passo, caracterizando-se desvantagem.

No desenvolvimento da atividade as ações foram um tanto mecânicas, sem muito entendimento sobre o processo, apesar de ser possível chegar corretamente e com certeza às respostas finais. Houve também uma sensação de dependência da tecnologia, o que é menos confortável do que quando se consegue fazer a atividade no papel. Além disso, no papel conseguimos associar os conhecimentos que estamos colocando em prática (~~com~~ coordenada do vértice, por exemplo), o que não ficou tão claro no uso do software.

ANEXO C: Conclusões dos alunos

a tecnologia pode ser um ótimo auxiliar no entendimento e aprendizagem; pois além de despertar curiosidade e maior interesse no aluno, amplia conhecimentos.

pois é também importante a formação tradicional para o aluno.

O ideal seria uma parceria dos dois métodos no currículo escolar, sem que um anule o outro.

na minha opinião a tecnologia pode auxiliar no desenvolvimento das conteúdos, porém o que dificulta esse é que nem todos tem acessibilidade a essas tecnologias.

Pode, desde que todos possam ter acesso a tecnologia e que o conteúdo seja entendido com maior facilidade. Caso contrário o desenvolvimento tradicional (giz e lousa), ainda funcionam muito bem.

como auxiliar, pois ilustra o aprendizado e facilita a compreensão do aluno, que pode ter com facilidade as peças matemática e interagir com a questão, além de facilitar a absorção do conhecimento.

A lousa é um método de interação com o aluno que não está mecanizado e que é flexível, (mais que o trabalhado), além de ser o método que ensina, é o que faz o aluno aprender muito mais fácil, pois nele que se resolve os exercícios.