UNICAMP

Paulo Henrique Correia Araújo da Cruz

Funções no 1º Ano do Ensino Médio

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

PAULO HENRIQUE CORREIA ARAÚJO DA CRUZ

FUNÇÕES NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Anamaria Gomide

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO PAULO HENRIQUE CORREIA ARAÚJO DA CRUZ, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANAMARIA GOMIDE.

Assinatura da Orientadora

Anamaria Gomide

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C889f Cruz, Paulo Henrique Correia Araújo da, 1983-
Funções no 1º ano do ensino médio / Paulo Henrique Correia Araújo da Cruz. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Anamaria Gomide.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matemática (Ensino médio). 2. Funções (Matemática) - Problemas, exercícios, etc. 3. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. I. Gomide, Anamaria,1944-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Functions in the 1st year of high school
Palavras-chave em inglês:
Mathematics (High school)
Functions - Problems, exercises, etc
Functions - Study and teaching
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Anamaria Gomide [Orientador]
Antônio Carlos do Patrocinio
Raquel Normandia Moreira Brumatti
Data de defesa: 16-01-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 16 de janeiro de 2015 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Anamaria Gomide

Prof.(a). Dr(a). ANAMARIA GOMIDE

APatrocinio

Prof.(a). Dr(a). ANTÔNIO CARLOS DO PATROCINIO

Raquel N M Brumatti

Prof.(a). Dr(a). RAQUEL NORMANDIA MOREIRA BRUMATTI

Abstract

Make the teaching of significant Mathematical content for High School students is one of the challenges that the current Brazilian teachers have faced during their classes. Therefore, considering that Mathematics is a science of observation and abstraction and the real functions are part of the Mathematics curriculum of the 1st year of High School, we propose as a teaching methodology addressing the major real functions - linear, quadratic, exponential, logarithmic - and their graphical representations from everyday problem situations. Later determining which expression suits the situation, we discuss the main features of this function and how they relate to the described daily. In addition, we present some exercises, unpublished and university selection processes that both exemplify the kind of question can be used as evaluation, as demonstrated alignment of this method with the National Secondary Education Examination (Enem), the main assessment of the federal government this segment of basic education. Finally, we discuss an important real function present in the Biological Sciences, the logistic equation. After recall occurred historically as its conceptualization apply the proposed methodology showing the expression from problem situations. This done, we analyze the possible graphical variations and what each means from a practical point of view.

Keywords: High School, function, aplication.

Resumo

Tornar o ensino dos conteúdos de matemática significativo para os alunos do Ensino Médio é um dos desafios que os atuais professores brasileiros tem enfrentado durante suas aulas. Diante disso, considerando que a matemática é uma ciência de observação e abstração e que as funções reais fazem parte do currículo de matemática do 1º ano do Ensino Médio, propomos como metodologia de ensino a abordagem das principais funções reais – afim, quadrática, exponencial, logarítmica – e suas respectivas representações gráficas a partir de situações-problema do cotidiano. Posteriormente a identificação de qual expressão se adequa à situação, discutimos as principais características dessa função e como elas se relacionam com o cotidiano descrito. Além disso, apresentamos alguns exercícios inéditos e de processos de seleção universitária, que tanto exemplificam qual tipo de questão pode ser usada como avaliação, como demonstram o alinhamento deste método com o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), principal avaliação do governo federal deste segmento da educação básica. Por fim, discutimos uma importante função real presente nas ciências biológicas, a equação logística. Após relembrar historicamente como ocorreu sua conceituação aplicamos a metodologia proposta apresentando a expressão a partir de situações-problema. Feito isto, analisamos as possíveis variações gráficas e o que cada um significa do ponto de vista prático.

Palavras-chave: Ensino Médio, função, aplicação.

Sumário

"Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente."
Roger Von Oech

"Não há nenhum ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa vir a ser aplicado, mais cedo ou mais tarde, aos fenômenos do mundo real"
Nikolai Ivanovich Lobachevsky

Á minha amada esposa, que de forma compreensiva e paciente entendeu os intensos e solitários momentos de estudo.

Agradecimentos

De forma indisível, sou grato a Deus que graciosamente me concedeu esta oportunidade de aprender, suprindo todas as necessidades.

Agradeço grandemente à minha família pela formação integral de quem sou hoje. Especialmente aos meus pais que nunca mediram esforços para que a educação tivesse sempre prioridade.

Obrigado professores, colegas e alunos que, no convívio ao longo de toda minha jornada acadêmica, compartilharam conhecimento e experiências de vida que certamente contribuíram na temática deste trabalho. De forma especial agradeço a minha orientadora, Profª Drª Anamaria Gomide, que atenciosamente colaborou para que ideias e intenções se concretizassem no presente trabalho.

Sou grato também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Pesquisa (CNPq) pelo apoio financeiro, imprescíndivel para a realização deste curso.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Introdução

Nos dias atuais provavelmente a maioria os professores de matemática, se não todos, durante uma aula no Ensino Básico, já foram inquiridos sobre quem descobriu ou como foi determinado o assunto matemático abordado em sala de aula.

Tal questionamento evidencia a atual preocupação que o professor de matemática precisa ter. Além de dominar o conteúdo matemático deve, na medida do possível, conhecer como este conhecimento se desenvolveu e como ele se aplica na realidade contemporânea. Conforme preceitua os Planos Curriculares Nacionais (PCN), dentre as diversas habilidades e competências a serem desenvolvidas nos alunos, as aulas de matemática devem permitir:

- Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio.
- Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolveram por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

Nesta perspectiva e diante do atual quadro curricular de matemática do Ensino Médio, o presente trabalho tem por finalidade conceituar as principais funções reais vistas no 1º ano por meio de algumas situações-problema. Porém considerando que, segundo Caraça [7], o pensamento científico que visa compreender e modelar o mundo natural e as relações sociais em forma de expressões, definições e conceitos altera-se à medida que os instrumentos de observação se aperfeiçoam, e relacionam, mais e melhor, os elementos que compõem a realidade, apresentaremos no capítulo 1 , como os fundamentos necessários ao conceito de função foram desenvolvidos ao longo da história.

Após isso, no capítulo 2, com o objetivo de explanar de forma simplificada o que é uma função real e como se faz sua representação gráfica, discutimos as características dos principais tipos.

A partir desta revisão teórica, os capítulos 3 e 4 propõem, a partir de situações cotidianas, o estudo das principais características das funções afim e quadrática. Para tal, analisamos como a relação entre a expressão matemática e a representação gráfica podem fornecer importantes informações sobre as situações propostas.

Em continuidade o capítulo 5 estuda a função exponencial a partir de algumas situações-problema cujo modelo polinomial se apresenta inadequado à modelagem da relação funcional das grandezas envolvidas. Porém, considerando que a inversa de uma expressão exponencial é uma expressão logarítmica, encerramos este capítulo indicando que o estudo deste tipo de função só estaria completo se analisássemos também a sua inversa, a função logarítmica.

Diante dessa proposta, o capítulo 6 estuda a função logarítmica a partir de algumas situações propostas no capítulo anterior. Tão logo as principais características são enunciadas e analisadas, aplicamos o conhecimento adquirido em três situações cotidianas. As duas primeiras se referem a modelos baseados em escalas logarítmicas, a saber, o nível de intensidade sonora e a escala de magnitude local de um terremoto. A terceira situação se refere ao modelo exponencial como forma de estudo de dinâmicas populacionais, o que permite resgatar a importante relação de inversão entre as expressões exponenciais e logarítmicas.

Tal atividade servirá para discutirmos no capítulo 7, uma importante expressão, a equação logística. Embora não faça parte do currículo de matemática, o aluno do 1º ano do Ensino Médio utiliza, na disciplina de biologia, sua representação gráfica para analisar a dinâmica populacional de diversas espécies.

Por fim destacamos que ao fim de dos capítulos 3 a 7 apresentamos alguns exercícios inéditos e outros de processos de seleção universitária que exemplificam como utilizar situações cotidianas para avaliar o conhecimento matemático e a capacidade dedutiva do aluno.

Capítulo 1

O conceito de Função ao longo da história

Segundo Caraça [7], o pensamento científico que visa compreender e modelar o mundo natural e as relações sociais em forma de expressões, definições e conceitos, se altera à medida que os instrumentos de observação se aperfeiçoam, e relacionam, mais e melhor, os elementos que compõem a realidade.

Neste sentido, antes de apresentar a definição de função utilizada no Ensino Médio veremos a seguir uma breve exposição da evolução do pensamento necessário para tal. Dividiremos este período em três significativas etapas: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno.

1.1 A Antiguidade

Considere a relação um-a-um. Provavelmente ela tenha sido uma das primeiras noções matemáticas desenvolvidas pela humanidade. Embora não se pretenda afirmar que existia uma consciência funcional, ao supor função simplesmente como uma forma de relacionar quantidades, é possível afirmar que o homem antigo a executou muito bem quando biunivocamente relacionou cada objeto contado a uma pedra guardada em um saco, ou um corte em um pedaço de madeira ou osso.

De forma mais consistente, apresentamos a seguir três culturas cujo conhecimento matemático produzido permitiram o desenvolvimento do conceito de função.

1.1.1 Babilônios

Entende-se por babilônios os povos que habitaram a região dos vales entre os rios Tigres e Eufrates de 2000 a.C. e 600 a.C., no que atualmente compreende o território do Iraque e algumas partes do Irã, Síria e Turquia.

O destaque que se dá a este povo se deve pelos primeiros registros de uma linguagem própria de quantidades e grandezas num sistema de escrita simbólico em tabuletas de argila: a escrita cuneiforme.

Dentre outros registros, podemos citar as relações entre uma sequencia de números e suas potências – ou raízes –, algo que lembra tabelas de logaritmos. Tais registros teriam muita aplicação nos cálculos envolvendo taxas de juros para períodos variados.

Outro exemplo interessante é o modo de calcular a medida da área de um quadrado. Ao estabelecer uma sequência de valores de um lado da tabela e do outro lado a potência quadrada de cada um desses valores, o observador desta tabela podia relacionar para cada lado l uma medida de área l^2. De modo que a lei de associação:

$$A(l) = l^2$$

como também a relação inversa

$$l = \sqrt{A}$$

estavam subtendidas. Assim, chamando de pseudoconceito de função a ideia mais simples e genérica de uma relação entre números ou grandezas, podemos dizer que ela se faz presente nesta cultura a medida que cada tabuleta era o registro escrito de uma lei de associação de elementos de conjuntos distintos conforme aponta Eves [10]:

> "Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrado, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)." (p. 61, 62)

1.1.2 Egípcios

Desenvolvedora da escrita hieróglifa cujo registro era feito nos famosos papiros (tramas prensadas de finas tiras produzidas a partir do caule da planta de mesmo nome), essa cultura possuía um sistema de numeração – decimal, mas não posicional – próprio.

Neste sentido, destacamos o Papiro de Rhind (ou de Ahmes), um rolo de 6m de comprimento e 33cm de largura, cujo título *"Instruções para conhecer todas as coisas secretas"* insinua o caráter algébrico dos problemas e métodos de solução ali apresentados. Ao longo dos seus 84 problemas cotidianos obtêm-se informações sobre aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares e trigonometria básica.

Especificamente sobre o pseudoconceito de função, percebe-se na álgebra egípcia que nos procedimentos utilizados na solução de problemas, a estrutura base é a ideia de relação entre grandezas distintas. Isto se observa, por exemplo, no problema 41, que pede o calculo do volume (V) de um silo cilíndrico de diâmetro (r) e altura (h) conhecidos, e resolve a situação com a narrativa da seguinte expressão:

$$V = \left(\frac{16}{9}r\right)^2 \cdot h.$$

Comparando-a com a expressão que usamos hoje, obtemos um valor aproximado de $\pi = 256/81$ ou 3,16.

1.1.3 Gregos

A última civilização antiga que se destaca na presença de um pseudoconceito de função é a grega, tendo em vista a mudança sofrida pela forma de se pensar matemática.

Deixando de ter apenas uma conotação prática, conforme Botelho e Rezende [4], o pensamento grego introduziu a necessidade de demonstrações por meio de argumentação racional que validassem os resultados. Indo além do que era mensurável, produziu uma matemática mais abstrata.

O primeiro destaque se dá com Tales de Mileto que uniu o estudo da astronomia ao da geometria e ao da teoria dos números. Embora o expoente do pensamento abstrato e dedutivo desta época seja o matemático Euclides, entre os dois, segundo Roque e Pitombeira [21], evidencia-se a matemática pitagórica.

Conhecida por se dedicar ao estudo da aritmética, música, geometria e astronomia, falando especificamente do pseudoconceito de função, a contribuição da Escola Pitagórica, de acordo com Barallobres [2], foi tal que

> "... as tentativas atribuídas aos primeiros pitagóricos para determinar as leis mais simples da acústica são típicas da busca de interdependência quantitativa de diversas quantidades físicas, como por exemplo, a longitude e a altura de uma nota emitida por cordas da mesma espécie." (p.4)

Neste sentido, podemos observar avanços e impedimentos no desenvolvimento para o conceito de função. Avanços no entendimento das dependências funcionais, onde os astrônomos, por meio de teoremas geométricos e regras de interpolação, desenvolveram uma trigonometria baseada em cordas. Por exemplo, o Almagesto de Ptolomeu que possui, dentre outros, tabelas astronômicas equivalentes a funções racionais e irracionais.

Já os impedimentos, conforme De Cotret [9], ocorrem devido o uso massivo de razões e proporções. Por exemplo, ao comparar a área de dois triângulos equiláteros é possível perceber que a proporção enter as áreas é igual ao quadrado da proporção entre os respectivos lados, entretanto não se consegue perceber o vínculo existente entre a área do triângulo equilátero e a medida do seu lado, pois não se compara área com segmento. Ou seja, fica difícil perceber a relação entre coisas diferentes (área : lado), pois em proporção os elementos comparados são da mesma natureza (área : área, lado : lado).

Por fim, destacamos a Escola de Eleia fundada pelo filósofo Parmênides, que segundo Mol [17] foi o primeiro a distinguir rigorosamente o que é sensível e o que é inteligível. Isto permitiu, juntamente com o descobrimento das razões incomensuráveis, a discussão da problemática relação entre discreto e contínuo. Como exemplo disso, temos os paradoxos que retratam a oposição entre as noções do infinito e contínuo com o finito e discreto.

Conforme De Cotret [9] descreve, ao considerar que as primeiras definições formais de função se deram no campo das variáveis dependentes, pode-se concluir que o pensamento matemático da antiguidade ficou restrito ao pseudoconceito.

1.2 A Idade Média

Considerando o período que se inicia em 476 d.C. com a queda do Império Romano e se finda em 1453 d.C. com o fim do Império Bizantino, a chamada Idade Média não apresentou quase nenhum avanço em termos conceituais para a definição de função, exceto por dois casos.

O primeiro foi o trabalho de análise de movimento acelerado no séc. XI do árabe Al-Biruni, retomado no século XIV, nas Universidades de Oxford e Paris. Segundo Youschkevitch [26], tal retomada, ao comparar movimentos uniformes e movimentos uniformemente acelerados, produziu, em 1330, o Teorema de Mertón, conforme segue:

> "Se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, a distância percorrida será a mesma que a percorrida no mesmo tempo com movimento uniforme e a uma velocidade igual a da metade do tempo (velocidade média entre as velocidades inicial e final do recorrido)". (Barallobres [2], p.16)

Embora este conceito esteja mais próximo do que entendemos por função, cada situação de dependência entre quantidades era feita através de uma descrição verbal ou gráfica.

A segunda exceção se dá exatamente no conhecimento gráfico da relação de dependência entre quantidades. Sobre isso destacamos o tratado intitulado “As configurações das qualidades dos movimentos” (em latim, *De configurationibus qualitatum et motuum*) do bispo francês Nicole d’Oresme (1323-1382). Segundo De Cotret [9], ao tratar de um método para representar a intensidade da velocidade (qualidade) em função do tempo (objeto) ele chamou os segmentos perpendiculares que representavam a qualidade e o objeto, respectivamente, de latitude e longitude. A qualidade (intensidade da velocidade) variava em diferentes pontos (tempo) distribuídos ao longo da longitude. O conjunto obtido fornecia o total da distribuição da intensidade. Isto permitiu que Oresme classificasse o que hoje chamamos de movimento uniformemente variado em três categorias, conforme figura 1.1:

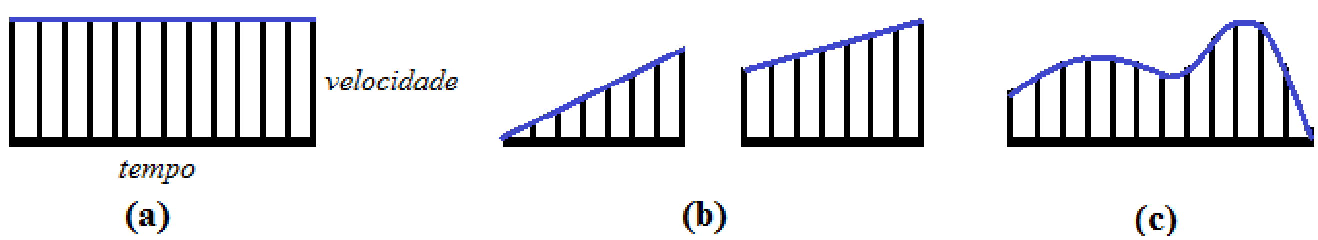


Figura 1.1: Exemplos dos tipos de movimento descritos por Oresme: (a) Uniformemente uniforme; (b) Uniformemente disforme; (c) Irregularmente disforme.

- Uniformemente uniforme: para velocidade constante ao unir as extremidades das latitudes forma-se um retângulo na imagem;
- Uniformemente disforme: para velocidades com aceleração constante ao unir as extremidades das latitudes forma-se um triângulo ou trapézio na imagem;

- Irregularmente disforme: para velocidades com aceleração variável ao unir as extremidades das latitudes forma-se uma linha curva na imagem.

De Cotret [9] destaca que embora Oresme tenha avançado no conceito que hoje entendemos como função e variável dependente, não se pode afirmar que ele tenha definido tais conceitos, pois sua preocupação não era o modo como a qualidade (velocidade) variava em função do objeto (tempo). Seu objetivo era analisar a qualidade como um todo, ou seja, o movimento.

1.3 O Período Moderno

Conforme relata Mol [17] o período que segue imediatamente após o vivido por Nicole d'Oresme na Europa foi desfavorável à produção de conhecimento. Além da Guerra dos Cem Anos (1337-1453) – entre França e Inglaterra – houve a Grande Peste (1348-1352) que dizimou entre 30% e 50% da população europeia. O recomeço da produção científica ocorreu somente a partir do século XVI com o Renascimento.

Especificamente falando do conceito de função, Botelho e Rezende [4] comentam que foi por meio do trabalho de Galileu Galilei (1564-1642) que novos horizontes foram vistos. Em sua obra "As duas novas ciências", percebe-se no enunciado da lei da queda dos corpos no vácuo – o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço – que a primeira evidência de uma função foi estabelecida, bastando apenas a consolidação de uma linguagem algébrica simbólica própria.

Neste caminho, além do grande trabalho desenvolvido pela álgebra árabe e indiana Mol [17] destaca o matemático francês François Viète (1540-1603) que além de estabelecer uma regra para representação das variáveis e das constantes de uma expressão, introduziu a ideia do estudo de tipos gerais de equações e expressões, facilitando a análise da estrutura que modelava matematicamente uma situação problema.

Ainda sobre Galileu, De Cotret [9] afirma que a grande contribuição deste cientista natural, para o conceito de função, foi relacionar os resultados com as causas por meio de experiências práticas. Destaca-se, no entanto, que a oferta de instrumentos de medição disponíveis para Galileu era muito maior do que para Oresme, o que permitiu a inclusão do quantitativo onde, antes, só se tinha o qualitativo. Logo, causa e efeito são expressos e verificados quantitativamente, ou seja, subjetivamente se vincula funcionalmente causas e efeitos, projetando o que posteriormente seria definido como variável dependente.

Sobre isto merece destaque o trabalho realizado pelo matemático francês René Descartes (1596-1650) que fundou os pilares do que hoje conhecemos como geometria analítica. Na publicação do seu principal trabalho filosófico, o Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências de 1637, o apêndice intitulado *La Géometrie* (A Geometria) apresentava uma álgebra que era utilizada para resolução de problemas geométricos. Segundo Mol [17], Descartes buscava a tradução das operações aritméticas para a linguagem geométrica, de modo que a geometria não dependeria mais de diagramas e as operações algébricas teriam uma interpretação geométrica. Desta forma, as quantidades variáveis x^2 e x^3 não só representam medidas de área de quadrados e volume de cubos como também relacionam tais medidas com o comprimento dos lados das figuras geométricas.

Além disso, o procedimento gráfico usado por Descartes, semelhante ao feito por Oresme, consistia de uma variável independente x e uma variável dependente y. Conforme se vê na figura 1.2, ao escolher um ponto conveniente e traçar uma semirreta horizontal de referência orientada para a direita, marca-se a variável independente sobre ela, a partir do ponto de partida do eixo horizontal e na extremidade final dela colocava-se um segmento representando a variável dependente de acordo com um ângulo fixo e conveniente (não necessariamente reto), com o eixo horizontal.

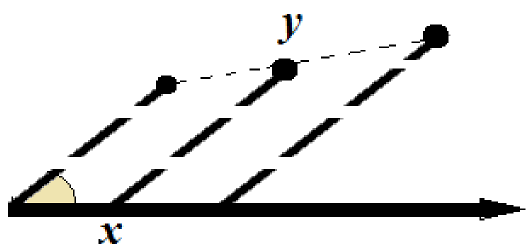


Figura 1.2: Exemplo de representação gráfica de descrita por Descartes.

Assim, conforme comenta De Cotret [9], as principais etapas para o desenvolvimento do conceito de função foram dados, pois todos os elementos essenciais para a primeira definição formal de função como relação de dependência entre duas variáveis estão presentes.

Paralelamente ao trabalho realizado por Descartes, Berlinghoff e Gouvêa [3] relatam que o matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) também desenvolveu os fundamentos da geometria analítica por volta de 1630, o que não se pode afirmar categoricamente por que Fermat não publicava seus trabalhos, apenas se comunicava por carta com alguns importantes matemáticos.

Sua motivação foram os problemas de Lugares Geométricos tratados anteriormente por Apolônio (262 a.C. - 194 a.C.). Para tanto, criou um sistema de coordenadas, semelhante ao descrito acima, para traçar a relação entre duas quantidades desconhecidas (variáveis) interligadas (dependentes). Ao estudar as curvas de lugares geométricos, Fermat utilizou um sistema de coordenas de variáveis dependentes em uma equação no que chamamos hoje de expressão algébrica de uma função.

Em outras palavras o ganho alcançado deste período para o anterior, e até mesmo para a filosofia grega da antiguidade, foi direcionar o foco mais na quantidade do que na qualidade, pois conforme Caraça [7] explica, o entendimento dos fenômenos resulta do processo de medir, quantificar, estabelecer variáveis e relacioná-las.

1.4 Período Contemporâneo

Sobre este período Youschkevitch [26] relata que o método analítico de introduzir funções revolucionou a matemática e, por sua grande eficiência, teve grande uso em todas as ciências exatas. A definição mais explicita no século XVII do que chamamos hoje de função foi a do matemático inglês James Gregory (1638-1675) em *"Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura"* (Verdadeira Quadratura do Círculo e da Hipérbole) que a conceituou como *"uma quantidade obtida de outras quantidades* *pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável"* (Youschkevitch [26], p.58).

Perceba que nesta definição já é possível notar a ideia de uma relação de dependência entre valores que pode ser escrita por uma expressão com operações algébricas. Além disso, quando é dito *"qualquer outra operação imaginável"* já havia a noção de que as operações algébricas existentes até o momento poderiam não anteder plenamente ao que se estava conceituando.

1.4.1 Contribuições do Calculo Infinitesimal

Conforme Roque e Pitombeira [21] comentam, Newton e Leibniz imaginavam variáveis definidas sobre curvas, uma vez que o objetivo do século XVII era desenvolver métodos de resolução de problemas sobre curvas geométricas, tais como encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva. Assim, a questão a ser desenvolvida consistia na compreensão da relação entre quantidade, o que contribuiu para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades, fundamentando o atual noção de função estudada principalmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial.

Ao dizer a frase *"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."* o matemático e físico inglês Isaac Newton (1643-1727) estava se referindo aos grandes matemáticos – dentre eles Descartes, Fermat, Wallis e Barrow – que propiciaram uma base teórica sustentável para que em 1671 ele pudesse escrever o *"Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum"* (Método das Fluxões e das Séries Infinitas) que só seria publicado em 1736. Assim, estavam lançados os fundamentos do que viria a ser denominado posteriormente de calculo infinitesimal.

De acordo com Youschkevitch [26], Newton ampliou com o método das fluxões o método dos infinitesimais de Barrow atribuindo às quantidades matemáticas o caráter de contínuas, como se fossem um corpo em movimento no espaço.

Segundo Mol [17], a velocidade deste corpo chamada de fluxões e as quantidades variáveis do tempo chamadas de fluentes eram tais que o problema fundamental (do atual calculo) seria: em posse da relação das quantidades fluentes (atuais primitivas) encontrar a relação com suas fluxões (atuais derivadas), e vice-versa.

Mas Newton não foi o único a se jogar nesta jornada. Após contato com as matemáticas de Blaise Pascal, em Paris, e de Barrow, em Londres, durante viagens diplomáticas, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) desenvolveu teoria análoga a de Newton, porém com uma vantagem em relação a Newton a linguagem simbólica que ele utilizou foi tão precisa e prática que permaneceu até hoje. Dente elas, no *Calculus Integralis* (ou *Summatorius*) utilizou a notação $\int$ para o somatório dos elementos diferenciais dy ou dx, do *Calculus Differentiallis*, que representam a diferença infinitesimal entre valores de y e de x, respectivamente.

Diferentemente de Newton que publicou o seu trabalho completo próximo de sua morte, Roque e Pitombeira [21] relatam que Leibniz expôs seu método algébrico para manipulação de figuras geométricas em vários artigos a partir de 1684 no periódico científico da época *"Acta Eruditorum"*, sendo o principal deles o que ele introduz um novo método para encontrar máximos e mínimos, utilizando o cálculo de tangentes por meio do triângulo característico (de Pascal).

Observe a figura 1.3. O *calculus diferentialis*, segundo Leibniz, consistia de um triângulo MNR cujas quantidades infinitamente pequenas MR e NR, são tais que as representando por dx e dy

respectivamente, tem-se a razão:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{NR}{MR}$$

que pode ser comparada com a razão entre a ordenada y de valor igual a MP e o cateto TP, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{TP}$$

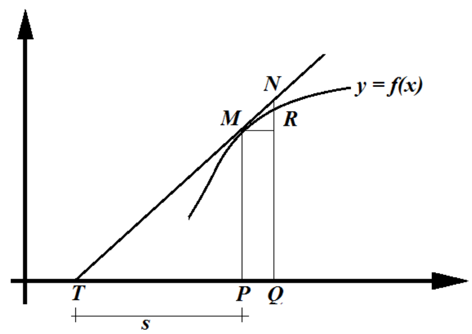


Figura 1.3: Exemplo de representação gráfica do *calculus diferentialis* de Leibniz.

Perceba que na prática, conforme observam Roque e Pitombeira [21], Leibniz opera somente com relações diferenciais, já que $\frac{dy}{dx}$ não é um infinitesimal e sim uma operação de diferenciação.

Youschkevitch [26] comenta que foi neste contexto que Leibniz utilizou pela primeira vez a palavra função em agosto de 1673, mas somente entre 1692 e 1694 que o termo função agrega-se às retas que se relacionam com uma curva, sendo tangente, normal ou subtangente.

Sobre isto Roque e Pitombeira [21] acrescentam que o maior ganho do cálculo leinbniziano se encontra na diferenciabilidade, ou seja, na ideia de diferencia em relação a uma variável escolhida, pois pressupõem a noção de quantidades variáveis dependentes e independentes, antes da formalização do conceito de função.

1.4.2 A desvinculação da geometria

De acordo com Kleiner [15] o avanço do conceito de função após os trabalhos de Newton e Leibniz ocorre devido à ênfase que começou a ser dada nas fórmulas e equações relativas às expressões de funções associadas a uma curva, o que direcionou o foco no significado dos símbolos ali presentes. Em outras palavras, o olhar estava direcionado para as relações entre estes símbolos, independente da curva original que eles representavam.

Neste contexto, após trocar correspondências com Leibniz, entre 1694 e 1698, que dentre outros assuntos, discutia-se a falta de um termo geral para representar quantidades dependentes de outras quantidades em fórmulas e equações, coube ao matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748) dar a primeira definição de função, que segundo Youschkevitch [26], ocorreu na publicação em 1718 – pela Academia de Ciências de Paris – do artigo intitulado *"Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici d solutions des problèmes sur les isopérimétres"* com as seguintes palavras:

> "Chamamos função de uma grandeza variável as quantidades compostas, de um modo qualquer, dessa grandeza variável e de constantes" (traduação livre).

Não houve explicação o que seria *"composta por qualquer forma"*. Comentando este fato, Botelho e Rezende [4] esclarecem que para Bernoulli, a função poderia ser representada por uma única expressão analítica, ou seja, por definição, seria uma combinação de símbolos algébricos.

Ressalta-se que, segundo Youschkevitch [26], um pouco antes ou simultaneamente, Leibniz já havia introduzido no uso geral as palavras constante, variável, coordenadas e parâmetros para designar segmentos constantes ou quantidades arbitrários. Além disso, dividiu as funções em duas categorias. As algébricas, que podiam ser representadas por expressões algébricas de um determinado grau, e as transcendentais, que são representadas por expressões trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais, entre outras.

Ainda sobre o trabalho, quase em conjunto, realizado por Bernoulli e Leibniz, destaca-se a proposta de uso da letra grega ϕ como notação da característica de uma função acompanhada do argumento x sem parênteses – ϕx.

Dando continuidade ao trabalho de Bernoulli, Fonseca [12] relata que seu aluno, e descendente intelectual, Leonhard Euler (1707-1783) contribuiu imensamente para o desenvolvimento do conceito de função. Além disso, Euler propôs o uso dos seguintes símbolos:

- f como notação da característica de uma função acompanhada do argumento x entre parênteses – $f(x)$;
- e como base dos logaritmos naturais;
- a, b, c para os lados de um triângulo ABC;
- $\sum$ para somatórios;
- i para a unidade imaginaria $\sqrt{-1}$.

Além disso, no trabalho intitulado *Introductio in analysin infinitorum* (Uma Introdução para a analise do infinito), de 1748, Euler define constante como uma determinada quantidade que sempre assume um, e mesmo, valor, enquanto que uma variável é uma quantidade indeterminada ou universal que compreende em si valores determinados que podem ser números positivos, negativos, inteiros e fracionários, irracionais, zero e até imaginários (Youschkevitch [26], p.61).

Com base nisso Barallobres [2] fornece a primeira definição de função dada por Euler, no trabalho citado acima:

> "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira que seja por quantidades ou números variáveis e quantidades constantes". (p.37)

Ressalta-se ainda que para Euler *"expressão analítica"* engloba as quatro operações algébricas, raízes, exponenciais, logaritmos, expressões trigonométricas, polinômios, séries de potências, derivadas e integrais.

Complementando esta noção Kleiner [15] afirma que Euler classificava funções como algébricas ou transcendentais, uniformes (que possuem uma só imagem) ou multiformes (que possuem mais de uma imagem para o mesmo valor da variável independente), e implícitas ou explicitas.

Comentando as definições apresentadas aqui de Jean Bernoulli e Euler, Costa [8] ressalta que em todas elas a função só pode fazer uso de uma equação ou uma expressão analítica. Fato este que será alterado alguns anos depois.

A principal motivação para a redefinição de função, inclusive por Euler, se dá pela discussão do problema das cordas vibrantes, envolvendo principalmente o holandês Daniel Bernoulli (1700-1782), o francês Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) e o italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Este problema consistia de determinar a função que estabelecia num instante t qualquer a forma de uma corda elástica com extremidades 0 e l, que após uma determinada deformação começa a vibrar.

Com isso Euler apresenta uma nova definição de função no prefácio de sua obra *Institutiones calculi differentialis*, em 1755, sem se basear nas "expressões analíticas" conforme transcreve Youschkevitch [26]:

> "Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x."

Ainda neste contexto, Silva e Rezende [22] destacam que Lagrange também apresentou uma definição, sendo função:

> "...de uma ou várias quantidades alguma expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de alguma maneira envolvida ou não com outras quantidades as quais são consideradas como dadas e com valores invariáveis enquanto as quantidades de função podem assumir todos os valores possíveis. Entretanto, em funções consideram-se apenas quantidades que são supostas serem variáveis sem considerar as constantes com as quais podem estar envolvidas".

Tais definições permitiram ampliar o conceito de função incluindo tanto àquelas desenhadas à mão livre que provavelmente não possuíam expressão algébrica quanto as que poderiam ser feitas por partes, utilizando expressões analíticas que podem ser distintas em intervalos distintos, como é o caso da função cuja expressão é:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x, & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Estas novas definições permitiram que o conceito de função se amplificasse não só pelo uso de qualquer expressão algébrica, mas também pelo uso de mais de uma expressão distinta. Esta gama enorme de possibilidades de expressões que podem determinar uma função fez com que surgisse cada vez mais tentativas de enumerar e delimitar a variabilidade de funções.

Neste sentido, Barallobres [2] ressalta que a utilização do adjetivo analítica para o substantivo função se deve ao matemático francês M. Condorcet ao querer designar as funções consideradas na análise matemática.

Seguindo esta ideia o matemático francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843) em seu livro *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, de 1797, chama de função a toda quantidade que depende de outras quantidades, mesmo sem conhecer as operações que permitem obter uma da outra (Roque e Pitombeira [21]).

Comentando os avanços conceituais deste período, Barallobres [2] relata que por meio dos trabalhos de Euler e D'Alembert, o século XIX verá uma teoria geral para as funções analíticas destacando-se, dentre outros, o alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e os franceses François Marie Charles Fourier (1772-1837) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

1.4.3 Uma relação entre variáveis

Como pode ser percebido na definição de Lacroix dada anteriormente, a relação entre quantidades avança para uma compreensão de dependência entre variáveis. Esta visão é acompanhada por um processo de entendimento da Matemática como uma disciplina independente adquirindo cada vez mais um caráter abstrato abandonando os problemas da Física e se dedicando ao formalismo dos conceitos matemáticos.

Uma das primeiras mudanças na definição de função como expressão analítica, segundo Roque e Pitombeira [21], ocorre na discussão que Fourier estabeleceu sobre as séries trigonométricas, que em meio a desconfianças, ganhou destaque durante o século XIX.

Embora os matemáticos do século XVIII já utilizassem as séries trigonométricas para a discussão de fenômenos astronômicos, Youschkevitch [26] comenta que foi Fourier com seu trabalho intitulado *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do Calor), de 1822, que provocou uma revisão no conceito de função ao supor que uma série trigonométrica poderia ser utilizada para representar qualquer função, embora não tivesse oferecido nenhuma análise satisfatória do problema.

Fonseca [12], analisando o fato afirma que embora a ideia fosse um pouco exagerada, a ideia dada contribuiu para o desenvolvimento de estudos em diversos campos da Física (acústica, óptica, termodinâmica) e na resolução de equações diferenciais.

Segundo Costa [8] Fourier estabelece em 1822 a seguinte definição de função:

> "Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais arbitrárias. Sendo dada uma infinidade de valores para a abscissa x, haverá um número igual de ordenadas $f(x)$. Todas têm valores numéricos verdadeiros, ou positivos, ou negativos ou nulos. Nós não supomos que essas ordenadas estão sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas as outras em alguma maneira arbitrária qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade isolada."

Sobre isto Barallobres [2] esclarece que a obra de Fourier coloca em xeque a crença do século XVIII de que as expressões de funções sempre podiam ser transformadas em expressões algébricas uma vez que as propriedades destas não se aplicavam às suas funções, ou seja, reabre-se a discussão, dentre outros, do conceito de função e continuidade, etc.

Como resultado desta abertura para uma nova definição de função, o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1792-1856) diz em 1834 no artigo intitulado "Sobre a convergência de séries trigonométricas" que uma função de x é um número que se dá para cada x que varia continuamente. Variação esta dada por uma expressão analítica, por uma condição que permite escolher num teste um número dentre todos, ou ainda, à dependência que embora exista não possa ser determinada.

Complementando a ideia de função continua de Lobatchevsky, Botelho e Rezende [4] relatam que em 1821 Cauchy em seu *Cours D'Analyse* (Curso de Análise) definiu os conceitos de função contínua, diferenciável e integrável a partir da noção de limite.

Além disso, segundo Mol [17], embora D'Alembert já tivesse estudado as funções de variáveis complexas num trabalho sobre resistência dos fluidos, os trabalhos de Cauchy ganham evidência por darem vida própria ao estudo destas funções. Seus trabalhos tiveram uma imensa aceitação da comunidade matemática da época.

Especificamente falando do conceito de função dado por Cauchy, segundo Roque e Pitombeira [21] não houve muita diferença da definição dada por Fourier, ao considerar que as quantidades variáveis se relacionam de modo que variando uma (independente) obtêm-se a outra (dependente). Assim, para ele define-se função como:

> "Quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente estas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de "variável independente"; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos funções desta variável."

Embora se perceba o avanço no entendimento de função como uma relação entre variáveis, ainda se tinha a ideia, em última instância, de uma expressão analítica como representação da mesma. Esta visão começa a mudar em 1829, com a publicação de um artigo de Dirichlet que apresenta a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para x racional} \\ 1, & \text{para x irracional.} \end{cases}$$

Comentando a questão Roque e Pitombeira [21] entendem que provavelmente esta tenha sido a primeira função que não possui nenhuma das propriedades admitidas tacitamente como gerais, ou seja, não podia ser derivável ou integrável, e por ser descontínua em todos os pontos, não podia ser dada por expressões analíticas ou representada por uma série de potências. Nem mesmo podia ser desenhada à mão livre, podendo ser vista como uma função somente se entender-se este conceito como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

Isto gerou uma rediscussão da definição de função de modo que os matemáticos não a concebessem a partir de sua expressão analítica. Com isso, Costa [8] apresenta a seguinte definição de função dada por Dirichlet em 1837:

“Suponhamos que a e b sejam dois valores diferentes definidos e x seja uma variável que pode assumir, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Agora, se para cada x corresponde um único, finito y de tal forma que, se x atravessa continuamente o intervalo de a a b, $y = f(x)$ varia da mesma forma gradualmente, então y é chamado um função contínua de x para este intervalo. Não é, em absoluto, necessário que y dependa de x no intervalo todo de acordo com a mesma lei; de fato, não é em absoluto necessário pensar somente em relações que possam ser expressas por operações matemáticas. Geometricamente representadas, isto é, x e y imaginados como abscissa e ordenada, uma função contínua aparece como uma curva conexa, para a qual somente um ponto corresponde a cada abscissa entre a e b.”

A próxima etapa para o desenvolvimento do conceito de função, se assemelhando ao que temos atualmente, ocorre com o desenvolvimento da noção de conjunto. Para Roque e Pitombeira [21] esta abordagem de conjuntos, já havia sido estimulada por Dirichlet de modo que a teoria dos conjuntos passou a ser a forma mais apropriada para se estabelecer um consenso sobre os fundamentos da Matemática.

1.4.4 A revolução dos Conjuntos

Conforme relata Costa [8] podem-se destacar quatro períodos importantes na evolução do conceito de função. O primeiro ocorre na preocupação grega de descrever relações e mudanças que ocorriam na natureza de forma qualitativa. Em seguida, o período de Newton e Leibniz é marcado por funções que possuíam uma expressão analítica ou representação gráfica que surgiam para resolução de problemas práticos. O próximo período ocorre com Lagrange e Euler quando o conceito de função é rediscutido devido a compreensão da relação de dependência entre variáveis.

O último período ocorre a partir da definição de Dirichlet baseada na dependência de variáveis, mas que precisou ser modificada tendo em vista os trabalhos realizados pelos franceses René-Louis Baire (1874-1932), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) e Henri Léon Lebesgue (1875-1941).

Barallobres [2] destaca que em 1898, no seu livro *"Sur da Theorie des fonctions"*, Borel já relacionava a teoria de funções com a recém fundamentada matemática dos infinitos. Além disso, Borel e Lebesgue ganham fama com trabalhos realizados sobre a teoria da medida e integração. Ao passo que Baire se notabiliza pela classificação das funções descontínuas. O fato é que, nestes trabalhos, o conceito de função é discutido em meio a polêmicas, das quais se destacam:

- conceber que as funções contínuas, ou não, que não possuem derivada não eram aceitas como verdadeiros objetos matemáticos,

- que ainda se fazia presente em muitas publicações a ideia de que uma função é algo definido por uma expressão analítica.

Com destaque para os trabalhos do tcheco Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), dos alemães Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), do norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) e do russo Georg Ferdinand

Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), segundo Fonseca [12], o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, a definição de continuidade e números reais, o aparecimento de novos problemas de matemática pura e o desenvolvimento da Análise permitiram que a definição de função num sentido mais amplo como o que conhecemos hoje fosse estabelecido.

Comentando este período Roque e Pitombeira [21] destacam que a descoberta de Cantor através do procedimento de enumerar os elementos de um conjunto numérico o levou a concluir que a associação de cada um dos elementos a um número natural pode ser definida como uma função de um conjunto no outro, uma correspondência biunívoca entre os respectivos elementos.

Ainda sobre as novas definições de função Botelho e Rezende [4] destacam três delas. A primeira, dada pelo britânico George Boole (1815-1864), que ao interpretar função como uma transformação, ou seja, cada elemento de x é transformado no elemento $f(x)$, afirma:

> Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$.
> ...Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma $f(1)$; se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma $f(0)$.

O segundo destaque foi para a definição dada pelo alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) que utilizou a ideia de aplicação para definir o conceito de função como:

> Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por $\phi(s)$; dizemos também que $\phi(s)$ corresponde ao elemento s, que $\phi(s)$ é originada ou gerada pela aplicação ϕ, que s é transformado em $\phi(s)$ pela aplicação ϕ.

Por fim, a terceira definição foi dada pelo britânico Godfrey Harold Hardy (1877-1947), consiste de três características que devem ser satisfeitas para que uma relação entre variáveis x e y seja considerada função:

> 1. y é sempre determinado por um valor de x;
> 2. para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y;
> 3. a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x.

Paralelo a isso Costa [8] apresenta a definição dada em 1911, pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) que diz que uma *"Função é uma relação especial, que a qualquer valor da variável faz corresponder um só valor ... "*. Além disso, é atribuída a ele a introdução dos símbolos $\in$, $\exists$, $\supset$, $\bigcup$ e $\bigcap$, utilizados até hoje, resultado de uma proposta de desenvolvimento de uma linguagem matemática lógica e simbólica.

Com relação a esta busca por terminologia e conceitos novos, além de um maior formalismo e rigor na matemática, Fonseca [12] relata que se estabeleceu na França do século XX, um grupo de matemáticos que escreveu uma série de livros, publicados a partir de 1935, sobre o pseudônimo de Nicolas Bourbaki. Tais publicações permitiram mudar a concepção sobre número e função numa busca de redefinir todas as noções básicas da Matemática na linguagem dos conjuntos. Especificamente sobre função, em 1939, Bourdaki estabeleceu através de relações unívocas entre conjuntos (não necessariamente numéricos), a seguinte definição:

> "Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y , ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x , e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função"

Comentando o avanço do conceito de função até chegar a ideia de correspondência entre elementos de conjuntos, Barallobres [2] afirma que a diferença ao longo da história ocorreu em dois aspectos. O primeiro se dá na definição do conceito que inicialmente se baseava em variáveis e dependências que gradualmente desaparece abrindo espaço para apenas uma correspondência.

O segundo aspecto se refere aos modelos utilizados para a conceituação. Inicialmente o conceito de função se estruturava numa visão qualitativa de problemas cuja temática era o movimento dos corpos. E posteriormente, os mesmos problemas foram abordados de forma quantitativa, tendo como expoentes Newton, Leibniz e o estabelecimento do calculo diferencial.

Num terceiro momento a função se estrutura em expressões analíticas, ou seja, saem os problemas da mecânica e surgem os primeiros problemas puramente matemáticos decorrentes do avanço da Análise. Por fim, a matemática se transforma com o advento da teoria dos conjuntos que especificamente falando do conceito de função se herda apenas a noção de correspondência, uma vez que dos principais elementos da função, ou seja, a variação, a dependência, a correspondência, a simbolização e a expressão da dependência, nem todos fazem parte da definição da teoria de conjuntos. Além é claro, da representação algébrica, gráfica ou outra qualquer que expresse claramente o vínculo de dependência existente entre os elementos que intervêm.

Por fim Hadamard [13] comenta que a consequência desta mudança no século XX para a Matemática foi:

> "O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número: passou a ser a lei de variação, a função. A Matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos, mas foi transformada em seu objeto."

Ou seja, saem as grandezas geométricas e os números como objetos centrais da Matemática dando espaço para as funções.

Capítulo 2

Definição de Função

Dados conjuntos não vazios A e B, uma **função** f de A em B é definida pelo conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, tais que para cada $a \in A$ existe um único correspondente $b \in B$. A notação usada para representa-la é $f : A \to B$.

O conjunto de pares ordenados $f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ é uma função do conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ para o conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ou seja $f : A \to B$. Usando o diagrama de Venn-Euler essa função fica representada na figura 2.1.

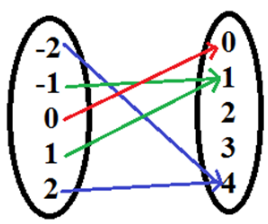


Figura 2.1: Representação da função f.

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, e o conjunto de pares ordenados $g = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ expresso no diagrama de Venn-Euler da Figura 2, observe que $g : A \to B$ não pode ser considerada função, pois para $a = 3$ não existe $b \in B$ tal que $(3, b) \in g$.

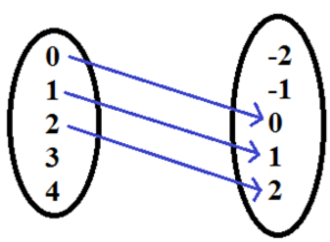


Figura 2.2: Representação da relação g.

Considere agora os conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e $h : A \to B$ representada pelo conjunto de pares $h = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1)\}$. Observe que h não é uma função, pois para $a = 1$ existem dois valores distintos $b' = -1$ e $b'' = 1$ tais que $(1, b') \in h$ e $(1, b'') \in h$. Veja figura 2.3.

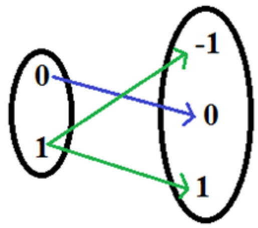


Figura 2.3: Representação da relação h.

2.1 Domínio e Imagem

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e $f : A \to B$ uma função. Denomina-se conjunto **domínio** da função f, representado por $Dom(f)$, o conjunto

$$Dom(f) = \{x; (\exists y)(x, y) \in f\}.$$

Define-se também conjunto **imagem**, ou **contradomínio**, da função f representado por $Im(f)$, o conjunto

$$Im(f) = \{y; (\exists x)(x, y) \in f\}.$$

Observe que $Dom(f) = A$ e $Im(f) \subseteq B$. Por exemplo, na função $f : A \to B$, representada na figura 2.1, tem-se $Dom(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $Im(f) = \{0, 1, 4\}$. Alguns autores consideram o conjunto B como o contradomínio.

2.2 Características de Funções

Diz-se que a função $f : A \to B$ é **sobrejetora** (sobrejetiva) em B se cada elemento do conjunto B for imagem de um elemento do conjunto A, isto é, $\forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y$, isto é, $Im(f) = B$.

A função $f : A \to B$ representada na figura 2.1, não é sobrejetora em B, pois $Im(f) \subset B$. Os elementos $2, 3 \in B$ não são imagens de nenhum elemento de A.

Sejam $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e a função $g : A \to B$ representada na Figura 2.4. A função g é sobrejetora em B, pois todo $y \in B$ é correspondente de um $x \in A$, isto é, $Im(g) = B$.

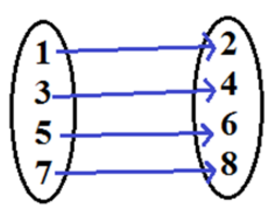


Figura 2.4: Representação da função g sobrejetora.

Uma função $f : A \to B$ é dita **injetora** (injetiva) se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ tem-se $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por exemplo, observando novamente as funções reais f e g, dadas anteriormente, é possível determinar que f não é injetora, pois o mesmo elemento $1 \in B$ é imagem tanto do elemento -1, quanto do elemento 1. A função g é injetora, pois cada elemento da imagem corresponde a um único elemento do domínio.

Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** (bijetiva) se ela é injetora e sobrejetora. Por exemplo, para $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, a função $f : A \to B$, representada na Figura 2.5, é bijetora pois possui $Im(f) = B$ e $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

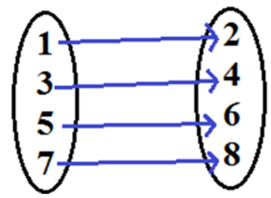


Figura 2.5: Representação da função f bijetiva.

2.3 Função Composta

Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tais que $(x, y) \in f$ e $(y, z) \in g$ denomina-se função **composta** de g em f a função representada por $g \circ f$ o conjunto dos pares (x, z) tais que $(x, y) \in f$ e $(y, z) \in g$, ou seja,

$$g \circ f = \{(x, z); (\exists y)(x, y) \in f \quad \text{e} \quad (y, z) \in g\}.$$

Em outras palavras, $g \circ f : A \to C$ é tal que para $\forall x \in A$ o valor de $g \circ f$ é definido pela fórmula

$$g \circ f(x) = g\,(f(x)).$$

Por exemplo, dados $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, sejam as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ representadas na Figura 2.6. A função composta $g \circ f : A \to C$ representada na Figura 2.7 é

$$g \circ f = \{(-4, 0), (-3, 1), (-2, 4), (-1, 9), (0, 16)\}.$$

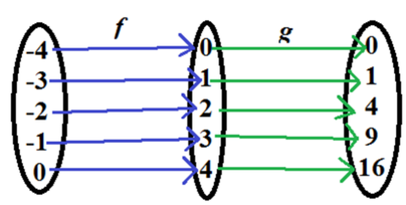


Figura 2.6: Representação das funções f e g.

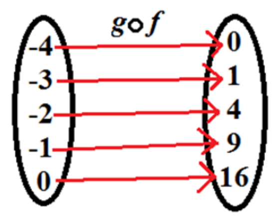


Figura 2.7: Representação da função composta $g \circ f : A \to C$.

2.4 Função Inversa

A **inversa** de uma função f é o conjunto dos pares ordenados tal que

$$f^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in f\}.$$

Note que a inversa de uma função nem sempre é uma função.

Como exemplo, dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e a função $f : A \to B$, tal que $f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$ sua inversa $f^{-1} : B \to A$ de modo que $f^{-1} = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3)\}$ é uma função, conforme se vê na Figura 2.8.

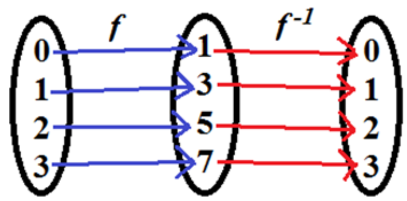


Figura 2.8: Representação das funções f e f^{-1}.

Por outro lado, para $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $D = \{0, 1, 4\}$, dada a função $g : C \to D$ representada na Figura 2.9, a inversa $g^{-1} : D \to C$ não pode ser considerada função pois implicaria nos elementos -1 e 1 serem imagem respectivamente do domínio 1.

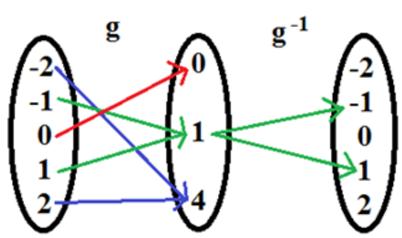


Figura 2.9: Representação da função g e da relação g^{-1}.

Outro exemplo é a função $h : E \to F$ para os conjuntos $E = \{0, 1, 2\}$ e $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, representada na Figura 2.10. A inversa $h^{-1} : F \to E$ não pode ser considerada função, pois os elementos 2 e 3 do domínio não têm elemento correspondente em E.

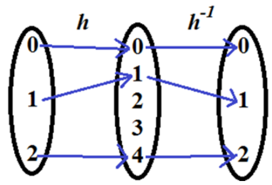


Figura 2.10: Representação da função h e da relação h^{-1}.

Dizemos que a inversa f^{-1} é função se f for definida como injetora e sobrejetora, ou seja, **bijetora**.

2.5 Função real

Define-se como função **real** toda função f cujos elementos do domínio e da imagem pertencem aos reais. Em outras palavras, $f : X \to R$ que tem como domínio um subconjunto $X \subseteq R$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais.

Podemos usar o plano cartesiano para representar graficamente essas funções.

O **gráfico** de uma função $f : X \to Y$, $X \subseteq R$ e $Y \subseteq R$ é o subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados (x, y), tais que $x \in X$ e $y = f(x)$. Em outras palavras

$$Graf(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Por exemplo, para a função real $f(x) = x$ tem-se que o subconjunto de todos os pares ordenados formados por ela determina na Figura 2.11 (a), como representação gráfica, uma reta. Já para a função real $g : (x) = x^2$ tem-se que os pares ordenados determinam, na Figura 2.11 (b), uma parábola cujo vértice é a origem do plano cartesiano.

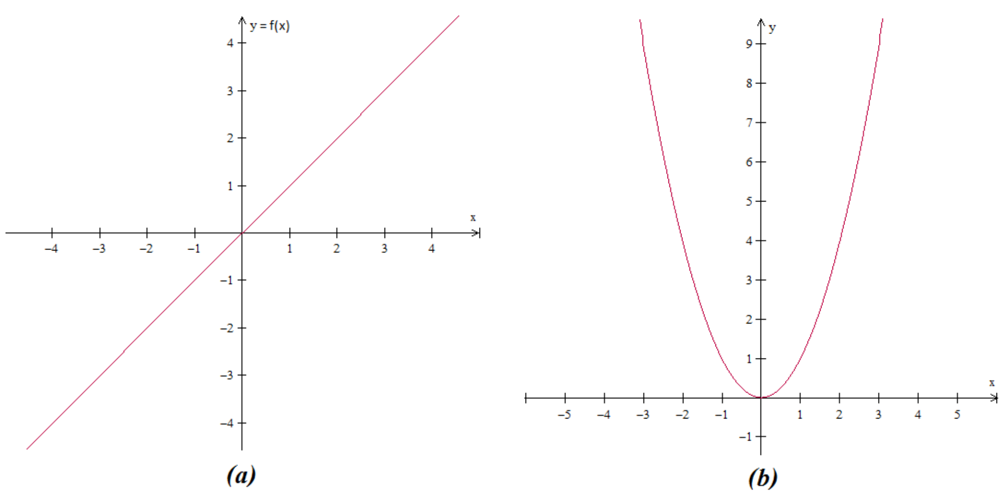


Figura 2.11: Representação gráfica da função real: (a) f e (b) g.

Especificamente falando do Ensino Médio, os próximos capítulos versarão sobre as principais as funções reais trabalhadas no currículo.

2.5.1 Monotonicidade

Analisar a monotonicidade de uma função significa estabelecer o comportamento da função quanto seu ao crescimento ou decrescimento. Assim, dada uma função real ela pode ser classificada, basicamente como, Constante, Crescente e Decrescente.

Constante

Diz-se que uma função real f é constante quando para $\forall x \in D(f)$ tem-se

$$y = f(x) = k, \quad k \in R$$

Por exemplo, dadas as funções reais f e g tais que $f(x) = 3$ e $g(x) = -2$ tem-se, respectivamente $k = 3$ e $k = -2$ para $\forall x \in D(f)$, conforme pode ser visto na Figura 2.12

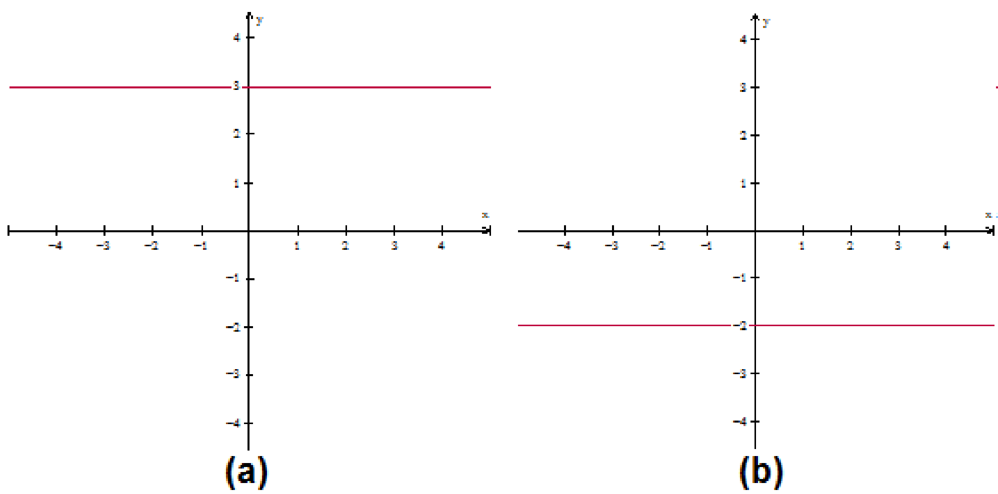


Figura 2.12: Representação gráfica da função real: (a) f e (b) g.

Crescente

Seja f uma função real tal que à medida que os valores da abcissa aumentam, o mesmo acontece com os valores da ordenada diz-se que f é uma função **crescente**. Em outras palavras, dados $x_1, x_2 \in D(f)$ tem-se:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Conforme pode ser visto no gráfico da função real h tal que $h(x) = x - 1$ representado na Figura 2.13 a seguir.

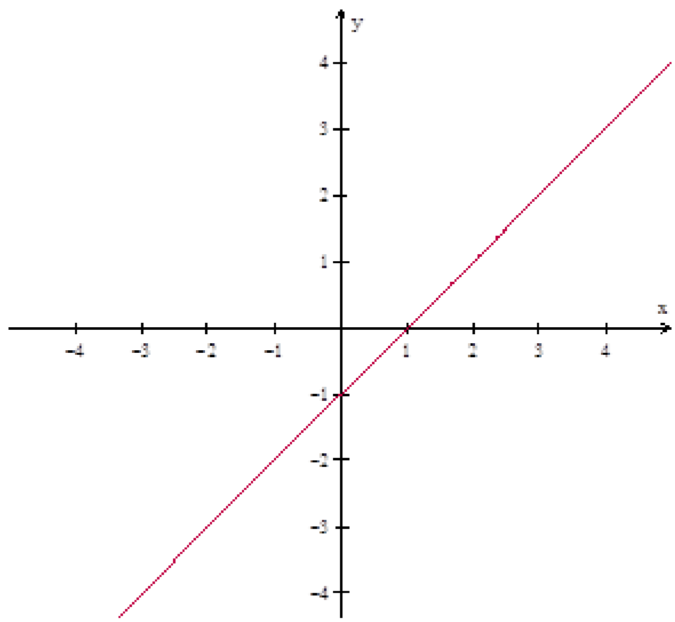


Figura 2.13: Representação gráfica da função real crescente h.

No caso da função ter o comportamento descrito como ora constante, ora crescente, diz-se que o seu único comportamento é não decrescer, ou seja, a função é **não decrescente**, de modo que dados $x_1, x_2 \in D(f)$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Como exemplo tem-se a função real i expressa por

$$i(x) = \begin{cases} \frac{4}{7} \cdot x + 2, & \text{se } x \leq 0 \\ 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

representada na Figura 2.14.

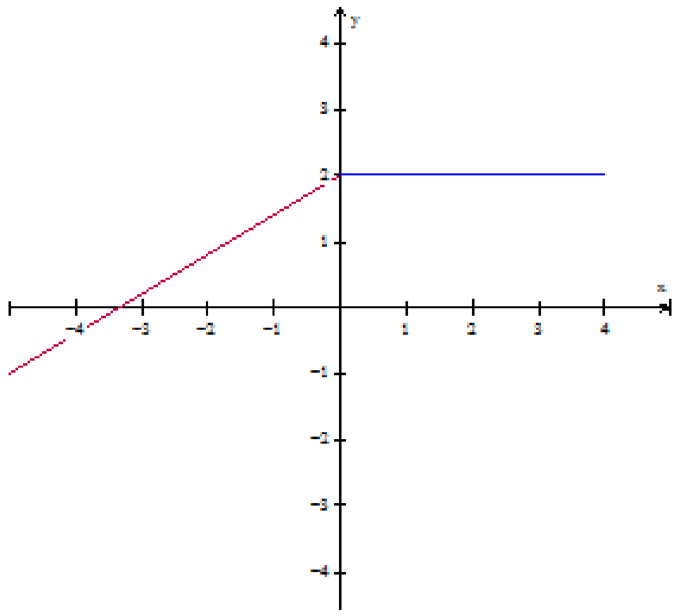


Figura 2.14: Representação gráfica da função real não decrescente i.

Decrescente

Contrariamente à classificação anterior, se à medida que os valores da abcissa de uma função f aumentam os valores da ordenada diminuem, tem-se que esta função é **decrescente**, ou seja, dados $x_1, x_2 \in D(f)$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Conforme se vê no gráfico da função real j expressa por $j(x) = 1-x$ representado na Figura 2.15.

Entretanto, se o seu único comportamento da função, pode ser descrito como não decrescer, a função é classificada quanto à monotonicidade como **não crescente**, de modo que dados $x_1, x_2 \in D(f)$ tem-se:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Como é o caso do exemplo a seguir da função real l expressa por

$$l(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \leq 0 \\ 3 - x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

representada na Figura 2.16.

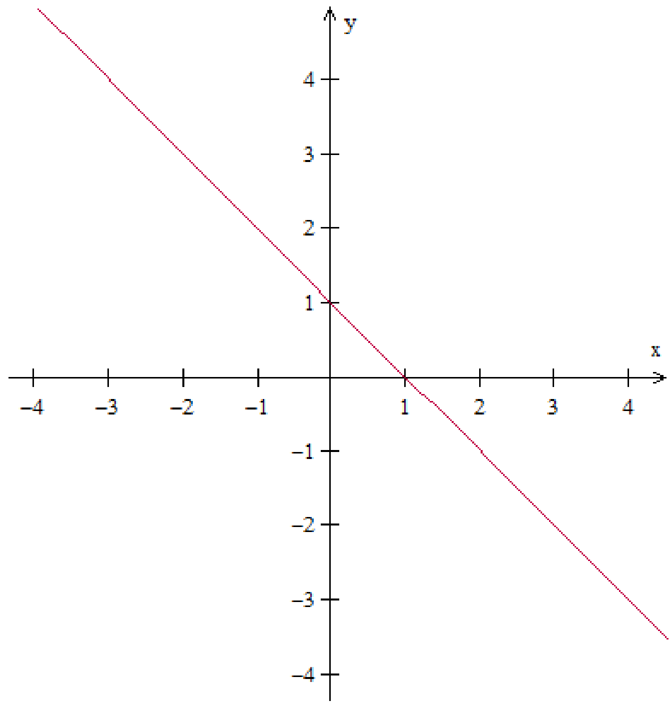


Figura 2.15: Representação gráfica da função real decrescente j.

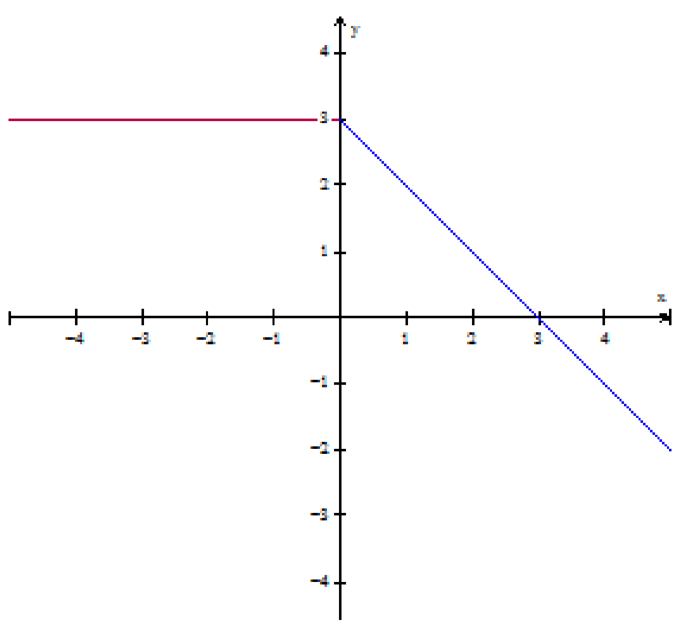


Figura 2.16: Representação gráfica da função real não crescente l.

Capítulo 3

Função Afim

No Ensino Médio as funções polinomiais se apresentam de duas formas distintas. Inicialmente no $1^{\underline{o}}$ ano sobre a forma de função polinomial e, posteriormente, no $3^{\underline{o}}$ ano de forma mais abrangente sobre o título de polinômio.

Definindo-se por **função polinomial** de grau n ou simplesmente **polinômio** de grau n a função $f : R \to R$ expressa por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

tal que $a_k \in R$ e $a_n \neq 0$. Designamos como polinômio do $1^{\underline{o}}$ grau a função real f expressa por $f(x) = a_1 x + a_0$, que será tratada como **função afim**.

3.1 Definição

Considere a situação de determinar o custo de uma corrida de táxi na cidade de Campinas. Tal valor é calculado por um aparelho chamado taxímetro que processa o valor v da corrida levando em consideração a variação de duas grandezas: o tempo, t, que o veículo fica parado e a distância percorrida d.

A distância, o tempo e o valor monetário são grandezas contínuas representadas por números reais, portanto, esta situação possui uma expressão onde cada par real (t, d) corresponde a um único valor real v, isto é, a expressão procurada se refere a uma função real.

Entretanto, não fazem parte do currículo de matemática da educação básica as funções cujo conjunto domínio seja de pares ordenados reais, sendo preciso simplificar a situação de modo que o valor v seja determinado apenas em função da distância percorrida d.

Neste sentido, ao se pesquisar informações sobre o uso de táxi no endereço eletrônico da Empresa Municipal de Desenvolvimento de Campinas S/A – EMDEC, responsável pela regulamentação deste tipo de transporte na cidade em questão –, descobre-se que existem três modalidades de serviço de táxi: Convencional, Acessível e Executivo. Porém, no quesito tarifação, as modalidades Convencional e Acessível possuem os mesmos valores, conforme se vê na tabela 3.1.

	Convencional e Acessível	Executivo
Bandeirada	R$4,40	R$5,70
Bandeira 1 (2ª a 6ª das 6h às 18h, Sáb. das 6h às 12h)	R$2,65/km	R$3,45/km
Bandeira 2 (2ª a 6ª das 18h às 6h, Sáb. das 12h às 24h, Dom. e feriados das 0h às 24h)	R$3,45/km	R$4,50/km

Tabela 3.1: Valores de referência para o uso de táxi em Campinas.

Com os dados da tabela 3.1 podemos entender como é feito o pagamento de uma corrida de taxi. O valor a ser pago é resultante da distância percorrida multiplicada pelo valor da bandeira 1 ou 2, conforme o horário, acrescido da bandeirada. Esse procedimento é valido para qualquer tipo de taxi. As tabelas 3.2 e 3.3 exibem algumas situações para alguns valores de d.

Bandeira 1	**Convencional e Acessível**	**Executivo**
d (km percorridos)	v (R$ pago)	v (R$ pago)
0	4,4	5,7
1	$1 \cdot 2,65 + 4,4 = 7,05$	$1 \cdot 3,45 + 5,7 = 9,15$
2	$2 \cdot 2,65 + 4,4 = 9,7$	$2 \cdot 3,45 + 5,7 = 12,6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$10 \cdot 2,65 + 4,4 = 30,94$	$10 \cdot 3,45 + 5,7 = 40,2$

Tabela 3.2: Expressão para calcular o valor de uma corrida de táxi para bandeira 1.

Bandeira 2	**Convencional e Acessível**	**Executivo**
d (km percorridos)	v (R$ pago)	v (R$ pago)
0	4,4	5,7
1	$1 \cdot 3,45 + 4,4 = 7,85$	$1 \cdot 4,5 + 5,7 = 10,2$
2	$2 \cdot 3,45 + 4,4 = 11,3$	$2 \cdot 4,5 + 5,7 = 14,7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$10 \cdot 3,45 + 4,4 = 38,9$	$10 \cdot 4,5 + 5,7 = 50,7$

Tabela 3.3: Expressão para calcular o valor de uma corrida de táxi para bandeira 2.

Note que o valor a ser pago pela corrida de táxi é determinado em função da distância percorrida pela seguinte lei de correspondência: distância vezes bandeira mais bandeirada. Assim, temos na tabela 3.4 a expressão da lei de correspondência para cada bandeira e tipo de veículo.

Matematicamente podemos generalizar esse raciocínio pela seguinte expressão

$$V(d) = c_1 \cdot d + c_2,$$

	Convencional e Acessível	Executivo
Bandeira 1	$v = V(d) = 2,65 \cdot d + 4,4$	$v = V(d) = 3,45 \cdot d + 5,7$
Bandeira 2	$v = V(d) = 3,45 \cdot d + 4,4$	$v = V(d) = 4,5 \cdot d + 5,7$

Tabela 3.4: Expressões para calculo do valor da corrida em Campinas.

onde $c_1, c_2 \in R_+ - \{0\}$ (números reais positivos e não nulos).

Portanto, a função real $v : R_+ \to [c_2, \infty)$ dos valores da corrida de táxi em função da distância percorrida é um caso especial de função afim, onde $c_1 = a$, $c_2 = b$ com $a, b \in R_+$ e $a \neq 0$.

Consideremos agora outra situação. No presente ano de 2014 a cidade de São Paulo vive uma crise de abastecimento de água devido escassez de chuva. Dos seis sistemas de reservatórios que abastecem a cidade, o sistema Cantareira é o principal deles.

Em 15 de maio o nível do reservatório chegou à marca crítica de 8,2% de sua capacidade. Como medida emergencial, para aumentar sua vida útil, a SABESP (Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo S.A) resolveu utilizar o chamado volume morto do reservatório. Com isso o nível de água disponível para uso subiu para 26,7%, no dia 16 de maio.

Porém, como não houve volume de chuva significativa nessa região, no dia 15 de julho, 60 dias após o início de uso do volume morto, o nível já havia novamente caído para 8,7%.

Considerando que a quantidade de água retirada dia-a-dia é constante e que nesse período não choveu, qual expressão matemática pode ser utilizada para determinar o nível do reservatório em função do dia, a partir de 15 de maio?

Dado que o volume de água retirado do reservatório é constante, o percentual de vazão diária v de saída de água é resultado da divisão da quantidade que foi retirada pela quantidade de dias do período. Assim, dado que a quantidade retirada é determinada pela diferença do percentual final pelo inicial, tem-se:

$$v = \frac{8,7\% - 26,7\%}{60 dias} = -\frac{18}{60} = -0,3\%/dia,$$

Ou seja, a cada dia é retirado (sinal negativo) 0,3% do volume do reservatório que no inicio da contagem possuía 26,7%.

Analogamente ao que foi feito para a situação da corrida de táxi, registra-se na tabela 3.5 o percentual de água restante no reservatório em função da quantidade de dias decorridos do inicio da contagem.

Observe que o percentual de água restante é determinado em função da quantidade de dias decorridos do inicio da contagem pela seguinte lei de correspondência: percentual inicial menos o produto da vazão pela quantidade de dias decorridos. Em outras palavras, $V : [0; 89] \to [26,7; 0]$ é tal que:

$$V(d) = 26,7 - 0,3 \cdot d.$$

Ou generalizando o raciocínio para as constantes reais c_1 e c_2:

$$V(d) = c_2 - c_1 \cdot d,$$

d **(quantidade de dias decorridos)**	P **(percentual de água no reservatório)**
0	26,7
1	$26,7 - 0,3 = 26,4$
2	$26,7 - 2 \cdot 0,3 = 26,1$
$\vdots$	$\vdots$
10	$26,7 - 10 \cdot 0,3 = 23,7$

Tabela 3.5: Expressão para calcular o percentual de água restante no reservatório.

onde $c_1, c_2 \in R_+ - \{0\}$.

Portanto, a função real $V : [0; 89] \to [26,7; 0]$ do percentual restante de água em função da quantidade de dias decorridos é um caso especial de função afim, onde $c_1 = a$, $c_2 = b$ com $a, b \in R$ e $a \neq 0$.

3.2 Características da função afim

Considerando apenas o currículo de matemática do Ensino Médio, uma das características estudadas da função afim diz respeito ao seu gráfico. E para tal deve-se considerar que desde o 9º ano do Ensino Fundamental já é de conhecimento do aluno que a forma obtida é uma reta não vertical.

Nesse sentido, entende-se por características do gráfico da função afim dois aspectos que relacionam a reta com sua expressão de lei de correspondência: o crescimento-decrescimento da função e a intersecção da reta com os eixos ordenados do plano cartesiano.

Retomando o exemplo da corrida de táxi, podemos ver na figura 3.1 os gráficos da função V, tal que $V(d) = c_1 \cdot d + c_2$, para cada tipo de veículo e bandeira.

Observando os gráficos confirma-se a noção intuitiva de que quanto mais se anda de táxi, mais cara fica a corrida, em outras palavras, quanto maior é o valor da distância d, maior é o valor da corrida. Isso quer dizer que as funções são crescentes.

Pensemos agora no exemplo do percentual de água do reservatório da Cantareira. A figura 3.2 mostra o gráfico da função V expressa por $V(d) = 26,7 - 0,3d$.

Observando a figura confirma-se a ideia intuitiva de que quanto mais dias se passam, menor é o percentual de água do reservatório, em outras palavras, a função é decrescente.

Assim, dado que tanto a situação do táxi quanto a do reservatório são casos especiais da função afim f expressa por $f(x) = ax+b$, cuja característica que determina o crescimento ou decrescimento da mesma pode ser dada pela análise comparativa das expressões de cada caso.

Dado que as quatro expressões da situação do taxi são crescentes, escolhemos a expressão do táxi executivo com bandeira 2 para fazer a comparação. Assim, observando as expressões gerais

$$V(d) = 4,5d + 5,7$$

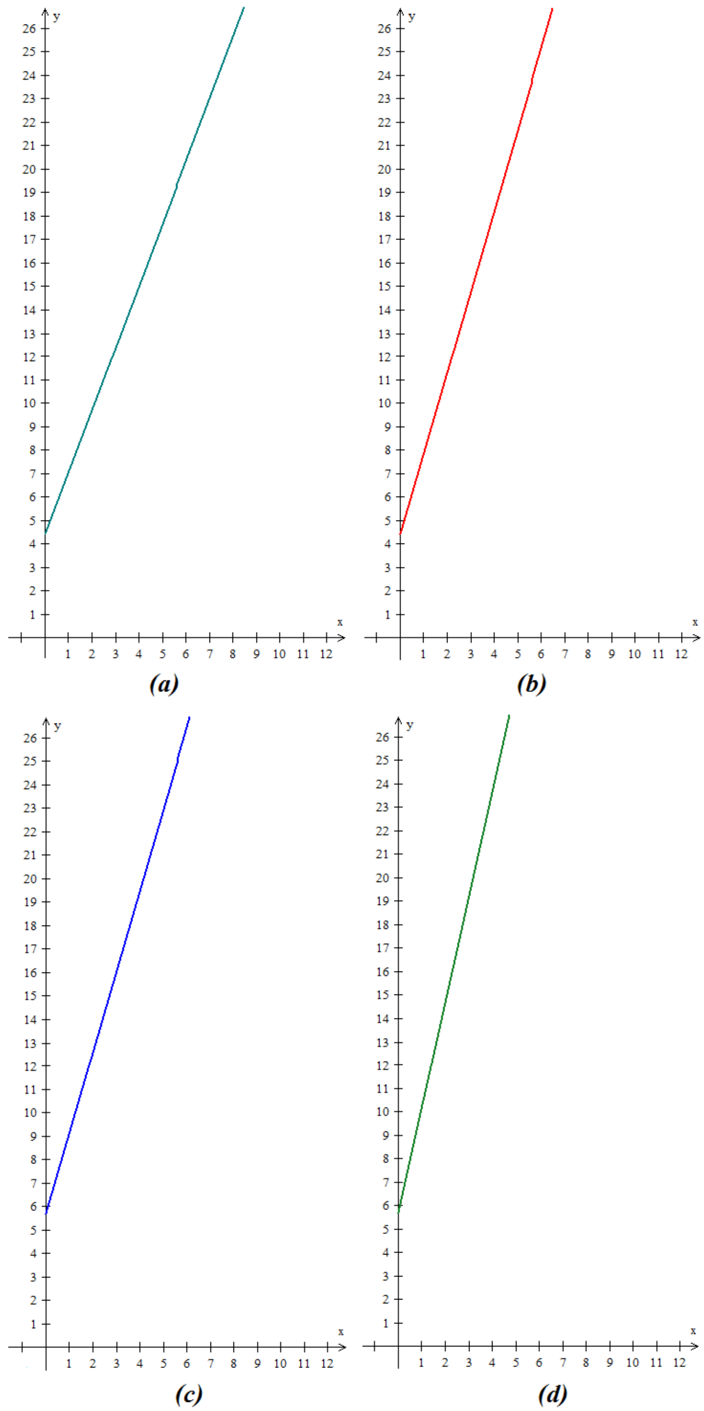


Figura 3.1: Gráfico de: (a) $V(d) = 2,65d + 4,4$; (b) $V(d) = 3,45d + 4,4$; (c) $V(d) = 3,45d + 5,7$; (d) $V(d) = 4,5d + 5,7$

e

$$V(d) = 26,7 - 0,3d,$$

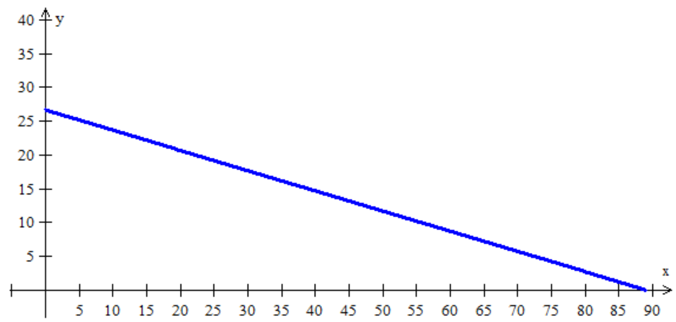


Figura 3.2: Gráfico de $V(d) = 26,7 - 0,3d$.

respectivas ao taxi e ao reservatório, vê-se que em ambas o valor de c_2 é positivo, porém o valor de c_1 alterna os sinais. Comparando-as com os seus gráficos presentes, respectivamente, nas figuras 3.1 (d) e 3.2, tem-se na situação do taxi que o segmento de reta é crescente e $c_1 > 0$. Já na situação do reservatório o segmento de reta é decrescente e $c_1 < 0$.

Assim, dizemos que a função afim f é uma função **crescente** quando $a > 0$ e **decrescente** quando $a < 0$. Tanto uma situação quanto outra podem ser observadas, genericamente, na figura 3.3.

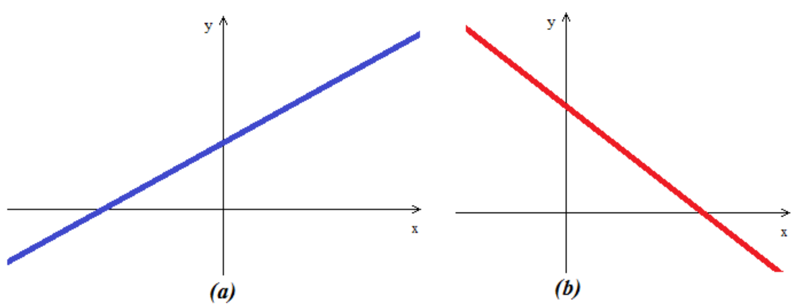


Figura 3.3: Exemplo de função afim: (a) crescente e (b) decrescente.

Um caso especial de função afim ocorre para $a = 0$. Isto resulta numa função f expressa por $f(x) = b$, ou seja, para qualquer $x \in R$, o valor de y é fixo, **constante**, igual a b. Representando-a graficamente obtemos uma reta horizontal, conforme se vê na figura 3.4.

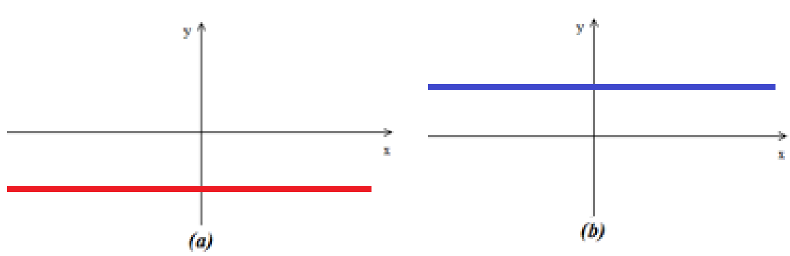


Figura 3.4: Exemplo de função constante: (a) com $b < 0$ e (b) com $b > 0$.

Entendido o que faz a função afim ser crescente ou decrescente, pensemos agora sobre os pontos de intersecção do gráfico com os eixos do plano cartesiano.

De forma prática, vimos que o quanto se paga para andar de táxi se baseia no valor por quilometro rodado, chamado bandeira, somado à bandeirada, que é o quanto se paga pela disponibilidade do serviço. Observando o gráfico 3.1 (d) notasse no caso do taxi executivo que ficar sem rodar nada é representado pelo ponto onde a função intersecta o eixo das ordenadas. Isto é, o ponto de intersecção da reta V com o eixo da ordenada, é dado pelo par ordenado $(0; 5,7)$, pois para $d = 0$ tem-se

$$V(0) = 4,5 \cdot 0 + 5,7 = 5,7.$$

No caso do reservatório a situação é mais simples, pois o ponto onde a função intersepta o eixo das ordenadas é representado pelo instante inicial que se oferta o volume morto. Isto é, o ponto de intersecção da reta V com o eixo da ordenada, é dado pelo par ordenado $(0; 26,7)$, pois para $d = 0$ tem-se

$$V(0) = 26,7 - 0,3 \cdot 0 = 26,7.$$

Portanto, de forma geral, a função afim expressa por $f(x) = ax + b$ intersepta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, b)$, uma vez que

$$f(0) = a0 + b \quad \Rightarrow \quad f(0) = b.$$

Pensemos agora nas seguintes questões: é possível ficar sem pagar nada após ter adentrado um taxi? Ou no caso do reservatório, em que momento o reservatório secará totalmente?

Perceba que ambas as perguntas se referem à situação de descobrir qual valor de d gera $V = 0$. Assim, retomando as expressões do taxi executivo e do reservatório, obtemos respectivamente que

$$V(d) = 4,5d + 5,7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4,5d = -5,7 \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{5,7}{4,5} = -\frac{19}{15}$$

e

$$V(d) = 26,7 - 0,3d = 0 \quad \Rightarrow \quad 26,7 = 0,3d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{26,7}{0,3} = 89.$$

Ou seja, considerando que não existe distância negativa, é impossível adentrar um taxi executivo e ficar sem pagar alguma coisa. O que do ponto de vista prático é de fácil compreensão, pelo que foi discutido anteriormente onde, mesmo sem rodar nada, ao adentrar o taxi a corrida se inicia devendo-se o valor da bandeirada.

No caso do reservatório a questão de $V = 0$ conclui-se que é necessária a decorrência de 89 dias para que o reservatório atinja o nível zero.

Generalizando o pensamento, ambas as questões se referem ao ponto de coordenadas $(0, -b/a)$, chamado **zero da função**, considerando que nele a função afim é nula, pois

$$f(x) = ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad ax = -b \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Outro caso especial de função afim ocorre para b=0. Nestes casos a função é chamada **linear** e sua intersecção com os eixos x e y é o ponto de coordenada $(0,0)$.

Findo isto, e ainda se atendo apenas ao currículo de matemática do Ensino Médio, outra característica estudada da função afim diz respeito à determinação de sua inversa.

Nesse ponto, considerando que é um questionamento comum dos alunos o porquê de determinar a expressão inversa de uma função, sugerimos como abordagem didática que a discussão de tal assunto seja motivada pela necessidade de solução de uma situação problema.

Por exemplo, utilizando ainda a situação da corrida de táxi executivo bandeira 2, uma pergunta possível de ser apresentada para discussão com os alunos é de qual a distância máxima aproximada que pode ser percorrida por uma pessoa que pagou exatamente R$50,00.

Assim, considerando que o valor a ser pago está em função da quilometragem rodada o aluno será conduzido a compreender que a resposta está relacionada a um processo de inversão, ou seja, a quilometragem rodada deve ser dada em função do valor pago.

Compreendido isto, será necessário discutir com os alunos quais características uma função deve ter para que a sua inversa também seja uma função. Em outras palavras, é preciso mostrar que a função precisa ser bijetora, isto é, injetora e sobrejetora.

Para tanto, retomemos o gráfico da função $V : R_+ \to [5,7;\infty)$ expressa por $V(d) = 4,5d + 5,7$ dado na figura 3.1 (d). Considerando que uma função é injetora se cada elemento da imagem se refere a um único elemento do domínio, proponha ao aluno que ele imagine retas paralelas ao eixo das abcissas em cada ponto do eixo das ordenadas. Se as retas imaginárias interseptam a linha do gráfico uma única vez, então a função é injetora.

Especificamente sobre o caso do taxi executivo, conforme se vê na figura 3.5, a seguir ao traçar essas retas imaginárias percebe-se que cada valor pago está relacionado a uma única distância percorrida. Logo, a função V é injetora.

Para verificar se a função V é sobrejetora em $[5,7;\infty)$, é preciso provar que todos os elementos da imagem possuem um correspondente no domínio. Para tanto, sugerimos que se inverta a expressão da função e, em seguida, seja verificado se os valores de $v \in [5,7;\infty)$ são tais que $d \in R_+$. Dito isto, ao inverter a expressão obtemos

$$4,5d + 5,7 = v \quad \Rightarrow \quad 4,5d = v - 5,7 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v - 5,7}{4,5}.$$

E como para $v \geq 5,7$ tem-se $d \geq 0$ que nos permite dizer que V é sobrejetora. Por também ser injetora, conclui-se que V é bijetora e sua inversa $V^{-1} : [5,7;\infty) \in R_+$ pode ser considerada uma função expressa por:

$$V^{-1}(v) = \frac{2}{9}v - \frac{19}{15}.$$

Dado que a inversa é função, podemos retomar a pergunta e dizer que para $v = 50$ a distância máxima aproximada que alguém pode percorrer num taxi executivo bandeira 2 é:

$$d = \frac{2}{9}50 - \frac{19}{15} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{100}{9} - \frac{19}{15} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{500 - 57}{45} = \frac{443}{45} \quad \Rightarrow \quad d \cong 9,84km.$$

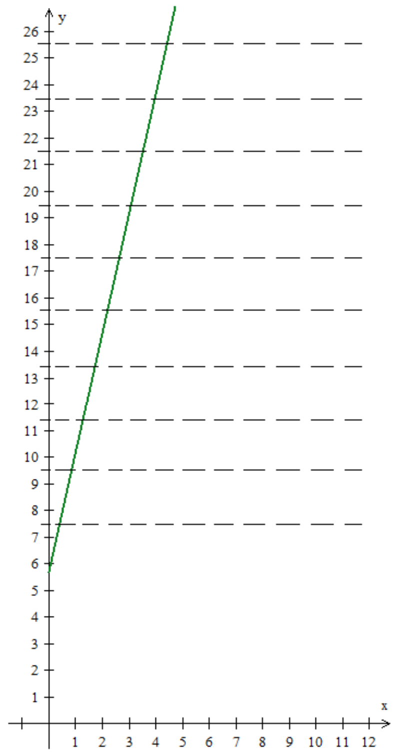


Figura 3.5: Verificação gráfica da injetividade da função expressa por $V(d) = 4,5d + 5,7$.

Outro exemplo da necessidade da inversa pode ser dado utilizando a situação do reservatório da Cantareira. Considerando que a estiagem continuará, após quantos dias do inicio de uso do volume morto o percentual de água disponível atingirá o nível crítico e histórico de 6%?

Analogamente à situação do taxi o aluno precisa compreender que a resposta está relacionada a uma inversão, onde a quantidade de dias decorridos do inicio do uso volume morto está em função do percentual de água disponível.

Inicialmente vamos verificar se a função $V : [0; 89] \to [26,7; 0]$ expressa por $V(d) = 26,7 - 0,3d$ é injetora. Conforme se vê na figura 3.6, ao traçarmos as retas imaginárias, paralelas ao eixo x, que interseptam tanto o gráfico da função quanto o eixo y, percebe-se que cada valor V pago está relacionado a uma única distância d percorrida. Logo, segundo definição, a função V é injetora.

Em segundo lugar, invertendo a expressão da função temos que verificar se os valores de $v \in [26,7; 0]$ são tais que $d \in [0; 89]$. Dito isto, ao inverter a expressão obtemos

$$26,7 - 0,3d = v \quad \Rightarrow \quad 26,7 - v = 0,3d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{26,7 - v}{0,3} \quad \Rightarrow \quad d = 89 - \frac{10}{3}v.$$

Como para $0 \leq v \leq 26,7$ tem-se $d \geq 0$, V também é sobrejetora. Logo, ela é bijetora e sua inversa é função $V^{-1} : [26,7; 0] \to [0; 89]$ expressa por:

$$V^{-1}(v) = 89 - \frac{10}{3}v.$$

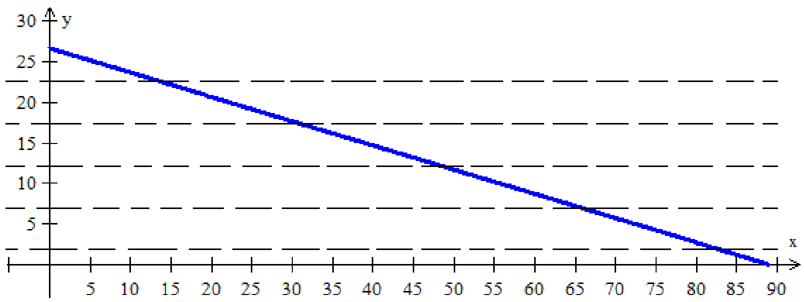


Figura 3.6: Verificação gráfica da injetividade da função expressa por $V(d) = 26,7 - 0,3d$.

Diante disso, retomando a pergunta, para $v = 6\%$ a quantidade de dias decorridos é:

$$d = 89 - \frac{10}{3}6 \quad \Rightarrow \quad d = 89 - 20 \quad \Rightarrow \quad d = 69.$$

De forma geral, dada uma função afim f qualquer, expressa por $f(x) = ax + b$, sabemos que sua representação gráfica é uma reta crescente, se $a > 0$, decrescente, se $a < 0$, ou constante, se $a = 0$. Além disso, a intersecção com os eixos x e y ocorrem, respectivamente, nos pontos de coordenadas $(-b/a, 0)$ e $(0, b)$. Sendo que $x = -b/a$ é denominado zero da função.

Por fim, sendo a função afim f bijetora, expressa por $f(x) = ax + b$, sua inversa f^{-1} também é função e pode ser expressa genericamente por

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}.$$

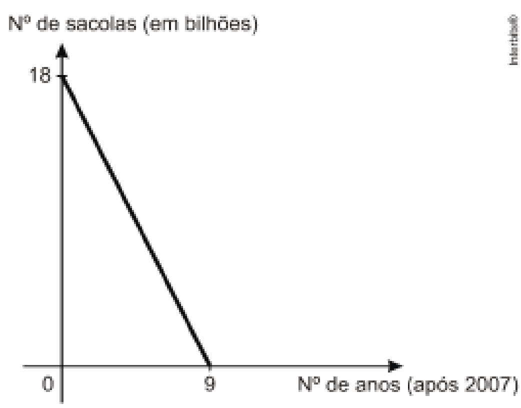
3.3 Sugestão de exercícios

Além de permitir uma aprendizagem significativa, a utilização de situações práticas ou cotidianas está alinhada com a proposta atual do processo de seleção de candidatos das principais universidades do país. Confirmando isto, apresentamos a seguir alguns exercícios de aplicação de funções afins.

(Exercicíos I e II criados pelo autor)
I – Mário e Carla possuem um sítio destinado à produção de leite. Como se trata de um negócio familiar o custo mensal de produção é R$ 360,00/mês, para alimentação dos animais, e R$0,45 por cada litro L vendido, referente aos impostos.
a) Expresse o custo mensal C em função de L.
b) Se no mês de março eles conseguiram vender o litro do leite por R$ 0,60, qual a quantidade mínima de leite que precisou ser produzida para que eles não tivessem prejuízo?
Resposta:
a) $C = 0,45L + 360$.
b) Deve vender $2400L$.

II – Pedro trabalha em uma pequena fábrica de camisetas e resolveu participar da prova de promoção interna dos funcionários. Para o cargo que ele deseja surgiu a seguinte questão:
Considerando que $C(x) = qx + b$ é a expressão do custo, em que x é a quantidade produzida e b é o custo fixo.
a) Se a produção de 600 unidades de camisetas custa R$ 2.800,00 e de 1.100 unidades custam R$ 3.900,00, quais são os valores de b e de q?
b) Pela expressão obtida determine o custo de produção de 900 camisetas.
Para que Pedro acerte a questão inteira, qual deve ter sido sua resposta ao problema dado?
Resposta:
a) Os valores são $q = 2,2$ e $b = 1480$.
b) O custo de produção é R$ 3.460,00.

(Exercicíos III e IV extraídos de provas do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem[14])
III – (Enem 2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico ao lado, em que se considera a origem como o ano de 2007. De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. **Galileu**. n° 225, 2010.

a) 4,0 b) 6,5 c) 7,0 d) 8,0 e) 10,0
Resposta: Alternativa E.

IV – (Enem 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_O = -20 + 4P$$

$$Q_D = 46 - 2P$$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?
a) 5 b) 11 c) 13 d) 23 e) 33
Resposta: Alternativa B.

(Exercicíos V a VI extraídos de banco de questões de exames de acesso de universidades nacionais[16].)
V – (Unicamp 2012) Em uma determinada região do planeta, a temperatura média anual subiu de 13,35ºC em 1995 para 13,8ºC em 2010. Seguindo a tendência de aumento linear observada entre 1995 e 2010, a temperatura média em 2012 deverá ser de
a) 13,83ºC b) 13,86ºC c) 13,92ºC d) 13,89ºC
Resposta: Alternativa B.

VI – (Unicamp 2013) A numeração dos calçados obedece a padrões distintos, conforme o país. No Brasil, essa numeração varia de uma em um, e vai de 33 a 45, para adultos. Nos Estados Unidos a numeração varia de meio em meio, e vai de 3,5 a 14 para homens e de 5 a 15,5 para mulheres.
a) Considere a tabela abaixo.

Numeração brasileira (t)	Comprimento do calçado (x)
35	23,8 cm
42	27,3 cm

Suponha que as grandezas estão relacionadas por funções afins $t(x) = ax + b$ para a numeração brasileira e $x(t) = ct + d$ para o comprimento do calçado. Encontre os valores dos parâmetros a e b da expressão que permite obter a numeração dos calçados brasileiros em termos do comprimento, ou os valores dos parâmetros c e d da expressão que fornece o comprimento em termos da numeração.
b) A numeração dos calçados femininos nos Estados Unidos pode ser estabelecida de maneira aproximada pela função real f definida por $f(x) = 5(x - 20)/3$, em que x é o comprimento do calçado em cm. Sabendo que a numeração dos calçados n_k forma uma progressão aritmética de razão 0,5 e primeiro termo $n_1 = 5$, em que $n_k = f(c_k)$, com k natural, calcule o comprimento c_5.
Resposta:
a) $t(x) = 2x - 12,6$ e $x(t) = 0,5t + 6,3$.
b) $c_5 = 24,2$cm.

Capítulo 4

Função Quadrática

A função que no 1º ano é estudada na forma de função polinomial do 2º grau, e posteriormente, no 3º ano sob o título de polinômio é a função real f expressa por $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, tratada aqui como **função quadrática**.

4.1 Motivação

Uma prática comum entre criadores de animais domésticos é o uso de telas para delimitação de espaços. Mas para que não haja prejuízos à saúde do animal, é preciso que as dimensões do local considerem o tamanho e a necessidade de mobilidade do animal.

Assim, considere que um indivíduo possua $14m$ de tela e deseja construir um canil aproveitando o muro de sua casa, conforme esboço na figura 4.1. Utilizando toda a extensão da tela, como determinar as opções de área do canil disponíveis?

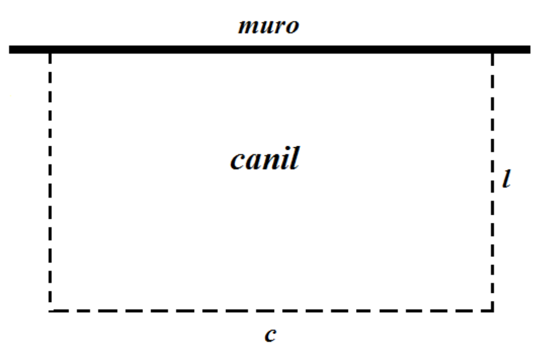


Figura 4.1: Esboço do canil a ser confeccionado.

A melhor forma é analisar a situação e encontrar a expressão que relaciona a medida da área em função da largura ou do comprimento do canil. Pelo esboço dado é intuitivo, para o aluno do ensino médio, perceber que a área do canil é uma região retangular. Logo, representando respectivamente a área, o comprimento e a largura do canil por A, l e c, podemos escrever que o valor de A é dado por:

$$A = lc.$$

Entretanto, os valores de l e c não podem variar livremente, pois o trecho confeccionado com tela é limitado a $14m$. Logo, considerando o formato do canil podemos determinar a medida do comprimento c em função da largura l, ou vice-versa, somando a medida de todas as partes que serão fechadas com tela, resultando em:

$$l + c + l = 14 \quad \Rightarrow \quad 2l + c = 14 \quad \Rightarrow \quad c = 14 - 2l,$$

que substituído em $A = lc$ resulta em:

$$A = l(14 - 2l) \quad \Rightarrow \quad A = 14l - 2l^2.$$

Isto é, a medida da área do canil em função de sua largura é um caso especial de função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a = -2$, $b = 14$ e $c = 0$.

Neste sentido, dado que a área é uma medida positiva é preciso determinar qual intervalo real é o maior conjunto possível capaz de representar o domínio dessa função. Ou seja, quais valores de l garantem $A > 0$?

Para resolver essa questão propomos duas possibilidades de análise. A primeira consiste na observação da expressão $c = 14 - 2l$, pois se tanto l quanto c precisam ser positivos tem-se:

$$c = 14 - 2l > 0 \quad \Rightarrow \quad 14 > 2l \quad \Rightarrow \quad l < 7$$

onde se conclui que nossa função é positiva no intervalo $[0; 7]$. Isto é, $A : [0; 7] \rightarrow R_+$.

A segunda possibilidade consiste em reescrever a desigualdade $A > 0$ na forma de inequação produto $l(14 - 2l) > 0$, pois com isso podemos descobrir onde esta função será positiva analisando a variação do sinal de duas expressões afins, conforme se vê no diagrama da figura 4.2,

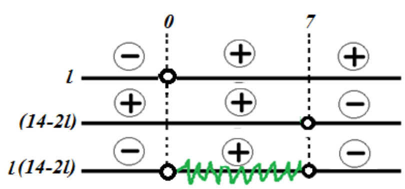


Figura 4.2: Variação dos sinais da inequação $A > 0$.

obtendo o mesmo intervalo $[0; 7]$.

4.2 Características da função quadrática

Passemos a analisar a representação gráfica da função quadrática, que o aluno do 9º ano do Ensino Fundamental já sabe ser uma parábola. Aliás, é importante destacar que a determinação da concavidade da parábola também já é de conhecimento deste aluno. Em outras palavras, ele já sabe que dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima e se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Neste sentido, como $a = -2 < 0$, o pedaço de parábola que representa a função $A : [0; 7] \to R_+$ terá concavidade voltada para baixo e pode ser esboçado na curva da figura 4.3 a seguir.

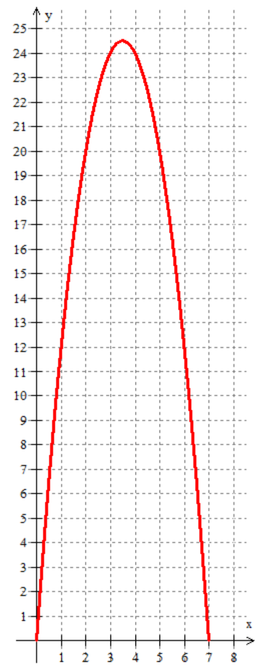


Figura 4.3: Gráfico da função A.

Diante do que foi analisado sobre a questão, já sabemos que a medida da área do canil é nula para as larguras $l = 0$ e $l = 7$, isto é, sabemos quais são os **zeros da função**. Mas e se a forma fatorada da expressão quadrática não for conhecida, como determinar se a função quadrática em questão possui zero? Para responder essa pergunta propomos a seguinte contextualização.

Dos diversos brinquedos radicais que os parques disponibilizam para os seus visitantes, existe um que, no Brasil, é chamado Elevador. Este consiste basicamente de um conjunto de assentos que são elevados ao topo de uma torre, para, de lá, serem soltos em movimento de queda-livre.

Segundo as leis da Física este tipo de movimento é expresso pela função espaço-tempo:

$$S(t) = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2,$$

onde S_0 é o ponto de partida (em relação ao chão, $S_0 = 0$), V_0 é a velocidade inicial do movimento (em queda-livre, $V_0 = 0$) e a é a aceleração do objeto (em queda-livre, a é a aceleração da força gravitacional que a Terra exerce sobre o objeto, aproximadamente, $9,8m/s^2$).

Supondo que o elevador de um parque possua 28m de altura e o movimento descendente das cadeiras seja em queda-livre, quanto tempo será necessário para o objeto cair do topo da torre e chegar ao solo?

Perceba que essa questão deseja saber quando a função espaço-tempo que descreve o movimento será nula. Assim, dado como positivo o sentido solo-céu e que $S_0 = 28m$, $V_0 = 0$ e $a/2 = -4,9m/s^2$, deseja-se saber o zero da função S expressa por

$$S(t) = 28 - 4,9t^2.$$

Fazendo $S = 0$, obtem-se:

$$28 - 4,9t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{28}{4,9} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\frac{2\sqrt{70}}{7}.$$

Mas como $t > 0$, o único zero da função válido é $t = \frac{2\sqrt{70}}{7}$, ou seja, $S : \left[0; \frac{2\sqrt{70}}{7}\right] \to [0; 28]$ é tal que para esta função espaço-tempo serão necessários aproximadamente $2,39$ segundos para que as cadeiras desçam os 28m da torre, conforme se vê na figura 4.4 a seguir.

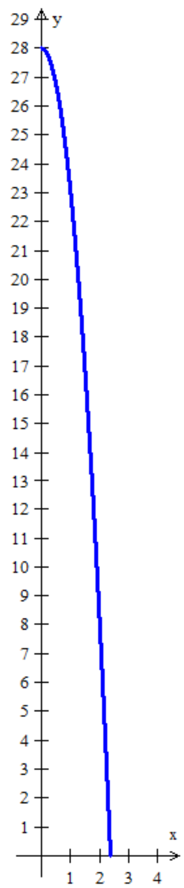


Figura 4.4: Gráfico da função S.

Além do zero da função, outro aspecto importante da parábola se refere às coordenadas do seu vértice. E para pensar sobre isso voltemos ao problema do canil cuja área $A : [0; 7] \to R_+$ é expressa por:

$$A(l) = 14l - 2l^2$$

e respondamos a seguinte questão: existe uma área livre de tamanho máximo? Se sim, quanto ela mede? Quais as dimensões do canil neste caso?

Traduzindo a primeira pergunta, deseja-se saber quais são as coordenadas do vértice da parábola, ou ainda, por ter concavidade voltada para baixo qual largura l está relacionada com a maior área A possível.

Considerando que as coordenadas (X_V, Y_V) do vértice são:

$$X_V = -\tfrac{b}{2a} \quad \text{e} \quad Y_V = -\tfrac{\Delta}{4a},$$

concluímos que a medida de área máxima A_V é

$$A_V = -\frac{14^2 - 4\cdot(-2)\cdot 0}{4\cdot(-2)} = \frac{196}{8} \quad \Rightarrow \quad A_V = 24,5m^2.$$

Que a largura a ela relacionada mede

$$l_V = -\frac{14}{2\cdot(-2)} = \frac{14}{4} \quad \Rightarrow \quad l_V = 3,5m,$$

e o comprimento do canil para esta área máxima é

$$c = 14 - 2\cdot 3,5 = 7m.$$

Outro exemplo da importância do vértice pode ser dado com mais um brinquedo radical disponível em alguns parques, a montanha russa que no Brasil é chamada de Boomerang. Este nome se deve a característica de fazer o veículo dos assentos percorrer um conjunto de curvas e loopings duas vezes, indo e voltando. Imita o "arremesso" do objeto de mesmo nome que vai até um determinado ponto e retorna para onde o movimento foi iniciado.

Para tanto o ponto de partida e de chegada são os pontos mais altos do circuito, pois quando se libera o veículo, em queda livre, o mesmo adquire velocidade para percorrer todo o circuito.

Considerando que o nível 0 está no ponto onde o veículo foi içado, o ponto onde ele inicia o retorno também estará neste nível. Além disso, o tempo t, embora medido desde o momento que o veículo é içado, só vale para a expressão dada entre o ponto de lançamento e o ponto de retorno. Assim, para t dado em segundos, H em metros e tendo como dados iniciais pesquisados e ajustados para $V_0 = 147m/s$ e $S_0 = 1067,5m$, a função espaço-tempo da situação é expressa por:

$$H(t) = 4,9t^2 - 147t + 1067,5$$

onde o intervalo válido para t é entre os zeros da função. Diante disso, dado que $t \geq 0$, o zero da função é dado por:

$$t = \frac{147 \pm \sqrt{686}}{9,8} = 15 \pm \frac{5\sqrt{14}}{7} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 12,3 \quad ou \quad t_2 = 17,7.$$

Logo, o gráfico da função $H : \left[0; 15 \pm \frac{5\sqrt{14}}{7}\right] \to [0; -35]$ pode ser esboçado na figura 4.5 a seguir.

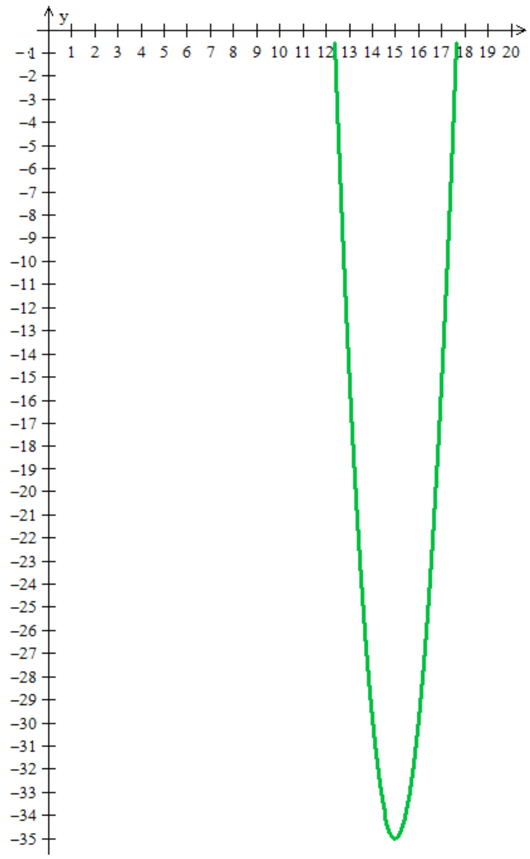


Figura 4.5: Gráfico da função H.

Perceba que como $a = 4,9 > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Portanto, as coordenadas do vértice representam o ponto mínimo, ou melhor, o tempo t_V relacionado a menor altura H_V possível.

Nesse sentido, duas perguntas podem ser apresentadas para os alunos. Qual instante o veículo atinge o ponto mais baixo do circuito? Quão abaixo está este ponto em relação ao nível 0?

A primeira pergunta se refere ao tempo t_V, em segundos, necessário para chegar ao ponto mínimo que é

$$t_V = -\frac{(-147)}{2 \cdot 4,9} = \frac{147}{9,8} \quad \Rightarrow \quad t_V = 15.$$

Já a segunda pergunta se refere à H_V, que pelo dito acima, é a medida mais baixa que o veículo atinge em relação ao nível 0. Dada por

$$H_V = -\frac{(-147)^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 1067,5}{4 \cdot 4,9} = -\frac{686}{19,6} \quad \Rightarrow \quad H_V = -35.$$

Isto é, o ponto mais baixo esta 35m abaixo do ponto de partida.

Outra possível pergunta que pode ser feita por um aluno é da possibilidade de determinar a inversa de uma função quadrática. O que implica pensar na possibilidade da inversa de uma função ser ou não função. Necessitando, portanto, provar se a função é, ou não, bijetora.

No caso do canil isto poderia ser questionado ao se perguntar se sabendo a medida da área A, era possível saber qual a largura l relacionada a ela? No caso dos brinquedos Elevador e Boomerang, a pergunta seria, conhecida a altura S ou H, respectivamente, qual o tempo t relacionado a cada uma?

Na figura 4.6 a seguir é possível verificar que ao traçar as retas imaginárias respectivamente nos gráficos da área A do canil (a) e no nível H do boomerang (b), há pelo menos duas medidas que estão relacionadas a uma única largura, ou um único tempo. Isto é, valores distintos do domínio possuem a mesma imagem. Logo, essas funções não são injetoras.

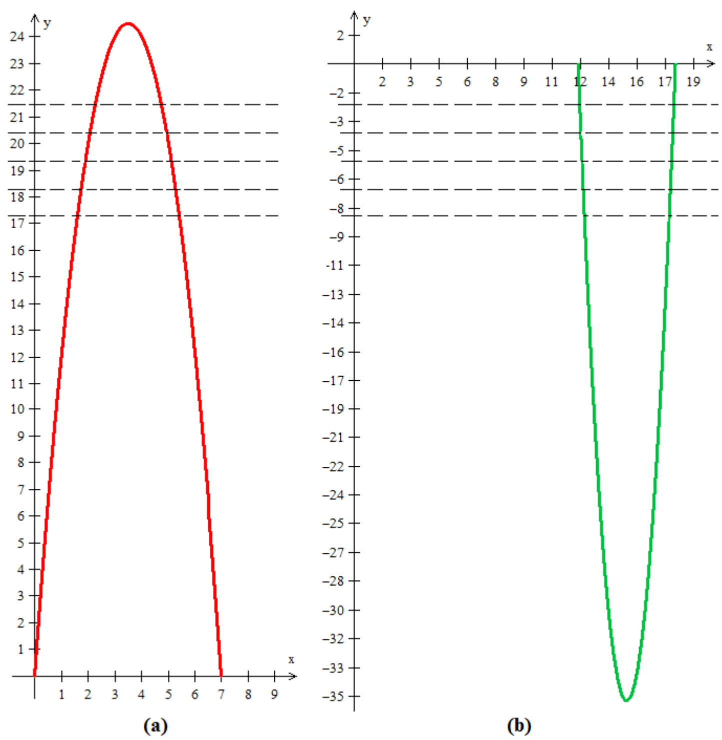


Figura 4.6: Verificação gráfica da injetividade das funções $A(l) = 14l - 2l^2$ (a) e $H(t) = 4,9t^2 - 147t + 1067,5$ (b).

Como A não é injetora, não é bijetora e sua inversa não é uma função. Portanto, respondendo a questão proposta, não é possível determinar, a partir da área A, da altura S e do nível H os respectivos valores da largura l e do tempo t.

Por outro lado, para a situação do elevador, a figura 4.7 referente à função S, nos mostra que a função é injetora, pois cada valor da altura S, do conjunto imagem $[0;28]$, se refere à somente um único tempo t, do conjunto domínio $\left[0;\frac{2\sqrt{70}}{7}\right]$.

Nesse sentido, falta provar que a mesma é sobrejetora em $[0;28]$ para que sua inversa também

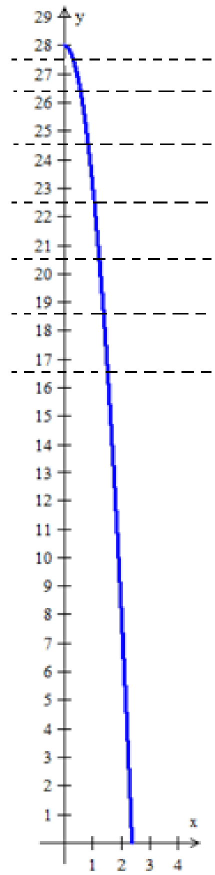


Figura 4.7: Verificação gráfica da injetividade das funções $S(t) = 28 - 4,9t^2$.

seja considerada função. Assim, ao se inverter a expressão da função obtêm-se:

$$28 - 4,9t^2 = s \quad \Rightarrow \quad 28 - s = 4,9t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{28 - s}{4,9} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{28 - s}{4,9}}.$$

E como $0 < s < 28$ tem-se $0 < t < \frac{2\sqrt{70}}{7}$ podemos dizer que S é sobrejetora. Logo, S é bijetora e sua inversa $S^{-1} : [0; 28] \to \left[0; \frac{2\sqrt{70}}{7}\right]$ pode ser considerada uma função expressa por:

$$S^{-1}(s) = \frac{\sqrt{10(28 - s)}}{7}.$$

Por fim, é possível concluir que dada uma função quadrática f qualquer, expressa por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua representação gráfica é uma parábola com concavidade voltada para cima, se $a > 0$, ou voltada para baixo, se $a < 0$.

Além disso, a intersecção com o eixo x ocorre em no máximo dois pontos distintos, denominados zeros da função, e são determinados pela conhecida fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde a expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante, pois se:

- Se $\Delta > 0$ os dois pontos distintos de intersecção são: $\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e $\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$.
- Se $\Delta = 0$ o único ponto de intersecção é $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.
- Se $\Delta < 0$ não existe ponto de intersecção.

Assim, considerando que existem duas possibilidades para a concavidade da parábola e três possibilidades para os zeros da função, uma função quadrática possui seis formas distintas de ser representada graficamente. A figura 4.8 esboça essas possibilidades.

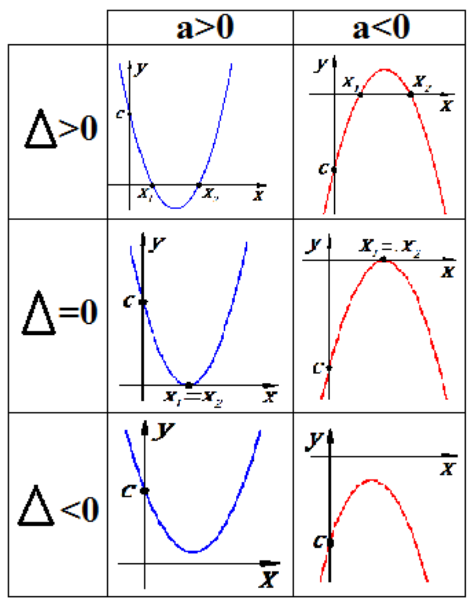


Figura 4.8: Possibilidades gráficas da função quadrática.

Com coordenadas (X_V, Y_V) do vértice da parábola são dadas por:

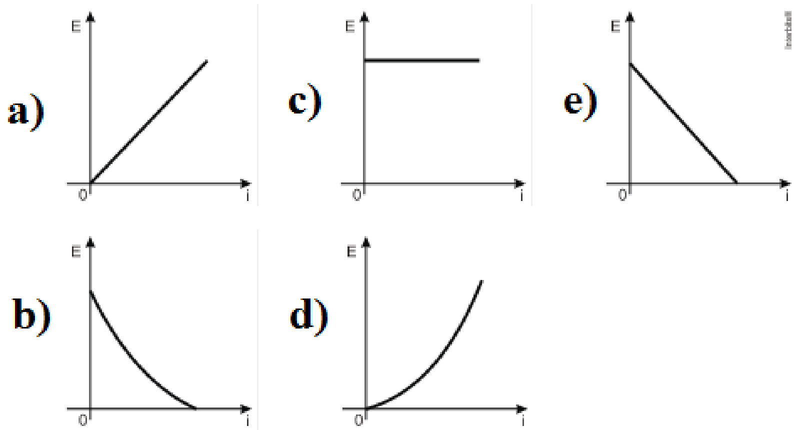
$$X_V = -\frac{b}{2a} \qquad Y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

4.3 Sugestão de exercícios

Apresentamos adiante alguns exercícios de aplicação de funções quadráticas.

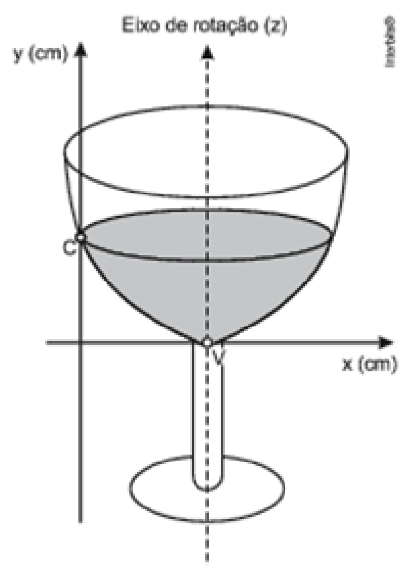
(Exercicíos I e II extraídos de provas do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem[14])

I – (Enem 2012) Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho. Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?



Resposta: Alternativa D.

II – (Enem 2013) A parte inferior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$, onde c é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que

o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é
a) 1. b) 2. c) 4. d) 5. e) 6.
Resposta: Alternativa E.

(Exercicío III extraído de banco de questões de exames de acesso de universidades nacionais[16].)
III - (Unicamp 2010) Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 efetuou um levantamento das vendas dos modelos que ela produz. Um resumo do levantamento é apresentado na tabela a seguir.

Modelo	**Preço - (R$)**	**Aparelhos vendidos - (milhares)**
A	150	78
B	180	70
C	250	52
D	320	36

a) Em face dos ótimos resultados obtidos nas vendas, a empresa resolveu sortear um prêmio entre seus clientes. Cada proprietário de um aparelho da empresa receberá um cupom para cada R$ 100,00 gastos na compra, não sendo possível receber uma fração de cupom. Supondo que cada proprietário adquiriu apenas um aparelho e que todos os proprietários resgataram seus cupons, calcule o número total de cupons e a probabilidade de que o prêmio seja entregue a alguma pessoa que tenha adquirido um aparelho com preço superior a R$ 300,00.
b) A empresa pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela função $n(p) = 115 - 0,25p$, em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais). Determine o valor de p que maximiza a receita bruta da empresa com o novo modelo, que é dada por $n \times p$.
Resposta:
a) Foram emitidos 360 milhares de cupons e a probabilidade é de 30%.
b) O preço que maximiza a receita bruta é R$230,00.

IV – (Unicamp 2011) Uma grande preocupação atual é a poluição, particularmente aquela emitida pelo crescente número de veículos automotores circulando no planeta. Ao funcionar, o motor de um carro queima combustível, gerando CO_2, além de outros gases e resíduos poluentes.

Velocidade km/h	**Emissão de CO_2 (g/km**
20	400
30	250
40	200

a) Considere um carro que, trafegando a uma determinada velocidade constante, emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de combustível que consome. Nesse caso, quantos quilogramas de CO_2 ele emitiu em uma viagem de 378 km, sabendo que fez 13,5 km por litro de gasolina nesse percurso?
b) A quantidade de CO_2 produzida por quilômetro percorrido depende da velocidade do carro. Suponha que, para o carro em questão, a função $c(v)$ que fornece a quantidade de CO_2, em g/km, com relação à velocidade v, para velocidades entre 20 e 40km/h, seja dada por um polinômio do segundo grau. Determine esse polinômio com base nos dados da tabela abaixo.

Resposta:

a) Emitiu 75,6 kg.

b) O polinômio é $c(v) = 1/2 \cdot v^2 - 40v + 1000$.

Capítulo 5

Função Exponencial

Ao findar o estudo das funções afim e quadrática, o aluno do Ensino Médio se vê diante de um desafio, compreender um novo padrão algébrico cuja variação se dá não mais na base de uma potência e sim no expoente. Estamos falando da **função exponencial** $f : R \to R_+ - \{0\}$ expressa por

$$f(x) = a^x$$

com $0 < a \neq 1$.

A partir dela, dados os números reais a, b e c, tais que $a \in R_+ - \{0; 1\}$ e $b, c \in R - \{0\}$, a função $g : R \to R$ expressa por

$$g(x) = b \cdot a^{cx}.$$

chama-se **função do tipo exponencial** de base a.

5.1 Definição

A primeira situação a ser analisada se baseia em alguns filmes de ficção científica cuja temática se dá na propagação de uma determinada doença sobre a humanidade. Dentre os personagens, um dos principais é um cientista que descobre tanto o agente patológico responsável pela doença, vírus ou bactéria, como também a forma de disseminação da mesma. Aliado a isto normalmente ocorre uma cena onde se narra o ritmo de infecção do agente. Por exemplo, no filme cujo título em português é Contágio, lançado no Brasil em 2011, em determinada cena, um dos personagens principais fala o seguinte:

– No primeiro dia, havia 2 pessoas infectadas. Depois 4; e depois 16... A seguir são 256 e depois 65 mil... Em breve será um bilhão... isso é apenas uma questão de matemática".

Reescrevendo a sequência de números dada na narrativa do filme obtemos a tabela 5.1 a seguir. Isto significa que ao variar o expoente da potência de base dois, chega-se a cada um dos números da previsão realizada pelo cientista, no filme.

Considerando que em casos semelhantes a esse, o estudo do ritmo de propagação da doença é muito importante para as autoridades se orientarem sobre o que fazer. A partir de agora, será

Dias	**Quantidade de infectados**
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
8	$256 = 2^8$
$\vdots$	$\vdots$
16	$65.536 = 2^{16}$
$\vdots$	$\vdots$
30	$1.073.741.824 = 2^{30}$

Tabela 5.1: Quantidade de infectados por dia.

necessário estabelecer um padrão capaz de representar situações cujo comportamento se baseia na variação de um expoente.

Retomando a temática do filme *Contágio* e sabendo que o vírus apresentado tinha a capacidade de, a cada dia, duplicar o número de pessoas infectadas. Pergunta-se como o biomédico, ou outro cientista da área, consegue fazer a previsão do número de pessoas P infectadas por esta cepa de vírus, em função do tempo t, em dias, decorrido de seu surgimento.

Para o especialista determinar a quantidade P em função do tempo t, será necessário utilizar uma função, cujo expoente é a variável independente. Neste sentido ao observar a tabela 5.1, conclui-se que, no caso em questão, a lei de formação da função $P : N \to \{x \in N | x \geq 1\}$ é dada por:

$$P(t) = 2^t.$$

Isto é, o número de pessoas P infectadas por esta cepa de vírus, em função do número t, em dias decorridos de seu surgimento, é um caso especial de função exponencial, $f(x) = a^x$, onde $a = 2$.

Outro exemplo que propomos consiste no estudo de um aspecto muito importante dos elementos radioativos, a meia-vida ou período de semidesintegração. Nesse processo, o núcleo diminui a quantidade de prótons e nêutrons, e fica mais leve. Em outras palavras, essa característica consiste no tempo t necessário para desintegrar a metade da massa radioativa m do elemento químico em questão.

Tomando como exemplo o elemento químico fósforo, sabe-se que sua radioatividade diminui à metade a cada 14 dias. Assim, atribuindo a letra p para cada período de 14 dias e r para a radioatividade restante, para $1kg$ de fósforo, obtém-se a seguinte tabela 5.2:

Ao analisar a tabela, identificamos que o padrão de comportamento da meia-vida R do fósforo em função da quantidade de períodos p é a função $r : R_+ \to (0; 1]$ expressa por:

p (período de 14 dias)	$R(p)$
0	$R(0) = 1$
1	$R(1) = \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	$R(2) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$R(3) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
4	$R(4) = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Tabela 5.2: Massa radioativa restante em cada período de 14 dias.

$$r(p) = \left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

Entretanto, é importante destacar que da forma como está, para sabermos, por exemplo, a quantidade de radioatividade do fósforo após t dias, não podemos substituir o valor de p por t, uma vez que cada unidade de p representa um período de 14 dias. Em outras palavras, chamando de p a quantidade decimal do período referente aos t dias, podemos afirmar que 14 dias estão para 1 período, assim como t dias estão para p períodos, que reescrevendo resulta em

$$\frac{14}{1} = \frac{t}{p} \quad \Leftrightarrow \quad 14p = t \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{t}{14}.$$

Nesse sentido, como tanto o período P quanto o tempo t são grandezas continuas, podemos dizer que a função $P : R_+ \to R_+$ que relaciona o período P e a quantidade de tempo t pode ser expressa por:

$$P(t) = \frac{t}{14}.$$

Assim, chamando de M a função composta $r \circ P : R_+ \to (0; 1]$, temos que a quantidade M de massa de fósforo que continua radioativa em função da quantidade t, em dias, é expressa por:

$$M(t) = r \circ P(t) = r(P(t)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{P(t)} \quad \Rightarrow \quad M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}.$$

Isto é, obtêm-se outro caso especial de função exponencial, $f(x) = a^x$, onde $a = 1/2$.

Diante do exposto se ao invés de ter 1kg de Fósforo, o material inicialmente tivesse uma massa radioativa inicial m_0. Qual expressão determina a quantidade restante de massa radioativa m em função do tempo t?

Considerando que a diferença entre a questão anterior e a proposta agora se dá tão somente na massa inicial, podemos primeiramente nos basear na tabela 5.2, incluir esta nova condição e gerar a tabela 5.3 a seguir:

Em segundo lugar, dado que o período p já foi estabelecido anteriormente em função do tempo t, podemos dizer que a função composta $r \circ P : R_+ \to (0; m_0]$, expressa a quantidade m de

p **(período de 14 dias)**	**Radioatividade** (r)
0	$R(0) = m_0$
1	$R(1) = \frac{m_0}{2} = m_0 \cdot \frac{1}{2} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	$R(2) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$R(3) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$
p	$R(p) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^p$

Tabela 5.3: Generalização da quantidade de massa radioativa restante em cada período de 14 dias.

massa radioativa inicial m_0 que continua radioativa em função da quantidade de tempo t conforme expressão:

$$m = r \circ P = r\left(P(t)\right) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{P(t)} \quad \Rightarrow \quad m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}.$$

Ou seja, estabelecemos uma função que tem um comportamento semelhante ao exponencial, uma **função do tipo exponencial**.

Neste sentido analisemos uma prática comum dentro das operações bancárias, a realização de empréstimos para pessoas que necessitam de um valor específico para a aquisição de um bem material ou para pagar imediatamente algum tipo de dívida.

Por exemplo, ao pegar emprestado R$1.000,00 no banco, Felipe foi informado pelo gerente que, como forma de remuneração pelo empréstimo (juros), a instituição financeira cobra 1% a.m. (ao mês) do valor emprestado para cada mês que se passa sem a reposição do valor total ao banco.

Isto é, chamando de V o valor da dívida que cresce de acordo com a variação do tempo, representado por t, podemos montar a tabela 5.4 correspondente a variação dos valores de V em função de t:

t **(em meses)**	$V(t)$ **(em R$)**
0	$V(0) = 1000$
1	$V(1) = 1000 + 1000 \cdot 0,01 = 1000 \cdot (1 + 0,01) = 1000 \cdot 1,01$
2	$V(2) = (1000 \cdot 1,01) + (1000 \cdot 1,01) \cdot 0,01 = (1000 \cdot 1,01) \cdot (1 + 0,01) = 1000 \cdot 1,01^2$
3	$V(3) = (1000 \cdot 1,01^2) + (1000 \cdot 1,01^2) \cdot 0,01 = (1000 \cdot 1,01^2) \cdot (1 + 0,01) = 1000 \cdot 1,01^3$
4	$V(3) = (1000 \cdot 1,01^3) + (1000 \cdot 1,01^3) \cdot 0,01 = (1000 \cdot 1,01^3) \cdot (1 + 0,01) = 1000 \cdot 1,01^4$
$\vdots$	$\vdots$
t	$V(t) = 1000 \cdot 1,01^t$

Tabela 5.4: Valor da dívida a cada mês.

Perceba que o comportamento é parecido com o padrão das expressões anteriores. Ou seja, a função $V : N \to [1000; \infty)$ dada por:

$$V(t) = 1000 \cdot 1,01^t$$

Também é uma função do tipo exponencial.

5.2 Característica da função exponencial

Para analisar qual tipo de curva representa graficamente a função exponencial e do tipo exponencial, retomemos algumas funções dadas anteriormente.

Considerando o caso da função $P : N \to \{x \in N | x \geq 1\}$ é importante destacar para os alunos que tanto a quantidade P de pessoas contaminadas quanto o tempo t decorrido não são reais. Com isso, a função não pode ser representada graficamente através de uma linha continua. Cabe apenas representa-la através do conjunto de pares ordenados da figura 5.1, a seguir, tais que

$$P(t) = 2^t.$$

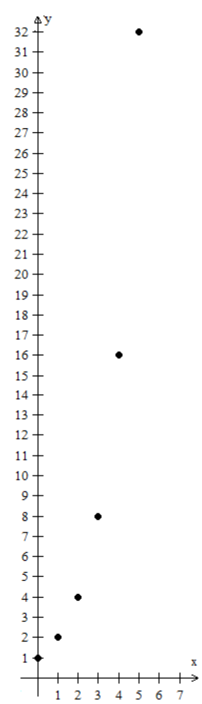


Figura 5.1: Esboço da função $P(t)$ com variáveis não reais.

Tal representação, do ponto de vista didático, auxilia muito os alunos perceberem que uma nova curva se formará. Num segundo momento, dado que o tempo é uma grandeza contínua, pode-se reconsiderar a questão, porém agora com variáveis reais, isto é, $P : R \to [1; \infty)$. Assim, a função pode ser representada pela curva presente na figura 5.2, a seguir.

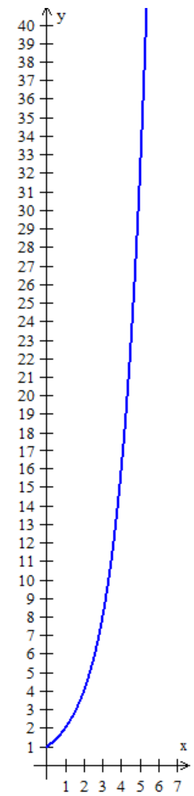


Figura 5.2: Esboço da função $P(t)$ com variáveis reais.

Embora incompleta, a representação dos pares ordenados já permitia intuir com os alunos que quanto mais o tempo passa maior é a quantidade de pessoas infectadas. Isto é, a função é crescente nos dois casos.

Por outro lado, também de forma intuitiva, pode-se inicialmente concluir que a função $M : R_+ \to (0;1]$ expressa por

$$M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$$

é tal que quanto mais o tempo passa, menor é a quantidade de massa que permanece radioativa. Logo, a função é decrescente. Para comprovar podemos observar o gráfico da função na figura 5.3, a seguir.

Sobre este decrescimento é possível perguntar ao aluno quanto tempo levará para que não exista nenhuma massa M radioativa? O que permite discutir a resolução da equação:

$$M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}} = 0$$

Como qualquer potência de base $1/2$ é diferente de zero, não existe solução para os números reais. Isto é, de forma geral conclui-se que, tanto a massa radioativa, quanto qualquer outro problema

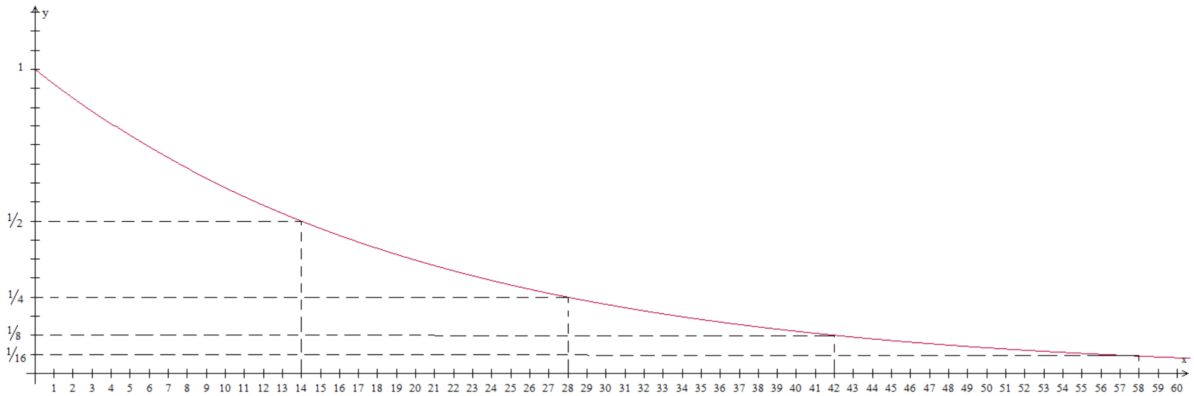


Figura 5.3: Esboço da função $M(t)$.

expresso por uma função exponencial decrescente será tão próxima quanto se queira de zero, mas nunca igual.

Mas e a função exponencial crescente?

Observando a figura 5.4, a seguir, percebe-se no gráfico da função exponencial crescente $f(x) = 2^x$ que a mesma se aproxima de zero conforme se diminui o valor de x, com $x \in R$.

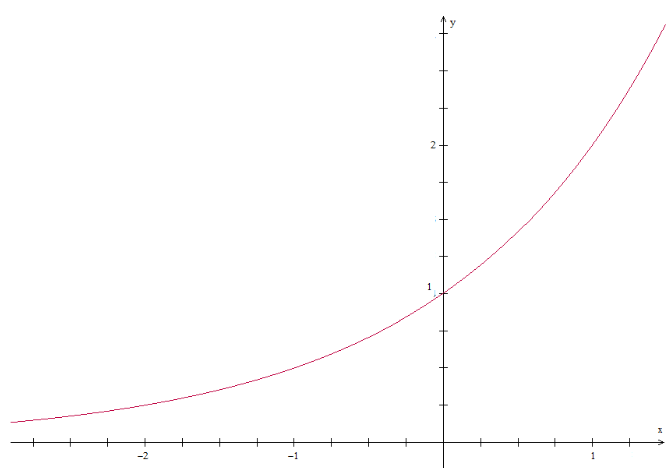


Figura 5.4: Esboço da função $f(x)$.

Assim, semelhante ao analisado na função decrescente, ao tentar resolver a equação exponencial

$$2^x = 0$$

conclui-se que a função exponencial crescente também se aproxima tanto quanto se queira de zero, mas nunca será igual a ele.

Tais conclusões também são válidas para a função do tipo exponencial. Para tal considere o problema do empréstimo bancário cuja função $V : N \to [1000; \infty)$ é expressa por:

$$V(t) = 1000 \cdot 1,01^t.$$

Ao questionar a possibilidade $V(t) = 0$, o que se deseja saber é se, em algum momento, é possível a dívida de R\$1000,00 reais, com taxa de juros mensal de 1%, se anular em algum momento t, desconsiderando a quitação da dívida. Em outras palavras, deseja-se calcular

$$V(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1000 \cdot 1,01^t = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,01^t = 0.$$

Perceba que durante o processo de resolução a função do tipo exponencial recai à mesma resolução da função exponencial. Portanto, temos que esta função também se aproximará tanto quanto se queira de zero, mas nunca será igual.

Outro fato importante que pode ser destacado para os alunos sobre a função exponencial consiste no ponto referente a intersecção da curva com o eixo das ordenadas. É fácil concluir que este ponto tem coordenadas $(0, 1)$, dado que para qualquer valor de a:

$$f(0) = a^0 = 1.$$

Por outro lado, a função do tipo exponencial não possui a mesma propriedade. Para confirmar esta evidência considere o caso da massa radioativa inicial m_0 do fósforo cuja quantidade de massa radioativa é dada pela função $m : R_+ \to (0; m_0]$, expressa por:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}.$$

Ao questionar o aluno sobre qual a quantidade de massa radioativa no inicio do experimento $(t = 0)$, obviamente ele informará que a função vale m_0, o que equivale dizer que a função passa pelo ponto de coordenada $(0, m_0)$. Fato comprovado, conforme segue:

$$m(0) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{14}} \quad \Rightarrow \quad m(0) = m_0.$$

Retomando a discussão de crescimento ou decrescimento, analisemos agora o comportamento da função do tipo exponencial. Para tal propomos a partir do gráfico da função exponencial crescente $f(x) = 2^x$, esboçado na figura 5.4, analisar o que se obtêm ao inserir e variar o sinal das constantes b e c da função $g(x) = ba^{cx}$.

Considerando $c = 1$, o gráfico da função do tipo exponencial $g(x) = 2^{1x}$ não terá alteração em seu crescimento, dado que a base da potência contínua maior do que 1. Por outro lado, para $c = -1$ a função do tipo exponencial fica expressa por $g(x) = 2^{-x}$, ou ainda,

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

O que torna a função decrescente, uma vez que a base da potência está entre 0 e 1.

Antes de analisar o que ocorre com a variação do sinal da constante b, observe que, dada a função exponencial $f(x) = a^x$ a função do tipo exponencial $g(x) = ba^x$ pode ser reescrita como:

$$g(x) = b \cdot a^x = b \cdot f(x).$$

Como por definição $f(x) > 0$ a função do tipo exponencial terá seu sinal dependente diretamente do sinal de b. Isto é, com $b > 0$ a função continua com todos os seus valores positivos, mantendo o padrão de (de)crescimento. Mas para $b < 0$ a função terá todos os seus valores negativos, invertendo o padrão de (de)crescimento, conforme se observa na figura 5.5.

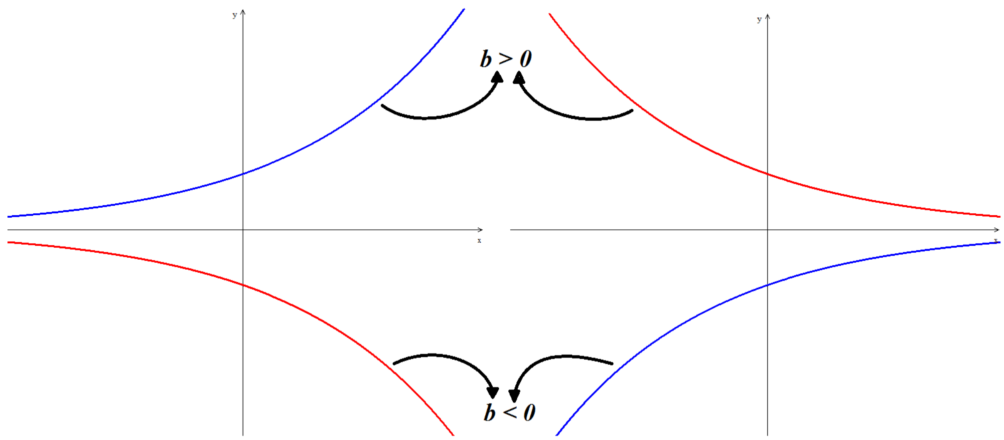


Figura 5.5: Variações gráficas da função do tipo exponencial.

Pode-se concluir que a função exponencial $f(x) = a^x$, não possui zero, sempre passa pelo ponto $(0, 1)$ e pode ser considerada crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Sobre a função do tipo exponencial $f(x) = ba^{cx}$ conclui-se que ela também não possui zero, sempre passa pelo ponto $(0, b)$ e tem seu crescimento, ou decrescimento, determinado pela combinação do valor de a e dos sinais das constantes b e c.

Por fim, para analisar se a inversa da função exponencial também é uma função, retomemos o primeiro exemplo dado, sobre o ritmo de infecção de uma determinada doença, expresso pela função $P : R_+ \to [1; \infty)$ tal que:

$$P(t) = 2^t,$$

onde o número de pessoas P infectadas por uma cepa de vírus é dada em função do tempo t, em dias.

Ao perguntar quanto tempo se passará para infectar um total de n indivíduos, o que se deseja saber, em outras palavras, é quanto vale t quando $P(t) = n$?

Perceba que para responder essa pergunta é necessário, primeiramente, saber se a função é injetora. Observando a figura 5.6 ao traçar retas imaginárias no gráfico da função P tem-se que cada valor de P está relacionado a um único valor de t, ou seja, a função é injetora.

Confirmando a injetividade, para comprovar que a inversa de P também é função verificaremos, agora, se a função P é sobrejetora em $[1; \infty)$. Para tanto, como feito nos capítulos anteriores, inverteremos a expressão da função e, em seguida, verificaremos se os valores de $n \in [1; \infty)$ são tais que $t \in R_+$.

Considerando que os logaritmos e suas propriedades já são de conhecimento do aluno, ao aplicá-los na expressão de P obtemos

$$n = 2^t \quad \Leftrightarrow \quad log_2 n = t.$$

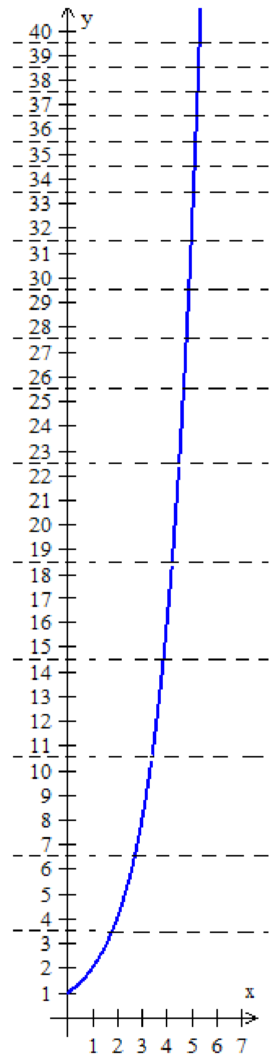


Figura 5.6: Análise gráfica da injetividade da função expressa por $P(t) = 2^t$.

Como para $n \geq 1$ tem-se $t \geq 0$ a função P é sobrejetora. Por também ser injetora, conclui-se que P é bijetora.

Assim, respondendo a questão proposta, o tempo t necessário para que n indivíduos sejam infectados é dado pela função $P^{-1} : [1; \infty) \rightarrow R_+$ expressa por:

$$T(n) = log_2 n.$$

Isto é, a inversa da função exponencial é uma **função logarítmica**, conforme veremos no próximo capítulo.

5.3 Sugestão de exercícios

A seguir propomos alguns exemplos de exercícios de aplicação de funções exponenciais e do tipo exponenciais.

(Exercicío I criado pelo autor)

I – Um biologista está estudando um determinado tipo de microrganismo e para tal dispõe de uma cultura bacteriana que no início do estudo ($t = 0$, em dias) ocupava 30% do recipiente. Se o crescimento populacional dessa espécie é tal que, a cada dia ela cresce 5% do espaço ocupado no dia anterior,

a) Qual a expressão que determina o percentual ocupado do recipiente em função dos dias decorridos a partir do início do estudo?

b) Qual o percentual ocupado após decorrer 20 dias do início do estudo?

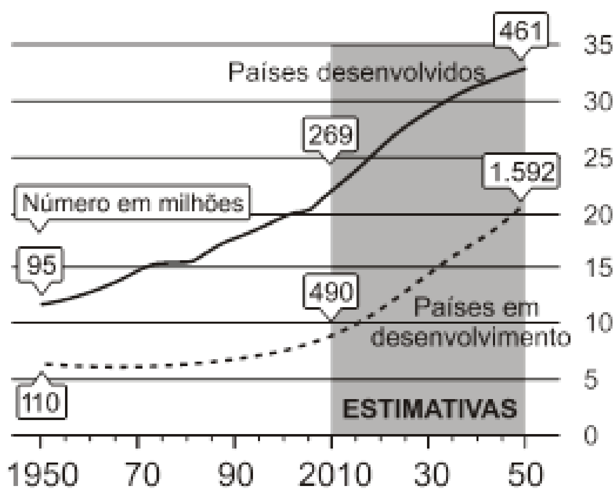
Resposta:

a) A expressão é $f(t) = 0,3 \cdot 1,05^t$.

b) O percentual é de, aproximadamente, 79,6%.

(Exercicío II extraído de prova do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem[14])

II – (Enem 2009) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: *Perspectivas da População Mundial.* ONU, 2009.
Disponível em: <wwww.economist.com>. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado)

Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes

no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre:
a) 490 e 510 milhões.
b) 550 e 620 milhões.
c) 780 e 800 milhões.
d) 810 e 860 milhões.
e) 870 e 910 milhões.
Resposta: Alternativa E.

Capítulo 6

Função Logarítmica

Tão logo o aluno se familiariza com o padrão exponencial, ele se vê diante de outro desafio, compreender e operacionalizar logaritmos, pois com essa nova ferramenta algébrica de manipulação de expressões exponenciais, lhe será apresentada uma nova função, a **função logarítmica** $f : R_+ - \{0\} \to R$ expressa por

$$f(x) = log_a x$$

com $0 < a \neq 1$.

6.1 Definição e característica da função logarítmica

No capítulo anterior, a última expressão obtida, inversa da função exponencial P, recaiu numa expressão com logaritmo. Diante disso, sugerimos que a introdução às funções logarítmicas utilize algumas das situações propostas para a função exponencial. Isso permitirá ao aluno, dentre outras vantagens, solidificar a relação de inversão entre as duas expressões.

Para analisar a representação gráfica da **função logarítmica**, retomamos, primeiramente, a função inversa $P^{-1} : [1; \infty) \to R_+$ expressa por:

$$T(n) = log_2 n.$$

que determina o tempo decorrido para que a propagação de uma determinada doença atinja n indivíduos. A curva que representa este caso especial de função logarítmica está representada na figura 6.1, a seguir.

Perceba que pela imagem podemos intuir juntamente com os alunos que quanto mais indivíduos infectados, maior o tempo decorrido da primeira infecção. Isto é, a função é crescente.

Outro exemplo para analise do gráfico de uma função logarítmica ocorre ao retomar a função $M : R_+ \to (0; 1]$ que determina o quanto de massa m continua radioativa em função do tempo t, em dias, através da expressão:

$$M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}.$$

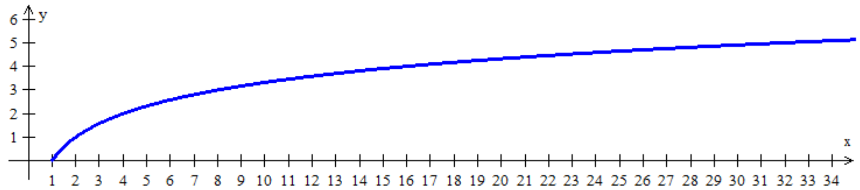


Figura 6.1: Esboço da função $T(n)$.

Ao propor o calculo de sua inversa obtemos novamente um caso especial de função logarítmica $M^{-1} : (0; 1] \rightarrow R_+$ expressa por

$$M^{-1}(m) = 14 \cdot log_{\frac{1}{2}} m.$$

a qual determina o tempo t necessário para se obter a quantidade m da massa de 1kg de fósforo que continua radioativa. Observando a curva representada na figura 6.2, é fácil concluir com os alunos que quanto mais massa radioativa, menor o tempo decorrido, ou seja, a função é decrescente.

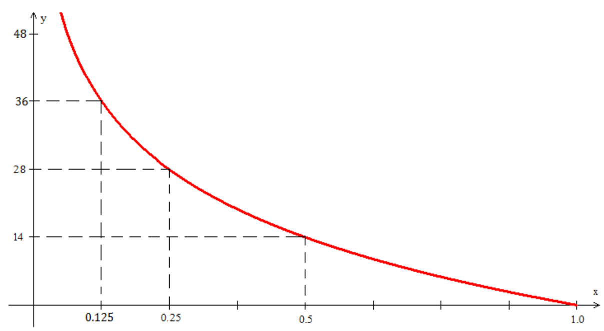


Figura 6.2: Esboço da função inversa M^{-1}.

Diante do exposto, e de forma análoga à função exponencial, pode-se intuir que a função logarítmica $f(x) = log_a x$, parece ser considerada crescente quando $a > 1$ - figura 6.3(a) - e decrescente quando $0 < a < 1$ - figura 6.3(b). Esta suposição é verdadeira, pode ser veirificada através de outros exemplos, mas a demonstrção dela está fora dos propósitos neste nível de ensino.

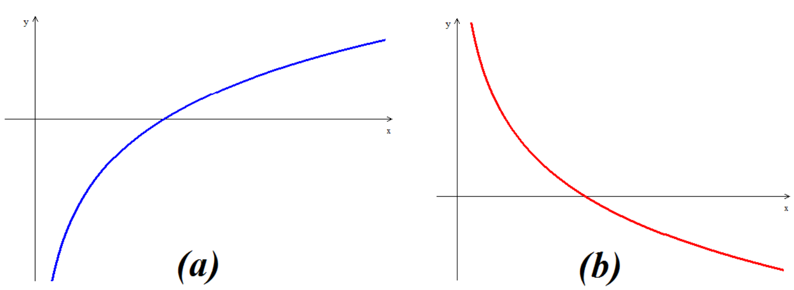


Figura 6.3: Esboço da função logarítmica crescente (a) e decrescente (b)

Após a compreensão da relação de inversão entre função exponencial e função logarítmica, propomos algumas situações cuja modelagem recai numa função logarítmica.

A primeira se refere à escala utilizada para classificar o som quanto ao seu **nível de intensidade**. Para tanto é preciso entender que ouvir um som consiste na percepção da variação da pressão do ar causada por uma onda sonora. Estas ondas são resultado da vibração das partículas do meio em que elas se propagam.

O aparelho auditivo tem a capacidade de converter em estímulos nervosos a variação da pressão no ar. Para distinguir os sons, percebendo-os fraco ou forte, dentre outros fatores, citamos a dependência da fonte que o gerou (por exemplo, um instrumento musical, um motor ligado, uma explosão), da distância entre a geração e a percepção e do meio em que a onda se propagou (ar, água, etc.).

Esta percepção está relacionada à **intensidade sonora** cuja unidade de medida é o $watt/m^2$. Por exemplo, a intensidade sonora fundamental, que é o limiar de audibilidade, correspondente ao valor mínimo de intensidade, abaixo do qual é impossível ouvir algo, vale $I_0 = 10^{-12} watts/m^2$. Já o som considerado limite para o conforto acústico, com intensidade $I_1 = 10^{-7} watts/m^2$, corresponde à intensidade sonora típica de uma sala de aula. A intensidade sonora mais intensa que o ouvido humano consegue tolerar é $I_2 = 1 watt/m^2$.

Neste sentido, considerando que a fisiologia do ouvido humano não percebe a variação da intensidade sonora de forma linear, ficou-se estabelecido que o **nível de intensidade** de um som é dado pela expressão:

$$N(I) = 10 log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

onde N é o nível de intensidade sonora, em dB (decibéis), e I é a intensidade em estudo (ou produzida). Ou ainda, substituindo $I_0 = 10^{-12}$ podemos simplificar a expressão para:

$$N(I) = 10 log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10\left[log(I) - log 10^{-12}\right] \quad \Rightarrow \quad N(I) = 10 log(I) + 120.$$

Diante dela, algumas situações práticas podem ser trabalhadas em sala de aula. Por exemplo, sabendo que o tímpano do ouvido humano se rompe imediatamente quando exposto a um nível intensidade sonora de $N = 140$dB, quantas vezes a intensidade sonora I, deste nível, é maior que a intensidade sonora $1 watt/m^2$, que é a intensidade tolerável pelo ouvido humano?

Em outras palavras, deseja-se saber qual valor de I satisfaz a igualdade $N(I) = 140$. Resolvendo a equação obtemos:

$$N(I) = 10 log(I) + 120 = 140 \quad \Rightarrow \quad 10 log(I) = 20 \quad \Rightarrow \quad log(I) = 2 \quad \Rightarrow \quad I = 10^2 watt/m^2.$$

Portanto, a intensidade sonora de 140db é 100 vezes maior do que a intensidade tolerada pelo ouvido humano.

A segunda situação que resulta numa expressão logarítmica diz respeito à forma de classificar a magnitude dos abalos sísmicos (terremotos) em termos da quantidade de energia liberada no foco do mesmo, chamado de epicentro. Dentre os motivos que geram este abalo (atividade vulcânica e falhas geológicas), o principal é o encontro de placas tectônicas.

A escala Ritcher, proposta em 1935, também conhecida como escala de magnitude local, relaciona um número M_L ao nível de energia liberada no sismo. Para tal, é necessário comparar a energia liberada E (em kW/h) com a energia de referência $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$, de modo que:

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

Ou ainda, utilizando as propriedades dos logaritmos:

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2}{3} \cdot \left\{logE - log\left(\frac{1}{7 \cdot 10^{-3}}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{2}{3} \cdot \left\{logE + \left[log7 + log\left(10^{-3}\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{2}{3} \cdot logE + \frac{2}{3} \cdot [log7 - 3].$$

Que aproximado para duas casas decimais resulta em:

$$M = 0,67 \cdot logE - 1,44.$$

Como exemplo de atividade, propomos um trabalho integrado com o professor de geografia para fazer um comparativo dos efeitos destrutivos que alguns terremotos causaram ao longo da história recente. Para tanto, dentre os diversos terremotos significativos, destacamos o Sismo de Valdivia, que ocorreu em 1960 e atingiu, principalmente, a cidade de Valdivia, no Chile, e o terremoto de 2010 que devastou o Haiti.

Do ponto de vista matemático, uma das perguntas que pode ser feita se refere a comparação das energias dispendidas nestes dois tremores. Isto é, considerando que o sismo no Chile atingiu 9,5 pontos na escala Ritcher e o do Haiti 7,0, quantas vezes a energia dispendida no primeiro foi maior que no segundo terremoto?

Sejam E_1 e E_2 as energias liberadas no terremoto no Chile e no Haiti, respectivamente. A primeira providência para responder a questão é determinar os valores de E_1 e E_2 resolvendo as seguintes equações:

$$9,5 = 0,67 \cdot logE_1 - 1,44 \quad \Rightarrow \quad 10,94 = 0,67 \cdot logE_1 \quad \Rightarrow \quad logE_1 \cong 16,33 \quad \Rightarrow \quad E_1 = 10^{16,33}$$

$$\Rightarrow \quad E_1 \cong 2,138 \cdot 10^{16} kW/h$$

e

$$7 = 0,67 \cdot logE_2 - 1,44 \quad \Rightarrow \quad 8,44 = 0,67 \cdot logE_2 \quad \Rightarrow \quad logE_2 \cong 12,6 \quad \Rightarrow \quad E_2 = 10^{12,6}$$

$$\Rightarrow \quad E_2 \cong 3,981 \cdot 10^{12} kW/h.$$

Com essas informações, ao comparar as duas energias temos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{2,138 \cdot 10^{16}}{3,981 \cdot 10^{12}} = \frac{2,138}{3,981} \cdot 10^{16-12} = 5,37 \cdot 10^3$$

Isto é, a energia do terremoto no Chile foi 5370 vezes maior que no Haiti.

Outra situação refere-se à proposta de comparação de energia e poder de destruição de um terremoto quando comparado com algumas armas de destruição em massa. Isto pode ser feito, por exemplo, ao questionar quantas bombas atômicas semelhantes a de Hiroshima (de 1945), de nível 5, são necessárias para atingir a energia liberada no sismo de Valdivia (de 1960), de nível 9,5?

Perceba que numa questão como essa, abre-se espaço para comparar o potencial destrutivo do maior terremoto mundial já registrado, com a maior ofensiva nuclear efetivada pelo homem.

Considerando que já possuímos a quantidade de energia liberada no sismo de Valdivia, para calcular a razão ente as duas energias basta fazer $M = 5$, ou seja,

$$5 = 0,67 \cdot logE - 1,44 \quad \Rightarrow \quad 6,44 = 0,67 \cdot logE \quad \Rightarrow \quad logE \cong 9,61 \quad \Rightarrow \quad E = 10^{9,61}$$

$$\Rightarrow \quad E \cong 4,074 \cdot 10^9 kW/h.$$

Com isso obtemos a razão:

$$\frac{2,138 \cdot 10^{16}}{4,074 \cdot 10^9} \quad \Rightarrow \quad \frac{2,138}{4,074} \cdot 10^{16-9} \quad \Rightarrow \quad 5,25 \cdot 10^6.$$

Isto é, a energia liberada pelo sismo de Valdivia é equivalente a 5.250.000 bombas atômicas com potencial igual ao de Hiroshima.

O último exemplo que sugerimos se refere a uma das primeiras propostas de utilização da matemática para prever o crescimento da população humana de uma determinada região.

Este modelo foi proposto pelo economista inglês T. R. Malthus em 1798 quando publicou o ensaio *An Essay on the Principle of Population*. Nele, o crescimento de uma população é considerado proporcional à população em cada instante, de modo que não há restrições de alimento, ou existência de guerras, epidemias ou catástrofes. Além de todos os indivíduos serem considerados idênticos.

Considerando o tempo t como grandeza contínua, o modelo Malthusiano para a dinâmica de populações é dado pela expressão:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt},$$

onde P_0 é a população inicial, k é a taxa de crescimento da população e P é a população no tempo t, em anos, meses, dias etc.

Do ponto de vista de função logarítmica, sendo P_0 e k constantes, propomos que seja determinada a expressão do tempo decorrido t em função da população P. Isto é, deseja-se saber a inversa da função, obtida ao fazer o que segue:

$$P = P_0 \cdot e^{kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P_0} = e^{kt} \quad \Rightarrow \quad ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = kt \quad \Rightarrow \quad t(P) = \frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{P}{P_0}\right).$$

Diante disso, propomos a seguinte situação problema como exemplo. Pelos dados oficiais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) no censo demográfico realizado em 2010, a população da cidade de Campinas possuía 1.080.113 indivíduos. Para 2014, segundo o próprio IBGE, a estimativa da população é de 1.154.617 indivíduos. Considerando a taxa de crescimento médio anual da população entre 2010 e 2014 e ritmo de crescimento exponencial, quanto tempo levará para a população de 2010 atingir 2 milhões de habitantes?

Inicialmente vamos determinar a taxa média anual k de crescimento:

$$k = \left(\frac{1.154.617 - 1.080.113}{1.080.113}\right) \div 4 \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{74.504}{1.080.113}\right) \div 4 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{0,0689}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 0,0172.$$

Por fim, substituindo os valores na inversa obtida anteriormente, o tempo, em anos, decorrido para que população de 2010 atinja 2 milhões é:

$$t = \frac{1}{0,0172} \cdot ln\left(\frac{2.000.000}{1.080.113}\right) \quad \Rightarrow \quad t \cong \frac{1}{0,0172} \cdot ln(1,8516) \quad \Rightarrow \quad t \cong 58,1395 \cdot ln(1,8516)$$

$$\Rightarrow \quad t \cong 58,1395 \cdot 0,6161 \quad \Rightarrow \quad t \cong 36.$$

6.2 Sugestão de exercícios

A seguir propomos algumas questões sobre função logarítmica propostos em situações problema.

(Exercicío I criado pelo autor)

I – Um colecionador comprou uma antiguidade por 8600 dólares e verificou que o valor de venda desse objeto segue aproximadamente a função $f(t) = 8000 + 200log_2(t+8)$, onde t é o número de anos decorridos após sua compra. Determine o valor de venda da antiguidade após 8 anos e após 56 anos.

Resposta: O valor de venda é 8.800 dólares e 9.600 dólares, respectivamente.

(Exercicíos II extraído de prova do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem[14])

II – (Enem 2011) Texto para a questão.

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina \cdot cm$. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY, Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em $dina \cdot cm$)?
a) $10^{-5,10}$ b) $10^{-0,73}$ c) $10^{12,00}$ d) $10^{21,65}$ e) $10^{27,00}$
Resposta: Alternativa E.

(Exercicíos III a V extraídos de banco de questões de exames de acesso de universidades nacionais[16].)
III – (Unicamp 2013) Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$$T(t) = (T_0 - T_{AR})\, 10^{-t/12} + T_{AR}$$

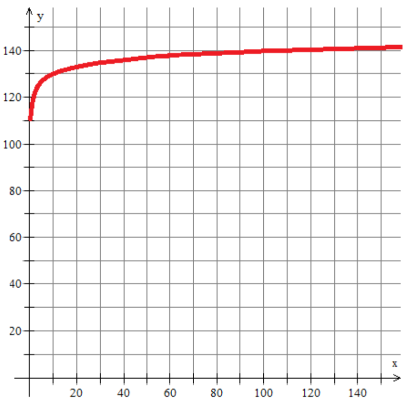
sendo t o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:
a) $12\,[log(7) - 1]$ minutos.
b) $12\,[1 - log(7)]$ minutos.
c) $12log(7)$ minutos.
d) $[1 - log(7)]\,/12$ minutos.
Resposta: Alternativa C.

IV – (Unicamp 2012) Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma $P(T) = a \cdot 10^{bT}$, em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

Temperatura °C	**Perda anual de capacidade (%)**
0	2 = 1,6
55	4 = 20

Com base na expressão de $P(T)$ e nos dados da tabela,

a) esboce, abaixo, a curva que representa a função $P(T)$, exibindo o percentual exato para $T = 0$ e $T = 55$;
b) determine as constantes a e b para a bateria em questão. Se necessário, use $log_{10}2 = 0,30$, $log_2 3 = 0,48$ e $log_{10}5 = 0,70$.
Resposta:
a)



b) As constantes são $a = 1,6$ e $b = 0,02$.

V – (Unicamp 2011) Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após T anos de uso é dado pela seguinte função: $P(T) = 100\left(1 - 2^{-0,1T}\right)$
a) Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas?
b) Os novos computadores dessa empresa vêm com um processador menos suscetível a falhas. Para o modelo mais recente, embora o percentual de processadores que apresentam falhas também seja dado por uma função na forma $Q(T) = 100\left(1 - 2^{cT}\right)$, o percentual de processadores defeituosos após 10 anos de uso equivale a 1/4 do valor observado, nesse mesmo período, para o modelo antigo (ou seja, o valor obtido empregando-se a função $P(T)$ acima). Determine, nesse caso, o valor da constante c. Se necessário, utilize $log_2 7 \approx 2,81$.
Resposta:
a) Será necessário 20 anos.
b) O valor da constante é $c = -0,019$.

VI – (Unicamp 2003) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por:

$$T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$$

onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de –18°C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0°C após 90 minutos e chegou a –16°C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.
b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas (2/3)°C superior à temperatura ambiente.
Resposta:
a) Os valores são $\alpha = 54$ e $\beta = -1/90$.
b) O valor de t é 360 minutos.

Capítulo 7

Equação Logística e suas aplicações

No capítulo anterior, baseado no modelo malthusiano, a população do último exemplo crescia sem restrições. Nele, solicitamos que o tempo fosse expresso em função da quantidade de pessoas de modo que pudessemos saber quanto tempo levaria para a população de Campinas atingir 2 milhões de habitantes.

Contudo, mesmo diante de sua importância, é preciso dizer que o modelo malthusiano não atende plenamente as projeções de população a longo prazo. Isso ocorre uma vez que este modelo desconsidera, dentre outras coisas, a disputa por espaço e alimento, a variação da taxa de natalidade e mortalidade e a incidência de moléstias. Estes fatos, dentre outros, interferem no ritmo de crescimento de uma população (Ricklefs [20], p.224).

Diante disso, apresentamos a partir de agora, um modelo para a dinâmica de populações que considera a taxa de crescimento populacional variável. Este modelo foi proposto inicialmente em 1845 pelo matemático belga Pierre François Verhulst (1804–1949) após avaliar estatísticas populacionais. Porém, tornou-se amplamente conhecido a partir dos estudos do biólogo americano Raymond Pearl (1879–1940) e do engenheiro elétrico Lowell Jacob Reed (1886–1966) [18], quando publicaram em 1920 um estudo sobre o crescimento populacional dos Estados Unidos a partir de 1790. Para ambos os estudos, a validade do modelo se dá para populações fechadas (sem imigração ou emigração), que não possuam estrutura genética específica ou restrição de idade/tamanho. Além disso, outras condições são exigidas: crescimento contínuo sem tempos de retorno, existência de um número máximo de indivíduos suportado pelo ambiente (chamada capacidade de suporte do meio) cujo crescimento é controlado pela competição interna à espécie.

Conhecida atualmente como **equação logística**, o modelo proposto por Verhulst, e utilizado por Pearl e Reed, é solução de uma equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha\left(P(t)\right) \cdot P(t)$$

onde P é a população num instante t e α é a taxa de variação da população em função da quantidade P de indivíduos num tempo t. Isto é, diferentemente do modelo malthusiano, ao invés de considerar uma taxa de crescimento constante, este modelo estabelece que a taxa varia de acordo com a quantidade de indivíduos.

Neste sentido, foi proposto e utilizado em ambos os estudos, como taxa de crescimento a função

$\alpha : R \rightarrow [0; K]$ expressa por

$$\alpha\left(P(t)\right) = \lambda \cdot \left(\frac{K - P(t)}{K}\right),$$

onde λ representa a taxa de crescimento quando não existe nenhum fator inibidor, ou seja, a taxa é dada apenas pela diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade. A constante K representa a capacidade de suporte do meio, ou seja, a quantidade máxima de indivíduos que o ambiente pode suportar em termos de espaço e oferta de comida, por exemplo. Geralmente seu valor é estimado para um número de indivíduos que o ambiente pode manter sem aumento ou redução abrupto.

Considerando que P_0 é a população no início do experimento, isto é, $P(0) = P_0$, ao resolvermos a equação diferencial obtemos a função $P : R \rightarrow [0; K]$ cuja expressão é

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$$

que representa, de forma prática, uma aplicação da **equação logística**.

Embora a obtenção desta expressão não faça parte do currículo de matemática no Ensino Médio é importante destacar que a função P pode ser estudada como caso especial da composição de uma função fracionária com outra exponencial. Além disso, destacamos que este modelo matemático de dinâmica populacional é parte integrante do currículo do 1º ano do Ensino Médio, na disciplina de Biologia. Assim sendo, propomos a seguir uma situação que pode ser trabalhada pelo professor de matemática em conjunto tanto com o professor de biologia, quanto de geografia, cada qual analisando as informações dentro de sua especificidade.

Segundo o IBGE, a cidade de São Paulo é a mais populosa do Brasil em 2014. Pelo censo demográfico, a estimativa populacional é de 11.895.893 indivíduos e com território de $1.521,101 km^2$, a densidade demográfica estimada é de $7.820,58 hab/km^2$.

Na décima quarta posição das cidades mais populosas do Brasil, aparece a cidade de Campinas com população estimada em 1.154.617 indivíduos. Possuindo um território com $794,433 km^2$, a densidade demográfica estimada é de $1.453,38 hab/km^2$.

Considerando que o modelo de dinâmica populacional é a equação logística, com taxa de crescimento anual de 1,72% e limite máximo de ocupação territorial projetado para $10.000 hab/km^2$ podemos elaborar a seguinte questão: quanto tempo levará para a população estimada em Campinas, atingir a atual densidade demográfica estimada de São Paulo?

Para resolver a questão é preciso primeiramente estabelecer as constantes necessárias na equação logística. Já sabemos que a taxa de crescimento é $\lambda = 0,0172$ e a população inicial é $P_0 = 1.154.617$, faltando apenas calcular a capacidade de suporte K que, no caso, é o número de habitantes para o limite máximo.

Dado que o limite máximo projetado para Campinas é de uma densidade populacional de $10.000 hab/km^2$ e que Campinas possui uma área de $794,433 km^2$, o número de habitantes da capacidade K é:

$$\frac{K}{794,433} = 10.000 \quad \Rightarrow \quad K = 10.000 \cdot 794,433 \quad \Rightarrow \quad K = 7.944.330.$$

Assim, a equação logística da situação é

$$P(t) = \frac{7.944.330}{1 + \left(\frac{7.944.330}{1.154.617} - 1\right) e^{-0,0172 \cdot t}} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{7.944.330}{1 + 5,8805 e^{-0,0172 \cdot t}}$$

onde 5,8805 é um valor aproximado.

Retornando à questão central, o segundo passo necessário para resolver o problema é determinar a população P que Campinas deve ter para atingir a densidade demográfica atual de São Paulo, que é de $7.820,58 hab/km^2$. Isto é, o número de habitantes é

$$7.820,58 = \frac{P}{794,433} \quad \Rightarrow \quad P = 7.820,58 \cdot 794,433 \quad \Rightarrow \quad P \cong 6.212.927.$$

Com isso, o tempo necessário para a cidade de Campinas, nesse ritmo de crescimento atual, atingir a presente densidade de São Paulo é:

$$6.212.927 = \frac{7.944.330}{1 + 5,8805 e^{-0,0172 \cdot t}} \quad \Rightarrow \quad 1 + 5,8805 e^{-0,0172 \cdot t} = \frac{7.944.330}{6.212.927}$$

$$\Rightarrow \quad 5,8805 e^{-0,0172 \cdot t} \cong 1,2787 - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-0,0172 \cdot t} \cong \frac{0,2787}{5,8805} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,0172 \cdot t} \cong 0,0474$$

$$\Rightarrow \quad ln(e)^{-0,0172 \cdot t} \cong ln(0,0474) \quad \Rightarrow \quad -0,0172 \cdot t \cong -3,0491 \quad \Rightarrow \quad t \cong 177,27.$$

Ou, aproximadamente, 177 anos e 3 meses.

O gráfico da figura 7.1 representa a equação logística do problema. A partir dele, é possível que as disciplinas citadas anteriormente façam as análises devidas.

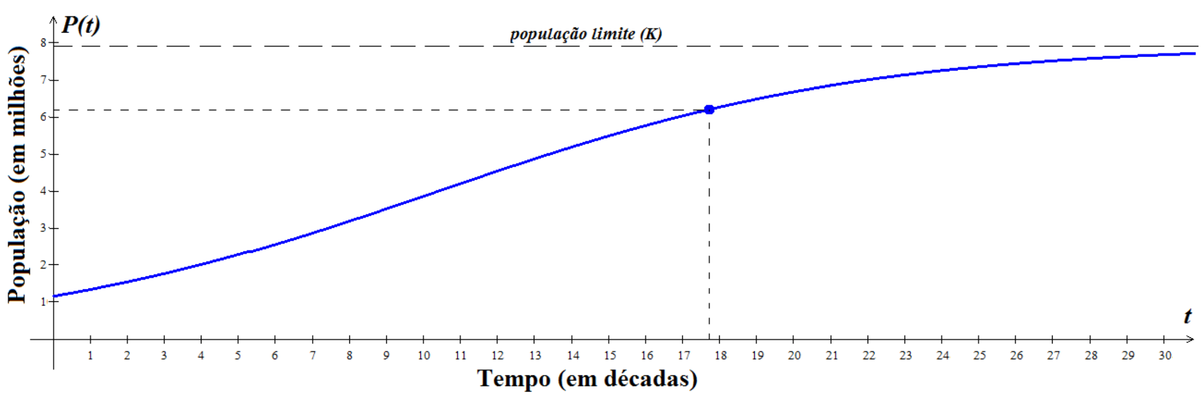


Figura 7.1: Variação da população de Campinas segundo modelo logístico.

Pensemos agora em outro exemplo.

Diante da importância do agronegócio na economia nacional, uma grande preocupação das autoridades sanitárias se dá no controle das pragas.

De acordo com publicação de agosto de 2013, da Companhia Nacional de Abastecimento – CONAB [1] –, referente ao segundo levantamento da safra de cana de açúcar no Brasil, o estado de São Paulo possui a maior área cultivada com esta cultura. Contando com 4.515.360 hectares, ou ainda, 51,31% da quantidade nacional.

Nesta cultura, uma das pragas que se destaca é a *Diatraea saccharalis*, vulgo broca da cana. Os principais danos diretos por ela gerados são: morte da gema apical, também chamado "coração morto", quebra da planta, encurtamento dos entrenós e redução da produtividade. Indiretamente ela permite a entrada de microorganismos que afetam negativamente a produção de açúcar e a fermentação alcoólica, segundo Caixeta [6].

Além disso, na maioria das infestações, num primeiro momento, com grande oferta de alimento, a população de pragas pode criar a situação descrita como superpopulação. Sem intervenção do produtor, a quantidade de indivíduos da população pode chegar a ser maior do que a capacidade suporte do meio.

Considerando como modelo de dinâmica populacional a equação logística e que todo o território paulista destinado ao cultivo de cana de açúcar possui uma superpopulação P_0 de *D. saccharalis* referente a 64 lagartas por metro quadrado, podemos propor a seguinte questão: quanto tempo levará para que essa superpopulação se reduza a 24 lagartas por metro quadrado, se a capacidade suporte do meio é 8 lagartas por metro quadrado e a taxa de crescimento é de 5% ao mês?

Semelhantemente ao que fizemos no exemplo anterior, a solução dessa questão necessita estabelecer as constantes necessárias da equação logística. Já sabemos que a taxa de crescimento é $\lambda = 0,05$.

Sabendo que cada hectare corresponde a $10.000m^2$ e inicialmente existem 64 lagartas por metro quadrado, a quantidade de lagartas presentes na superpopulação P_0 de *D. saccharalis* nos 4.515.360 hectares de território paulista destinado ao cultivo de cana de açúcar é:

$$P_0 = 4.515.360 \cdot (64 \cdot 10.000) \quad \Rightarrow \quad P_0 = 4.515.360 \cdot 640.000 \quad \Rightarrow \quad P_0 = 2.889.830.400.000.$$

Como a capacidade suporte do meio é 8 lagartas por metro quadrado, o número K de lagartas é

$$K = 4.515.360 \cdot (8 \cdot 10.000) \quad \Rightarrow \quad K = 4.515.360 \cdot 80.000 \quad \Rightarrow \quad K = 361.228.800.000.$$

Agora, em posse das constantes, escrevemos a seguinte equação logística da situação:

$$P(t) = \frac{361.228.800.000}{1 + \left(\frac{361.228.800.000}{2.889.830.400.000} - 1\right) e^{-0,05 \cdot t}} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{3,612288 \cdot 10^1 1}{1 + (0,125 - 1)\, e^{-0,05 \cdot t}}$$

$$\Rightarrow \quad P(t) = \frac{3,612288 \cdot 10^1 1}{1 - 0,875 e^{-0,05 \cdot t}}.$$

Retomando a questão, para calcular o tempo necessário para que essa superpopulação P_0 se reduza a 12 lagartas por metro quadrado, temos que a quantidade P de lagartas presentes no território, referentes a essa razão, é

$$P = 4.515.360 \cdot 10.000 \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad P = 541.843.200.000.$$

Logo, o tempo t, em meses, procurado é:

$$5,418432 \cdot 10^11 = \frac{3,612288 \cdot 10^11}{1 - 0,875e^{-0,05 \cdot t}} \quad \Rightarrow \quad 1 - 0,875e^{-0,05 \cdot t} = \frac{3,612288x}{5,418432} \cdot 10^{11-11}$$

$$\Rightarrow \quad -0,875e^{-0,05 \cdot t} = \frac{2}{3} - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-0,05 \cdot t} = \frac{-\frac{1}{3}}{-0,875} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,05 \cdot t} \cong 0,7619$$

$$\Rightarrow \quad lne^{-0,05 \cdot t} \cong ln(0,7619) \quad \Rightarrow \quad -0,05 \cdot t \cong -0,2719 \quad \Rightarrow \quad t \cong 5,44.$$

Ou ainda, aproximadamente, 5 meses e 13 dias.

O gráfico que representa essa situação pode ser visualizado na figura 7.2.

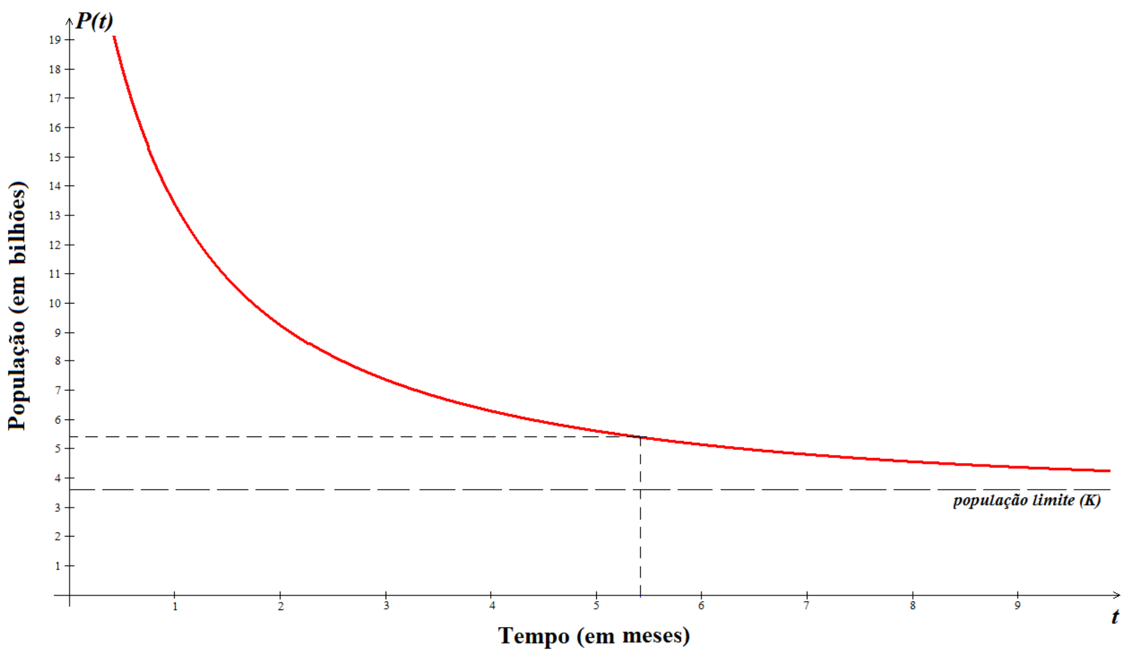


Figura 7.2: Variação da população de D. saccharalis segundo modelo logístico.

A seguir veremos como cada constante da equação logística altera o traçado da curva.

7.1 Estudo do gráfico da equação logística

A curva que representa a equação logística é denominada sigmoide por se assemelhar a um S (ou sigma). Vejamos a seguir algumas de suas particularidades. Para tal vamos analisar o que ocorre com a sigmoide quando variamos as constantes da equação logística expressa por

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

Primeiramente, para $K \to 0$ temos que a restrição ao crescimento da população se anula. Logo, retornamos ao modelo de dinâmica populacional malthusiano, expresso no capítulo anterior por uma função do tipo exponencial.

Em segundo lugar, vale a pena destacar não haver sentido em $P_0 \leq 0$ e $K \leq 0$. Assim, vamos discutir o comportamento dessa função a partir do valor da variação do sinal da constante λ.

Na figura 7.3 se vê que para $\lambda > 0$ e $P_0 < K$ a sigmoide é crescente. Aliás, considerando $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 > 1$, percebe-se que quanto maior for λ mais rápido a curva se aproxima da capacidade de suporte do meio.

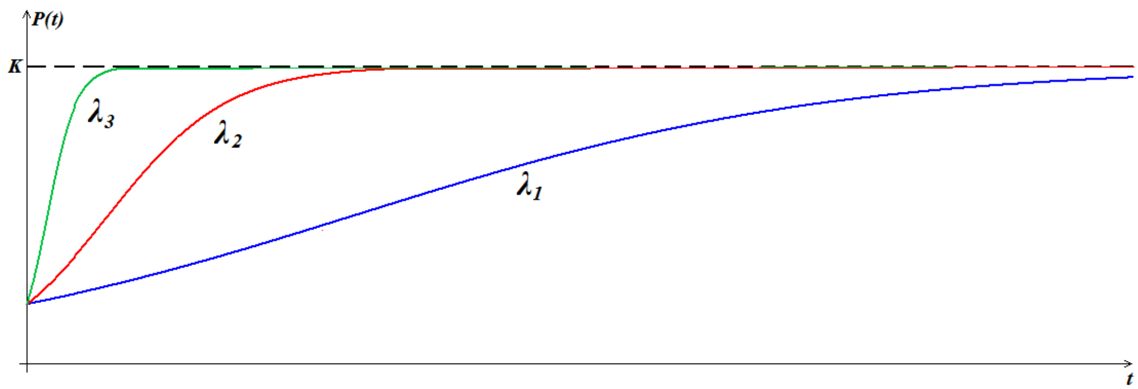


Figura 7.3: Exemplo de variação da sigmoide para $P_0 < K$ e $\lambda > 0$.

Este ritmo de aproximação permanece para $P_0 > K$. Aliás, nesta condição a sigmoide torna-se decrescente conforme se nota no gráfico da figura 7.4.

No caso da taxa de crescimento $\lambda = 0$, é fácil entender que não há crescimento nem decrescimento da população, ou seja, $P(t) = P_0$. Assim, pensemos agora na situação em que $\lambda < 0$.

Considerando $P_0 < K$ e $\lambda < 0$ vemos na figura 7.5 que a sigmoide não só é decrescente, como também tende a zero. Nesse sentido, dado $-1 < \lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 < -1$, podemos notar que quanto menor o valor de λ, mais rápido a curva se aproxima de zero.

Por fim, pensemos no comportamento da curva para $P_0 > K$ e $\lambda < 0$. Dado que $-1 < \lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 < -1$, se vê na figura 7.6 que a sigmoide é crescente e possui uma assíntota vertical que varia sua posição de acordo com o valor de λ.

A presença desta assíntota se deve a condição de existência da função, ou seja,

$$1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda t} \neq 0.$$

Como $\lambda < 0$ e $P_0 > K$, podemos fazer $\lambda = -c$ e afirmar, sem perda de generalidade, que se:

$$0 < \frac{K}{P_0} < 1$$

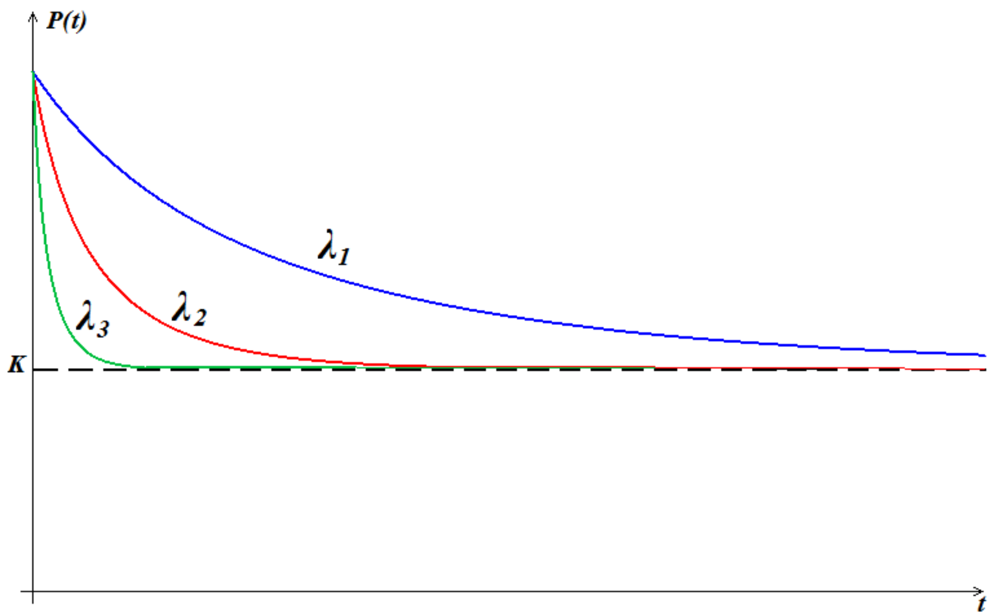


Figura 7.4: Exemplo de variação da sigmoide para $P_0 > K$ e $\lambda > 0$.

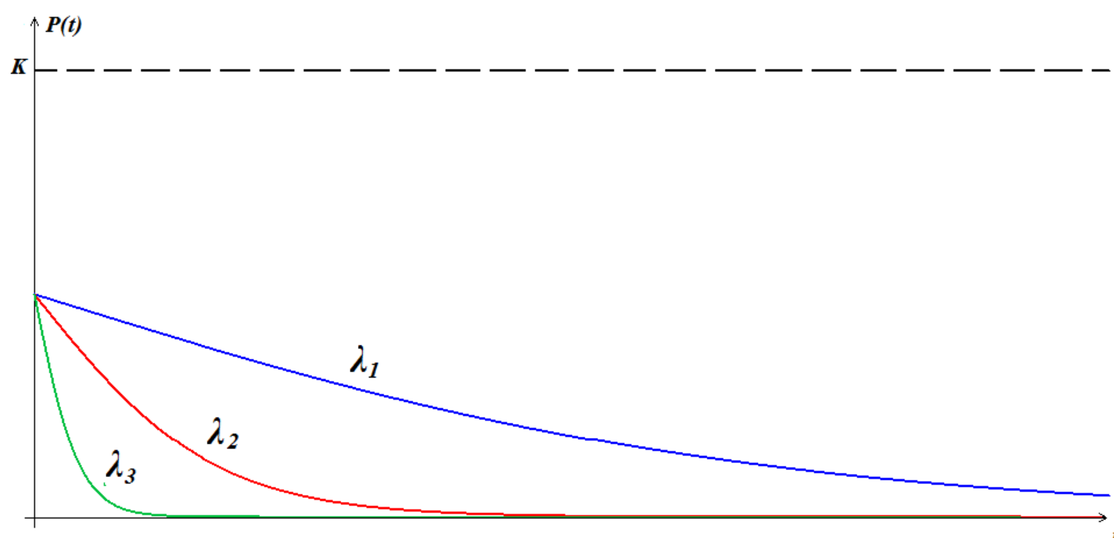


Figura 7.5: Exemplo de variação da sigmoide para $P_0 < K$ e $\lambda < 0$.

então

$$\left(\frac{K}{P_0} - 1\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) = -b$$

Assim, manipulando a expressão da condição de existência obtemos:

$$1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda t} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - be^{ct} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad be^{ct} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad e^{ct} \neq \frac{1}{b}$$

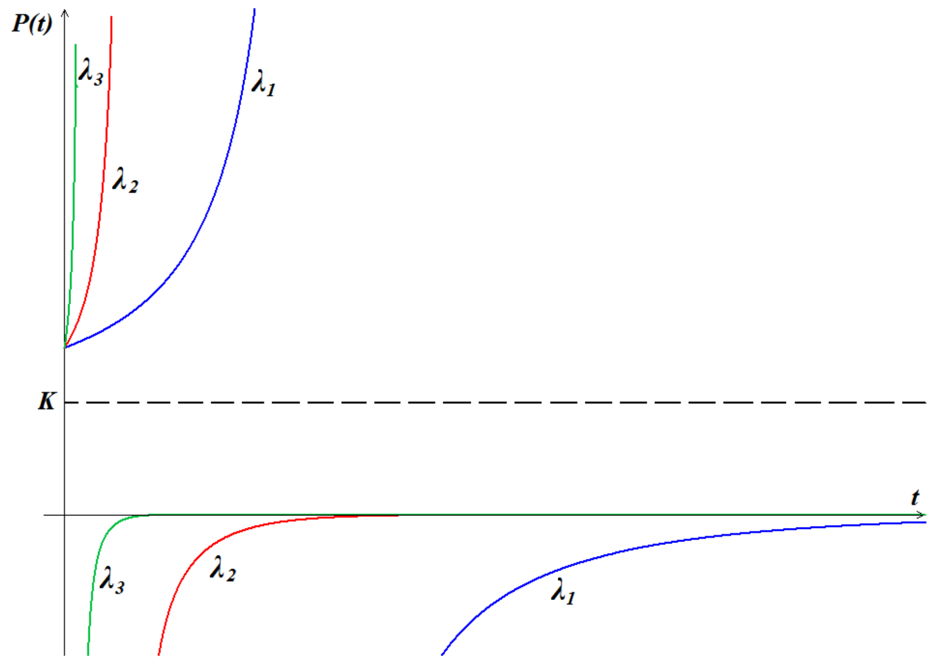


Figura 7.6: Exemplo de variação da sigmoide para $P_0 > K$ e $\lambda < 0$.

$$\Rightarrow \quad ct \neq ln\Big(\frac{1}{b}\Big) \quad \Rightarrow \quad t \neq \frac{1}{c} \cdot ln(b)^{-1} \quad \Rightarrow \quad t \neq -\frac{1}{c} \cdot ln(b),$$

ou ainda,

$$t \neq \frac{1}{\lambda} \cdot ln\Big(1 - \frac{K}{P_0}\Big).$$

Do ponto de vista biológico, apenas a situação de $P_0 > K$ e $\lambda < 0$, representada na figura 7.6, não possui significado prático. Em outras palavras, considerar uma população inicial maior que a capacidade suporte do meio e uma taxa de crescimento negativa é incoerente com a realidade.

Isso ocorre por duas razões. Primeira, se a população inicial é maior que a capacidade suporte então a taxa de crescimento obrigatoriamente é positiva, pois $P_0 > K$ somente quando a taxa de natalidade é maior que a taxa de mortalidade, ou seja, $\lambda > 0$. Segunda razão, se a taxa de crescimento é negativa, então a taxa de mortalidade é maior que a taxa de natalidade, e isso só é possível para uma população que está abaixo da capacidade suporte, pois $\lambda < 0$ não permite o crescimento da população, e consequentemente, aproximação da capacidade suporte, ou seja, $P_0 < K$.

7.2 Sugestão de exercícios

A seguir propomos alguns exemplos de exercícios de aplicação de funções exponenciais e do tipo exponenciais.

(Exercicíos I e II criados pelo autor)

I – R. Pearl e L. J. Reed publicaram em 1920, no *Proceedings of the National Academy of Sciences* um estudo intitulado *"On the Rate ok Growth of the Population of the United States Since 1790 and Its Mathematical Representation"* (Sobre a Taxa de Crescimento da População dos Estados Unidos Desde 1790 e Sua Representação Matemática) [18]. Para este estudo eles se basearam no censo de 1910, que apontava, numa população de 91.972.000 indivíduos, um declínio na taxa exponencial de crescimento da população norte americana. Considerando que estudo fez uso da equação logística como modelo de dinâmica populacional, de modo que o limite populacional (K) estimado por eles foi 197.273.000 indivíduos e a taxa de crescimento (λ) em 3,134% ao ano. Em que ano a população seria o dobro da quantidade de indivíduos de 1910, segundo o estudo?

Resposta: Considerando que, pelo modelo, seriam necessários, aproximadamente, 88 anos para dobrar a população, o ano desse fato seria 1998.

II – Comum na região sul do Brasil a Araucária (*Araucaria angustifolia*) é o único pinheiro nativo da flora brasileira. Não ultrapassando 50m de altura, seu crescimento é lento perto se comparado ao de outras espécies exóticas plantadas no Brasil para produção de móveis e papelão, algo de 0,07m por ano. Diante do exposto e tendo o modelo logístico como bom método para analise do crescimento de uma árvore:

a) após 10 anos, qual será a altura de uma muda de 1,20m?

b) quanto tempo será necessário para que essa muda de 1,20m atinja 20m?

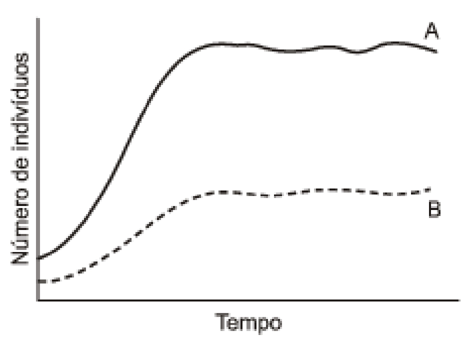
Resposta:

a) Após 10 anos a muda estará com, aproximadamente, 1,60m.

b) Serão necessários 110 anos.

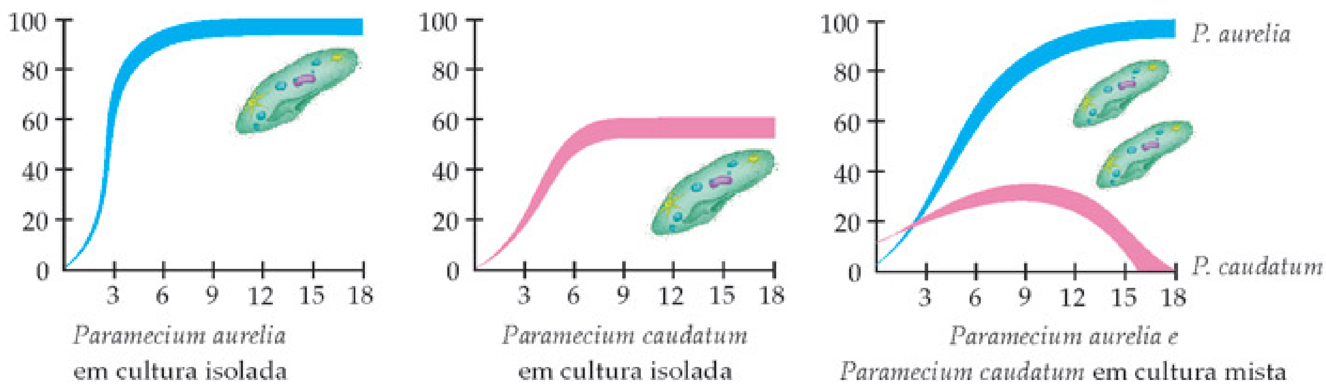
(Exercicíos III e IV extraídos de banco de questões de exames de acesso de universidades nacionais[16].)

III – (UNICAMP) O gráfico abaixo ilustra as curvas de crescimento populacional de duas espécies de mamíferos (A, B) que vivem na savana africana, um pastador e um predador. Analise o gráfico e responda às questões.



a) Qual curva representa a população do mamífero predador? Qual das duas espécies tem maior capacidade de suporte (carga biótica máxima)?
b) Cite duas adaptações defensivas contra predação apresentadas por mamíferos pastadores da savana.
Resposta:
a) A curva B representa a população do mamífero predador. A população de mamíferos pastadores (curva A) tem maior capacidade de suporte (carga biótica máxima) na savana africana.
b) Os mamíferos pastadores da savana vivem em manadas, protegem os filhotes e dispõem de recursos para se defender de predadores, tais como cascos, chifres e dentes.

IV – (PUCRJ) As figuras abaixo mostram o crescimento populacional, ao longo do tempo, de duas espécies de *Paramecium* cultivadas isoladamente e em conjunto. Os resultados desse experimento embasaram o que é conhecido como Princípio de Gause.



Disponível em: <http://wwww.nossomeioporinteiro.wordpress.com/tag/comunidades/>.

Considere o tipo de relação ecológica entre essas duas espécies e indique a afirmação correta.
a) A espécie *P. aurelia* é predadora de *P. caudatum.*
b) *P. aurelia* exclui *P. caudatum* por competição intraespecífica.
c) *P. aurelia* e *P. caudatum* utilizam recursos diferentes.
d) *P. aurelia* exclui *P. caudatum* por parasitismo.
e) *P. aurelia* exclui *P. caudatum* por competição interespecífica.
Resposta: Alternativa E.

Conclusão

Considerando a proposta de abordar as principais funções reais do currículo de matemática do 1º ano do Ensino Médio a partir de situações práticas, mostramos inicialmente, através de alguns momentos históricos, que a observação da realidade foi um importante passo para o desenvolvimento do conceito de função, mas não suficiente. Foi preciso que o foco de estudo saísse da relação entre grandezas, e da geometria, para dar espaço à variação, à correspondência, à simbolização e à dependência de elementos de conjuntos.

Baseado nesse processo evolutivo, pudemos conceituar função com o rigor e formalismo matemático atual. E como consequência dessa abstração, foi possível discutir e definir as funções bijetora, composta, inversa e real.

Após essa revisão pudemos verificar que a representação gráfica e as características mais importantes das funções afim e quadrática são extremamente importantes na discussão e análise de situações-problema cotidianas, tais como quantidade paga numa corrida de táxi, nível de reservatório, áreas de regiões retangulares e modelos físicos de alguns brinquedos de parque de diversão.

Porém, considerando que a expressão polinomial contempla apenas uma parte daquilo que pode ser modelado por uma função real, mostramos através da análise das situações de decaimento radioativo, operações financeiras e dinâmica populacional o surgimento da função exponencial como resultado de uma relação funcional onde a razão de (de)crescimento se baseia num fator multiplicativo constante. Após isso, ao retomar o tema de dinâmica populacional, foi possível mostrar que a análise completa de uma situação expressa por função exponencial necessita do estudo de sua inversa, a função logarítmica.

Assim, diante das situações que já haviam sido parcialmente analisadas pelas características da função exponencial, primeiramente evidenciamos a relação de inversão com a função logarítmica, para depois analisar tanto as suas características, quanto as variantes de sua representação gráfica.

Seguido a isso, como exemplo de situações expressas diretamente por funções logarítmicas, discutimos dentre outras escalas logarítmicas, alguns aspectos do nível de intensidade sonora e da magnitude local de um terremoto.

De forma complementar, mesmo ciente que o rol de funções reais do 1º ano do Ensino Médio se limita, basicamente, aos tipos afim, quadrática, exponencial e logarítmica, resolvemos retomar o tema de dinâmica populacional para apresentar e analisar os principais aspectos práticos da equação logística, uma vez que o estudo superficial da curva sigmóide se faz presente no currículo de biologia do 1º ano do Ensino Médio.

Por meio desa análise e discussão, além de perceber que os principais recursos para sua aplicação já haviam sido dados pelas funções e, respectivas, aplicações anteriores, mostramos através de algumas situações-problema que a discussão de tal função é plenamente possível na disciplina de matemática pelos alunos do Ensino Médio. Principalmente se feito num trabalho integrado com o professor de ciências biológicas.

Por fim, após alcançar êxito em mostrar uma proposta diferenciada para abordagem inicial das funções reais no 1º ano do Ensino Médio, esperamos que o presente trabalho sirva tanto para estimular os colegas, professores de matemática, a refletirem sobre sua práxis docente, como propor que seja desenvolvida uma nova linha de livros didáticos de matemática que permitam uma verdadeira conexão entre o mundo real e os conceitos ali apresentados.

Para tal, visando contemplar todas principais funções reais presentes no currículo de matemática do Ensino Médio, o desafio para um próximo trabalho consiste estudar as funções trigonométricas segundo a presente metodologia, isto é, apresentar ao aluno o conceito como algo decorrente do estudo e análise de situações práticas cotidianas.

Referências

[1] Companhia Nacional de Abastecimento. *Acompanhamento da Safra Brasileira: Cana-de-Açúcar: Safra 2013/2014 Segundo Levantamento*. 2013.

[2] G. N. Barallobres. “O conceito de função como modelo matemático”. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, IMECC, Campinas, 1998.

[3] W. P. Berlinghoff e F. Q. Gouvêa. *A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Blucher, São Paulo, 2010.

[4] L. Botelho e W. M. Rezende. “Um Breve Histórico do Conceito de Função”. Em: *Caderno Dá-Licença* 6 (2007), pp. 64–75.

[5] C. L. S. Brener. “Objetivos de aprendizagem para o ensino de logaritmos e exponenciais”. Tese de doutorado. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

[6] D. F. Caixeta. “Dispersão de machos de Diatraea saccharallis (Fabricius) (Lepidoptera: Crambidae) em cana-de-açucar”. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Jaboticabal, 2010.

[7] B. J. Caraça. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Biblioteca Cosmos, 1951.

[8] C. B. J. Costa. “O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o conceito de Função”. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

[9] S. R. De Cotret. “Une Etude Sur Les Representations Graphiques Du Mouvement Comme Moyen D’acceder Au Concept De Fonction Ou De Variable Dependante”. Em: *Petit x* 17 (1988), pp. 5–27.

[10] H. Eves. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.

[11] A. F. Fiori e B. L. Cecco. “A relação entre a Biologia e a Matemática: Biomatemática”. Tese de doutorado. Universidade Comunitária da Região de Chapecó, Chapecó, 2012.

[12] V. G. Fonseca. “O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim”. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

[13] J. Hadamard. “Le calcul fonctionnel”. Em: *L’Enseignement Mathématique* 14 (1912), pp. 1–18.

[14] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. *Provas do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.*

[15] I. Kleiner. “Evolution of the Function Concept: A Brief Survey”. Em: *The College Mathematics Journal* 20.4 (1989), pp. 282–300.

[16] Colibri Informática Ltda. *Banco de questões Super Professor.*

[17] R. S. Mol. *Introdução à história da matemática.* CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2013.

[18] R. Pearl e L. J. Reed. “On the Rate of Growth of the Population of The United States Since 1790 and Its Mathematical Representation”. Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6.6 (1920), pp. 275–288.

[19] D. M. A. A. Ribeiro. “Uma abordagem didática para função quadrática”. Tese de doutorado. Universidade Estadual do Norte Fluminence Darcy Ribeiro, UENF, Campos dos Goytacazes, 2013.

[20] R. E. Ricklefs. *A Economia da Natureza.* Guanabara Koogan, 2003.

[21] T. Roque e J. B. Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática.* SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[22] M. H. M. Silva e W. M. Rezende. “Análise Histórica do Conceito de Função”. Em: *Caderno Dá-Licença* 2 (1999), pp. 29–33.

[23] J. H. S. Soares. “Função Quadrática”. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

[24] F. A. L. Souza. “Funções quadráticas: Estudo do gráfico das funções quadráticas”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

[25] L. R. Thomas. “O uso de equaçoes diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros”. Tese de doutorado. Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

[26] A. P. Youschkevitch. “The concept of function up to the middle of 19th century”. Em: *Archive for history of exact sciences* 16 (1976), pp. 37–85.