Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Carolina Bonisson Cardoso Pereira

Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular

Rio de Janeiro

2013

Carolina Bonisson Cardoso Pereira

Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Gladson Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2013

Pereira, Carolina Bonisson Cardoso
Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular / Carolina Bonisson Cardoso Pereira - 2013
42.p

1.Matemática 2. Matemática Financeira. I.Título.

CDU 536.21

Carolina Bonisson Cardoso Pereira

Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 08 de março de 2013

BANCA EXAMINADORA

Gladson Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Helvécio Rubens Crippa

Doutor em Matemática - UFRJ

Resumo

Este projeto foi desenvolvido em parceria com Eduardo Vicente do Couto, cujo trabalho apresenta também a temática da correção monetária. O projeto versa sobre uma abordagem de sistemas de amortização (SAC e Price) para o ensino médio regular .Mostra-se que é perfeitamente viável trabalhar esse conteúdo no Ensino Médio já que seus pré-requisitos são : juros simples e compostos , progressão aritmética e geométrica ,logaritmos.

Inicia- se o projeto fazendo - se uma apresentação e apontando a motivação de sua criação. São apresentadas duas atividades: a primeira sobre SAC e a segunda sobre Tabela Price, ambas aplicadas para os alunos do 3^0 ano da escola Sesc de Ensino Médio . O projeto aborda tais sistemas de amortização, fazendo uso somente de uma calculadora financeira e posteriormente usando o recurso do GeoGebra, de forma a explorar as características desses dois sistemas e consolidar os conceitos estudados . Foram citados também alguns livros didáticos utilizados em larga escala nas escolas brasileiras e alguns comentários sobre suas abordagens. Objetiva-se com essa proposta de abordagem a formação de alunos mais críticos e atuantes socialmente.

Palavras-chaves: Amortização, Contextualização, Inovação, Conscientização, Tecnologia.

Abstract

This Course Conclusion Paperwork for the Masters Program in Mathematics from PROFMAT UNIRIO was developed in association with Eduardo Vicente do Couto.The paper proposes a way of working Amortization Systems into regular high school curriculum. Amortization, usually taught in financial mathematics courses at the tertiary level, can be taught as an application of the concepts of Arithmetical Progression and Geometric Progression using only a scientific calculator. By doing so, we contextualize amortization in a natural way within the educational system. The paper also proposes the use of mathematics to help form more aware citizens. Two activities were developed with SESC High School students: we used the Constant Amortization Mortgage - CAM, and we worked with the French System of Amortization - Price Table. We then briefly comment on the amortization systems used within monetary restatements and the misuse of concepts of financial mathematics in the Housing Finance System. Most of the content is cited in financial mathematics textbooks used in high schools and the payment worksheets of the CAM and the Price Table were developed with the free software, Geogebra.

Keywords: Amortization, Contextualization, Innovation, Technology.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família pelo apoio diante das minhas decisões e mudanças muitas vezes necessárias .

Aos meus pais por terem sido muitas vezes rígidos, mas principalmente por investirem e acreditarem em mim com muito carinho e dedicação.

À minha avó Francisca com sua sabedoria em todos os momentos .

Aos meus queridos colegas de trabalho , que com muito idealismo e bom humor não desistem de seus ideais e são pra mim exemplos e muito contribuem com suas experiências .

Às minhas queridas companheiras de mestrado Priscila e Gisele que tanto me ajudaram nesse dois últimos anos.

Ao Eduardo Vicente pela parceria e companheirismo nesse projeto.

Ao meu marido , Jorge Nelson , por ter aguentantado dois anos de ponte aérea para que pudéssemos ficar juntos .

Aos meus amigos , que mesmo distantes fisicamente, são uma parte muito especial de mim, em especial à Natalia .

Aos professores Ronaldo Busse, Leonardo Silvares e Gladson Antunes sempre solicitos e dispostos a ajudar .

"Dê um passo à frente e você já não está mais no mesmo lugar".

Chico Science

Sumário

1 Apresentação e Motivação

No Dicionário eletrônico Houaiss 2, amortizar significa “pagar gradualmente ou abater parte de dívida, empréstimo etc”. A etimologia da palavra amortizar é “a- + morte + -izar”, ou seja, morte é o radical da palavra. Amortizar uma dívida, portanto, significa “fazer morrer” essa dívida aos poucos. Mas o que isso tem a ver com o cotidiano de nossa sala de aula?

O resultado de avaliações como PISA, SAEB e ENEM indica que os alunos da educação básica no Brasil, em sua maioria, têm dificuldades e, em conseqüência, desinteresse pelo ensino da matemática. O aluno não consegue associar o que ele aprende na escola com o cotidiano. É comum os professores ouvirem as seguintes perguntas de seus alunos: “Por que estou estudando essa matéria?” ou “Como vou aplicar isso na minha vida?”. Os livros didáticos atuais até tentam fazer alguma contextualização, mas, em geral, elas estão totalmente fora da realidade do educando.

Não somos a favor do modismo atual de “só se ensinar o que tem aplicação prática”. Se fosse assim, ao longo da história, muitos conteúdos não seriam estudados e a humanidade não teria atingido o nível de evolução tecnológica atual. Muitos conteúdos matemáticos foram inicialmente estudados sem nenhuma aplicação prática imediata. Alguns conteúdos, inclusive, só tiveram aplicações alguns séculos depois do seu estudo inicial. Acredita-se que a contextualização deva aparecer em sala de aula quando ela realmente existir. E a matemática financeira é o maior exemplo disso. É a parte da matemática que mais tem aplicação no cotidiano. Estuda-se alguma coisa de juros simples e compostos no ensino médio. Mas nem de longe chega-se perto do estudo dos sistemas de amortização. Quando se compra um imóvel, um carro, ou até mesmo um eletrodoméstico de forma parcelada, o cálculo das prestações é feito usando-se um dos dois principais sistemas de amortização: Tabela Price e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Analisando-se o estudo desses sistemas, conclui-se que os pré-requisitos básicos são, além de juros simples e compostos, progressão aritmética (PA), progressão geométrica (PG) e logaritmos. Além disso, no ensino médio, pode-se trabalhar somente com uma calculadora científica, de custo bem menor que as calculadoras financeiras.

A falta de conhecimento em matemática financeira faz com que o brasileiro se torne presa fácil do sistema bancário e do comércio mal intencionado. Na ânsia de vender, facilita-se o crédito com taxas de juros abusivas e muitas vezes mentirosas. Até mesmo quem está vendendo de forma parcelada, ou oferecendo o crédito, desconhece os conteúdos matemáticos que geraram esses valores, normalmente tabelados. Usando como ferramentas conteúdos simples do ensino médio como PA, PG e logaritmos, podemos formar um aluno que, no futuro, será um adulto mais crítico na hora de fazer um financiamento. É oportuno lembrar que a LDB indica para o Ensino Médio as funções de :

1. "Possibilitar o prosseguimento de estudos, mediante "consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental";

2. "Preparação Básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar, com flexibilidade, a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamentos posteriores";

3. "Aprimoramento do Educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico";

4. "A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando teoria e prática no ensino de cada disciplina".

O estudo dos Sistemas de Amortização atende às quatro funções propostas pela LDB:

- A primeira é óbvia, uma vez que os sistemas de amortização constituem um aprofundamento do conceito de porcentagem e juros que se aprende no ensino fundamental.

-A segunda também pode estar contemplada principalmente para aqueles alunos que desejam trabalhar na área bancária/financeira.

- A terceira já foi citada, anteriormente. Ao dominar esse conteúdo, o aluno terá autonomia intelectual e pensamento crítico para não se deixar enganar por armadilhas do comércio e do sistema financeiro.

-A quarta função também é contemplada principalmente na relação teoria e prática no ensino da matemática, além do uso dos softwares como Geogebra ,por exemplo, para montagem das planilhas.

Além disso, no Parecer CNE/CP $N^0 11/2009$, que trata da proposta do EN-

SINO MÉDIO INOVADOR, o relator Francisco Aparecido Cordão menciona que o Conselho Nacional de Educação "enfatiza que o currículo deve ter tratamento metodológico que evidencie a interdisciplinaridade e a contextualização". Além disso, "o ensino deve ir além da descrição e constituir nos alunos a capacidade de analisar, explicar, prever e intervir, objetivos que são mais facilmente alcançáveis se as disciplinas, integradas em áreas de conhecimento, puderem contribuir, cada uma com sua especificidade, para o estudo comum de problemas concretos, ou para o desenvolvimento de projetos de investigação e/ou de ação". Portanto, o estudo dos sistemas de amortização, atende às expectativas da proposta para o Ensino Médio Inovador, uma vez que é extremamente concreto aplicar PA e PG, dois tópicos sem muitas dificuldades para o aluno de Ensino Médio, para decidir a melhor forma de financiamento. Se a forma de financiamento já está definida, o conhecimento prévio de "como funcionam" os sistemas de amortização ajuda a verificar se as taxas anunciadas pelo comerciante ou pelo agente financeiro, estão corretas, utilizando somente uma fórmula matemática e uma calculadora científica, sem precisar fazer um curso de como utilizar a calculadora financeira, de custo mais elevado que a científica. Além disso, quando o aluno já tiver todo o domínio das planilhas, fazendo todos os cálculos na calculadora científica, pode-se partir para a montagem dessas planilhas, utilizando o software gratuito Geogebra, dependendo obviamente da capacidade tecnológica da escola.

Ainda tendo como base a proposta do Parecer CNE/CP N^{0}11/2009, a Professora Maria do Pilar, Secretária de Educação Básica do MEC e membro da Câmara de Educação Básica deste Conselho, citando Martha Gabriel, assim expressou o sentido dessa proposta para o Ensino Médio Inovador.

"INVENTAR é criar, engendrar, descobrir. INOVAR é tornar novo, renovar, introduzir novidade em. A INVENÇÃO tende a ser ruptura, mas a INOVAÇÃO reside no fato de ter compromisso de buscar o foco nas boas idéias existentes, e, especialmente, no fato de que não há mal algum em tomar emprestada uma idéia que já exista. A virtude da INOVAÇÃO está em enquadrar essas idéias às necessidades por meio de: adaptação, substituição, combinação, ampliação ou redução, outras utilizações, eliminação, reversão ou trazer de volta".

E é nesse conjunto de idéias de inovação que foi proposto o projeto, ampliando o que já foi concebido sobre matemática financeira, explorando conteúdos que consideramos serem pouco trabalhados atualmente no ensino médio. O que se quer mostrar, portanto, é que matemática financeira não se resume a juros simples e compostos.

Serão feitas duas citações de livros de matemática utilizados em larga escala:

- *Matemática: ciência e aplicações.* Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce , David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.
- *Matemática (volume único).* Autor Manuel Paiva.

Será apresentado o enfoque dado à matemática financeira nesses dois livros, destacando as abordagens sobre cada tópico, apresentando pontos altos e também algumas defasagens. É imprescindível ressaltar que a proposta não é criticar esses livros. O objetivo do trabalho é mostrar como esse tema é abordado no Ensino Médio para que se possa repensar o grau de relevância dado à matemática financeira nas escolas brasileiras. Muitos professores utilizam o livro didático como norteador do seu trabalho. Em vista disso, será questionado se esse é o caminho certo. Acredita-se que seja necessária uma inovação do tema e um replanejamento da grade curricular .

Será apresentada uma abordagem diferente do que é visto atualmente no ensino médio. Espera-se que um aluno, ao final do ensino médio, seja capaz de tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada. Saber decidir sobre o que é mais vantajoso numa compra à vista ou a prazo, identificar taxas nominal e efetiva, saber diferenciar um sistema de amortização num financiamento de longo prazo. Tudo isso passa por uma "educação financeira" e para que possamos de fato alcançá-la propomos não só a sua inserção efetiva na grade curricular como na vida desse aluno . Espera-se também, com esse trabalho, contribuir, de alguma forma, com a melhoria do ensino de matemática financeira em nosso país.

> **Mude, mas comece devagar, porque a direção é mais importante que a velocidade....**(Clarice Lispector)

E é a partir dessas perspectivas e questionamentos que damos início ao nosso projeto.

2 Conteúdo de matemática financeira em alguns livros didáticos

Sabe-se que o currículo, muitas vezes, é planejado tomando por base o livro didático adotado. Abaixo elencamos alguns dos principais livros utilizados no Ensino Médio nas escolas brasileiras.

- Matemática: ciência e aplicações, 6^a Edição. Autores: Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. (17 páginas)
- Matemática: volume único, 1^a Edição. Autor: Manuel Paiva (5 páginas)
- Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 1^a Edição. Autor: Jackson Ribeiro (37 páginas)
- Matemática : Contexto e aplicações, 6^a Edição. Autor: Luiz Roberto Dante (24 páginas)

O que nos chama atenção de forma bastante imediata, é a quantidade de páginas dedicadas ao assunto que, como podemos observar acima, é bem pequena e mesmo no livro com maior quantidade de páginas, os assuntos abordados se resumem a porcentagem, descontos e acréscimos, juros simples e compostos. Poucos são os livros que buscam vincular a matemática financeira a funções, progressões e seus comparativos gráficos.

Acreditamos ser fundamental no estudo desse tema, a seleção de problemas que se adequem a situações mais próximas à realidade desse aluno, visto que sabemos que a educação não pode mais estar dissociada do contexto social. Felizmente não encontramos somente abordagens negativas . Dentro das limitações do currículo de matemática financeira atual encontramos alguns pontos positivos.

Os dois únicos livros que chegaram a abordar valor presente e valor futuro foram os livros *Matemática : ciência e aplicações* e *Matemática : Contexto e aplicações*, os demais sequer citaram o assunto. Nenhum deles explorou qualquer tipo de sistema de amortização.

Acreditamos que tópicos como série uniforme de pagamentos e sistemas de amortização sejam temas bastante relevantes para uma verdadeira inserção do alunado à realidade e podem perfeitamente ser estudados no Ensino Médio.

Em geral , esses temas são abordados apenas em alguns cursos técnicos como administração e contabilidade , não fazendo parte do currículo do Ensino médio regular.

Salientamos que essa breve análise dos livros, não tem por objetivo criticar, mas repensar o currículo utilizado nas escolas de Ensino Médio, que não dão a merecida importância a um assunto tão rico e de tão grande repercussão social.

Abaixo faremos alguns apontamentos de como a matemática financeira é abordada no livro *"Matemática: ciência e aplicações"* dos autores *Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida*, volume 1, 6^aedição. (Páginas 221 à 240).

No índice sobre matemática financeira temos a seguinte divisão:

- Porcentagem
- Aumentos e Descontos
- Variação percentual
- Juros Compostos(Introdução e juros compostos com taxas variáveis)
- Aplicações -Compras à vista ou à prazo (I)
- Juros e funções (juros simples e compostos)
- Aplicações - Compras à vista ou à prazo (II)

Os autores iniciam fazendo uma abordagem de porcentagem utilizando razão centesimal, o que é bastante interessante na visão de não usar apenas o mecanismo da regra de três, que em muitos casos pode ser até mais trabalhoso.

Essa primeira parte é uma breve revisão do que já foi visto no ensino fundamental. Não apresentando até então qualquer novidade para o aluno do 1^0 ano do ensino médio. Ao final, são propostos alguns exercícios.

A parte de aumentos e descontos é explorada utilizando o *fator de correção*, termo esse também conhecido como *fator de atualização, fator de acréscimo ou decréscimo*, o que agiliza bastante os cálculos.

O exemplo que ilustra esse tema é o seguinte:

Certa loja vende uma máquina de lavar roupas por R$ 750,00. Se a loja fizer um aumento de 6% *em seus preços, quanto a máquina passará a custar ?*

É apresentado para o aluno duas formas de solução. A primeira mais tradicional, calcula-se 6% de 750, isto é, $0,06.750 = 45$ e assim o novo preço da máquina será dado por $750 + 45 = R\$795,00$.

A segunda utiliza o fator de correção, como houve um aumento de 6% multiplicamos o valor inicial por $1,06$ pois $1 + \dfrac{6}{100}$ multiplicado pelo valor inicial mostra o novo valor com aumento de 6%.

Nesse exemplo os autores expõem que:

- Ao sofrer um aumento de i % o valor inicial do produto fica multiplicado por $1+\dfrac{i}{100}$. (Fator de aumento)
- Ao sofrer um desconto de i % o valor inicial do produto fica multiplicado por $1-\dfrac{i}{100}$. (Fator de desconto)

Os autores exploram o termo *variação percentual*, tema este que, de certa forma, já havia sido explorado ao introduzir razão percentual. São apresentados uma série de exercícios envolvendo gráficos e fatores de correção.

Mais adiante os autores introduzem o conceito de juros e empregam o termo "aluguel do dinheiro". Como exemplos são apresentadas algumas situações em que os juros aparecem: empréstimos em um banco, atraso em contas (luz, telefone, condomínio etc), caderneta de poupança e cheque especial. São introduzidos também alguns termos básicos de matemática financeira, como: U.M(unidade monetária), Capital(valor inicial de um empréstimo , dívida ou investimento), Taxas de juros (i , originária do inglês "interest"= juros), Juros e Montante (capital + juros).

Apresenta-se o conceito de juros simples e em seguida, após alguns exemplos comentados, uma série de exercícios é proposta.

É importante ressaltarmos que juros simples são pouco ou quase nada praticados no mercado.

Os autores introduzem a noção de juros compostos através de um situação problema **:**

Depois de um ano de trabalho duro e muita economia, Miguel juntou R$500,00 *e abriu uma caderneta de poupança para seu filho, como presente pelo* 10^0 *aniversário do menino. Supondo que o rendimento dessa poupança seja 0,8% ao mês e que não será feita nenhuma retirada de dinheiro ou depósito nos próximos anos, quanto o filho de Miguel terá ao completar* 18 *anos?*

Esse problema introduz o conceito do regime de capitalização acumulada, o famoso, juros sobre juros, isto é, juros compostos.

É explicado que os juros sempre incidem sobre o montante do mês anterior e não mais sobre o capital inicial, como é feito nos juros simples.

Os autores usam uma estratégia bastante interessante de construção pois introduziram a ideia através de um problema, foram construindo o conceito de montante e em seguida resolvem o problema.

Essa técnica é, muitas vezes, frutífera para o aprendizado do aluno pois quando o aluno participa da construção dos conceitos se torna mais apto a construir seus próprios caminhos na resolução de problemas.

Apesar dos autores não terem explorado, o montante nada mais é que o termo geral de uma PG finita em que $a_1 = C$ e a razão $q = 1 + i$. Essa "nova fórmula" do montante pode ser explorada de uma forma mais natural, visto que o aluno do Ensino Médio quando aprende matemática financeira, já domina progressões geométricas. É importante que o aluno não veja este conteúdo de forma dissociada, como se fosse uma grande novidade.

A mensagem que desejamos passar é a de que podemos apresentar ao aluno juros simples e compostos como aplicações das progressões aritmética e geometrica respectivamente.

Sabe-se que o tema logaritmo é um dos pré-requisitos para matemática financeira e os autores exploraram sua aplicação num exercício resolvido de forma bastante clara e natural. Essa contextualização é bastante interessante e deve ser apresentada ao aluno.

Em seguida os autores fazem uma breve observação sobre juros compostos com taxa de juros variáveis o que pode ser facilmente compreendido pelo aluno que consegue compreender a formalização do montante.

Os autores propõe uma série de exercícios e em seguida fazem uma associação bastante interessante entre juros e funções.

É explorado o fato de o montante nos juros simples estarem associados a uma progressão aritmética enquanto o montante nos juros compostos estão associados a progressões geométricas. Mais ainda, eles mostram que, graficamente, os juros simples são representados por uma função afim enquanto os juros compostos são representados por uma exponencial.

O livro apresenta uma seção de aplicação dividida em duas partes cujo título é *compras à prazo ou à vista*. Nessa seção de aplicações os autores introduzem o conceito do valor do dinheiro no tempo de forma bastante prática, são dois pequenos textos que, apesar de não aprofundarem o assunto, o expõe de forma bastante didática.

2.1 Considerações

Dos livros citados esse livro foi o que teve uma abordagem mais contextualizada. Foi muito feliz em alguns pontos crucias, principalmente quando relacionou juros simples à progressões aritméticas e juros compostos à progressões geométricas . A forma como foram associadas as funções afim e exponecial aos juros simples e compostos, respectivamente, foi realizada de maneira bastante construtiva para o aluno. Os autores enriqueceram muito o assunto ao expor graficamente essas funções.

Apesar de os autores, de uma forma geral não se aprofundarem, eles fizeram os encadeamentos de forma muito bem feita. Até mesmo na aplicação de um problema simples que acabava recaindo num logaritmo eles contextualizaram muito bem a situação.

O fato de ser um dos dois livros a apresentar valor presente e valor futuro de forma bem construída deu um toque diferenciado a esse livro.

Acreditamos que a questão curricular seja o ponto primordial a ser repensado, pois a realidade é que muitos livros estão "dentro"do que foi previsto no currículo e a defasagem que temos no Ensino Médio é fruto desse currículo que precisa ser repensado.

3 Atividades propostas

O objetivo das atividades descritas abaixo é mostrar que o conteúdo de **Sistemas de Amortização**, normalmente trabalhado nos cursos de Matemática Financeira de nível superior, utilizando uma calculadora financeira, pode ser trabalhado no ensino médio, como aplicação dos conceitos de PA e PG, utilizando apenas uma calculadora científica. No ensino superior, o estudo de **Sistemas de Amortização** é feito, de uma maneira geral, nos cursos de Administração e Economia, utilizando planilhas como Excel e calculadoras como a HP financeira sem se preocupar com os conceitos matemáticos que justificam os procedimentos. É quase um treinamento de como utilizar as tecnologias para se chegar aos resultados. O professor deve ter em mente que o objetivo desse trabalho, no ensino médio, é mostrar uma aplicação da matemática no cotidiano, sem perder de vista o rigor de se justificar matematicamente cada passo. Sendo assim, podemos trabalhar o formalismo e a contextualização num mesmo conteúdo. É importante também fazer uma breve revisão dos conceitos de PA e PG, caso essa matéria tenha sido ministrada num ano anterior. Além de PA e PG são pré-requisitos básicos, porcentagem, juros simples e compostos, além de logaritmos.

Serão apresentadas duas atividades que foram realizadas com os alunos da Escola SESC de Ensino Médio -ESEM . A ESEM é uma escola-residência, gratuita, inaugurada em fevereiro de 2008. De acordo com o site (www.escolasesc.com.br), o projeto da escola "acompanha a diretriz institucional do SESC - entidade mantenedora da Escola através do seu Departamento Nacional - que, desde a sua fundação, em 1946, privilegia a ação educativa atendendo comerciários e trabalhadores do setor terciário e seus dependentes, e membros da sociedade em geral". Os alunos são selecionados por Processo Seletivo Nacional e as vagas são distribuídas por estado. Não há cotas, porém, as vagas são prioritárias para dependentes de comerciários. A escola é de turno integral. No horário de 7h30min às 15h30min os alunos têm aulas do núcleo comum. O horário das 16h35min até 20h10min, os alunos têm aulas de recuperação ou oficinas da parte diversificada. As recuperações são obrigatórias. As oficinas da parte diversificada (músicas, artes, atividades esportivas, aprofundamentos de matérias do núcleo comum como, por exemplo, matemática aplicada à física, cálculo, questões de vestibulares,etc.) são escolhidas de acordo com a preferência dos alunos. Além disso, existem grupos do “compromisso acadêmico” formado por alunos com dificuldades acadêmicas. Esses alunos são indicados pelo setor de Orientação Pedagógica e têm um acompanhamento especial durante todo o ano letivo.

3.1 Atividade 1

A primeira atividade foi realizada com dois grupos de alunos da Escola SESC de Ensino Médio -ESEM.

Ao final dessa atividade, o aluno deverá ser capaz de construir planilhas de pagamentos do Sistema de Amortização Constante, bem como resolver questões de concursos públicos sobre esse assunto.

Para essa atividade 1, com duração de aproximadamente 1 hora e 20 minutos, os dois grupos foram selecionados da seguinte maneira: o primeiro, formado por 10 alunos da 3^a série do “compromisso acadêmico”. O segundo, por 11 alunos voluntários. A maior parte desse segundo grupo era formada por alunos com bom rendimento acadêmico em matemática. O tema abordado para essa primeira atividade foi o SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE(SAC). Antes porém, algumas definições importantes foram dadas aos alunos:

Mutuante: Aquele que empresta.

Mutuário: Aquele que recebe o empréstimo.

Capital ou Principal (C): É o valor emprestado.

Parcelas de Amortização(A): Corresponde as parcelas de devolução do principal, ou seja, do capital emprestado.

Juro (J): É o custo do capital, tomado sob o aspecto do mutuário, ou o retorno do capital investido, sob o aspecto do mutuante. Colocando de uma maneira bem coloquial, ”O JURO É O PREÇO DO DINHEIRO”. (Foi explicado, nesse momento, para os alunos que, da mesma maneira que supermercado vende alimentos, bebidas, etc. o banco vende dinheiro).

Saldo Devedor (S_k): É o valor devido em um certo período “k”.

Prestação($\mathbf{P}_k$ ou $\mathbf{R}_k$): É o pagamento da amortização mais o juro relativo ao saldo devedor imediatamente anterior ao período referente a prestação. Neste ponto é importante observar que a prestação referente a um período "k" pode ser representada como $P_k = A_k + J_k$.

A seguir, foram apresentadas as principais definições relativas especificamente ao Sistema de Amortização Constante(SAC). A opção de apresentar inicialmente tais definições , mesmo sabendo que eles não teriam condições de entender todas elas, buscou despertar a curiosidade e fazer com que, no decorrer da montagem da planilha, os alunos fossem concluindo ou verificando a validade de tais conceitos.

3.1.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Neste sistema de amortização as parcelas são iguais entre si, ou seja, $A = \dfrac{C}{n}$, em que n é o número de períodos.

Os juros são calculados a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior.

Por definição, como a amortização é constante e o juro incide sobre o saldo devedor, as prestações tem valores decrescentes a cada período, sob forma de progressão aritmética.

Saldo devedor também decrescente, sob forma de progressão aritmética.

Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.

No texto que foi distribuido aos alunos há o seguinte alerta: "FIQUE CALMO! As definições acima ficarão bem claras com o exemplo a seguir."

Os conceitos do SAC são trabalhados por meio do seguinte exemplo:

Exemplo: *Considere um empréstimo de* $R\$10.000,00$ *que deve ser devolvido pelo SAC em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimos.*

Solução comentada : Do enunciado do problema tem-se que

$$C = 10.000,\ n = 5,\ i = 0,1,$$

em que C é o capital, n é o número de prestações e i é a taxa de juros unitária.

Logo a amortização constante é calculada da seguinte maneira:

$$A = \frac{C}{n} = \frac{10.000}{5} = 2.000.$$

A partir daí, com base nas definições anteriores, é construída a seguinte planilha:

k	A_k	J_k	$P_k = A_k + J_k$	S_k
0				10.000
1	2000	10% de $10000 = 1000$	$2000 + 1000 = 3000$	$10000 - 2000 = 8000$
2	2000	10% de $8000 = 800$	$2000 + 800 = 2800$	$8000 - 2000 = 6000$
3	2000	10% de $6000 = 600$	$2000 + 600 = 2600$	$6000 - 2000 = 4000$
4	2000	10% de $4000 = 400$	$2000 + 400 = 2400$	$4000 - 2000 = 2000$
5	2000	10% de $2000 = 200$	$2000 + 200 = 2200$	$2000 - 2000 = 0$

Neste ponto, em conjunto com os alunos, conclui-se que:

- As prestações $3000, 2800, 2600, 2400, 2200$ e os juros $1000, 800, 600, 400, 200$ formam uma PA de razão -200. Note que essa razão é igual a
$$-(A \cdot i) = -(2000 \cdot 0,1) = -200.$$

- Os saldos devedores $10000, 8000, 6000, 4000$, 2000 e 0 forma uma P.A de razão $-A = -2000$.

A partir daí, foi generalizado junto com os alunos;

$$P_1 = A + J_1 = A + C \cdot i$$
$$P_2 = A + J_2 = A + (C - A) \cdot i = (A + C \cdot i) - A \cdot i$$
$$P_3 = A + J_3 = A + (C - 2A) \cdot i = (A + C \cdot i) - 2A \cdot i$$

Sendo assim, as prestações P_k formam um PA em que o primeiro termo é $a_1 = (A + C \cdot i)$ e a razão é $r = -(A \cdot i)$.

Para a resolução dos exercícios propostos é importante que sejam relembradas as fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma PA.

É importante ressaltar que tanto os alunos de compromisso acadêmico quanto os alunos voluntários, esses últimos com bom desempenho em matemática, não tiveram dificuldades em entender o mecanismo de funcionamento do S.A.C. Todos, sem exceção, acharam interessante relacionar uma matéria que eles já haviam aprendido em sala de aula com uma aplicação realmente prática. Alguns alunos, dos dois grupos, disseram que essa matéria seria mais relevante que, números complexos, polinômios e Geometria Analítica, conteúdos da 3^a série do ensino médio, que só terão importância futura para os alunos das áreas tecnológicas. Os **Sistemas de Amortização**, ao contrário, terão importância para qualquer pessoa que um dia venha comprar algum bem financiado.

A partir daí, foi proposto o seguinte exercício.

Exercício: *Considere um empréstimo de* $R\$8.000,00$ *que deve ser devolvido pelo SAC em* 10 *prestações mensais, sendo a primeira em* 30 *dias, à taxa de juros compostos de* 5% *ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.*

Solução comentada: Do enunciado extraimos que

$$C = 8000,\ n = 10 \text{ e } i = 0,05.$$

em que C é o capital, n é o número de prestações e i é a taxa de jutos unitária.

Logo a amortização constante é calculada da seguinte maneira:

$$A = \frac{C}{n} = \frac{8000}{10} = 800.$$

Com estas informações contruimos a planilha abaixo

k	A_k	J_k	$R_k = A_k + J_k$	S_k
0				8000
1	800	400	1200	7200
2	800	360	1160	6400
3	800	320	1120	5600
4	800	280	1080	4800
5	800	240	1040	4000
6	800	200	1000	3200
7	800	160	960	2400
8	800	120	920	1600
9	800	80	880	800
10	800	40	840	0

Todos os 21 alunos dos dois grupos conseguiram resolver integralmente esse exercício. Apenas 6 alunos, todos do "compromisso acadêmico", fizeram como o exemplo anterior, ou seja, calculando o juro sobre o saldo devedor no período e, logo após, a prestação e o novo saldo devedor. Cabe lembrar que, no exemplo, só foi concluido que era PA no final da construção da planilha. Todos os outros 15 alunos só calcularam o juro, a prestação e o saldo devedor para os dois primeiros períodos. Como eles haviam concluído, no exemplo anterior, que esses valores formavam uma PA decrescente, eles completaram as colunas dos juros, prestação e saldo devedor utilizando a razão de suas respectivas PAs. Somente três alunos, todos do "compromisso acadêmico"solicitaram ajuda do professor, ou de algum colega, para construir a planilha. Cabe ressaltar que o aluno da ESCOLA SESC está acostumado a trabalhar em grupos e, mesmo no grupo daqueles com alguma dificuldade acadêmica, os que terminam a tarefa primeiro, naturalmente, começaram a ajudar quem ainda está com dificuldades. A tabela abaixo resume o desempenho dos alunos.

	Comp. Acad.	**Volu.**
Calcularam juro, prestação saldo devedor em todos os períodos	6	nenhum
Calcularam juro, prestação saldo devedor nos 2 primeiros períodos	4	11
Solicitaram ajuda ao professor ou colega	3	nenhum

Ao término desse primeiro exercício, foi proposto a resolução de um outro exercício retirado da prova do Concurso da Caixa Econômica Federal, cuja banca era composta por professores da fundação CESPE/UnB, de Brasília. Um aluno relatou, nesse momento, que gostaria de prestar concurso para escriturário do Banco do Brasil. Ressaltei que matemática financeira como um todo, e **Sistemas de Amortização**, SAC e Tabela Price são muito cobrados nos concursos do Banco do Brasil e da Caixa Econômica Federal. Como essas instituições bancárias têm agências espalhadas por todo o Brasil, esse tipo de concurso interessa ao aluno da Escola SESC uma vez que eles são oriundos de todo o país. O aluno que externou a vontade de fazer o concurso do Banco do Brasil é morador da cidade de Rio Branco, no Acre.

Exercício: *Um empréstimo de* $R\$250.000,00$ *deve ser devolvido pelo* SAC *em* 50 *prestações mensais, sendo a primeira um mês após a contratação do empréstimo, à taxa de juros compostos de* 2% *ao mês. A partir dessas informação julgue os itens a seguir;*

(1) O valor das duas primeiras prestações são, respectivamente, $R\$10.000,00$ *e* $R\$9.900,00$.

(2) A soma das 20 primeiras prestações é menor que $R\$181.000,00$.

(3) O valor da 37^a *prestação é igual a* $R\$6.400,00$.

Observação: É importante neste ponto alertar aos alunos que, nesse tipo de concurso, cada item marcado errado anula um item certo. Itens não assinalados não anulam os itens marcados corretamente. Nesse caso, a melhor opção para quem não sabe responder corretamente um item é deixá-lo em branco.

Solucão: Do enunciado extraimos que:

Item (1)

$$C = 250.000,00,\ n = 50,\ A = \frac{C}{n} = \frac{250.000}{50} = 5.000 \text{ e } i = 0,02.$$

Dessa forma a primeira prestação será dada por

$$P_1 = A + J_1 \Rightarrow P_1 = 5000 + 0,02 \times 250.000 \Rightarrow P_1 = 10.000,00.$$

O saldo devedor no período 1 é

$$250.000 - 5.000 = 245.000,00$$

e a segunda prestação portanto será

$$P_2 = 5.000 + 0,02 \times 245.000 \Rightarrow P_2 = 5.000 + 4.900 = 9.900,00$$

Logo, o item (1) está correto.

Item (2)

As prestações formam uma PA cujo primeiro termo é $P_1 = 10.000$ e a razão é $r = -100$. Portanto a soma das 20 primeiras prestações é

$$S_{20} = \frac{(P_1 + P_{20}) \cdot 20}{2}$$

Como a vigésima prestação é $P_{20} = 10.000 + 19 \times (-100) = 8.100$ então

$$S_{20} = \frac{(10.000 + 8.100) \cdot 20}{2} = 181.000,00.$$

Logo, o item (2) está incorreto.

Item (3)

A trigésima sétima prestação é $P_{37} = P_1 + 36r$, ou seja,

$$P_{37} = 10.000 + 36 \times (-100) = 6.400,00.$$

Logo, o item (3) está correto.

Desempenho dos alunos:

- Todos os alunos calcularam a amortização: $A = \dfrac{C}{n} = \dfrac{250000}{50} = 5000$.
- Para calcular a primeira e a segunda prestação, todo o grupo do "compromisso acadêmico"e 9 alunos do grupo dos voluntários, montaram uma mini planilha para os dois primeiros meses
- Dois alunos do grupo dos voluntários, calcularam a primeira prestação: $P_1 = A_1 + J_1 = 5000 + 5000 = 10000$, e a razão pela fórmula $r = -(A.i) = -(5000.0,02) = -100$. Logo após, calcularam a segunda prestação como segundo termo da P.A, $P_2 = 10000 - 100 = 9900$.
- Os itens 2 e 3 foram respondidos basicamente da mesma maneira por todos os alunos.

	Compromisso Acadêmico	Voluntários
Utilizou PA das prestações	9	9
Utilizou PA dos juros	nenhum	2
Não chegou a resposta correta	1	nenhum

Foi então proposto mais um exercício do concurso da Caixa Econômica Federal.

Exercício: *Um empréstimo de R$40.000,00 deve ser descontado pelo SAC com 40 prestações mensais (1^a prestação 30 dias após), a taxa de juros compostos de 2% ao mês. Em relação ao 21^0 mês, julgue os itens:*

(1) A amortização é de $1.000,00.

(2) A prestação é superior a $1.400,00.

(3) O juro é inferior a $500,00.

(4) O saldo devedor é inferior a $20.000,00.

Solução: Do enunciado extraimos que

$$C = 40.000,00,\ n = 40 \text{ e } i = 0,02.$$

Item (1)

$$A = \frac{C}{n} = \frac{40.000}{40} = 1.000.$$

Logo, o item (1) está correto.

Item (2)

A prestação P_{21} é dada por $P_{21} = P_1 + 20r$ onde

$$P_1 = (A + C \cdot i) = 1.000 + 40.000 \times 0,02 = 1.800$$

e a razão é $r = -(1000 \times 0,02) = -20$. Portanto P_{21} é dada por

$$P_{21} = 1.800 + 20 \times (-20) = 1.400,00.$$

Logo, o item (2) está incorreto.

Item (3)

O juro no vigésimo primeiro mês é $J_{21} = P_{21} - A$, isto é,

$$J_{21} = 1.400 - 1.000 = 400,00.$$

Logo, o item (3) está correto.

Item (4)

O saldo devedor no vigésimo primeiro mês é

$$40.000 - 21 \times 1.000 = 19.000$$

Logo, o item (4) está correto.

Desempenho dos alunos:

O quadro abaixo resume o desempenho dos alunos neste exercício.

	Compromisso Acadêmico	Voluntários
Conseguiram resolver	2	11
Deixaram em branco por questão de tempo	8	nenhum

Conclusão: De uma maneira geral, os alunos gostaram e entenderam a atividade. Todos concordaram que os sistemas de amortização deveriam fazer parte do estudo regular de matemática financeira no Ensino Médio. Os que não conseguiram fazer alguma questão foram os alunos com um ritmo mais lento que os demais, mas, tenho certeza, que se o tempo fosse flexibilizado, todos chegariam, de forma mais ou menos trabalhosa, a solução das questões.

3.2 Atividade 2

3.2.1 Tabela Price

Na segunda atividade realizada na escola SESC, com duração de 3 horas, os temas abordados foram *série uniforme de pagamentos* e *tabela Price*. Foram utilizados para a realização dessa atividade data-show, tela de projeção e calculadoras científicas.

A atividade tem início abordando situações cotidianas como por exemplo os juros abusivos cobrados pelas operadoras de cartão de crédito . Juros esses que já bateram a taxa de 15% $a.m.$ A exposição inicial faz com que os alunos reflitam sobre a questão dos juros sobre juros, onde esses 15% $a.m$ geram uma taxa nominal de 180% $a.a.$. Citando Augusto Cesar Morgado, essa taxa nominal (falsa), na realidade, gera uma taxa efetiva de 435% $a.a$, pois se fizermos uma simples aplicação de taxas equivalente temos :

$$(1+i) = (1+0,15)^{12}, \text{ ou seja,}$$

$$i = 4,35 = 435\% \ a.a.$$

Alguns alunos mostraram espanto com esse valor, pois já consideravem a taxa de 180% $a.a$ absurda. Infelizmente muitos brasileiros chegam a acreditar nessa taxa de 180% $a.a$ e pouquíssimos têm consciência de que na realidade tem que pagar juros de 435% $a.a.$, acumulando dívidas cada vez maiores, gerando o famoso efeito "bola de neve", ou como foi citado na atividade, *"o cliente vira Sócio atleta do SPC e Serasa".*

É importante ressaltar que essa atividade possui uma série de pré-requisitos pois nessa etapa o aluno, além de possuir os conceitos iniciais de matemática financeira tais como juros simples e compostos, deve saber o valor do dinheiro no tempo (diagrama de setas). Progressões aritméticas e geométricas também são assuntos que devem estar bem assimilados pelos alunos. Lembramos que essa aula foi ministrada para alunos do 3^0 ano do Ensino Médio em fase de conclusão de curso

O primeiro exemplo trabalhado tem caráter introdutório e o seu objetivo é fazer o aluno relembrar o valor do dinheiro deslocado no tempo. Esse exemplo foi resolvido utilizando o diagrama de setas ou eixo de setas.

Exemplo 1: *Uma loja vende um produto em 4 prestações mensais e consecutivas de $80,00, sendo a primeira um mês após a compra. Se a taxa de juros compostos do mercado é de 2% ao mês, qual deve ser o preço à vista equivalente ao pagamento a prazo?*

Solução comentada:

Deve-se deslocar o valor de cada prestação para a data zero pois o pagamento é a vista.

Assim tem-se:

$$V = \frac{80}{1,02} + \frac{80}{(1,02)^2} + \frac{80}{(1,02)^3} + \frac{80}{(1,02)^4} = 304,62.$$

Apesar desses cálculos serem extremamente trabalhosos é apontado para o aluno que ao colocar "80" em evidência, o segundo fator é uma P.G, cujo primeiro termo é $\dfrac{1}{1,02}$ e a razão também é $\dfrac{1}{1,02}$.

Nota-se portanto que

$$V = 80.\left(\frac{1}{1,02} + \frac{1}{(1,02)^2} + \frac{1}{(1,02)^3} + \frac{1}{(1,02)^4}\right).$$

Ao se aplicar a soma da P.G finita obtemos :

$$S = \frac{\frac{1}{1,02}\left[1 - (\frac{1}{1,02})^4\right]}{1 - \frac{1}{1,02}} = 3,807729$$

donde segue-se que

$$V = 80 \cdot 3,807729 = 304,62.$$

Generalizando, considere que uma dívida a ser paga com n prestações iguais a P, segundo a taxa na unidade de tempo considerada. Defina V como seu valor atual. Logo:

$$V = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$\therefore$

$$V = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i}\left[1 - (\frac{1}{1+i})^n\right]}{1 - \frac{1}{1+i}} = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{\frac{1+i-1}{1+i}} = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{\frac{i}{1+i}}$$

$$V = P \cdot \frac{\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}.$$

Foi introduzido o termo $a_{n,i} = a_{n\neg i}$ também conhecido como **fator de valor atual** em que n é a quantidade de prestações e i é a taxa de juros aplicada.

Nesse momento o professor expôs a tabela de fator de valor atual e mostrou como utilizá-la .

Assim V (valor à vista) pode ser calculado da seguinte forma:

$$V = P.a_{n\neg i}$$

Isto é, o valor à vista é o valor da prestação multiplicado por esse fator $a_{n\neg i}$.

Vale ressaltar que isso não resulta uma fórmula diferente já que $a_{n\neg i}$ nada mais é do que o valor da soma dos termos de uma PG finita , porém algumas bancas como a Cesp/Unb e Fundação Carlos Chagas, costumam usar esses termos em seus concursos, assim é importante mostrar para o aluno as diferentes formas de aplicação.Vale ressaltar que o projeto foi todo desenvolvido utilizando calculadoras cientificas e não as tradicionais financeiras $HP - 12C$.

Apesar de acreditarmos que o mais importante é saber o processo que leva a determinadas fórmulas e tabelas, sabemos que as mesmas se bem utilizadas poupam tempo, e muitas vezes serão o único auxílio em provas de concursos.

Nesta atividade um questionamento bastante interessante feito por um dos alunos foi o fato de que a tabela fator de valor atual começa com percentual de 1%, por que não valores menores?

Uma das explicações é o fato de a inflação no périodo em que foi implantada ser bastante alta , além do que dificilmente em empréstimos os juros serão inferiores a 1%. Ao fazermos uma pesquisa realmente encontramos pouquíssimas dessas tabela utilizando taxas de $0,5\%$; $0,6\%$ por exemplo.

O segundo exemplo trabalhado foi o seguinte.

Exemplo 2: *Uma compra no valor de $10.000,00 deve ser paga com uma entrada de 20% e o saldo devedor financiado em 12 prestações mensais e iguais , vencendo a primeira ao fim de um mês, a uma taxa de 4% ao mês. Considerando que esse sistema de amortização corresponde a uma anuidade ou renda certa, em que o valor atual de anuidade corresponde as prestações, calcule a prestação mensal, desprezando os centavos.*

Solução comentada:

O valor da entrada é 20% de$10.000,00$, ou seja, $2.000,00$. Essa entrada claramenete não entra no nosso financiamento.

Dessa forma o valor financiado é $V = 8.000,00$. Do enunciado do problema sabemos que $n = 12$ e $i = 4\%$. Considerando P o valor da prestação obtêm-se

$$8.000 = P.a_{n\neg i}.$$

Aqui cabe destacar que, dependendo da banca , pode ser fornecido uma tabela de fator de valor atual ou, até mesmo, uma tabela de coeficiente de financiamento

$\left(\dfrac{1}{a_{n,i}} = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right)$.

O aluno pode portanto, utilizar a tabela se a mesma for fornecida ou ainda, calculadora científica. Em casos de concurso, onde o uso de calculadoras não é permitido, o aluno pode deixar os valores indicados.

Da tabela abaixo tiramos que $a_{12,4} = 9,385074$ e sendo assim temos que

$$P = \frac{8000}{a_{12,4}} = 852,42.$$

FATOR DE VALOR ATUAL DE UMA SÉRIE DE PAGAMENTOS → $A_{n\neg i} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$

n \ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	15%	18%	20%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091	0,900901	0,892857	0,869565	0,847458	0,833333
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537	1,712523	1,690051	1,625709	1,565642	1,527778
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852	2,443715	2,401831	2,283225	2,174273	2,106481
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	3,545951	3,465106	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865	3,102446	3,037349	2,854978	2,690062	2,588735
5	4,853431	4,713460	4,579707	4,451822	4,329477	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787	3,695897	3,604776	3,352155	3,127171	2,990612
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766540	4,622880	4,485919	4,355261	4,230538	4,111407	3,784483	3,497603	3,325510
7	6,728195	6,471991	6,230283	6,002055	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419	4,712196	4,563757	4,160420	3,811528	3,604592
8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	6,463213	6,209794	5,971299	5,746639	5,534819	5,334926	5,146123	4,967640	4,487322	4,077566	3,837160
9	8,566018	8,162237	7,786109	7,435332	7,107822	6,801692	6,515232	6,246888	5,995247	5,759024	5,537048	5,328250	4,771584	4,303022	4,030967
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	7,721735	7,360087	7,023582	6,710081	6,417658	6,144567	5,889232	5,650223	5,018769	4,494086	4,192472
11	10,367628	9,786848	9,252624	8,760477	8,306414	7,886875	7,498674	7,138964	6,805191	6,495061	6,206515	5,937699	5,233712	4,656005	4,327060
12	11,255077	10,575341	9,954004	9,385074	8,863252	8,383844	7,942686	7,536078	7,160725	6,813692	6,492356	6,194374	5,420619	4,793225	4,439217
13	12,133740	11,348374	10,634955	9,985648	9,393573	8,852683	8,357651	7,903776	7,486904	7,103356	6,749870	6,423548	5,583147	4,909513	4,532681
14	13,003703	12,106249	11,296073	10,563123	9,898641	9,294984	8,745468	8,244237	7,786150	7,366687	6,981865	6,628168	5,724476	5,008062	4,610567
15	13,865053	12,849264	11,937935	11,118387	10,379658	9,712249	9,107914	8,559479	8,060688	7,606080	7,190870	6,810864	5,847370	5,091578	4,675473
16	14,717874	13,577709	12,561102	11,652296	10,837770	10,105895	9,446649	8,851369	8,312558	7,823709	7,379162	6,973986	5,954235	5,162354	4,729561
17	15,562251	14,291872	13,166118	12,165669	11,274066	10,477260	9,763223	9,121638	8,543631	8,021553	7,548794	7,119630	6,047161	5,222334	4,774634
18	16,398269	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587	10,827603	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412	7,701617	7,249670	6,127966	5,273164	4,812195
19	17,226008	15,678462	14,323799	13,133939	12,085321	11,158116	10,335595	9,603599	8,950115	8,364920	7,839294	7,365777	6,198231	5,316241	4,843496
20	18,045553	16,351433	14,877475	13,590326	12,462210	11,469921	10,594014	9,818147	9,128546	8,513564	7,963328	7,469444	6,259331	5,352746	4,869580
21	18,856983	17,011209	15,415024	14,029160	12,821153	11,764077	10,835527	10,016803	9,292244	8,648694	8,075070	7,562003	6,312462	5,383683	4,891316
22	19,660379	17,658048	15,936917	14,451115	13,163003	12,041582	11,061240	10,200744	9,442425	8,771540	8,175739	7,644646	6,358663	5,409901	4,909430
23	20,455821	18,292204	16,443608	14,856842	13,488574	12,303379	11,272187	10,371059	9,580207	8,883218	8,266432	7,718434	6,398837	5,432120	4,924525
24	21.243387	18.913926	16.935542	15.246963	13.798642	12.550358	11.469334	10.528758	9.706612	8.984744	8.348137	7.784316	6.433771	5.450949	4.937104

Desconsiderando os centavos temos prestações de $852,00.

O terceiro e último exemplo apresentado foi o seguinte:

Exemplo 3: *Uma nutricionista depositou $1.500,00 semestralmente para formar um pecúlio durante 10 anos. Calcule o montante à taxa de juros compostos 30% ao semestre.*

Solução comentada:

Como $i = 30\%$ ao semestre, $n = 10$ anos temos 20 semestres.

Como o capital inicial é o valor atual do dinheiro temos

$$V = P.a_{20,3}.$$

Assim

$$V = 1500.\left(\frac{1-(1,3)^{-20}}{0,3}\right)$$

$$V = 4973,69$$

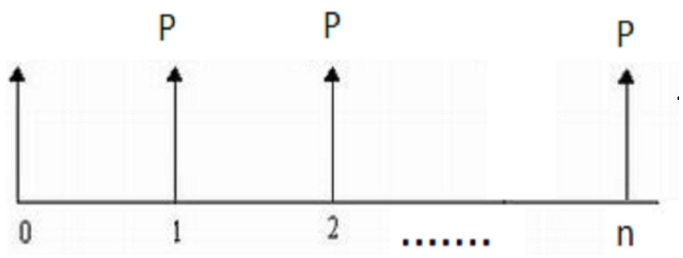
Deseja -se encontrar o montante a uma taxa de juros compostos de 30% ao semestre por um período de 20 semestres temos:

$$M = 4973,69.(1,3)^{20}$$
$$M = 945.248,19$$

Esse exemplo foi explorado da seguinte forma:

Foi utilizada uma generalização onde P é a prestação, n é a quantidade destas prestações e i é a taxa unitária.

Assim trazendo todas as prestações para a data atual temos:



$$V = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{3.1}$$
$$M = V.(1+i))^{n} \tag{3.2}$$

Substituindo (3.1) em (3.2) temos

$$M = P.\frac{(1+i)^{n}-1}{i}, \text{ istoé,}$$

$$M = P.S_{n,i},$$

em que $S_{n,i}$ é chamado **fator de acumulação de capital** ou **valor futuro**.

Esse problema serviu para fazer um "link"com uma situação bastante comum para jovens investidores que aplicam parte dos seus rendimentos no mercado financeiro. Note que nesse exemplo hipotético, ao investir um valor de \$ 1500 mensais ao final de 10 anos o rendimento chegou próximo a 1 milhão de reais .Poder-se-ia questionar que esses juros estão um pouco altos. Vale lembrar que esse é um exemplo hipotético e que os juros de mercado são bastante variáveis .

Nesse exemplo foi explorado também o uso que se faz da calculadora científica. Os alunos, em geral, sabem usar tecnologias muito avançadas. Essa nova geração é composta por "nativos digitais". Seus celulares conectam a internet, usam ipods, ipads entre outros com uma facilidade incrível. Porém, ao fazer uso da calculadora científica, muitas vezes não sabem explorar suas funcionalidades.

Após resolver esses exemplos em conjunto com os alunos, foi proposto que eles tentassem fazer o exercício abaixo, utilizando a generalização que tinha sido deduzida sobre montante. O objetivo desse exercício, utilizando agora taxas de juros mais próximas da realidade , é mostrar que poupando uma pequena quantia mensalmente, consegue- se formar um pecúlio significativo no final de 10 anos.

Exercício: *Um PROFESSOR depositou $500,00 mensalmente para formar um pecúlio durante 10 anos. Calcule o montante à taxa de juros compostos 6% ao ano, capitalizado mensalmente?*

Solução comentada:

Do enunciado sabemos que $n = 10$ anos, isto é, 120 meses e $i = 6\%$ ao ano que capitalizados mensalmente nos dá $0,5\%$ ao mês. Como

$$M = P.\frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

então

$$M = 500.\frac{(1,005)^{120} - 1}{0,005} = 81.939,67 \text{ ao final de 10 anos.}$$

Lembre-se que na atividade 1 foi utilizada a tabela SAC. Nesta segunda atividade faremos uso da tabela Price.

Neste ponto, a fim de motivar o assunto, devem ser introduzidas algumas utilizações da tabela Price, como por exemplo o financiamento de imóveis e principalmente o financiamento de automóveis.

Destaca-se abaixo uma série de características da Tabela Price, tais como:

- Prestações fixas
- Amortizações crescentes (prestações fixas juros decrescentes)
- A taxa de juros contratada é dada em termos nominais.
- As prestações tem período menor que aquele a que se refere a taxa. (No cálculo é utilizada a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação).

- Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.

- Saldo devedor imediatamente após o pagamento da prestação P_k é igual ao valor atual da série postecipada formada pelas prestações $P_k + 1$ até P_n.

- Como as prestações $P_k = R$ constantes constituem uma série uniforme de pagamentos, o capital emprestado é o valor atual dessa série.

- Cada prestação R é dada por $R = C\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

Após listar tais características talvez valha a pena ressaltar que os alunos não devem se desesperar com tanta informação e que após pôr o Sistema Price em prática, muitas dúvidas serão elucidadas. Inicia-se então com o seguinte exemplo.

Exemplo: *Considere um empréstimo de $10.000,00 que deve ser devolvido pelo Sistema Francês (Tabela Price) em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.*

k (Período)	P_k(Prestação)	J_k(Juros)
0	–	–
1	$2.637,97$	10% de $10.000,00 = 1.000,00$
2	$2.637,97$	10% de $8.362,03 = 836,20$
3	$2.637,97$	10% de $6.560,26 = 656,03$
4	$2.637,97$	10% de $4.578,32 = 457,83$
5	$2.637,97$	10% de $2.398,18 = 239,82$

k (Período)	$A_k = P_k - J_k$ (Amortização)
0	–
1	$2.637,97 - 1.000,00 = 1.637,97$
2	$2.637,97 - 836,20 = 1.801,76$
3	$2.637,97 - 656,03 = 1.981,94$
4	$2.637,97 - 457,83 = 2.180,14$
5	$2.637,97 - 239,82 = 2.398,15$

k(Período)	S_k (Saldo devedor)
0	$10.000,00$
1	$10.000,00 - 1.637,97 = 8.362,03$
2	$8.362,03 - 1.801,76 = 6.560,26$
3	$6.560,26 - 1.981,94 = 4.578,32$
4	$4.578,32 - 2.180,14 = 2.398,18$
5	$2.398,18 - 2.398,15 \cong 0$

É importante lembrar que o valor da prestação fixa é calculado através das fórmulas

$$V = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
$$P = C.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$P = 10000.\frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-5}}$$
$$P = 2.637,97,$$

pois trata-se de uma série uniforme de pagamentos com prestações fixas postecipadas.

Vale a pena destacar que se o mutuário quiser quitar a dívida na data 3, por exemplo, deve-se "trazer"as prestações P_4 e P_5 para essa data.

Assim teríamos

$$\frac{2.637,97}{1,1} + \frac{2.637,97}{(1,1)^2} = 4578,29$$

Note que esse valor é aproximadamente o mesmo que o saldo devedor na data 3.

Ressaltamos a importância de explorar a tabela de várias formas e não como um processo meramente mecânico.

Após construir a tabela o professor retornou as características da Tabela Price e os alunos demonstraram, nesse momento, ter compreendido com mais clareza.

Em seguida pode ser sugerido aos alunos que estes resolvam um problema onde tenham que montar uma tabela Price.

4 Matemática Financeira e Tecnologias

Em meio a evolução tecnológica que vem ocorrendo nas duas últimas décadas, nós professores não podemos nos excluir desse processo de modernização .

Acreditamos na importância que o bom uso das tecnologias, de forma consciente e bem planejada, possa render bons frutos no processo de aprendizagem.

Vemos o uso das tecnologias como um "algo a mais "no ensino , um facilitador para a consolidação dos conteúdos .

Acreditamos que os recursos tecnológicos possam ser uma ferramenta que acrescente, de forma significativa, o conteúdo estudado.

Dar aulas para uma geração que já "nasce com um tablet pendurado no carrinho"pode ser bastante complicado.

Muitos são os distratores da era digital , assim torna-se inevitável não lançarmos mão de recursos tecnológicos dentro de nossas salas de aula . Criar situações que levem nossos alunos a refletir suas realidades e, por que não, usando algumas tecnologias que nossos alunos dominam ou dominarão com muito mais destreza que nós professores.

Sabemos que muitos professores não tiveram, em sua formação, inclusão digital nos softwares e programas matemáticos. Nós mesmos nos consideramos aprendizes no que diz respeito ao uso desses softwares. Entretanto, ressaltamos a necessidade da busca do corpo docente por essa atualização. É dificil, como em toda transição, sair da "zona de conforto". Todavia os resultados obtidos podem ser muito gratificantes.

Muitas atividades de matemática financeira utilizando calculadoras científicas, planilhas do excel, software Calc, entre outros recursos computacionais, já são desenvolvidas e podem ser facilmente encontradas na internet.

Pensamos, então, em trabalhar com um software diferente do que usualmente encontramos no desenvolvimento da matemática financeira e optamos pelo GeoGebra (Geometria + Álgebra).

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino , reunindo recur-

sos de geometria, álgebra, tabelas, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Com isso tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Ele é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Além disso possui o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro , que é um dos membros do IGI (International GeoGebra Institutes). Esse instituto fica localizado na UFF-RJ e tem por objetivo desenvolver materiais gratuitos no treinamento do GeoGebra como ferramenta para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da matemática a todos os públicos, oferecer oficinas para professores, certificando-os no uso deste material no Brasil (e, particularmente, no Estado do Rio de Janeiro) e fazer formação presencial e a distância de professores e alunos de licenciaturas em matemática.

Retomamos às atividades aplicadas na escola SESC. Pensamos em algum exercício, dentre aqueles já descritos nas atividades, que pudesse tirar melhor proveito dos recursos computacionais. Assim temos por objetivo explorar essencialmente duas atividades: alguma que aborde o Sistema de Amortização Constante (SAC) e outra que aborde o Sistema Francês (Tabela Price). É importante enfatizarmos que o momento ideal para a aplicação do GeoGebra é posterior às atividades realizadas, nas quais o aluno já construiu manualmente as tabelas, baseados nas características de cada um dos sistemas de amortização .

Retornemos ao exercício 1 da atividade 1:

Considere um empréstimo de \$8.000,00 que deve ser devolvido pelo SAC em 10 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 5% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimos.

O aluno já havia realizado a atividade usando a calculadora científica.

Ele sabe que, por se tratar do sistema SAC, as parcelas de amortização são iguais entre si, ou seja, $A = \dfrac{C}{n}$, onde n é o numero de períodos, logo $A = \dfrac{8000}{10} = 800$.

Sabe também que os juros são calculados a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior.

E como a amortização é constante e o juro incide sobre o saldo devedor, as prestações $P_k = A_k + J_k$ tem valores decrescentes a cada período, sob forma de progressão aritmética.

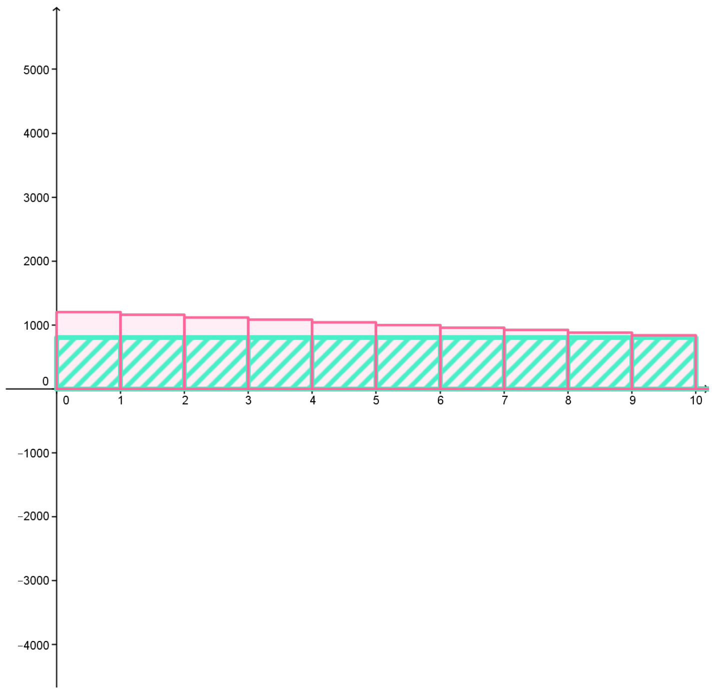
Assim ao inserirmos em nossa tabela os dados do problema:

$$n = 10 \qquad \text{Capital} = 8000 \qquad \text{taxa} = 0.05.$$

A tabela é toda calculada tomando por base os dados digitados . Para o aluno que acabou de fazê-la manualmente é um recurso de conferência.

O GeoGebra, porém, evidencia o gráfico em barras apresentando na cor azul os valores da amortização em cada período (que já sabemos ser constante) e em rosa os valores das prestações em cada período .

O gráfico é muito útil pois ressalta as principais características do SAC.



Vamos destacar algumas delas:

- O aluno tem uma visão gráfica bastante clara de que a amortização é constante, pois a barra azul ,em todos os períodos, não sofre nenhuma variação.
- As prestações são cada vez menores. O gráfico, juntamente com a tabela, torna mais clara a visualização das prestações em PA decrescente , que no exercício apresentado, possui razão -40.

- O aluno pode notar também que a diferença entre as áreas dos retângulos rosa e azul ,respectivamente, é o valor que o consumidor está pagando de juros , uma vez que

$$P_k = A_k + J_k$$

- O gráfico ressalta dessa forma os juros menores a cada mês.

Vimos que o aplicativo nesta atividade apresentou uma outra visão do conteúdo estudado, utilizando não só os dados numéricos mas também a visualização das variáveis através do histograma, enriquecendo e tornando a atividade mais interessante.

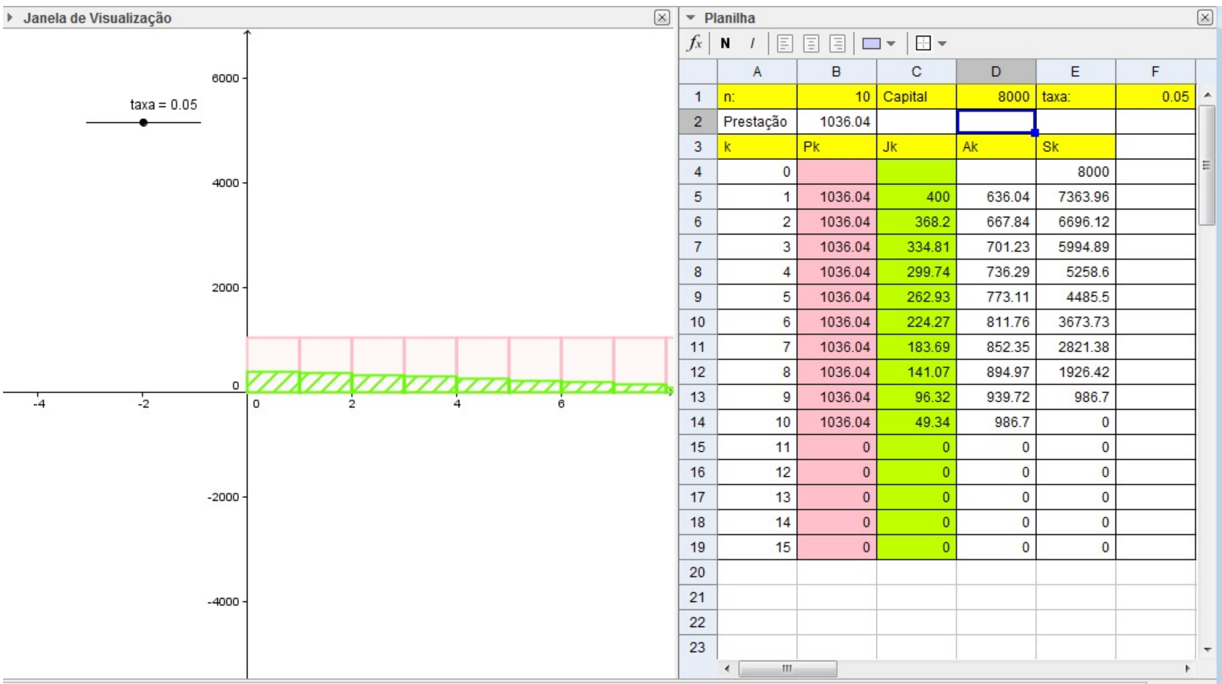
Vamos agora rever o exercício 1 da atividade 2 que aborda Tabela Price .

Considere um empréstimo de \$8.000,00 que deve ser devolvido pelo Tabela Price em 10 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 5% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimos.

Observe que estamos utilizamos os mesmos valores do capital ,da prestação e taxa de juros, que no exercicício na atividade 1, porém agora utilizando a Tabela Price .

Usar os mesmos valores, aplicando dois sistemas de amortização, é uma boa forma para que o aluno possa analisar comparativamente e decidir qual o melhor sistema de amortização.

Observe o gráfico:

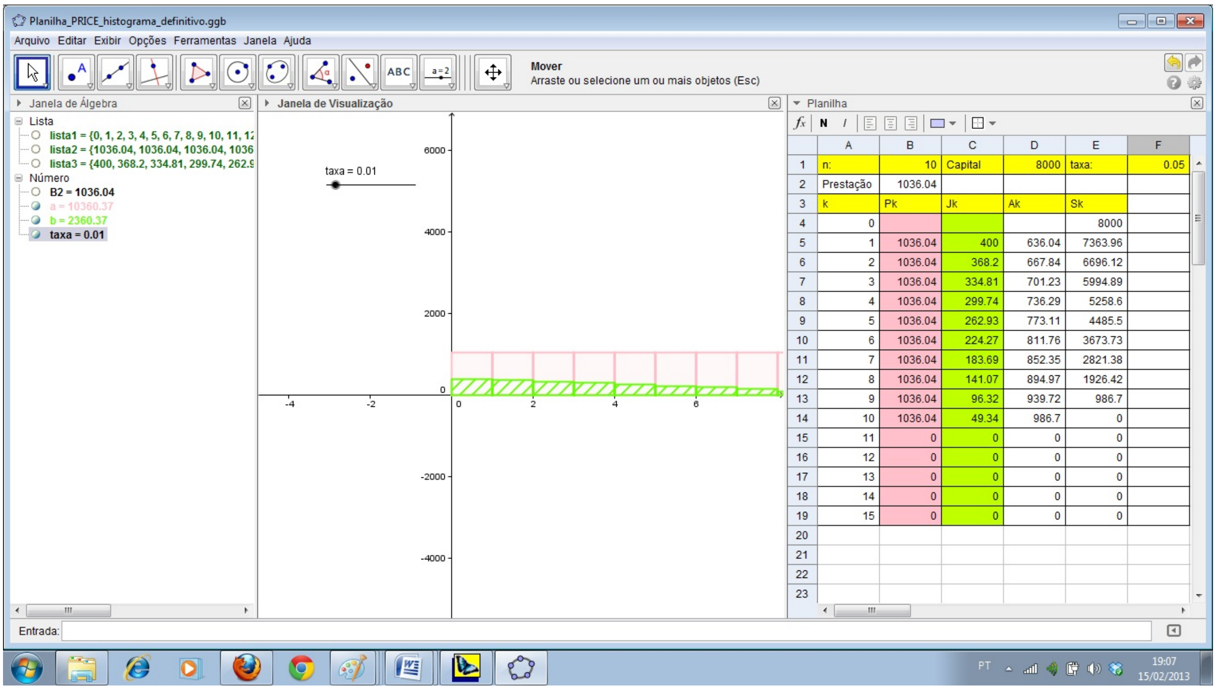


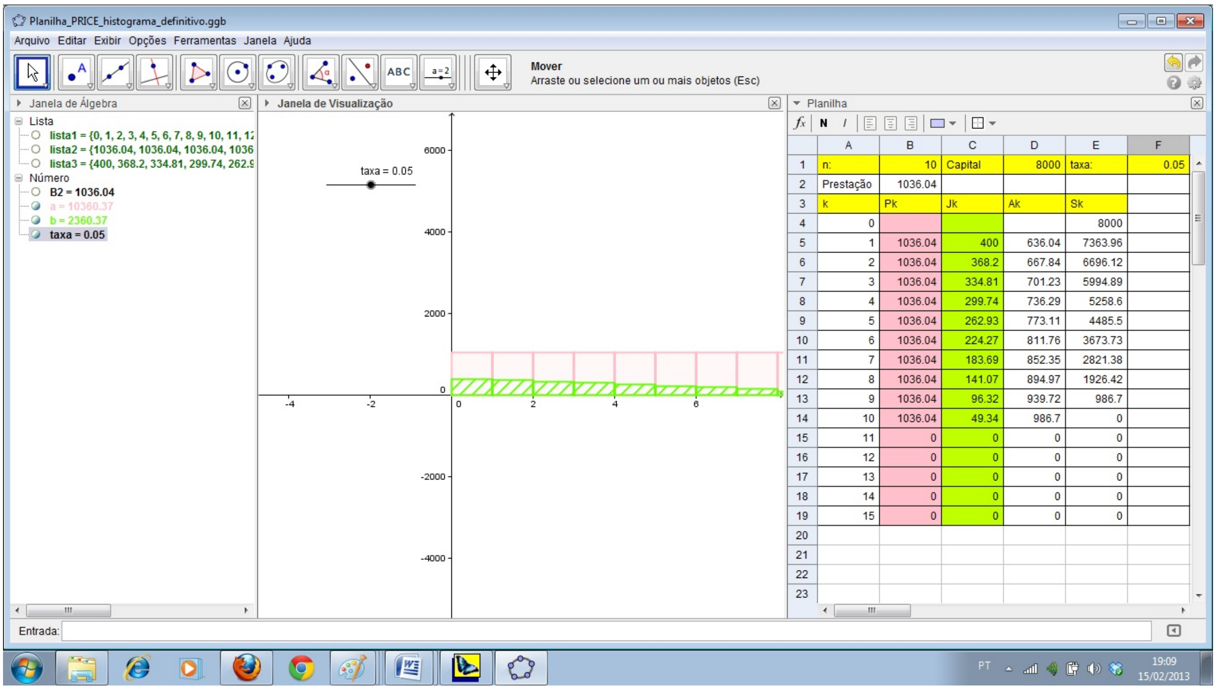
	A	B	C	D	E	F
1	n:	10	Capital	8000	taxa:	0.05
2	Prestação	1036.04				
3	k	Pk	Jk	Ak	Sk	
4	0				8000	
5	1	1036.04	400	636.04	7363.96	
6	2	1036.04	368.2	667.84	6696.12	
7	3	1036.04	334.81	701.23	5994.89	
8	4	1036.04	299.74	736.29	5258.6	
9	5	1036.04	262.93	773.11	4485.5	
10	6	1036.04	224.27	811.76	3673.73	
11	7	1036.04	183.69	852.35	2821.38	
12	8	1036.04	141.07	894.97	1926.42	
13	9	1036.04	96.32	939.72	986.7	
14	10	1036.04	49.34	986.7	0	
15	11	0	0	0	0	
16	12	0	0	0	0	
17	13	0	0	0	0	
18	14	0	0	0	0	
19	15	0	0	0	0	
20						
21						
22						
23						

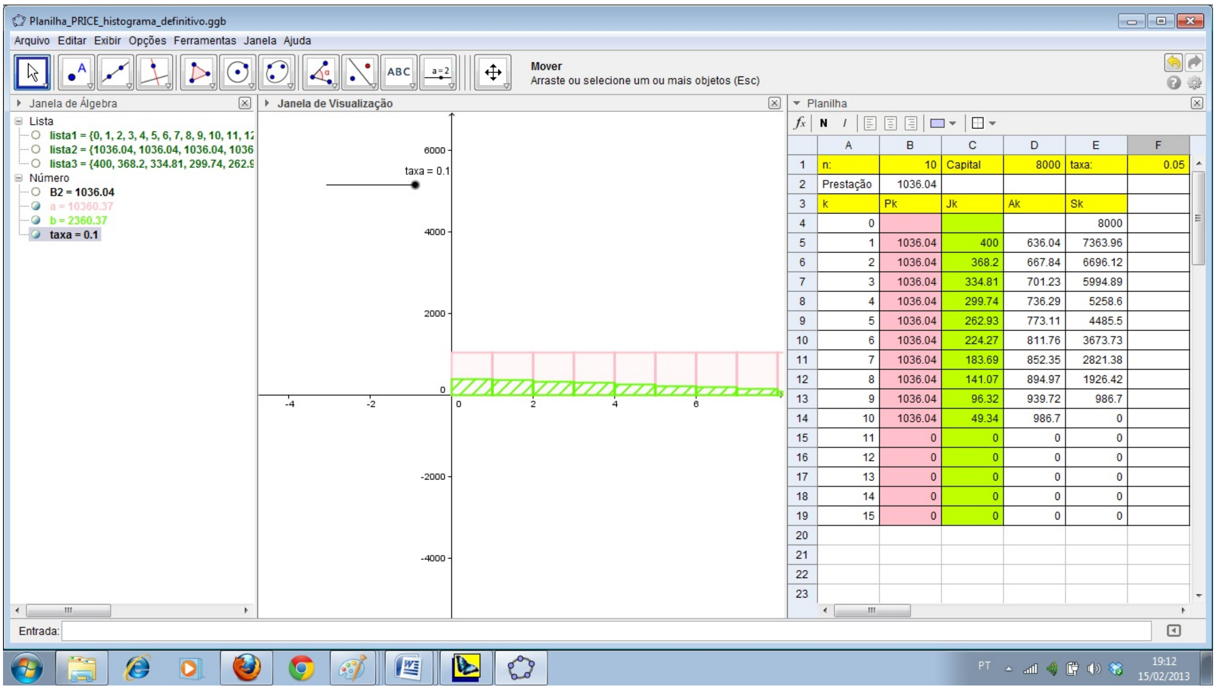
O gráfico ressalta as principais características da Tabela Price:

- As prestações são fixas.
- Como estas prestações são fixas e os juros (em verde) são decrescentes podemos constatar que as amortizações são crescentes.

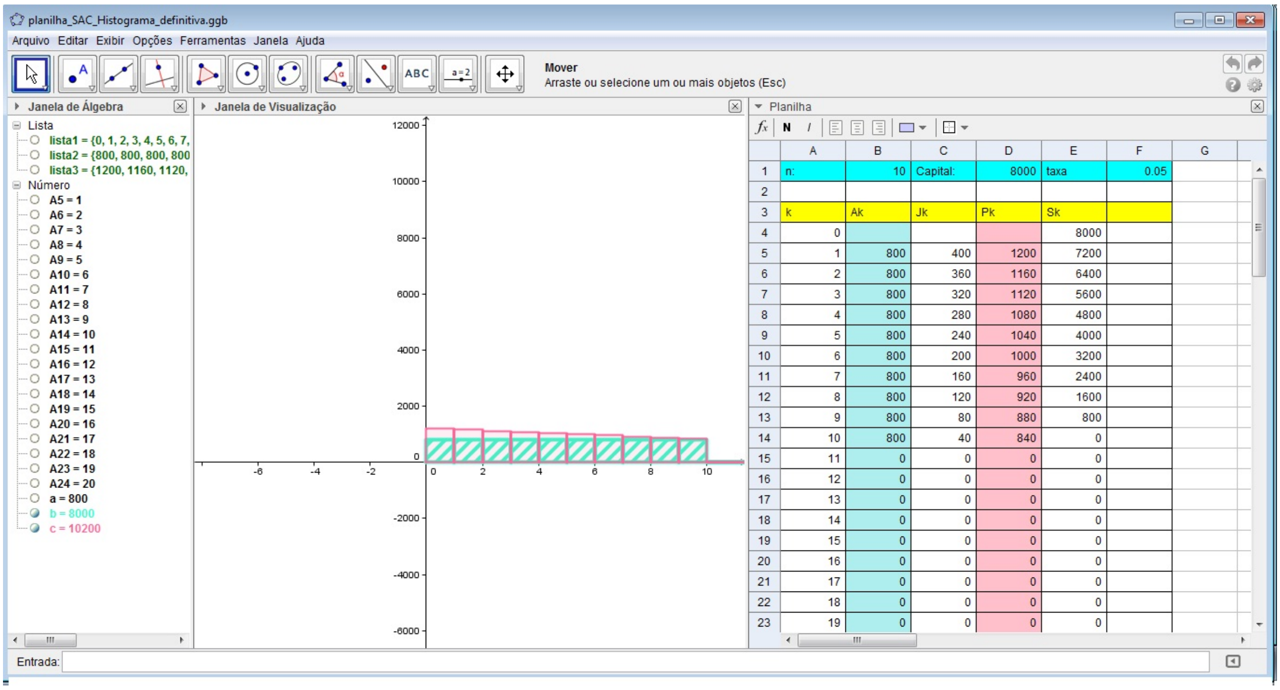
Utilizamos a ferramenta ”controle deslizante”, onde fazemos a taxa variar (na atividade fizemos a taxa variar de 0% à 10 % , de 1% em 1%). Esse recurso oferecido pelo GeoGebra apresenta, para o aluno, um interessante comparativo dos valores em relação à variação das taxas. Além disso o aluno pode utilizar o recurso de animação visualizando o passo a passo desse processo. Abaixo são apresentadas algumas imagens correspondendo às taxas $0,01$, $0,05$ e $0,1$.

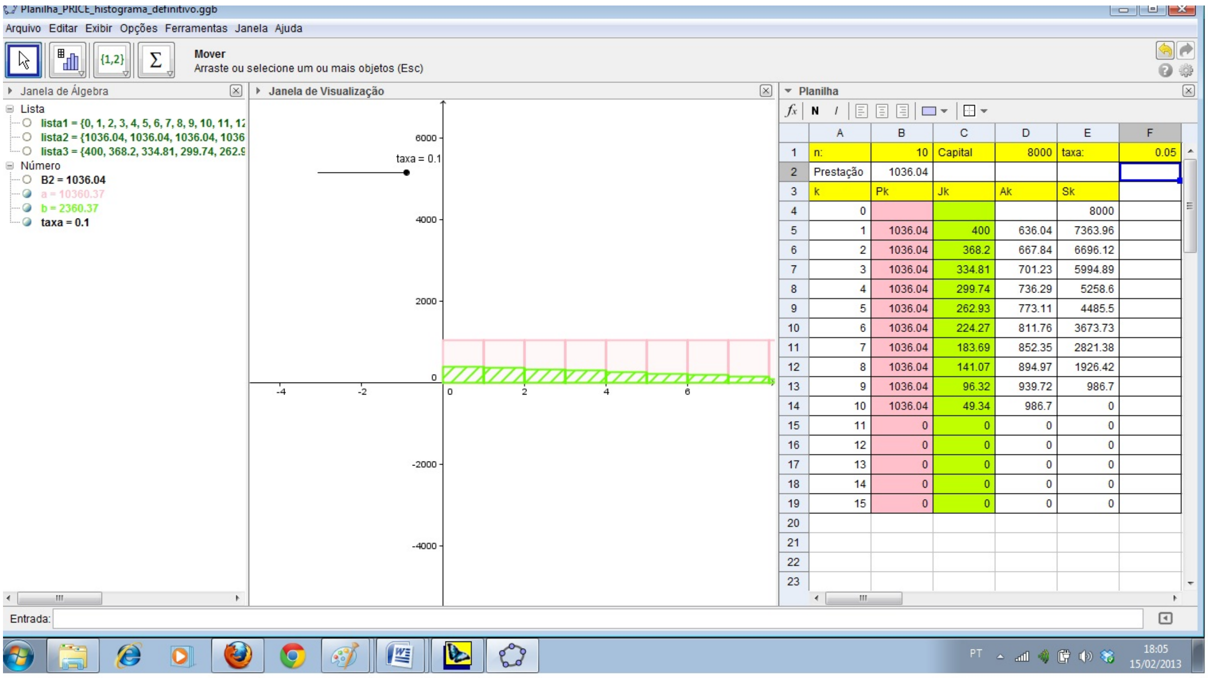






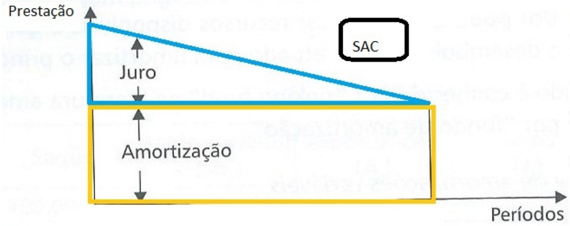
Vamos explorar agora o comparativo dos gráficos e tabelas utilizando o GeoGebra:

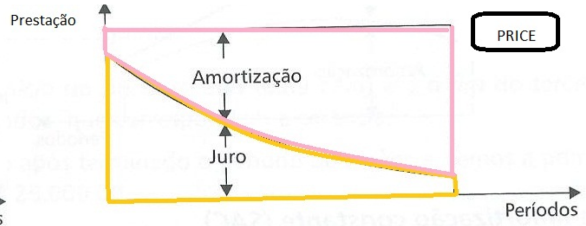




	SAC	PRICE
Prestação	Valores decrescentes em PA	Constante
Amortização	Constante	Crescente
Juros	Valores decrescentes em PA	Valores decrescentes

Graficamente temos o comparativo abaixo.





Observe a coluna P_k em ambos os sistemas de amortização . Note que o somatório das prestações do sistema SAC é a soma dos temos de uma PA onde o primeiro termo é 1.200 e o décimo e último termo é 840 . Assim

$$S_{10} = \frac{(1200 + 840).10}{2} = 10.200.$$

Já no Sistema Price como as dez prestações são iguais a $1.036, 04$ cada, o total pago pelo consumidor no mesmo período de tempo é $10.360, 40$.

Esperamos que com essas duas atividades utilizando o software GeoGebra ,tenhamos explorado as principais características e diferenças desses dois sistemas de amortização, exibindo suas peculiaridades e consolidando conceitos já trabalhados com os alunos por outros processos mais simples, incentivando o uso da tecnologia em sala de aula e tornando-a cada vez mais acessível, lembrando que o GeoGebra é um software gratuito.

5 Considerações Finais

Mostramos, com as atividades realizadas, que é possível trabalharmos os conteúdos e Sistemas de Amortização, PRICE e SAC, no Ensino Médio. Os pré-requisitos necessários são juros simples, juros compostos e progressões. Dominando os conteúdos de progressões geométricas o aluno é capaz de entender como funciona uma série uniforme de pagamentos e, a partir daí, calcular o valor da prestação de um financiamento na Tabela Price. E com os conteúdos de progressões aritméticas o aluno consegue montar, com facilidade, uma planilha de pagamentos no SAC. A aplicação do Geogebra tem por objetivo a consolidação dos conceitos estudados pois, com esse recurso o aluno consegue visualizar, de forma bastante clara e objetiva, as características de cada um dos sistemas de amortização podendo assim fazer um paralelo entre os dois sistemas e até mesmo, dependendo da situação e condições apresentadas, ser capaz de optar pelo melhor. A inclusão do estudo de sistemas de amortização, no ensino médio, contribuirá para a formação de um cidadão mais consciente e atuante, capaz de tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada. Dessa forma fica evidenciado o papel social da matemática na formação do educando.

Referências Bibliográficas

[1] Dante, Luiz Roberto. Matemática :contexto e aplicações,São Paulo ,Ática, 2010.

[2] Iezzi,Gelson; Dolce, Oswaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto; Almeida, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações,volume 1, 6^a edição, editora Saraiva,2010.

[3] Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel; Degenezajn, D. Mauro. Fundamentos da Matemática Elementar, 11: matemática comercial e financeira. - 1^aed.- São Paulo, Atual 2004.

[4] Mathias, Washinton Franco; Gomes, José Maria. Matemática financeira, 6^a edição, 4^a reimpressão, São Paulo,Atlas 2011.

[5] Morgado, Augusto C.; Wagner, Eduardo; Zani, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira, SBM, Rio de Janeiro, 1993.

[6] Paiva, Manoel. Coleção base: matemática volume único/Manoel Paiva -1^a edição,São Paulo,Moderna 1999.

[7] Ribeiro, Jackson. Matemática:ciência , linguagem e tecnologia,volume 2,1^a edição,São Paulo , Scipione ,2010.