UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

ALGUMAS ABORDAGENS NO USO DE MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Autor: Kim Lopes
Orientadora: Nedir do Espírito Santo

Rio de Janeiro - RJ
Dezembro de 2014

KIM LOPES

ALGUMAS ABORDAGENS NO USO DE MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, sob a orientação da **Professora Doutora Nedir do Espírito Santo.**

Rio de Janeiro
Dezembro de 2014

ALGUMAS ABORDAGENS NO USO DE MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Kim Lopes

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Professora Nedir do Espírito Santo
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

____

Professora Lourdes de la Rosa Onuchic
Departamento de Matemática – USP

____

Professora Marisa beatriz Bezerra Leal
Instituto de Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro
Dezembro de 2014

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a todas as pessoas que lecionam e as que ainda acreditam que é possível transformar a realidade das pessoas. Destaco aqui, de maneira especial, aqueles que certamente possuem a chama vocacional para a docência e que apesar das grandes dificuldades que enfrentamos em nosso país, ainda persistem e continuam nessa jornada.

Dedico de maneira especial, aos pais que investem na educação de seus filhos e são solícitos ao que se diz respeito a sua formação educacional e moral. Também deixo essa dedicatória atingir os alunos que ainda possuem o verdadeiro carinho, respeito e zelo pelo professor, retribuindo dessa forma, todo o amor, esforço e paciência que são necessários para que esse profissional exerça com excelência sua profissão.

"Numa terra em que não há professores, não pode haver imperadores."
(autor desconhecido)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, em Sua Santíssima Trindade que tudo abençoa e zela pela alegria e vitória daqueles que O temem. À Virgem Santíssima, toda minha gratidão por sempre nos amparar e entregar nossas súplicas ao Nosso Senhor Jesus Cristo, nosso Intercessor junto a Deus Pai que nos perdoa.

Esse agradecimento, não só designa as competências e virtudes que me foram concedidas para a realização e término desse curso, mas exauri toda a assistência do Espírito Santo que através da Caridade, o Dom maior e mais importante, impulsiona todo o ser humano a alcançar o esplendor de sua divindade.

"Ainda que eu fale as línguas dos homens e dos anjos,
se não tiver caridade, sou como bronze que ressoa ou como címbalo que retine.
Ainda que eu tenha o dom da profecia e conheça todos os mistérios e toda a ciência, ainda que eu possua a plenitude da fé, a ponto de transportar montanhas,
se não tiver amor, nada sou.
Ainda que distribua todos os meus bens aos famintos
e entregue o meu corpo para ser queimado,
se não tiver amor, de nada me aproveita.
A amor é paciente, o amor é benigno; não é invejoso, não é altivo nem orgulhoso; não é inconveniente, não procura o próprio interesse; não se irrita, não guarda ressentimento; não se alegra com a injustiça, mas alegra-se com a verdade; tudo desculpa, tudo crê, tudo espera, tudo suporta. O dom da profecia acabará,
o dom das línguas há-de cessar, a ciência desaparecerá; mas o amor não acaba nunca.
De maneira imperfeita conhecemos, de maneira imperfeita profetizamos. Mas quando vier o que é perfeito,
o que é imperfeito desaparecerá.
Quando eu era criança, falava como criança, sentia como criança e pensava como criança.
Mas quando me fiz homem, deixei o que era infantil.
Agora vemos como num espelho e de maneira confusa,
depois, veremos face a face.
Agora, conheço de maneira imperfeita, depois, conhecerei como sou conhecido.
Agora permanecem estas três coisas: a Fé, a Esperança e o Amor; mas a maior de todas é o Amor ."
(I Cor 13, 1 – 13)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a experiência concreta como um forte instrumento no ensino aprendizagem de Matemática, transformando o olhar do aluno sobre aspectos dessa ciência. Realizamos diversas abordagens no uso de materiais com o objetivo de, além de apresenta-lo com elemento determinante na compreensão do conteúdo, promover uma reflexão sobre o sentido de tal prática no cotidiano educacional.

O conteúdo deste trabalho está dividido em duas partes, a primeira, capítulos 1 e 2 detém toda a reflexão e argumentação sobre a prática pedagógica em si. Expomos sobre a atual realidade da docência em Matemática nas diversas escolas, bem como as recomendações curriculares e definições sobre aspectos pertinentes aos materiais pedagógicos. Ainda nesse campo, são apresentadas algumas abordagens pedagógicas, sendo destacadas suas características e como serão expostas, na segunda parte, as maneiras de se ensinar a Matemática com os materiais, tendo enfoque nessas abordagens.

Na segunda parte, que comporta os demais capítulos, são apresentados materiais, tratados em capítulos distintos, e suas particularidades. Na apresentação dos objetos, são levantadas a origem ou o problema que motivou o seu uso e também muitas sugestões de como utilizá-los, adaptá-los em diversas situações e contextos para aplicação em sala de aula.

Palavras-chave: Materiais no Ensino; Abordagens Pedagógicas; Matemática.

ABSTRACT

This work shows the concrete experience as a strong instrument in the teaching and learning of Mathematics, transforming the student's view faced with aspects of this science. We consider several approaches in the use of materials with the purpose of promote a reflection on the meaning of such a practice in the educational routine and, furthermore, present them as fundamental element in understanding of mathematical concepts.

The contents of this paper is presented into two parts, the first, chapters 1 and 2, holds all the reflection and argument about the pedagogical practice itself. We show some topics about the current reality of teaching in mathematics in the various schools and the curriculum recommendations and relevant aspects to teaching materials. Some pedagogical approaches are presented and pointed out their characteristics. We show how they will be applied in the second part in the ways of teaching mathematics with the materials and focus on those approaches.

In the second part, which holds the remaining chapters, materials are presented, treated in separate chapters, and its peculiarities. In the presentation of objects, are treated its origins or the problems that motivated their use and also suggestions of how to apply them and adapt them in different situations and contexts in the classroom.

Keywords: Materials in Teaching; Pedagogical approaches; Mathematics.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

A Matemática está entre as áreas de maior dificuldade de aprendizagem na Educação Básica. Constatado em consulta aos dados de desempenho do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2011) e no documento de *Olho nas metas* (2012, referente a 2011), que apenas 10,3% dos alunos do Ensino Médio encontram-se acima do nível considerado adequado de conhecimento, segundo referenciais do pelo Todos Pela Educação, para o Brasil e regiões. Várias medidas têm sido tomadas para mudar esse quadro, e dentre elas, está o emprego de alternativas metodológicas que contribuem não só para o aprendizado do aluno, mas também para a formação docente.

Este trabalho se dirige ao público dos professores e também aos estudantes de licenciatura em Matemática, tendo ênfase maior para os professores de Matemática que atuam na Educação Básica. Um professor de matemática deve ter em mente a utilidade dos conceitos e conteúdos tratados no Ensino Fundamental e sua formação deve possibilitá-lo a ser um agente crítico de seus procedimentos didático pedagógicos. Os jovens, em sua maioria, esperam encontrar em sala de aula respostas rápidas, como ocorre quando estão buscando informações na internet, e não acham necessária a profundidade do conhecimento que estão recebendo. Cabe ao professor a tarefa de utilizar metodologias para atrair seus alunos para atividades em sala de aula que evidenciem a necessidade de aquisição do conhecimento de conteúdos da Matemática e ele só terá sucesso nessa tarefa se estiver atento às demandas sociais e permanecer em constante pesquisa no seu trabalho.

Acreditamos que os materiais concretos aparecem no cenário do ensino da Matemática como fortes instrumentos que dão dinâmica ao desempenho dos atores, professores e alunos, mas que, sendo utilizados de forma imprecisa, podem apenas representar instrumentos de diversão. Como exemplo de material didático eficiente citamos o ábaco. Com origem há mais de 5.000 anos na China esse instrumento, que foi por muito tempo instrumento de cálculo e desprezado com o avanço tecnológico, até hoje é utilizado por muitos professores para o ensino de contagem e operações elementares.

Propomos, neste trabalho, o uso de materiais concretos em sala de aula e, para tal, nos apoiamos, inicialmente, no trabalho de Szendrei (1997) onde são feitas várias considerações sobre a utilização de materiais educativos abrangendo posicionamentos de educadores contra e a favor de seu uso, abordando aspectos a serem considerados e cita, página 423, *"There are some commonly shared fears concerning the use of concrete materials and especially educational materials:*

1) *how teachers can learn the proper use of the materials;*
2) *whether the learning time invested is ever regained;*
3) *whether any transfer effect exists and the knowledge gained through the use of the materials will be effective in real life situation as well."*

Tradução nossa

Existem alguns receios compartilhados sobre o uso de materiais concretos e especialmente de materiais educacionais:

1) como os professores podem aprender o uso adequado dos materiais;
2) se o tempo de aprendizagem investido é sempre recuperado;
3) se existe qualquer efeito de transferência e se o conhecimento adquirido, através da utilização dos materiais, será eficaz em situação da vida real.

Também cita na página 427

"Manipulatives help pupils develop and understand the concepts, procedures, and other aspects of mathematics. And additional role is to help pupils develop skills that are not equally well developed through out-of-class experience. These skills are in areas such as probability, measurement, Euclidean geometry, and spatial relations (3-dimensinal geometry)."

Tradução nossa

Materiais manipuláveis ajudam os alunos a desenvolverem e compreenderem os conceitos, procedimentos e outros aspectos da matemática. E o papel adicional é ajudar os alunos a desenvolverem habilidades que não são igualmente bem desenvolvidas através da experiência de fora da sala de aula. Essas habilidades estão em áreas como probabilidade, medição, geometria euclidiana, e as relações espaciais (geometria tri-dimensional).

Neste trabalho apresentamos propostas de aplicações de materiais didáticos em atividades contextualizadas com problemas. Incluímos também a investigação para a resolução de problemas clássicos por meio de uma nova abordagem, com o objetivo de induzir o aluno a desvendar os conteúdos matemáticos envolvidos em cada problema, bem como questionar quanto ao aspecto quantitativo e qualitativo da resolução.

Propomos também que materiais didáticos possam ser usados como estratégia para a proposição de problemas e abordagem de resolução dentro da perspectiva do ensino e da aprendizagem de matemática. Essa metodologia que vem sendo aplicada em várias estruturas curriculares, dentro das propostas de Onuchic (1999) e Pólya(2003) auxiliando o professor no ensino da Matemática.

Há grande oferta de materiais didáticos no mercado, incluindo produções na mídia de sugestões de aplicabilidade e construções, mas esses produtos não são eficientes se não tivermos o devido preparo para explorar seu potencial de recursos para o ensino aprendizagem que deles podemos extrair.

Numa sociedade que visa o imediatismo do resultado ao invés da busca pela compreensão, fazem-se necessários, aos professores, diferentes formas de se apresentar conteúdo e resgatar princípios fundamentais do ensino, tais como pluralismo de ideias, concepções pedagógicas e vinculação entre educação escolar, trabalho e práticas sociais.

Em equilíbrio entre o abstrato e o concreto, o professor deve contar com materiais e didáticas apropriadas para realizar experiências que possam modificar o quadro da concepção dos alunos para que a Matemática seja vista de fato como uma forma de pensar e solucionar problemas.

Pelo exposto, nosso trabalho se justifica e suas questões motivadoras são apresentadas a seguir:

Qual é a importância do material didático concreto no ensino da Matemática para o professor e para o aluno?

Como contextualizar a matemática e otimizar os diversos recursos para compreendê-la?

O avanço tecnológico que estamos vivendo nos possibilita uma riqueza de recursos educacionais. No entanto, o impacto tecnológico, faz com que as pessoas, em seu contexto social, tornem suas relações cada vez mais virtuais e distantes, transferindo esse formato para a aquisição do conhecimento escolar, que quando não bem conduzido pode se tornar desastroso. No ensino de Matemática dispomos de vários softwares que auxiliam alunos e professores na aprendizagem de Matemática e achamos que, em algumas situações, tais recursos podem ter maior preferência que o material concreto. Entretanto, neste trabalho, não será exposto sobre o uso de material concreto com a finalidade de comparar a eficiência com os recursos tecnológicos, mas com o objetivo de complementar as abordagens que podem ser realizadas no Ensino de Matemática.

Para pensarmos e investigarmos melhor sobre essas questões elaboramos este trabalho. Esperamos alcançar os seguintes objetivos:

- Apresentar o material concreto como um produto que, sob certas circunstâncias, torna-se elemento fundamental para o aprendizado de certos conceitos matemáticos.
- Apresentar o material concreto como instrumento motivador não apenas para o ensino, mas também para despertar a criatividade do aluno, sendo um convite à reflexão sobre os conceitos e na abordagem de problemas.
- Evidenciar a importância do conhecimento do potencial em recursos do material concreto.
- Discorrer sobre formas de utilização de materiais concretos no sentido da utilização de seus recursos.
- Resolver problemas matemáticos, tornando-os uma experiência concreta.

A metodologia para a realização deste trabalho se apoia na investigação bibliográfica em livros de matemática para o Ensino Básico e em artigos relacionados aos tópicos de Educação por elementos de referencial para encontrarmos problemas matemáticos e como resolvê-los com materiais concretos.

Nas atividades propostas, são apresentadas referências de trabalhos já realizados, propostas de como usar o material visando às abordagens e situações nas quais o professor pode adaptá-las.

Organizamos a apresentação do trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1 abordamos de maneira crítica e reflexiva, o contexto educacional brasileiro e o ensino de matemática, com ênfase nos conteúdos das diferentes fases de ensino. Além disso, exploramos aspectos dos PCN, suas principais recomendações e abordamos de que forma os materiais concretos podem contribuir para a introdução e a fixação de conceitos e resolução de problemas.

No capítulo 2 apresentamos tipos de abordagens de ensino e didático-pedagógicas que permeiam a educação brasileira, com suas referências e características, juntamente com os aspectos da utilização dos materiais e suas funcionalidades. Com o fim de caracterizar as maneiras de realizar atividades com materiais concretos, ou seja, com recursos para o ensino aprendizagem, ousamos agrupar os recursos em quatro tipos: motivacional, empírico, avaliativo e transcendente. Discorremos sobre esses tipos no trabalho.

A parte que envolve diretamente cada material é abordada nos capítulos posteriores, em que, para cada material, são especificados os objetos das experiências a ele relacionadas e suas diversas finalidades. Na sequência teremos, no capítulo 3, o trabalho realizado sobre uma maquete que visa reconstituir o cenário de Konnigsberg, fazendo uma retrospectiva das realidades vividas por Euler e a posterior Teoria dos Grafos. Já, no capítulo 4, trabalhamos com um painel elétrico, visando a conceitos, não só da contagem, como também sobre eletricidade. No capítulo 5, fazemos uso de uma balança de pratos, explorando diversos problemas na Matemática como equações, inequações, sistemas de equações e outros.

No Capítulo 6 abordamos o uso de material concreto para a resolução de problemas na geometria em geral, tornando concretas atividades que poderiam ser realizadas com lápis e papel. Finalizamos com a conclusão de nosso trabalho, em que avaliamos as atividades em si, mas ressaltamos o importante uso de materiais e da realização de atividades diferenciadas, seus impactos e estímulos para os alunos e professores.

CAPÍTULO 1

Reflexões sobre a prática pedagógica

1.1. Atual conjuntura do ensino escolar

Quando estamos preparando uma aula temos, como prioridade, cumprir um planejamento ou meta escolar onde as práticas principais desse processo são a teoria e a resolução de exercícios. Essas são as duas colunas que sustentam legitimamente o dia-a-dia da rotina escolar de um professor de matemática.

O problema é que quando essas colunas sustentam simplesmente um modelo de mercado ou de governo, onde a transmissão da teoria e a resolução de exercícios apontam para uma forma pré-determinada de prova ou avaliação, deixando assim o critério investigativo da matemática vazio ou tendencioso, a aula se torna um simples condicionamento mental que não possui sentidos mais profundos.

Nossa lógica social de mercado leva as escolas a adotarem esse modelo falido. Hoje, por conta do Exame Nacional do Ensino Médio, muitas instituições particulares e públicas aderem a essa lógica, tornando assim o cronograma de matemática uma fria grade de horários que fica presa aos parâmetros dessa avaliação. Isso impede quase sempre um tipo de exploração alternativa que possa enriquecer o conhecimento do estudante.

Na realidade da escola pública do Rio de Janeiro temos os chamados cadernos pedagógicos, que visam o conteúdo da matemática de maneira restrita e apontam para uma avaliação geral, a Prova da Rede. Essa prova tem como objetivo comparar o nível de conhecimento entre as escolas da rede municipal. Já, nas realidades de escolas particulares, temos um ambiente mais flexível em alguns aspectos: por um lado, temos de forma positiva materiais disponíveis e alunos mais preparados e seletos; por outro, temos agendas preenchidas com compromissos que garantam resultados que são, basicamente, a propaganda de qualidade da escola.

Em todas as realidades apresentadas, tanto a pública quanto privada evidenciam que o aluno já não é mais visto como um indivíduo que precisa do conhecimento para exercer sua cidadania e trazer de forma positiva um benefício à sociedade., temos uma progressiva “industrialização” da educação. Essa “industrialização” é devida ao fato de tratarem a escola como uma indústria, onde, no lugar de um espaço de conhecimento e saberes, temos como prioridade uma modelagem do aluno, como se este fosse um simples produto ou objeto. Sendo assim, “temos que atestar a qualidade de nosso produto”. Essa visão errônea de educação leva diretores e professores a mecanizarem suas aulas para que o aluno tenha êxito na prova ou avaliação almejada e, com isso, obter uma aprovação social da qualidade da sua escola, como se esta fosse uma filial de uma indústria.

Ter êxito nas avaliações de uma rede ou do ENEM não representa em si um grande mal, mas sim o aspecto decisivo de abandonar conceitos pedagógicos e de formar, no aluno, uma mentalidade crítica, construtiva e participativa.

Sobre a abordagem da teoria, como dito nesses cadernos pedagógicos, temos uma gradual desconstrução da organização matemática. Por exemplo: ao trabalhar com notação científica, o material começa tomando exemplos da natureza ou sociais, exibindo então alguns cálculos para depois exibir uma definição do que seria uma notação científica. A crítica, nesse exemplo, não se dá simplesmente por não se colocar a definição em primeiro lugar, mas por apresentar ao aluno, de uma maneira altamente abstrata um conceito de grandeza e dimensão que o aluno certamente pode não ter ideia de comparação. Sem dúvida, se fosse usado outro recurso material ou digital, talvez essa ideia pudesse ficar mais clara para o estudante.

Talvez, com uma abordagem intermediária entre essas duas visões, possamos unir definições e exemplos concretos de tal maneira que a definição não careça de sentido lógico e a exposição ou exemplo concreto e real traga uma correlação significativa para a teoria.

Poderia ser realizado nesse exemplo da notação científica, a apresentação de sua definição e em seguida fazer uso de uma calculadora, ou até sugerir que cada estudante use a sua, como vemos em aplicativos para celulares, para realizar transformações de números para essa notação. Primeiramente, apresentamos o número em notação científica, como na forma n . 10^{e}, onde n deve ser um número real de módulo maior igual a 1 e menor que 10 e o expoente *e* representa a quantidade de algarismos após a vírgula, ou seja, sua quantidade de casas decimais. Em seguida, ao expor sobre a conversão dos números para notação científica, fazendo uso da calculadora, identificar o deslocamento da vírgula como o produto ou quociente por uma potência de 10. Neste caso, mostrar na calculadora que o produto por uma potência de 10 desloca a vírgula para a esquerda, aumentando a quantidade de algarismo depois da vírgula e consequentemente aumentando o expoente da base 10. De forma análoga, pode-se mostrar a conversão quando é necessário realizar o quociente por uma potência de 10 e assim deslocar a vírgula para a direita, reduzindo o valor do expoente da base 10.

Sobre a resolução de exercícios, temos o mesmo aspecto simbiótico com a lógica educacional atual, tendo como objetivo uma adestração do alunado para um modelo de avaliação mediado pelo governo e outras instituições. As estratégias básicas que são adotadas pelos professores da rede pública são: elaboração de simulados ou avaliações que direcionam a mentalidade do aluno para o perfil ou modelo de questão que a avaliação possui.

Em algumas instituições particulares, os professores elaboram listas e resoluções das questões de concursos anteriores, visando a um número de aprovações elevado, para conceber um grau de status e credibilidade, tanto para o professor quanto para o colégio para o qual trabalha. O principal entrave dessa mentalidade é que, nesse quadro de resolução de exercícios, restringe-se o conhecimento a modelos de questionamentos particulares que muitas vezes podem levar a um vício errôneo de aprendizagem da matemática. Esse vício pode ser observado quando o aluno, ou até o professor, usa um “macete” ou outro dispositivo que visa à resolução particular do problema, sem um sentido cognitivo ou lógico das propriedades ou dos argumentos usados.

É nesse aspecto que uma exploração mais investigativa sobre as questões em si poderia, de forma mais completa, transmitir o sentido matemático dentro do problema. Essa investigação poderia ocorrer num ambiente virtual, usando variados *softwares* para auxiliar na resolução. Por exemplo: o *Graphmatic* para funções e gráficos ou o *GeoGebra* para geometria e outros aspectos. Outra forma mais rara, que será o objeto de estudo deste trabalho, trata-se do uso de um material concreto que contemplaria a interação real do aluno com o objeto e, assim, despertar um novo conceito entre a matemática e a realidade.

1.2. Resolução de problemas com materiais concretos

Como um método alternativo, o uso de materiais concretos torna-se um bom catalisador para a aprendizagem, visto que ele pode ser inserido na parte teórica da matemática, associando-a a um problema, de maneira que as barreiras de abstração são amenizadas, como também explorar melhor o sentido matemático.

> *"A Resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos."* (Lupinacci e Botin, 2004)

Nesse campo, podemos inserir o uso do material como um caminho para a resolução do problema que, além de contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática, também tira do aluno a tendência de achar que a disciplina é uma ciência feita para o abstrato e mostra que ela é real e concreta.

Essa associação do material, no conceito explícito da Resolução de Problemas descrito por Polya (2003), contempla a todos os seus critérios de resolução, que são:

1. Compreensão do problema

Na análise do material, o aluno deve se perguntar quais os dados, condições e objetivos solicitados para resolver o problema. A interação empírica do aluno com o material, sem impor nenhuma restrição, ajuda nessa primeira etapa.

2. Construção de uma estratégia de resolução

Nessa etapa, o professor deve estimular o aluno a buscar movimentos ou interações com o material, a fim de solucionar ou buscar suas próprias e criativas soluções.

3. Execução de uma estratégia escolhida

Com as duas etapas anteriores realizadas corretamente, esta segue de maneira natural. Agora o aluno deve interagir com o material, visando à resolução e devendo ser estimulado a confirmar cada etapa de sua interação para que se confirme o seu aprendizado.

4. Revisão da solução

Essa é a parte principal para a escolha de qual material usar para resolver problemas. Aqui é realizada a depuração dos procedimentos utilizados, para que se descubra a essência do problema, o que faz com que este problema seja em si simplificado. Nessa parte, a reflexão sobre o processo realizado faz o caminho do concreto para o abstrato.

Ao percorrer essas 4 etapas, essa abordagem atinge seu clímax, pois, para enfrentar a barreira da abstração, usamos o material concreto e, com as etapas descritas por Polya, fazemos esse percurso como um verdadeiro "elevador".

Podemos imaginar que se associarmos o conhecimento do aluno a um prédio, pode-se dizer que usar o material faz com o aluno comece no “térreo” desse prédio. Desejamos que esse aluno chegue à cobertura desse edifício, logo essa metodologia de ensino funciona como o elevador, que transporta seu passageiro, de andar em andar, até atingir a cobertura.

No decorrer deste trabalho observaremos que, diferentemente das questões objetivas vistas no ensino atual, o aluno, ao encontrar uma solução, não necessariamente tinha resolvido o problema e pode, então, descartar o material. Saber a função da estratégia adotada ainda faz parte da 4ª etapa, devendo incentivar o aluno a buscar outras maneiras de resolução para assim desvendar o princípio geral do problema.

1.2.1. Materiais concretos e suas distinções

Entre os materiais concretos, devemos ter consciência dos tipos que podem ser usados para conjecturar um problema. Segundo Hole (1977), autor que contempla a pesquisa sobre os materiais didáticos, os materiais podem ser diferenciados em três categorias:

- Materiais didáticos

São definidos como meios de aprendizado e ensino. Segundo o autor Graello (2000), podem ser vistos sob três aspectos:

Materiais convencionais - incluem livros, fotocópias, documentos escritos, jogos didáticos, materiais manipuláveis, materiais de laboratório.

Materiais audiovisuais - filmes, dispositivos, transparências, rádios, CDs, DVDs, vídeo cassetes.

Novas tecnologias - computador, programas, informativos, internet, televisão interativa.

- Materiais estruturados

Uma coleção de objetos, configurados de maneira à corporizarem, de uma forma apropriada uma ou mais estruturas matemáticas.

Inclui os jogos e os modelos demonstrativos. Para esses tipos de materiais, o autor Ribeiro (1995) melhor define como material manipulável e que subjacente à sua elaboração possui ao menos uma finalidade educativa. Ou seja, possui ideias matemáticas definidas.

- Materiais não-estruturados

São os materiais que não se encaixam nas duas categorias anteriores. Ou seja, segundo Hole, esses são materiais que não foram produzidos para ter ideias e estruturas matemáticas.

Exploramos, neste trabalho, os materiais didáticos e os estruturados. Trata-se de elaborar tais materiais com ênfase num tipo de problema, com ramificações. Podemos usá-los em graus variados de dificuldade, como um enigma lógico, um problema histórico da matemática ou um jogo. O que é importante não é somente a atividade, mas também a capacidade de explorar o objeto de maneira mais ampla e usufruir dos possíveis sentidos matemáticos que ele pode conter. Pode ocorrer que o objeto tenha uma finalidade educativa definida, porém o professor, ou até mesmo o aluno, podem observar sobre ele outros aspectos, os quais não tenham relação direta com a proposta original.

1.2.2. O sentido no uso do material

Os alunos deste século XXI, com uma ampla conexão com o mundo virtual e os aparatos tecnológicos, vivem de tal modo numa realidade distante e ilusória que não percebem a importância e o significado de muitas coisas, inclusive no ensino de Matemática. Questionam sobre a necessidade do aprendizado das operações, com a justificativa de que seus *tablets* podem realizar muitas operações, sem que haja compreensão pelos alunos. Escolhemos apresentar propostas com a utilização do material concreto, visando nessa abordagem, a participação e compreensão do aluno.

Sendo assim, pensam que o sentido de uma operação matemática tem como fim a justificativa da mesma, desprezando que estas são catalisadoras para compreensões cognitivas e cálculos mentais mais profundos. Não é incomum nos dias de hoje, pedir ao aluno uma conta de pouca dificuldade para ser resolvida mentalmente e ele tardar com a resposta ou não conseguir resolvê-la. Contas de tipo 305x2 já se tornam verdadeiros muros para o cálculo mental atualmente.

Isso ocorre porque deixaram de compreender os significados mais básicos e, com isso, deixaram de desenvolver áreas cognitivas que atuam nesses tipos de cálculos mentais, o que ocorre de maneira similar em outros tipos de abstrações. Pode-se notar que acontece de forma parecida quando nos referimos ao ensino de geometria e descrevemos verbalmente uma construção com régua e compasso. Este, ação que, já possui uma dificuldade relativamente mediana, gera nos alunos uma completa perda de sintonia e aversão ao conteúdo.

Fazendo uma comparação da mente com o corpo, podemos nos referir a essas operações manuais como exercícios atléticos de uma academia. Visualmente, muitas vezes podemos não fazer associação com o que se está trabalhando. Porém, com o passar do tempo observamos as muitas áreas do corpo mais fortes e flexíveis, o que realiza uma verdadeira transformação. Da mesma maneira, isso ocorre com outras áreas cognitivas em nossa mente quando realizamos atividades de matemática. Com o passar do tempo e da experiência, o indivíduo passa a adquirir um raciocínio mais rápido e pode ter uma compreensão mais abstrata e profunda, o que lhe possibilita aprender conteúdos mais avançados.

Nesse campo, o uso de materiais concretos de uma maneira libertadora, crítica e participativa pode confrontar a ideologia presente das mentalidades estudantis com a verdadeira praticidade de usar raciocínios, antes só vistos em aulas expositivas, com a interatividade de um objeto para solucionar um problema.

Uma grande "cura" no aspecto matemático com o sentido operacional pode ser creditada à médica e educadora Maria Montessori. Ela foi a idealizadora do famoso "Material Dourado", que tem como objetivo o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal posicional e dos métodos para efetuar operações fundamentais, que podem ser chamados de algoritmos. Segundo Montessori, a criança tem necessidade de mover-se livremente dentro de certos limites, desenvolvendo assim, de uma maneira criativa, sua originalidade e estratégia para enfrentar desafios, experiências e problemas.

Esse tipo de ensino pode ser visto em Becker (1994), no qual o conhecimento é originário do domínio sensorial, de uma experiência. Portanto, concorda que a mente do aluno é vazia, no sentido de ser receptiva e passiva. Sendo assim, o conhecimento é transmitido para o aluno através do objeto, e essa experiência é feita passivamente por meio da experiência.

Esse pensamento retoma a reflexão sobre os dispositivos tecnológicos que os alunos usam. Essa receptividade antes mencionada ocorre na vida cotidiana através dos aparelhos que facilitam muitas vezes o processo de resolver uma conta, mas negligencia o saber, que é a parte principal.

Para melhor entender essas dificuldades, devemos diferenciar o que é informação, conhecimento e saber, para que o uso do material encontre seu verdadeiro fundamento.

De acordo com Micotti (1999, p. 155), temos:

> *"Informação, conhecimento e saber são distintos, apesar de serem inter-relacionados. Uma informação pode, objetivamente, estar presente no meio ambiente (ela é exterior à pessoa e pode ser estocada, isto é, gravada, registrada num computador, escrita em livros etc.), no entanto, se um indivíduo (o sujeito) não se der conta dela, para este indivíduo, ela não se transformará em conhecimento. O conhecimento é uma experiência interior – envolve a relação do sujeito com o objeto (de conhecimento); envolve também interpretação pessoal - um mesmo discurso ou os dados de uma observação podem ser interpretados de modo diferente por diversas pessoas. Mas, para serem admitidas como saber pela coletividade, estas interpretações são submetidas, por outros, à análise rigorosa.*
>
> *O saber compreende informação e conhecimento; nele prepondera o aspecto social. Não basta alguém interpretar as coisas a seu modo para que sua interpretação seja reconhecida como válida, para isso é preciso que outros abonem esse conhecimento ou essa interpretação – a comunidade científica, a sociedade."*

O aspecto interessante no uso de materiais no ensino da Matemática é que o aluno, ao interagir e tentar resolvê-lo, deverá atravessar, fundamentalmente, a informação, o conhecimento e o saber.

Trata-se de uma travessia sistemática e sequencial, onde, ao captar a informação, que seria dada pelas hipóteses e as regras presentes, o aluno fica submetido ao raciocínio lógico. Esse raciocínio explora, de maneira subjetiva, a capacidade analítica, intuitiva e dedutiva do aluno. Com isso, ele forma conhecimento com esse tipo de tratamento. Faz isso ao trabalhar com as informações.

A parte final, que trata do saber sistemático, requer a ativa intervenção do professor, geralmente após a formação de um conhecimento fundamental para um determinado conteúdo que seja o objetivo do material. Essa intervenção tem por finalidade organizar as informações e o conhecimento então formado pelo aluno e, com isso, organizá-los e estruturá-los dentro do contexto matemático. Essa estruturação por si só atende ao chamado saber, por ser de fato um processo coletivo.

1.3. Parâmetros Curriculares Nacionais

Temos nos PCN os objetivos e metas que são esperados e que se desenvolvam nos estudantes. Não só se referem às disciplinas, como também ao aspecto social e à formação da cidadania. Analisemos, portanto, de que maneira esse trabalho se enquadra nas metas dos PCN, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

- Ensino Fundamental

  No âmbito dos objetos esperados em relação à capacitação dos alunos.

> *Utilizar as diferentes linguagens - verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal- como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação. Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos.*
> *Questionar a realidade formulando problemas e tratando de resolvê-los, usando para isso o pensamento, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.*

- Ensino Médio

  No âmbito das habilidades e competências a serem desenvolvidas.

> *Representação e comunicação*
> *Ler e interpretar textos de Matemática.*
> *Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).*
> *Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.*
> *Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.*
> *Produzir textos matemáticos adequados.*
> *Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.*
> *Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.*
>
> *Investigação e compreensão*
> *Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).*
> *Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.*
> *Formular hipóteses e prever resultados.*
> *Selecionar estratégias de resolução de problemas.*
> *Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.*
> *Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.*
> *Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.*
>
> *Contextualização sócio-cultural*

> *Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.*
> *Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.*

Nos três tópicos citados acima, referentes ao Ensino Fundamental, podemos perceber a clara e significativa importância de trabalhar com materiais concretos na escola. No primeiro, já percebemos a ideia da matemática como uma linguagem que está presente no contexto público e atendendo à comunicação. No segundo, verificamos a intrínseca necessidade de usar recursos para construir o conhecimento e, no terceiro, vemos o questionamento da realidade através da formulação de problemas e das diversas capacidades cognitivas para tentar resolvê-los.

Em relação aos tópicos do Ensino Médio, vemos os materiais didáticos como estratégias para o desenvolvimento de tais habilidades e competências.

Nessa visão, o ensino, através dos materiais, atinge de forma competente esses objetivos abordados nos PCN. Além disso, também podemos analisar o importante papel da matemática e a construção da cidadania.

A sobrevivência social torna-se dependente em grande parte do conhecimento. Pois, diante da organização social, bem como sua complexidade, e a falta de recursos para obter e interpretar informações, ficam impedidas a participação e a tomada de decisões em relação aos problemas da sociedade. Isso não só acaba impedindo o alcance de uma rede de conhecimento mais elaborada, como também dificulta o acesso às posições de trabalho.

Em nosso mundo de trabalho contemporâneo, com o desenvolvimento das tecnologias, o mercado de trabalho exige cada vez mais trabalhadores mais criativos e versáteis, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens.

Justamente nesse campo, a Matemática, bem como suas abordagens, pode dar a sua contribuição à informação do cidadão ao desenvolver nele, através de metodologias, a percepção e construção de estratégias, a comparação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e autonomia.

Outro aspecto muito interessante em que a utilização de objetos e materiais pode ter seu refletido impacto seria na questão do meio ambiente. A compreensão das questões ambientais pode ser favorecida pela organização de um trabalho interdisciplinar em que a matemática esteja inserida. A verificação dos problemas ambientais pode favorecer uma visão mais clara, que possibilita fazer intervenções necessárias como a reciclagem, o reaproveitamento de materiais e outros.

Podemos também constatar que o estudo profundo das grandes questões ambientais como a poluição, o desmatamento, os limites para o uso de recursos naturais, sustentabilidade, desperdício e camada de ozônio, pressupõe a construção cognitiva dos conceitos matemáticos que o aluno deve desenvolver, como áreas, volumes, proporcionalidade, etc. Assim como procedimentos que permitam estudar e tentar solucionar quando possível essas questões, como a coleta, organização, interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, realização de cálculos, modelização, prática de argumentação, etc.

Vimos anteriormente quais são os objetivos que esperamos serem alcançados pelos alunos. Entretanto, devemos ter em mente quais são os aspectos de fundamental importância que o professor de matemática deve considerar:

- Identificar as principais características dessa ciência, bem como seus métodos, suas ramificações e aplicações;
- Conhecer a história de vida dos alunos, seus conhecimentos informais sobre um determinado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
- Ter clareza de suas próprias concepções sobre a matemática, uma vez que a prática em sala de aula, com as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdo de ensino e as formas de avaliar estão ligadas profundamente a essas concepções.

Além de o professor ser o mediador e de executar as atividades desse trabalho, é necessário que ele tenha um sólido conhecimento nessa área e da concepção de Matemática como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

1.3.1. A Resolução de problemas e o ensino-aprendizagem da Matemática

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, os educadores matemáticos têm, como visão, a resolução de problemas como ponto inicial da atividade matemática. Esse posicionamento traz significado ao conhecimento matemático quando os alunos enfrentam situações desafiadoras para solucionar e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

O que é feito comumente no ensino de matemática é tornar o problema estéril de significado, usando-o apenas para realizar cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo já visto na sala de aula. Nesse aspecto, o foco não se torna a atividade matemática, mas seus resultados, técnicas, definições e demonstrações.

Uma consequência desse processo é que o saber matemático não se apresenta ao aluno como um conjunto de conceitos interrelacionados, o que permite que o estudante se depare com um conjunto de problemas de inesgotável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. Com esse modelo, fica claro que a concepção de ensino e aprendizagem abordada é a de que o aluno tenha como forma de aprender, a reprodução e a imitação.

Na visão de educadores matemáticos, a resolução de problemas possibilita aos alunos uma melhor mobilização de conhecimentos e de desenvolver sua capacidade cognitiva para controlar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos vão ter a chance de aumentar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como uma nova percepção acerca dos problemas encontrados na Matemática e no mundo em geral.

Na História da Matemática podemos ver que a resolução de problemas foi construída como resposta a problemas reais e práticos com diferentes origens e contextos. Podemos observá-los em questões existencialistas como divisão de terras e cálculo de créditos, ou por problemas de outras áreas da ciência, como física, astronomia ou biologia e podendo, também, estar relacionados a investigações internas da própria Matemática.

Resolver um problema pressupõe que o aluno:

- Elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses)
- Compare seus resultados com os de outros alunos
- Valide seus procedimentos

A maior exigência nesse campo é que o aluno desenvolva habilidades que lhe permita provar um resultado, como também comparar diferentes tipos de ideias e caminhos que levem à solução de um problema. Nesse aspecto, o processo de resolução ganha mais significado do que a resposta correta por si mesma.

Essa concepção de ensino e aprendizagem é magnífica, pois visa a uma ação que constrói conhecimento, diferente da via que se utiliza de uma mera reprodução. O próprio fato de o aluno questionar o problema e sua própria solução faz com que o problema se torne fonte de novos problemas, além de propor novos problemas a partir de determinadas informações dadas.

Embora haja todo esse esplendor nesse tipo de abordagem, muitos professores atestam que só se deve levá-la ao âmbito das situações do cotidiano ou de outras áreas do currículo quando parte dos alunos dominarem os conceitos matemáticos relacionados a esses tipos de situação.

O maior desafio e obstáculo para essa abordagem tem sido a forma linear e rígida de como os conteúdos são organizados no ensino de Matemática, o que impede que os docentes mudem sua prática pedagógica privilegiando o recurso à resolução de problemas e à participação ativa do aluno.

A mudança para que esse tipo de prática ocorra deve vir do professor que, ao romper com esse paradigma, trace no seu planejamento algumas conexões entre os conteúdos matemáticos. Para tal, o professor deve estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionando os conteúdos a serem trabalhados e planejar, com isso, as articulações entre os conteúdos.

Nas diversas áreas da matemática, os PCN citam contextos das situações-problema, onde se pode analisar e utilizar desses tópicos para a elaboração. Pela extensão dos contextos que serão apresentados, tomamos a liberdade de selecionar alguns desses tópicos para a abordagem que, com o material concreto, serão explorados nos capítulos posteriores.

Exemplo 1: Número racional: significados:

- Notícias de jornal, em particular as que envolvem índices econômicos- leitura, compreensão e utilização de escalas;
- Guia de cidades e atlas- leitura, compreensão e utilização de escalas;
- Medições envolvendo as diferentes grandezas (comprimento, largura, altura, perímetro, área, volume, massa, tempo, temperatura) - interpretação das medidas obtidas;
- Bulas de remédio, receitas (massa, capacidade) - interpretação, cálculos, transformação de unidades;
- Problemas históricos;

Exemplo 2: Variação de grandezas: medidas

- Planta baixa de uma casa- interpretação, desenho, cálculos, ampliação, redução;
- Índices relacionados à saúde (taxas de mortalidade, doenças endêmicas, etc) - interpretação, cálculos e gráficos;
- Índices relacionados ao trabalho (taxas de desemprego, salários) - interpretação, cálculos, gráficos;
- Questão da terra (reforma agrária, erosão, preço, desmatamento) - unidades de medida, cálculos;
- Produção agrícola (produção de grãos, exportação, importação, custo, lucro, impostos) - unidades de medida, gráficos e cálculos;
- Construção de uma horta (planejamento de canteiros, obtenção das medidas de um canteiro retangular de maior área entre vários de mesmo perímetro) - cálculos, gráficos;
- Tabelas de fatores de conversão (unidades de diferentes grandezas, moedas) - elaboração, interpretação e cálculos;
- Energia elétrica- unidades, cálculo do custo em função do consumo;
- Custo de uma mercadoria a ser comprada (preços no varejo e no atacado) - cálculos, descontos e impostos;
- Problemas históricos dos números racionais e medidas;
- Renda per capita e densidade demográfica (de diferentes países e estados) - interpretação, cálculos;
- Velocidade em estradas- velocidade máxima, consumo de combustível- unidades, cálculos (tempos, distâncias);

Exemplo 3: Espaço e forma: o lugar em que se vive os objetos do entorno:

- Formas e órbitas dos planetas;
- As embalagens das coisas- planificações, construções;
- Construções de maquetes;
- As pirâmides do Egito; Guias da cidade e mapas;
- Decomposição da luz-prismas.

CAPÍTULO 2

Abordagens no processo de ensino

2.1. O Fenômeno Educativo

Ao introduzir dois tipos de atividades com materiais concretos numa sala de aula, precisamos estar cientes de quais são as formas de se conceber o fenômeno educativo e seus diferentes pontos de vista.

Segundo Mizukami (1986), o fenômeno educativo possui múltiplas dimensões, tais como a dimensão humana, a técnica, a cognitiva, a emocional, a sociopolítica e a cultural. Não há, entretanto, uma justaposição dessas dimensões, mas sim uma aceitação de suas múltiplas implicações e relações.

As teorias de conhecimento, nas quais as escolas psicológicas se baseiam, podem ser consideradas, apesar de muitos tipos de combinações e variações possíveis, em três características básicas: primado do sujeito, primado do objeto e interação sujeito-objeto.

Notavelmente, toda interpretação de um fenômeno vital torna-se resultante de uma relação entre o sujeito e o ambiente. De uma forma implícita ou explícita, isso acaba por envolver conceitos relacionados ao homem, ao mundo, à aprendizagem, ao conhecimento, à sociedade, à cultura, etc.

Decorrente das diversas posições, nas quais podemos interpretar tais fenômenos educativos, o artigo de Mizukami, aponta as diferentes aplicações pedagógicas que derivam de suas características básicas:

- Primado do objeto

Relacionada aos empiristas, que consideram o indivíduo sujeito às implicações do meio, estabelecendo que o conhecimento se trata de algo dado pelo mundo externo há, com isso, plena ênfase no objeto e no meio, podendo levar em conta o indivíduo como uma “simples tábua rasa” ou admitindo certa maturação numa atividade cognitiva. Não há construção de novas realidades.

Do ponto de vista pedagógico, essa postura é embasada no associacionismo empirista, onde o conhecimento, de forma totalitária, fica condicionado a uma aquisição exógena, ou seja, por agentes externos, feita a partir de experiências, verbalizações a recursos materiais que são simplesmente transmitidos.

- Primado do sujeito

Associado ao nativismo, apriorismo ou inatismo, afirma que o conhecimento, sob suas diferentes formas, está predeterminado no sujeito. Sendo assim, o sujeito já possui categorias de conhecimento “já prontas”, para que todo estímulo no aspecto sensorial seja canalizado.

Portanto, ocorre a ênfase na importância do sujeito, incluindo-se tanto as tendências que defendem um “pré-formismo absoluto”, quanto os que admitem algum processo de atualização. De acordo com Piaget, o ponto de vista pedagógico se pauta no chamado “exercício de uma razão já fabricada”, ocorrendo o oposto do caso empirista, sendo a aquisição do conhecimento dada por uma via de pré-formação endógena, ou seja, agentes internos.

- A interação sujeito-objeto

Relacionada ao ponto de vista interacionista, defende que o conhecimento é considerado uma construção constante, sendo que a invenção e a descoberta são pertinentes dentro de cada ato da compreensão. A transição entre os níveis é caracterizada pela formação de novas estruturas que não existiam antes no sujeito.

Dentro das tendências incluídas no interacionismo, existem algumas que afirmam que não há pré-formação, nem endógena e nem exógena, o que contraria os dois primados antes vistos. Afirmam também que o desenvolvimento do conhecimento se dá de forma contínua entre interações das posições endógena e exógena. Ou seja, do que há de inata e empirista.

Há, portanto, uma grande uma valorização pedagógica de atividades que promovam a interação com o mundo de uma forma geral. A ênfase se dá num dinamismo existente entre a bagagem genética hereditária e sua adaptação ao meio em que se desenvolve.

Das três características, bem como seus pontos de vista, diferentes ações educativas e diferentes arranjos de situações de ensino-aprendizagem podem ser colocados em sala de aula. Isso quando se tem, como pressuposto, que a ação educativa do professor seja sempre intencional em situações planejadas. Assim sendo, se faz necessário um referencial teórico que compreende conceitos de homem, sociedade e conhecimento, que estejam articulados com a ação proposta.

2.2. Abordagens didático – pedagógicas

Ao verificar tais características e como atuam na relação entre o indivíduo e seu meio, vamos analisar, em conjunto, as principais abordagens didático-pedagógicas que permeiam a educação brasileira, bem como suas características.

As principais abordagens destacadas, segundo o artigo de Leite (2005) são: a tradicional, a escolanovista, a tecnicista e neotecnicista, e a crítica. Elas são estruturadas em diversas características que vão ser pertinentes ao desenvolvimento deste trabalho, tais como; a concepção de cultura escolar, a concepção de sala de aula, o processo de ensino-aprendizagem, relação professor-aluno e suas características gerais no ensino.

Apresentamos as abordagens, com algumas de suas características.

2.2.1. A Abordagem Tradicional

Esta abordagem tem, como concepção de cultura escolar a ênfase na cultura geral e visa ao conhecimento, aos conteúdos das disciplinas e aos valores, como algo sendo legitimado socialmente. A concepção de sala de aula é retratada com rigidez na organização e na disciplina, caracterizada também por uma organização frontal e o ideal de ambiente austero e silencioso. A sala de aula é vista como um espaço para transmitir o conhecimento e os valores, onde o aluno é instruído pelo professor.

No processo de ensino-aprendizagem, o ensino é compreendido pela transmissão de valores e conhecimentos, sendo assim sua ênfase em estratégias expositivas e a avaliação centrada nos resultados. A relação professor aluno é marcada pela autoridade moral e intelectual que o professor representa para o aluno. O professor é o detentor da autoridade, detendo o poder de decisão e a relação com os alunos se dá de maneira dual, ou seja, de professor para aluno diretamente, mais do que na interação coletiva, que seria entre os alunos. Abaixo, seguem as principais características da abordagem tradicional:

- Concepção e prática que persistem ao longo do tempo;
- Pretende conduzir o aluno ao contato com as grandes realizações da humanidade, tais como obras-primas de literatura, arte e produção científicas;
- O aluno é concebido com um receptor passivo;
- Entende-se que o professor é o transmissor de valores e conteúdos;

- A educação é concebida como processo orientado para a incorporação de um meio pré-estabelecido.

Principais representantes e influências teóricas: Ratio Studiorum - O Plano de Instrução dos Jesuítas (séc. XVI); Comênio – Didática Magna (séc. XVII); Herbart – Passos Formais (séc. XVIII-XIX).

2.2.2. A Abordagem Escolanovista

A concepção de cultura escolar nessa abordagem é determinada pela ênfase no caráter dinâmico do conhecimento, sendo a necessidade e o interesse dos sujeitos que estabelecem os conteúdos e conhecimentos escolares. Ocorre uma importante distinção nessa concepção, de que o foco não está exclusivamente em dominar conteúdos, mas sim em adquirir autonomia no aprendizado, ou seja, em aprender a aprender.

Temos nessa abordagem que a concepção de sala de aula é de que esta seja um espaço para descobertas, experimentação e pesquisa, priorizando atividades lúdicas e variadas. Também há valorização do diálogo e da participação, assim como a liberdade e autodisciplina. No que diz respeito à organização espacial, encontram-se em destaque a flexibilidade, favorecendo diversos deslocamentos dos alunos.

O processo de ensino-aprendizagem, na visão de alguns autores dessa abordagem, tem ênfase nos processos mentais e habilidades cognitivas, e tendo, na visão de uma minoria, prioridade sobre aspectos sociopolíticos. Há nessa abordagem, a centralidade do educando na aprendizagem, priorizando métodos ativos, lúdicos, dialogais e grupais. Dentro desse processo, existe o respeito ao ritmo de cada aluno, suas motivações e diferenças individuais, tornando a avaliação centrada no processo e não nos resultados da aprendizagem.

O professor é visto como um mediador para que ocorra o livre e espontâneo desenvolvimento de cada aluno, realizando algumas atividades como: organizar, orientar, animar e estimular as atividades dos estudantes. Busca-se uma relação de camaradagem, diálogo e afeto com os alunos.

Seguem as principais características da abordagem escolanovista:

- Pluralidade de tendências;

- Forte influência no pensamento e na prática pedagógica brasileira;
  Ênfase na subjetividade e na individualidade dos educandos.

Principais representantes e influências teóricas: J.J. Rosseau, Pestalozzi, John Dewey, Ovidio Decroly, Maria Montessori, Edward Claporede, Jean Piaget, Célestin Freinet; no Brasil- Lauro de Oliveira Lima e os chamados “pioneiros” da Escola Nova (Fernando Azevedo, Lourenção Filho, Anísio Teixeira, entre outros).

2.2.3. A Abordagem Tecnicista e Neotecnicista

Temos na concepção de cultura escolar da abordagem tecnicista, a seleção dos conteúdos, baseando-se nos princípios de racionalidade, eficiência e produtividade, que por sua vez são definidos prioritariamente de acordo com a exigência do mercado. A sala de aula é vista como o espaço de aquisição de conhecimentos e habilidades, sendo a organização espacial flexível ou não e valorização da disciplina auto-regulada.

Há, no processo de ensino aprendizagem, a valorização do planejamento, da definição de objetivos mensuráveis e da adoção de mecanismos de controle e avaliação. Nessa abordagem, encontram-se aspectos desse processo como os métodos e técnicas variadas, a valorização de avaliações com objetivos de quantificar o resultado e prioriza-se o uso de novas tecnologias.

Na relação professor-aluno, o professor fica responsável pelo planejamento do processo de ensino, organizar e executar as experiências e atividades educativas, visando a atingir os comportamentos finais estabelecidos. O educador é um gerenciador do processo instrucional.

Abaixo, seguem as principais características da abordagem tecnicista e neotecnicista:

- Perspectiva de produtividade e de eficiência;
- Ênfase na utilização de recursos tecnológicos no ensino;
- Na versão neotecnicista, prevalecem os princípios da qualidade total: tentativa de transferir para a escola o modelo de gestão e empresa no seu funcionamento (escola = empresa, aluno = cliente);
- Ênfase nas demandas do mercado;
- Aposta no indivíduo e na liberdade de escolhas;

Principais representantes e influências teóricas: Skinner, Popham, Briggs, Magir; no Brasil- Cláudio Dib, Samuel Pfromm Neto, João Batista de Oliveira e Claúdio de Moura Castro.

2.2.4. A Abordagem Crítica

Essa abordagem tem uma visão dividida em duas tendências sobre a concepção da cultura escolar, onde uma enfatiza o conteúdo e conhecimento formulados a partir da problematização da prática de vida dos alunos, visando à sua conscientização política e a outra enfatiza o conhecimento e o conteúdo da cultura dominante, visando a capacitar os alunos das classes populares a lutar por transformações sociais.

Na concepção de sala de aula, o espaço é visto como que propício para reflexão, debate e aquisição crítica de conhecimentos e valores. É priorizado o diálogo, a criação coletiva e do convívio comunitário, como também a negociação das regras de convivência. A organização espacial tende a ser, de acordo com essa abordagem, flexível e dinâmica.

O processo de ensino-aprendizagem considera a realidade concreta da vida do educando como ponto de partida para esse processo. São adotados métodos ativos, dialogais, grupais e problematizadores da realidade, tendo, assim a avaliação centrada no processo. Há o estímulo de adotar meios de autoavaliação.

Na relação professor-aluno, o diálogo como postura é privilegiado onde a relação pedagógica consiste na colaboração mútua e na busca coletiva das soluções. Há um grande destaque para as relações grupais, para além da relação dual professor-aluno.

Abaixo, seguem as principais características da abordagem crítica:

- Diferentes tendências;
- Concepção dos processos educacionais como historicamente situados e articulados com outros processos sociais;

2.3. Formas de abordagem e os tipos de escolas

Ao analisarmos tais tipos de abordagem didático-pedagógicas, segundo Leite, associamos a ele diversas instituições de ensino, presentes na realidade educacional brasileira, que carregam em si mesmas um ou mais aspectos dessas concepções apresentadas.

Por exemplo, podemos observar em alguns colégios de caráter religioso uma grande parte dos traços da abordagem tradicional, como rigidez disciplinar e um processo de ensino-aprendizagem centrado nos resultados. Escolas como São Bento e Santo Agostinho se destacam como escolas de abordagem mais próxima da tradicional.

No aspecto da abordagem Escolanovista, podemos destacar as escolas de aspecto construtivista e outros que pregam a subjetividade e a individualidade do aluno, tal como a escola Montessoriana. Uma característica muito relevante nessas escolas seria a priorização de métodos ativos, lúdicos e grupais, onde uma atividade matemática que possa abordar o uso de algum material tenha mais facilidade de ser executada.

Já no aspecto tecnicista e Neotecnicista, encontraremos uma ampla maioria de escolas, tais como escolas privadas diversas, cursinhos e pré-vestibulares que são associados a um colégio com filosofia mais mercantil. Até mesmo nas instituições privadas de ensino superior tem-se observado tal processo.

Nessas escolas, o espaço para execução de tais atividades fica mais comprometido, pois a dificuldade não está na simples execução, mas ligada ao caráter do mercado, onde o que se valoriza é o resultado quantificável, buscando, portanto, métodos de novas tecnologias. Contudo, não se torna impossível o professor modelar algum tipo de questão em concurso, principal alvo e meta desse tipo de escola, e trabalhar como atividade que vise à resolução do problema e à compreensão da técnica empregada. Este se torna o mecanismo principal na preparação do aluno para exames de concurso e vestibular.

A abordagem crítica está mais presente nas novas tendências da escola pública. Nos diversos materiais e provas elaboradas, para o ensino básico, há muitas características como a problematização da prática de vida dos alunos. Sendo assim, o uso de materiais para problematizar situações pode, de alguma forma, colaborar para melhor absorver ideias e conteúdos. Outra característica que pode ajudar nesse tipo de atividade é a valorização de atividades grupais que é uma das faces de seus aspectos de ensino-aprendizagem que visem à problematização da realidade.

Certamente, entre todas as abordagens, pedagógicas discutidas, sempre há uma oportunidade de realizar uma atividade com material concreto. Todavia, no tipo de escola e em sua filosofia, o professor e o aluno são as variáveis que definem o grau de maior facilidade ou dificuldade em poder realizá-la.

Portanto, nos capítulos posteriores, onde serão enfatizados os objetos em si, bem como suas características e aplicações em sala de aula, visando a com isso, oferecer o máximo de possibilidades do seu uso em sala de aula, mesmo com as diferentes abordagens no processo pedagógico que a escola possa ter.

A organização desses capítulos se dará em duas partes. A primeira se refere à disposição geral dos materiais concretos e seus aspectos históricos ou no que incentivou sua montagem e utilização. A segunda parte já descreverá as várias maneiras elaboradas de se utilizar dentro de sala de aula, obviamente, sendo colocados de modo sugestivo, para que o professor possa adaptá-los ao seu uso.

2.3.1 Os tipos de recursos dos materiais didáticos

Os artigos de Mizukami e Leite nos motivaram a caracterizar em quatro tipos as formas de aplicações dos materiais elaborados, ou seja, formas de utilização dos materiais como recursos(Meio que se propõe a um fim) para o ensino de matemática, levando em conta toda relevância teórica que as abordagens pedagógicas apresentam.

Essas maneiras de utilizar os materiais concretos buscam, na sua totalidade, contemplar ao máximo o que diz respeito ao primado do sujeito, objeto e sujeito-objeto, assim como se adequar aos diferentes tipos de abordagens pedagógicas no qual o ambiente escolar esteja submetido.

Sobre os recursos na utilização e aplicação do material em sala de aula, definimos os seguintes tipos: recurso motivacional, recurso empírico, recurso avaliativo, recurso transcendente. Esses recursos são descritos a seguir.

Para o recurso motivacional do uso dos materiais, designamos dois meios de execução: o meio passivo e o meio ativo. O meio passivo ocorre quando o aluno fica passivo na interação com o objeto, sobre o qual o professor detém o total controle e execução da atividade ou experiência. O professor usa uma abordagem expositiva (assim como pode ser visto na abordagem tradicional).

Quando este recurso é executado pela via ativa, o aluno pode interagir com o objeto, podendo de maneira individual ou grupal (assim como visto na abordagem crítica) valorizar o diálogo e a aquisição do conhecimento. Ao colocar essa maneira, estamos valorizando a reflexão do aluno sobre o contexto social e matemático que o objeto aborda e, dessa forma, priorizamos o processo de aprendizagem mais do que o resultado quantificável.

Obviamente, o ambiente escolar e a turma podem facilitar mais essa maneira de atuar, sendo muito recomendado para o uso expositivo de uma aula, ou numa feira cultural realizada na escola, ou para realizar atividades de apresentação e seminários.

No recurso ou maneira empírica, prezamos quase que de maneira exclusiva a relação entre indivíduo e o objeto. Assim como os próprios empiristas, como também os interacionistas, colocamos o aluno em maior liberdade de interação com o objeto e, através dele e dessa interação, realizar a aquisição do conhecimento.

Notemos que, dessa maneira, o professor, mediador do conhecimento, fica ausente de forma mais explícita. É claro que, quando propomos essa maneira, será dado um objetivo ao aluno. Porém, as organizações mentais de raciocínio e estratégias ficam sob inteira responsabilidade do aluno.

Dessa forma exploramos um caráter subjetivo da interação do sujeito com o objeto e, ao mesmo tempo, concebemos a sala de aula como voltada para o espaço de descobertas e experimentações, bem visto no processo pedagógico Escolanovista. O ambiente de uso dessa modalidade pode variar muito. É muito recomendado usá-la antes de se abordar um determinado conteúdo, assim como em gincanas e outras oportunidades que possam explorar a capacidade de abstração e interação do aluno.

Do recurso ou maneira avaliativa, adotamos a perspectiva de tornar a experiência interativa em uma forma de quantificação do saber, mesmo que não seja para atribuir uma nota. Podemos observar que essa forma de usar o objeto condiz em muito com a abordagem tecnicista, pois o processo de ensino-aprendizagem tem maior enfoque em definir objetivos mensuráveis, adotando mecanismos de controle e avaliação.

Certamente, para lidar com essa maneira de aprender, é sempre recomendado que o ambiente mais propício para se realizar seja a própria sala de aula, sendo esta organizada em grupos para sua execução.

O que seria muito interessante para a realização da atividade nessa maneira de avaliação seria o uso de um laboratório de matemática. Ou seja, um espaço no âmbito escolar, diferenciado e que valoriza o trabalho extraclasse, com melhor disponibilidade espacial e de recursos para que atividades como essas possam ocorrer com mais frequência. Caberá ao professor, no planejamento geral da experiência, notificar ou combinar com os alunos que a quantificação dos acertos e erros será medida ao aplicar uma nota específica para o boletim escolar ou se vai simplesmente mensurar sua aprendizagem.

Devemos lembrar, acima de tudo, que o fato de mensurar não deve tornar a avaliação um fim em si mesmo. Acima disso, deve ser considerado como um recurso que se coloca em favor da aprendizagem do estudante, não como um mero instrumento de opressão e domínio.

A última maneira abordada é a maneira ou recurso transcendente de utilizar o material no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Nessa modalidade não adotamos uma referência explícita a um determinado tipo de abordagem, podendo ser usado para qualquer uma delas. O que caracteriza essa "transcendência" é o fato de sugerirmos e explorarmos situações que envolvam outros âmbitos da matemática, muitas vezes se aprofundando num certo conteúdo ou até mesmo integrando conteúdos distintos.

Além de transcender, no caráter conteudista de ensino, a maneira de usar o objeto para outras experiências e finalidades também é uma opção viável que consideramos como meio para estimular a aprendizagem e credibilidade pela disciplina.

Um exemplo muito comum é o professor que usa cartas de baralho para alguma atividade na sala de aula. Originalmente, trata-se de um conjunto de objetos com a finalidade de se jogar algum tipo de jogo. Porém, o docente pode muito bem utilizar as cartas para outras finalidades pedagógicas, tais como contagens, cálculos numéricos, etc.

De maneira recíproca, podemos aproveitar um material estruturado e fazer dele um objeto que explore um jogo, abordando assim aspectos do conteúdo matemático numa perspectiva de maior descontração para os alunos. Transcender de um material matemático educativo para um jogo vai requisitar um plano de ação que permita a absorção e a aprendizagem dos conceitos trabalhados. Todavia, essa proposta alternativa tende a buscar nos alunos maior criatividade, autonomia, interesse e também maior prazer no aprender.

Ao fazer essa transcendência com o material para o jogo, deve-se ter em mente os tipos de jogos que o professor pode abordar com os alunos. Todos os jogos devem ser compostos de regras e podem ser classificados como:

- Jogos estratégicos: são os jogos que permeiam o âmbito do raciocínio lógico. São compostos de determinadas regras, com as quais os jogadores devem buscar estratégias eficazes para alcançarem o objetivo final. O aspecto da sorte não está inserido nesse tipo de jogo.

- Jogos de treinamento: são os jogos que basicamente substituem o valor de uma lista de exercícios. São muito recomendados principalmente como um reforço, inclusive psicológico, para alunos com deficiência em determinado conteúdo. Em alguns deles, o fator sorte pode interferir nos resultados finais.

- Jogos geométricos: são jogos que se baseiam no desenvolvimento de habilidades de observação, análise e pensamento lógico. Como o próprio nome diz, atua principalmente na área da geometria, trabalhando conceitos relacionados a figuras planas, figuras espaciais, semelhanças, ângulos, polígonos e outras.

Outra maneira de se obter a transcendência nessa prática pedagógica seria a de usar a metalinguagem. Ou seja, podemos trabalhar com o objeto e ter, como fim desejado, que os alunos construam seus próprios objetos, ao modelo do que o professor tiver apresentado, para que possam de fato vincular também a teoria à prática.

Para o aluno de ensino básico, essa metalinguagem torna-se muito produtiva no que se diz respeito às construções cognitivas e mentais e também acerca do conteúdo abordado, viabilizando assim maior autonomia e atuação do sujeito na construção do seu próprio conhecimento.

Com um bom incentivo escolar, como colocar os materiais produzidos numa estante, numa possível feira de ciências, torna o ensino, além de estimulante e agradável, incentivador para o aluno, futuro cidadão e trabalhador. Torna o aluno mais empreendedor ao buscar a autossuperação.

Por último, no caráter transcendente, serão sugeridas formas de se obter junto da atividade uma possível interdisciplinaridade. A língua vernáculo e a Matemática constituem a base da representação da realidade, sendo, portanto, instrumentos da expressão e comunicação que são canais para se obter conhecimento em qualquer área.

Assim sendo, fica necessário, a inter-relação que possa existir nas atividades com os materiais, podendo envolver outras disciplinas do currículo escolar, tais como história, geografia, biologia, física e artes. Cada uma pode, em conjunto com a matemática, contribuir sistematicamente para que a assimilação do aluno sobre os objetivos que compõem a estrutura escolar e preparar o indivíduo para a realidade que o cerca.

Certamente, este trabalho se limita a sugerir abordagens até esse ponto, não significando com isso que o uso dos materiais tenha apenas esses enfoques.

O que devemos objetivar acima disso é alcançar as melhores formas de ensinar matemática, apresentando para isso a utilização de materiais didáticos manipuláveis. Mudar o estímulo, através do qual transmitimos os conteúdos e o conhecimento de uma forma geral, realiza também uma mudança na forma com que o aluno recebe e julga os próprios.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

(Albert Einstein)

CAPÍTULO 3

As Pontes de Könnigsberg

O material utilizado consiste de uma maquete que reproduz parte da cidade da Prússia, Könnigsberg, atendendo ao contexto do clássico *Problema das Sete Pontes de Könnigsberg* que Leonard Euler resolveu, fazendo com isso a motivação para a Teoria dos Grafos.

3.1. O problema histórico

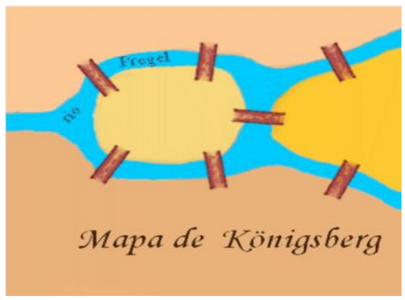


Figura 1: Mapa de Konnigsberg

O problema das pontes é um dos mais famosos problemas históricos resolvidos por Euler, por volta de 1735, onde a constatação de não haver solução foi o que desencadeou a Teoria dos Grafos.

O local dessas pontes é uma cidade chamada Könnigsberg, que era território da Prússia até 1945. Na época, havia um complexo de duas ilhas que continham 7 pontes (Figura 1) que permitiam suas conexões entre si e com os arredores, sendo que algumas foram destruídas durante a Segunda Guerra Mundial e outras demolidas para dar lugar a uma única via expressa. Hoje, constata-se que apenas duas pontes da época de Euler permanecem ainda no local. A grande questão formulada foi a existência da possibilidade de atravessar as sete pontes sem que nenhuma fosse atravessada mais de uma vez.

Por volta de 1735, o matemático Euler provou que, com essas exigências, não havia caminho que percorresse as pontes da cidade, satisfazendo a condição.

A surpresa encontrada na prova não foi em si constatar que não havia um caminho possível, mas foi a capacidade mental de Euler em simplificar a conjectura estrutural do problema.

De uma maneira muito simplória, ele usou o seguinte raciocínio: transformar as pontes, que são os caminhos, em retas e, de maneira similar, as interseções das pontes em pontos, construindo então o primeiro modelo de grafo.

Avaliou que, com essa construção, só haveria a possibilidade de uma passagem em cada ponte, com a condição de existir zero ou dois pontos de onde saísse uma quantidade ímpar de caminhos. A justificativa de seu pensamento se dava em razão de que cada ponto deveria ter um número par de caminhos, pois, independentemente da quantidade em si, haveria uma necessidade de uma entrada e uma saída.

Agora, os dois pontos com números de caminhos ímpares estão associados ao início e ao fim do percurso realizado, porque não precisam de entrada e saída, respectivamente. Num segundo caso, onde o percurso não possua ponto com quantidade ímpar de caminhos, o percurso começa e termina num mesmo ponto, podendo ser qualquer ponto do grafo.

Num certo registro consta que, durante a Segunda Guerra Mundial, por volta de 1944, a cidade de Könnigsberg teve duas das sete pontes bombardeadas, sendo totalmente destruídas.

3.2. O material e o uso da abordagem histórica

Trata-se de uma maquete simples, feita de isopor, com os pontos feitos com palitos de picolé. Esses pontos são conectados a quatro partes de isopor, simulando assim o cenário de Könnigsberg.

As ilhas de Könnigsberg foram feitas mantendo, com fidelidade, as devidas conexões do mapa original.

As partes retangulares que compõem as ilhas foram decoradas de maneira simples, com tinta e com o uso de outros materiais, entre eles alguns recicláveis para dar à maquete uma ideia da cidade em questão (Figura 2).

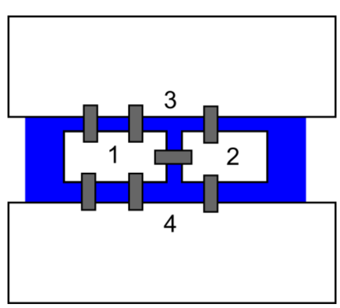


Figura 2: Estrutura da maquete

As pontes têm, em particular, formatos geométricos diferentes e também possuem uma espécie de grade, feita de palitos (Figura 3), que funciona como porteira. Isso para que, após a passagem pela ponte, deixemos que a grade feche o caminho para que não haja a possibilidade de passar novamente, sendo este artifício salutar para contextualizar uma das hipóteses do problema.

Figura 3: Uma das pontes feitas de palitos

O móvel utilizado para realizar a passagem tem o menor destaque nesse conjunto. Entretanto, é necessário que ele respeite a altura de cada parte, bem como os limites de cada grade. Também foi feito com outros materiais como a caixa de fósforo, palitos e tampas para simular o objeto que fará a travessia das pontes.

Atualmente fala-se muito em inserir o ensino da matemática no contexto em que o conteúdo a ser ensinado foi desenvolvido, para que o aluno tenha consciência de que se trata de uma invenção humana, atendendo a necessidades específicas, e não de algo simplesmente pertinente aos processos culturais.

O fato desse tipo de material fazer uma conexão direta com o fato histórico torna esse tipo de abordagem muito rara no ponto de vista do ensino da Matemática. Pois, geralmente, o conteúdo histórico é apresentado de modo desconectado do desenvolvimento conceitual, acabando assim com seu papel cognitivo.

O fazer matemático num sentido mais amplo requer que o aluno tenha à sua disposição os mesmo meios e circunstâncias que os matemáticos tiveram ao construir o seu próprio conhecimento. Talvez, por não ser apresentada dessa forma, a maioria dos alunos apresenta a maior dificuldade no aprendizado da matemática, tendo sua visão clássica como área excessivamente operacional, abstrata ou técnica. Quase sempre o aluno acaba não percebendo o sentido dos conceitos e das ferramentas que aprende.

Ao observarmos a evolução da matemática, vemos que esta se constitui e, de maneira contínua, se desenvolve a partir de problemas, A referência que temos que ter sobre "problemas", no sentido mais amplo, não é apenas um conjunto de exercícios usados na aprendizagem de certo conteúdo. São os problemas que tornam mais próximas a matemática e a experiência e que constituem o campo da experiência do matemático, ou seja, o lado concreto do fazer matemático.

Para compreender os problemas que nutrem a matemática atual, seria um processo muito difícil, tendo em vista o seu quadro de complexidade. Com os conteúdos que ensinamos desde o Ensino Fundamental, que foram desenvolvidos há séculos, podemos fazer uma análise do momento em que os conceitos foram originados e como os seus resultados, que hoje são vistos como clássicos, foram demonstrados. Fazendo dessa maneira, possivelmente entenderemos as grandes dificuldades que os antigos matemáticos tiveram que combater, que são muitas vezes similares à mesma dificuldade experimentada por todos aqueles que estão aprendendo matemática.

É necessário, portanto, imergir na cultura própria do contexto histórico para, com isso, obter conceitos chave que possam permitir mostrar o seu desenvolvimento, apesar de sua complexidade, e conseguir captar esse raciocínio na nossa concepção atual.

Um grande cuidado que devemos ter ao investigar a matemática num contexto antigo é compará-la à concepção de hoje. Isso é uma postura chamada "anacronismo". Para passar por esse obstáculo é crucial mergulhar nos problemas da época, tendo como relevantes os fatores sociais, científicos e filosóficos.

Dessa maneira, fica possível recuperar os problemas, com o ambiente que descreve os objetos matemáticos, os métodos estipulados, os teoremas demonstrados, enfatizando assim que a matemática em geral se relaciona de modo concreto com seus problemas. Uma teoria foi definida ou um teorema sai demonstrado com a finalidade de encontrar soluções para problemas de diferentes tipos.

Não podemos então deixar de perceber a importante diferença entre a ordem lógica da exposição, o modo como o texto matemático é organizado para ser apresentado e a ordem da invenção que envolve a ordem na qual os resultados são desenvolvidos. Não se pode confundir jamais a matemática já feita com a maneira como ela é feita através dos tempos.

O esforço fundamental empregado nessa atividade vem avaliar que embora a matemática seja, em grande parte, abstrata, a sua aprendizagem pode ser menos abstrata. Podemos nos aproximar das reais motivações que levaram matemáticos como Euler a proporem certas teorias, definições métodos ou teoremas. Para que seja atravessada a dificuldade no entendimento de uma disciplina abstrata, vista geralmente na matemática, que a história pode ser muito útil.

3.3. Recursos da maquete para o problema e correlatos

Embora a abordagem histórica seja o núcleo da metodologia a ser trabalhada, o professor pode, dependendo da turma e tanto no que diz respeito ao grau, tempo, disponibilidade, quantidade de alunos e espaço disponível, usar a maquete com adaptações e até com a finalidade de trabalhar outros tipos de conteúdo que sua aula possa permitir.

Seguem abaixo algumas sugestões de como utilizar a maquete, bem como seu procedimento detalhado, de acordo com a designação dada aos recursos em 2.3.1. Lembramos que o principal instrumento de ensino é o professor e, através dele, o material pode colaborar para seu fim e trazer aos alunos ensinamento e respaldo pedagógico. Buscamos, com a elaboração desse produto, proporcionar aos professores e alunos a manipulação com tentativas de percursos para solucionar o problema.

Recurso motivacional passivo

Essa seria uma abordagem típica de uma aula de introdução à teoria dos grafos ou da própria história da matemática. Nela o professor pode apresentar a maquete à turma e, através dela, manipular seus elementos enquanto detalha e explica o proceder de Euler ao solucionar o problema.

A interação com o produto é dada somente pelo professor. O aluno, de maneira passiva, mas com um novo recurso visual, acompanha a explicação do professor. Talvez o melhor ambiente para esse tipo de abordagem seja somente o acadêmico, onde os estudantes têm maior grau de ensino e maturidade intelectual para que possam se motivar com o experimento e ver nele uma real ponte entre o que será trabalhado na teoria e a sua proveniente origem, que foi de certa forma materializada.

Recurso motivacional ativo

Diferente do anterior, o professor permite que os alunos interajam com o objeto, após ou durante sua explanação. Se o tempo ou a condição permitir, esta sem dúvidas se torna melhor que a maneira anterior.

Isso se deve ao fato de que, apesar de o professor deter o controle da transmissão do conhecimento, os alunos ao terem contato com a maquete poderão, de maneira consciente, analisar e repensar o que o professor está transmitindo.

Essa interação não só se faz de extrema importância como traz a muitos alunos a real convicção de que o problema tratado possui uma raiz cultural e histórica, o que encerra no ensino da matemática um elo do que se desenvolveu no passado, com as muitas aplicações ligadas ao cotidiano.

Recurso empírico

Vimos que o professor, de uma forma geral nas maneiras motivacionais, sempre está à frente para guiar os alunos e orientá-los através do objeto. Na maneira empírica, o professor deixa o aluno se colocar na posição de Euler, como se o matemático em questão fosse apenas um personagem que eles tivessem que incorporar.

É proposto à turma ou aos grupos, se assim for possível, que tentem solucionar o problema dado. Serão dados a eles as hipóteses do problema, o tempo necessário e o grupo fica livre para interagir com a maquete, como se esta fosse uma nave em repouso, esperando a decolagem.

Entretanto, essa "decolagem" deve ser dada de maneira espontânea ou empírica. Para isso, o professor não deve mencionar a teoria que vai trabalhar ou ter ministrado nada relacionado a grafos antes, pois dessa maneira eles não desfrutarão da mesma realidade de Euler, ao minimizar o problema.

O objetivo é a utilização do material como recurso que leve o aluno a descobertas por tentativas e erros, podendo chegar a conjecturar que não há solução. Cabe ao professor orientar a atividade para que, ao testar as possibilidades de percursos, manuseando a maquete, o aluno abstraia o problema e cheque ao esboço do grafo, no qual os lugares que as pontes se conectam são pontos e as pontes são linhas. Assim, cada margem é um ponto e cada ilha é um ponto. Portanto o grafo tem quatro pontos e sete linhas de conexão, tendo a forma mostrada na Figura 4.

Além da função de aprendizagem, a utilização do material como recurso motivacional pode ir além do conteúdo, mas pela própria matemática, pois o aluno vive a experiência de uma outra forma de modelagem de problema, a qual dá origem a um outro ramo de estudo da matemática.

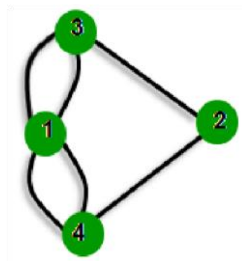


Figura 4. Grafo do problema das 7 pontes.

Na Figura 4 ilustramos o Grafo do problema das sete pontes: as linhas pretas representam pontes e os discos verdes representam extremos das pontes que têm conexão por terra.

Recurso avaliativo

No Recurso avaliativo, o professor não deixa o aluno totalmente livre para interagir com o objeto, mas busca através dele registrar quanto conhecimento pode absorver. Para isso, basta anexar ao processo interativo no qual o aluno será exposto um questionário ou avaliação que busque alguns dados que consolidem o saber matemático. Seguem abaixo alguns pontos que podem ser abordados num questionário.

- Quantas ilhas e pontos possui o cenário;
- Quais os principais caminhos que podem ser realizados a partir de um lugar;
- Quantificar alguns percursos;
- Questionar a possibilidade de se realizar o trajeto proposto a Euler;
- Justificativas para tais;
- Maneiras de se realizar um trajeto que atenda a suas hipóteses e suas adaptações;
- Especular sobre a estrutura do cenário e as mudanças pessoais;
- Usar o fato das demolições das pontes e questionar sobre as novas rotas;
- De maneira subjetiva, buscar as definições de grafo Euleriano;
- Acrescentar novas hipóteses e questionar sobre elas;
- Parecer pessoal do aluno sobre a atividade realizada, seus prós e contras;
- Outros;

Usar a maquete como instrumento de avaliação é preparar os alunos para os futuros questionamentos que a vida profissional irá colocar diante dele. Muitas vezes esse tipo de “prova” desperta neles uma espécie de auto avaliação e senso de responsabilidade.

Nas avaliações tradicionais, o aluno se submete ao seu particularismo, buscando “resolver” a prova, sem vínculo com a mesma. Ou seja, pode até adquirir uma autossuficiência no conteúdo, mas não é capaz de questionar a própria prova que realiza. Além disso, muitos alunos, desinteressados e desmotivados, só encontram a solução através do fraudulento jeito da “cola”. Dessa maneira de avaliar, além de buscar um caráter mais profundo e subjetivo de seu pensamento, pode trazer uma nova maneira de enxergar a matemática, até mesmo como maneira de se avaliar e, de fato, registrar seu conhecimento.

O ambiente mais propício a esse tipo de uso da maquete é a sala de aula, de preferência separando a turma em grupos, para que possam se organizar e discutir sobre o que está sendo avaliado.

Recurso transcendente

Essa última maneira sugerida visa ao uso da maquete de uma forma mais ampla, além do vínculo com a história da matemática. Busca nela resgatar, anexar e expandir seus conceitos de atividades para outros conteúdos da própria matemática.

Para isso, o professor deve se ater aos elementos dispostos na própria maquete, bem como as pontes e seus formatos, as estruturas representadas nas ilhas e bem como o próprio móvel. Com essa visão, muitos elementos da matemática podem emergir através de observações, investigações e até formulação de novos problemas, o que dá de fato ao aprender matemático algo dinâmico e não meramente conceitos estáticos.

Abaixo, sugerimos variadas formas de trabalhar essa transcendência, lembrando mais uma vez que se trata apenas de algumas sugestões:

1. Na teoria dos grafos

Após abordar o contexto histórico e o conceito de grafo euleriano, podemos “inserir” novas pontes e/ou retirar outras, fazendo com isso um novo cenário. Podemos nessa nova maquete explorar outros conceitos como o grafo hamiltoniano, o “passeio do carteiro” e outros.

É recomendado que nessa transcendência, haja certa segurança dos alunos e do professor para se trabalhar com muitos conceitos de grafos na mesma atividade. Entretanto, se esta for colocada em aulas mais avançadas do curso, torna-se um novo instrumento de aprendizagem muito interessante e relevante.

Transcender de um conceito básico para estruturas mais complexas é algo típico da matemática. É sempre visto no decorrer das aulas tradicionais a complexidade das definições e dos teoremas, assim como tornar a teoria mais compacta e mais fácil de ser assimilada. Porém, ao se remodelar a própria maquete em que foi construído o primeiro conceito, o aluno acaba percebendo que no cenário real, o mesmo deve ocorrer. Novas possibilidades são observadas, além de novas condições, novas tentativas e novos desafios! Sem dúvida, para alunos de um curso de matemática ou área afim, esse tipo de transcendência pode fascinar o gosto pela resolução de problemas.

2. Análise econômica

O professor pode, ao trabalhar com questões que abordem o aspecto financeiro, tornar “viva” a cidade de Könnigsberg e explorar as diversas formas que a economia pode estar presente no dia a dia de uma cidade.

Pode ser feita uma especulação imobiliária das residências de cada ilha e assim montar um quadro de situação socioeconômica de cada um dos quatro lugares que podemos acessar. Além disso, podemos estipular pedágios sobre as pontes e calcular assim custos de vida, gastos feitos em trajetos, o menor gasto que pode ser realizado num passeio pela cidade, bem como verificar em qual estrutura o comércio pode gerar maior lucro.

A criatividade do professor pode realizar muitas coisas nesse tipo de transcendência. Sem dúvida, em turmas de ensino médio ou até mesmo em cursos de graduação como administração ou economia, essa abordagem teria muito crédito, pois materializa o quadro real em que a economia pode ser encontrada.

Analisando de forma crítica o aluno do ensino médio em especial, vemos que ele não tem como referência padrões econômicos que possam ser vistos em questões abordando a economia através de bolsa de valores, fluxos comerciais empresariais, taxas bancárias e outros similares.

Faz-se necessário muitas vezes um resgate de sentido nos conceitos relacionados à matemática financeira. Trazer esses conceitos embutidos numa situação real e cotidiana que está representada na maquete torna a aprendizagem mais leve no sentido "abstrato" e convida o aluno a uma interação libertadora e participativa.

Como sugestão, o professor pode colocar em grupos os alunos responsáveis por comércios e estruturas da maquete. Fazer na sala de aula um verdadeiro câmbio e simular as atividades da cidade para que cada um observe a relação econômica e social que é vivenciada pelo comércio numa cidade.

3. Medidas e proporções

No decorrer das atividades ou numa aula específica sobre razões, medidas e proporções, o professor pode avaliar aspectos físicos do material como área do isopor, quantidade de habitações colocadas sobre ele, os aspectos geométricos com que foram feitas as pontes e com isso trabalhar outros tipos de questões que são relativamente comuns às realidades do cotidiano.

Os alunos podem, por exemplo, contar as casas e habitações decoradas na maquete e, com a medida de área, estipular um censo demográfico da região, bem como visto na disciplina da geografia. Aproveitando esta disciplina, o aluno pode averiguar qual a proporção entre a parte urbanizada (pistas e casas) para a parte natural, não desmatada (parte verde). Da mesma forma, poderia calcular a extensão do rio Prigel e com isso avaliar a hidrografia, pesquisando ainda sobre a realidade local. Muito pode ser aproveitado, incluindo aspectos naturais e, sobretudo, a interdisciplinaridade.

Outro estudo que poderia ser realizado seria na observação geométrica das pontes locais, avaliando nele questões como resistência, quais são favorecidas por uma estrutura lateral triangular (lembrando-se das propriedades da rigidez triangular), custo proporcional de cada ponte, estimando o valor pelo número de palitos de picolé.

Ao trabalhar com escalas, o aluno também pode entender que a maquete pode representar diversos tipos de minimizações, preservando ou não as proporcionalidades entre seus elementos e, com isso, estudar conceitos como escala e medidas.

4. Modelagens de maquetes

Mais do que simplesmente apresentar a maquete e deixar de fora todo o processo de elaboração desse tipo de material pedagógico, o professor poderia, especialmente num curso de licenciatura em matemática, solicitar aos seus alunos que também produzam suas próprias maquetes, ao invés de simplesmente usar uma maquete e guardá-la.

Na versão mais simples, o professor pode, no próprio curso de grafos ou de história da matemática ou, mais convenientemente, no curso de laboratório de matemática, avaliar o aluno sem usar a maquete para fins específicos. O professor deve ter em vista a avaliação da capacidade do aluno, futuro professor, de elaborar tal maquete e o incentivando a fazer do ensino da matemática também um espaço de criação e construção o conhecimento. Contudo, não para por aí. Esse tipo de abordagem pode ser realizado na educação básica e até em outros cursos.

Há uma concepção de que ensinar matemática é meramente transmitir um saber, um tipo de conhecimento que está pronto e terminado. Sendo assim, a matemática que devemos considerar é a que está feita. Apesar disso, essa mesma matemática foi construída por matemáticos que tinham inúmeras motivações.

5. Jogos

Analisando a perspectiva do aluno ao lidar com um novo tipo de objeto, uma nova temática de abordagem matemática é a de querer enfrentar o desafio que lhe será exposto. Nesse tipo de pedagogia, nada melhor do que lidar com um tipo de linguagem que é própria de sua fase, o jogo.

O jogo, além de estimular a competitividade, exerce uma poderosa influência pedagógica, pois através dele o aluno, de uma maneira divertida, vivencia o que o mercado de trabalho e a vida vão lhe cobrar: vencer os desafios.

Uma forma bem interessante de se divertir é brincar de pique e pega na maquete. Isso pode ser realizado com dois jogadores, com as seguintes regras:

- Um jogador é o perseguidor e o outro é o fugitivo;
- Cada jogador pode atravessar uma ponte por vez;
- Uma ponte só pode ser atravessada uma vez. Logo em seguida, sua grade é baixada e não se pode mais passar por ela;
- Se o perseguidor chegar na parte em que o fugitivo está, então o perseguidor vence;
- Se o perseguidor ou fugitivo ficar trancado ou as 7 pontes forem usadas, então o fugitivo vence;

Como vimos, essas seriam as regras básicas nas condições de Euler, podendo inclusive sofrer algumas alterações, devido ao nível de dificuldade ou ao dinamismo da partida. São jogos desse tipo, que não dependem de sorte, que o aluno pode formular qual a estratégia vencedora, tanto como perseguidor quanto como fugitivo. Sem perceber, estarão, nada mais nada menos, fazendo os papéis de polícia e ladrão.

A partir disso, eles podem questionar o ambiente em questão, verificar se a cidade, por sua estrutura de vias, facilita o trabalho e vigilância da guarda local, ou é uma cidade que se torna convite aos ladrões de plantão. São essas análises vindas dos alunos que podem proporcionar um tipo de raciocínio mais crítico e integrado à realidade do bairro ou cidade.

Vimos também que, nas regras, o fato de usar as pontes uma única vez implica em realizar trilha euleriana sem interceptar a trilha do outro jogador. Os conceitos matemáticos estão sempre implícitos durante a atividade. Assim, cabe ao professor o dever de ressaltar essa qualidade durante a partida.

Esse jogo, ainda assim, é somente um exemplo do que pode ser realizado com jogos na maquete. Outras adaptações podem ser colocadas sobre a maquete, como por exemplo, o clássico jogo do detetive. Podemos adaptar as estruturas desse jogo ao cenário de Könnigsberg. Ao invés de usar o cenário de uma mansão como no original, com quartos, salas e outros cômodos, podemos usar as partes das maquetes, bem como seus locais (hospital, delegacia, Igreja, etc...)

Isso nos levaria a trabalhar com o aspecto da sorte, pois o jogo é processado através da rolagem de dados, como também do suspense e do uso do raciocínio lógico constantemente. Sem dúvidas, os alunos vão querer desvendar esse mistério!

Outra sugestão seria a de aplicar a estrutura do jogo Banco Imobiliário, usando o cenário descrito pela maquete como plataforma de comércio, podendo resgatar do jogo original todas as estruturas como peças, cartas e dinheiro.

Assim, como na análise econômica, os alunos adquirem maior visão do que é real, com a vantagem de não assistir a tudo de maneira passiva, mas atuando como um verdadeiro empresário.

Poderá também o professor pegar e adaptar um jogo combativo nesse cenário e assim simular o ocorrido na Segunda Guerra Mundial. Inclusive pode colocar como objetivo de um time explodir as pontes, enquanto o outro time busca a defesa da cidade. Embora tenha uma tonalidade violenta, seria uma experiência que poderia ser realizada em conjunto, o professor de matemática e o de história, pois além de discutirem aspectos matemáticos no proceder do jogo, a narrativa do professor de história poderia realizar o desfecho da partida, com o fato evidenciado na Prússia durante o devido período.

Com a pedagogia do jogo no ensino da matemática, muitos aspectos do ensino-aprendizagem são abordados, realizando assim uma atividade que vai animar a aula e mudar concepções do aluno sobre a disciplina.

Além disso, podemos fazer o que novamente não somos condicionados a fazer: deixar com que o aluno tenha espaço na construção da matemática e não ser um simples espectador. Ao invés de somente apresentar o jogo feito, o professor poderia, como sugestão, propor que o aluno inventasse sua própria maquete com o jogo, deixando obviamente claro qual deve ser o conteúdo matemático que ele deve abordar.

6. Interdisciplinaridade

Como visto em algumas maneiras transcendentes de se trabalhar com essa maquete, o professor pode reunir aspectos e conceitos de outras áreas do conhecimento para assim demonstrar que o conhecimento é trabalhado e ensinado separadamente, mas se encontra de maneira unificada em nosso meio.

Como comentado em algumas dessas maneiras, poderíamos nessa própria maquete fazer uso da Geografia para avaliar demograficamente a região, situação política antiga e atual e também fazer menção, com auxílio da História, aos fatos ocorridos em Könnigsberg, bem como as mudanças no cenário que foi estudado por Euler.

Outra grande disciplina indispensável seria Artes, para dar a tonalidade específica de realismo sobre a maquete, assim como os conceitos artísticos da época e da região. Usando a criatividade e explorando novas ideias, podemos contextualizar também as outras disciplinas.

Nesse sentido, ao transcendermos para a interdisciplinaridade, isso nos permitirá caminhar no sentido de uma liberdade da situação de termos um porto seguro, de verdades prontas e acabadas. O saber deve surgir das situações da emergência e transforma sujeito em objeto do conhecimento, codificando o humano.

O fator interdisciplinar não pode ser ensinado nem teorizado. Trata-se da própria prática que se vive a partir de uma decisão, algo que vem do interior do ser, ao assumir o fazer integrador que ocorre no coletivo e é feito com e para ele mesmo.

De maneira geral, quando queremos fazer uma abordagem interdisciplinar, consiste no ensino formal ser desenvolvido de forma crítica e profunda, visando no contexto social preparar o aluno de forma integral, onde este seja cidadão participante do seu tempo e espaço.

CAPÍTULO 4

Painel Elétrico

Este material visa a reproduzir uma malha através de um painel, com a finalidade de abordar conteúdos pertinentes às questões que envolvem problemas de contagem e o Princípio Multiplicativo. Esse produto, assim como a maquete do capítulo anterior é um invento pessoal, não tendo assim uma referência designada.

4.1. Problema original

"Uma formiga encontra-se no ponto A, e deseja chegar até o ponto B, caminhando sempre sobre os segmentos de figura abaixo, deslocando-se sempre para a direita ou para cima. De quantos modos diferentes ela pode realizar seu intento?"

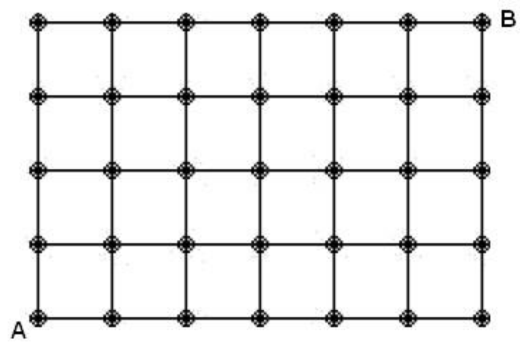


Figura 5: Malha retangular

Essencialmente, nesse tipo de questão, a abordagem explora o conceito de contagem, onde há fatores repetidos. Nesse caso, pode-se observar que qualquer que seja o trajeto da formiga sobre a malha (Figura 5), nas condições do problema ela deve percorrer sempre 10 segmentos, sendo 6 horizontais, onde ela caminha para a direita e sendo 4 verticais, onde ela caminha para cima.

Uma das maneiras de se obter o número de caminhos distintos seria associar o movimento para a direita à letra D e o movimento para cima à letra C, fazendo assim o cálculo de quantos anagramas de uma palavra com 10 letras, com 4Cs e 6Ds existem.

Dessa forma, teríamos 10!. Agora, descontando os fatores da repetição de palavra, quando trocamos um C pelo outro C, fazendo assim a divisão por 4! e 6! pelas letras D. Sendo assim, teríamos $T = (10!) : (4! \,.\, 6!) \rightarrow T = (10.9.8.7).(4!) = (10.9.8.7) \,.\, (4.3.2.1) = 10.3.7 = 210$ maneiras diferentes.

Essa seria uma das estratégias plausíveis do aluno para buscar a solução do problema. Entretanto, ao utilizar o painel elétrico, estaremos colocando o aluno diante de um problema concreto, onde ele simplesmente não avalia um fato ou fenômeno, mas se torna atuante no desenvolvimento da solução.

Outra vantagem que o material fornece é que podemos introduzir sempre mais hipóteses e outras condições, possibilitando assim trabalhar também com outros conceitos da área da Análise Combinatória.

4.2. O material e a modelagem do problema

Trata-se de um painel de madeira retangular (Figura 6), com o desenho de uma malha 4x6 no mesmo formato do exemplo anterior. Nos pontos da malha foram colocados pregos perfurando o painel e acima deles temos nesse painel três bocais com lâmpadas, sendo uma vermelha, uma amarela e uma verde.

Figura 6: Estrutura do painel

Também, na parte superior, temos o encaixe de um gerador, que está associado às lâmpadas e à malha. As lâmpadas estão conectadas em circuito paralelo, que pode ser alterado para em série, caso seja esse um dos intuitos da experiência. Segue abaixo o painel em suas duas visões:

Note que o gerador conecta justamente o ponto A do problema visto e a lâmpada (L1), por sua vez, se conecta ao ponto B e ao gerador, para assim fechar o circuito em questão.

Nesse painel, foram colocadas outras duas lâmpadas, para que, ao adicionar restrições e novas condições às hipóteses ou formular novos questionamentos, estas possam ser adicionadas ao circuito (Figuras 7 e 8). Em anexo ao material, foram feitas algumas tiras de fios, para que possam ser conectadas entre dois pregos e assim permitir a passagem da corrente elétrica.

Esses fios estão isolados, contendo peças de alicate para que possam segurar os pregos. Foram feitos dez desse tipo da cor preta, dez da cor vermelha e alguns de outras cores, para que se possa usar fios de cores distintas e assim diversificar a abordagem do problema.

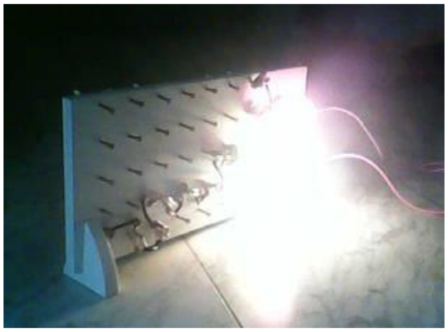


Figura 7: Painel em funcionamento

Figura 8: Lâmpadas do painel

O gerador utilizado é uma bateria para capacidade de corrente de 127V, ou pode ser adaptado com uma simples estrutura de botão que liga e desliga, deixando assim os fios terem como gerador uma simples tomada convencional.

Diferente de outros materiais, este painel faz uso da corrente elétrica, sendo necessários procedimentos de cautela e segurança para que não ocorra nenhum tipo de acidente durante o seu manuseio.

Para isso, seria prudente isolar todas as extremidades dos fios para evitar contato, como também o uso de luvas para o manuseio do experimento e assim não deixar que ocorra os chamados “choques”. Durante o manuseio, é prudente que não esteja acionada a corrente elétrica enquanto os alunos estiverem, por exemplo, arrumando os fios e fazendo uma análise de possibilidades ao tentarem colocar os fios no painel. É recomendado que, após toda a arrumação necessária e não tendo mais contatos, a corrente elétrica seja acionada.

Obviamente, a presença do professor durante a execução é fundamental, não podendo esquecer sua responsabilidade pela segurança durante a atividade. Diante dessas grandes preocupações, a maioria dos professores não se sente confortável e nem mesmo encorajada a trabalhar numa sala de aula com um aparato que possa oferecer algum tipo de risco.

Vale lembrar que ao realizar uma atividade desse tipo, estaremos lidando com alunos do 2º ano do ensino médio, pela faixa mínima onde estarão em contato com a parte teórica sobre análise combinatória. Outro fator importante é a relação entre o número de alunos da turma e a condição disciplinar da mesma. Logicamente, não ficaria viável colocar toda essa atividade numa turma com 40 alunos, podendo a turma apresentar maior dificuldade para a realização da atividade.

Cabe ao professor encontrar mecanismos que possibilitem a realização da atividade. Por exemplo: verificar, na escola, lugar e tempo disponíveis, assim como a assistência necessária; trabalhar numa turma com o menor número possível de alunos. De fato, são esses e outros elementos que são fundamentais para esse tipo de prática pedagógica.

Vimos do que se trata o material e de qual problema original capturamos a ideia para poder montá-lo. Porém, qual deve ser o objetivo do problema em questão nesse painel?

Quando lançamos problemas, principalmente na área da análise combinatória, onde o processo de contagem tem ligação direta com um certo contexto, o objetivo do problema em si se reflete apenas no calculismo e obtenção do número, mas deixa de lado o aspecto de uso prático do resultado.

No problema original, a pergunta simplesmente nos desafia a contar as maneiras distintas de o inseto percorrer o trajeto, mas muitos alunos podem perguntar, para quê? Esses tipos de questionamentos já foram abordados antes e poderiam ser respondidos com alguma alegação funcional do tipo "para um biólogo observar o comportamento do inseto" ou "para observar qual a tendência do trajeto do animal" e outras do mesmo tipo. Por isso, ao modelarmos um problema com esse painel, devemos ter em mente qual é o objetivo principal. E também avaliar a direção dos cálculos a serem realizados.

Observamos que pela malha do painel ser a mesma do problema original, esta possui o mesmo argumento combinatório. Entretanto, a natureza dos seus elementos é diferente. Logicamente, o objetivo principal no qual o aluno vai se deparar será o de fazer a lâmpada acender. Porém, devemos dar alguns contextos para que ele execute essa ação. Mais à frente serão colocadas algumas sugestões de como usar o painel, envolvendo principalmente situações que percorram contextos da vida profissional.

4.3. Maneiras de usar o painel

Assim como visto no material sobre a maquete das 7 pontes e Könnigsberg, podemos explorar algumas maneiras de se trabalhar com o painel, no conteúdo matemático e em outros contextos, com sugestões de construções e aplicações do produto.

Recurso motivacional

Como visto anteriormente, a atividade pode ocorrer de duas formas, podendo ser passiva ou ativa no que se refere à interação do aluno. A maneira adequada pode ser ponderada pelo professor, dependendo de suas condições na turma.

Entretanto, o ponto crucial nesse tipo de abordagem é o de explorar os raciocínios da análise combinatória, também fora do velho esquema de papel e lápis. O que objetivamos é apresentar um protótipo de um contexto concreto, em que o uso desse tipo de conteúdo se faz necessário.

Logicamente, no intuito de buscar motivações e incentivo para o aluno, devemos colocar o material como uma amostra do que ele poderá encontrar na vida profissional, no sentido de mais uma vez de apresentar a matemática como ciência atuante na vida, concreta, real e palpável, onde se apresenta um contato legítimo. Além disso, leva o aluno a refletir sobre seu caminho profissional, principalmente aqueles presentes nos cursos técnicos profissionais.

De uma maneira geral, não devemos mostrar a matemática concreta, com experimentos que algum matemático já tenha desenvolvido ou experimentado, mas mudar a mentalidade de que um objeto concreto só tem propósito na matemática, se a finalidade dele for a própria matemática.

A ideia motivacional nessa atividade deve quebrar esse paradigma. O painel quando apresentado pode muito bem ser interpretado como um circuito elétrico, no qual o raciocínio combinatório que seja um meio para que o seu funcionamento ocorra de fato.

Como vimos nesse painel, este possui três lâmpadas, que de forma opcional foram dispostas em verde, amarela e vermelha, para que propositalmente represente um semáforo. Colocamos assim o aluno diante de um objeto presente no meio social e destacamos sua relevância, para que entendam que, nos mecanismos que estão à nossa volta, sempre teremos presente o raciocínio lógico e matemático para a manutenção e uso desses aparelhos.

Também nessa maneira de usar esse material, em decorrência do ambiente escolar, bem como de suas particularidades, o painel pode ser usado em algum tipo de apresentação escolar ou, quando trabalhado em conjunto com uma atividade da escola, numa oficina, palestra ou algum tipo de feira de ciências em geral.

Recurso empírico

Certamente, esta maneira ainda é uma das mais preocupantes por conta das questões de segurança antes vistas. Porém, esse é um tipo de abordagem que permite desafiar o aluno, deixando um problema que fatalmente lhe questiona em seu interior: “e se fosse na vida real?”.

Talvez, tal atividade devesse ser dada, antes de se aprofundar o conteúdo da análise combinatória, de modo que, sem influência anterior, fosse possível desenvolver seu conceito matemático, livre do formulismo clássico, mas de maneira espontânea no modelo “empírico”.

Para iniciar este tipo de abordagem, podemos introduzir de maneira mais fácil e acessível o desafio de montarem o circuito, com a finalidade de fazer a lâmpada acender, ou seja, fazerem uma simples testagem no aparelho.

Podendo aumentar o nível do desafio, colocar mais uma lâmpada e fazer acender uma só lâmpada ou as duas de uma vez. Se for interessante, colocar as três lâmpadas e fazer os mesmos tipos de questionamentos, deixando que os alunos ponham a mão na massa.

O que torna muito interessante essa maneira de se empregar a atividade é fazer com que eles usem mais o raciocínio lógico, livres de fórmulas e situações habituais. Pode-se perceber no painel que a parte oposta às lâmpadas contém as conexões entre os fios com os bocais e os pregos. Dessa forma, é muito instrutivo que os alunos testem os diversos caminhos de encaixar os fios nos pregos, de maneira que possam localizar os pregos que acendam as outras lâmpadas.

Outro tipo de desafio empírico seria fazê-los “técnicos em eletrônica” e tentar descobrir, com as testagens no circuito, quais são os pregos que estão conectados às lâmpadas alternativas (no caso, a lâmpada principal está sempre conectada ao último prego da malha) e assim observar qual aluno ou grupo conseguiu descobrir quantas testagens e tempo utilizado foram necessários.

Novamente, vemos aqui a grande oportunidade de deixar o aluno encontrar suas próprias soluções para os problemas, ensinando mais uma vez que o pensamento matemático é estático e unilateral, coibindo qualquer variante de pensamento, mas, de forma estratégica e dinâmica, permite ao aluno buscar sua própria linha de pensamento.

Recurso avaliativo

Assim como no experimento das pontes, podemos anexar à atividade, um questionário ou teste que faça com que, no processo de interação com o painel, o aluno conheça os principais conceitos da matemática com os quais está lidando.

De uma forma geral, quando colocamos um questionário ou avaliação no processo de aprendizado, o fator de cobrança e atribuição de notas faz com que o aluno não desmereça o fazer matemático ou o veja como mera atividade recreativa. Neste caso, a única diferença dos testes convencionais é que o objeto de estudo é concreto e manipulável, permitindo assim resolver questões em matemática com outra visão.

Seguem abaixo alguns pontos que podem ser abordados numa avaliação sobre os conceitos presentes na interação com o painel:

- Quantas lâmpadas e quantos fios para conectar possui o experimento?
- Quantos pregos possui o painel?
- Quais as dimensões da malha formada?
- Quantos fios são necessários, no mínimo, para alcançar o objetivo de acender a primeira lâmpada?
- Quantos são os trajetos possíveis:
    - Com fios de mesma cor?
    - Com fios de cores diferentes?
- Quantos são os trajetos que acendem as lâmpadas amarela e verde?
- Quantos são os trajetos que acendem a lâmpada vermelha mas não acendem a amarela?
- Escolhendo ao acaso um caminho, qual a probabilidade desse caminho acender duas lâmpadas?
- E três lâmpadas?
- Cálculo de probabilidade em geral
- Especular sobre a estrutura do painel e sobre algumas possíveis mudanças
- Acrescentar novas hipóteses e questionar sobre suas soluções
- Parecer pessoal do aluno sobre a atividade realizada, seus prós e contras
- Outras perguntas

De fato, usar experimentos como esse numa forma de avaliar torna a avaliação mais “construtiva” do que “avaliativa” em si. Na perspectiva de Vigotsky (2003), por exemplo, vemos que a aprendizagem é resultante da relação sujeito objeto, relação que une esses dois termos em um só. Portanto, para este autor, o ponto de partida não é o sujeito e nem o objeto, mas sim a interação entre ambos.

É nessa interação que buscamos o seu *feedback*. Por isso, esse método avaliativo consiste em constatar se o aluno aprendeu e alcançou os objetivos propostos quando a programação foi conduzida até seu término de forma adequada.

Se possível, seria recomendado, até por questões de tempo e espaço, que essa maneira fosse realizada em grupo, até para que, na própria interação com o grupo, cada aluno pudesse compartilhar sua forma de entender.

Recurso transcendente

Mais uma vez buscamos, dessa maneira, ampliar as possibilidades de uso desse painel em sala de aula, procurando assim explorar aspectos intrínsecos nesse objeto que pudessem se relacionar com outros conteúdos da Matemática, bem como de outras áreas afins.

Para que a interação com o objeto tenha maior significado, teremos que explorar cada vez mais o contexto e a aplicabilidade de cada material para que, assim transcorra para o aluno o verdadeiro sentido em aprender matemática dessa forma. A seguir são recomendadas algumas maneiras de se trabalhar visado ao aspecto transcendente.

1. Na análise combinatória

Embora o painel seja moldado no problema que foi abordado no início deste capítulo, vemos que, na solução de ambos os problemas, teremos o mesmo raciocínio combinatório. Obviamente, podemos fazer alterações nesse painel para que ocorra outro tipo de raciocínio combinatório que venha a modificar a estrutura epistemológica do raciocínio.

Primeiramente podemos, no lugar dos fios de encaixe, substituí-los por fios coloridos para que o aspecto da combinação ganhe distinção em seus objetos e simule assim outro tipo de raciocínio de contagem. Além disso, podemos também aumentar o número de lâmpadas como também colocar um certo número sendo distintas ou idênticas.

Podemos, de maneira análoga, colocar os fios numerados e explorar aspectos de arranjo ou permutação caótica. Alterando alguns elementos do material, podemos alterar o tipo de contagem e assim buscar gradualmente maiores níveis de dificuldade, envolvendo raciocínios combinatórios mistos e também problematizar de acordo com as novas situações apresentadas.

É importante, quando o professor fizer as devidas alterações no painel, tentar sempre justificar ou formular uma nova situação problema que possa orientar o aluno nesse sentido.

2. Associação com o plano cartesiano

Aproveitando a construção da malha, o professor pode atribuir coordenadas inteiras para os pontos (que serão os pregos no painel) e assim explorar outro importante conceito matemático.

Nesse contexto, o professor pode fazer novos questionamentos e desafios. Por exemplo, pode citar a coordenada que acende uma determinada lâmpada e, com isso, o aluno fará as conexões necessárias no painel, com a finalidade de acender a lâmpada e completar o desafio.

Muitas outras opções poderiam ser realizadas nesse campo. O professor poderia formular sistemas de equações com duas incógnitas, sendo a solução desses sistemas os pontos da malha que acendem cada lâmpada. Dessa maneira, não só o conceito combinatório pode ser explorado, mas, também, muitos fundamentos das equações e sistemas, percorrendo assim também a área relacionada à álgebra.

Trabalhar nessa parte da álgebra também não significa que deve ser excluída a abordagem anterior. O professor, com o uso da criatividade, pode elaborar uma atividade que possa explorar os dois conceitos, levando o aluno a fazer uma verdadeira integração de conteúdos dentro da matemática. Essa exploração pode muito bem fazer com que o aluno use o conceito de sistema de equações para localizar os pontos no painel de forma a acender as lâmpadas e, logo após, contabilizar com o raciocínio da Análise Combinatória quais e quantos são os trajetos onde os fios estejam posicionados de modo que a corrente elétrica acenda a lâmpada desejada.

3. Medidas e proporções

Da mesma forma que no material anterior, o aluno pode encontrar as medidas do próprio material, bem como a área da malha, o total do comprimento utilizado para os fios, a área que comporta as lâmpadas, etc.

Outro tipo de medição que seria muito importante nesse contexto seria o da corrente elétrica. Para isso, faz-se necessário o uso de um multímetro e assim conectar nas extremidades por onde percorre a energia elétrica. Podemos com isso não só medir a intensidade da corrente, mas também analisar aspectos como o número de lâmpadas acesas e suas respectivas potências.

Paralelo a assegurar essas medidas, podemos formular novos tipos de questões como associar o painel a uma casa e cada lâmpada a um cômodo e assim estabelecer, com essas medidas, qual seria o gasto médio de uma conta de luz naquela casa.

Ter como meta calcular medidas não é apenas um procedimento braçal e vazio. Podemos, com isso, questionar de maneira crítica quais medidas são necessárias para que o consumo diminua, ou verificar qual seria o gasto médio com os “aparelhos” dessa casa.

Fazer esses tipos de associações e estimativas pode contribuir ainda mais para que a utilização do painel forneça ao aluno um âmbito real no aspecto de calcular medidas e estabelecer proporções.

4. Modelagem com painéis

Ao estabelecerem contato com este painel, seria muito produtivo que fosse solicitado aos alunos que construíssem seus próprios painéis, trabalhando, mais uma vez, a participação do aluno no processo de construção e não somente na resolução dos problemas.

Nessas modelagens, podemos solicitar que outros aspectos da matemática, como por exemplo, o de explorar outros formatos de painéis, diferentes das malhas dadas, como triângulos ou outros polígonos, modelos circulares e outros tipos. Trabalhando com esses novos modelos, podemos estudar como o fator geométrico do painel pode influenciar no processo de contagem.

Outra alternativa que possa estimular os alunos na confecção desses painéis seria a de construí-los em conjunto com uma maquete para uma determinada e específica atividade. Poderia essa atividade fazer parte de uma feira cultural ou de ciências, principalmente no que se refere ao consumo de energia elétrica.

Ao fazer uma maquete configurando uma casa e seus cômodos, poderia ser instalada, em cada cômodo, uma lâmpada diferente e, a partir disso, tornar a experiência mais próxima do cenário que a representa.

Nessa etapa de construção, trabalhar com a atividade de pensar uma forma de encaixar uma abordagem matemática, no aparelho que está construindo, realiza o papel metacognitivo de fazer o aluno repensar o conteúdo. Além disso, devemos considerar que sempre o professor tem a responsabilidade de desenvolver o sistema de ensino-aprendizagem, de forma a maximizar o desempenho dos alunos.

Com essa estratégia na aplicação de um ensino concreto, estaremos transferindo parte dessa responsabilidade ao aluno, dividindo com o professor a tarefa de atingir os objetivos almejados e, ao mesmo tempo, permitindo maior liberdade para o aluno nesse processo.

5. Jogo ou desafio

Ao explorar a alternativa do jogo ou desafio, poderíamos nos apoiar no recurso empírico de se relacionar com o painel e solicitar que, através das testagens, o aluno descubra qual prego corresponde a uma lâmpada associada.

Nessa modalidade, podemos lançar desafios que também estimulem o senso de competitividade entre os grupos, embora de uma forma mais positiva. Ao desafiá-los assim, podemos colocar a restrição de tempo, para que possam medir com que velocidade podem alcançar o resultado proposto.

Outro tipo de modalidade no âmbito do jogo seria o de distribuir um número de fios para cada aluno envolvido no jogo, e ter como objetivo que cada, em sua jogada, encaixasse um fio no painel, afim de que, ao final, as lâmpadas que interessem ao aluno fiquem acesas e as que não, se apaguem.

Para exemplificar essa modalidade de jogo, podemos tomar como referência nossa malha original (4x6), estabelecendo a seguinte conformidade de regras:

- São permitidos dois jogadores
- Cada jogador recebe 5 fios que podem ser de mesma cor . Por exemplo, o jogador 1 recebe 5 fios azuis e o jogador 2 recebe 5 fios vermelhos.
- A cada rodada, o jogador pode colocar um fio no painel.
- Após uma jogada de cada jogador, o painel é ligado, e desligado após isso, continuando as jogadas.

- Cada jogador elege uma lâmpada (exemplo: o jogador 1 elege a amarela e o jogador 2 elege a verde)
- Se, durante as rodadas, uma lâmpada acender 3 vezes, o jogador que elegeu aquela lâmpada vence)
- Após as 5 jogadas dos jogadores conta-se qual lâmpada acendeu mais vezes.

Nesse tipo de jogo, elementos essenciais como estratégia e perspectiva espacial ficam presentes nessa atividade. Claramente, novas regras como a quantidade de fios e lâmpadas podem ser inseridas para assim obter novas estratégias e estruturar novas conjunturas de pensamento.

Com a finalidade de colocar o elemento sorte no jogo, e de que as partidas tenham mais entusiasmo, pode-se acrescentar regras como: ao “acender a luz vermelha” o jogador 1 perde, ou ao “acender a luz azul” o jogador 2 é que perde. Isso permite, então, aos alunos que jogarem, elaborarem novas estratégias mais defensivas e não ter em foco somente suas jogadas mas também estar atento ao movimento do adversário.

Por isso, devemos ter em mente que ensinar matemática é também estimular o raciocínio lógico, atuar no desenvolvimento da criatividade e a capacidade de formular estratégias com diferentes tipos de problemas e desafios, promovendo assim maior domínio do conhecimento.

6. Interdisciplinaridade

Obviamente, a disciplina que melhor pode atender ao aspecto interdisciplinar nessa experiência seria a Física. Essa interação se dá ao estar anexado ao painel o imprescindível manejo dos circuitos elétricos.

Além de fazer uma abordagem simplesmente matemática quanto aos processos de contagens e medições, pode-se também, ao se aliar com o professor de Física, utilizar conceitos físicos referentes à eletricidade nesse processo.

Princípios fundamentais na Física que podem ser explorados em conjunto com a atividade no painel seriam: realizar cálculos da corrente no aparelho, bem como a DDP (Diferença de Potencial) e, além disso, avaliar os modelos de circuitos que podem ser construídos no painel, como circuitos em série ou paralelos.

Nesse tipo de interação, as sugestões que o professor de Física pode fornecer são fundamentais para o processo pedagógico de ensino. Outra possibilidade que pode ampliar nosso manancial de conteúdos seria estruturar as conexões entre os fios e as lâmpadas, de maneira que seja estruturado algum circuito nisso, até mesmo, uma ponte de Wheatstone, trabalhando assim aspectos pertencentes à Física.

CAPÍTULO 5

A balança de dois pratos

Neste capítulo sugerimos algumas aplicações que podem se apoiar na balança de dois pratos, material bem conhecido. Trata-se de uma balança convencional de dois pratos pendurados nos extremos de uma barra com centro apoiado, sem deslizar, em uma haste que é fixa em uma base de tal forma que os pratos vazios se mantém paralelos à base (Figuras 9 e 10).

Figura 9: Alguns tipos de balança

Complementando a balança, podem ser usados diversos materiais que representam os valores de comparação entre as massas. Com isso, objetos como moedas, pesos de latão e outros podem ser usados para representar as unidades e podemos usar objetos como tampas, sacos plásticos, isopor ou outro material de modo que sua massa seja desprezível para que oculte objetos e permita assim colaborar com o papel de uma incógnita numa sentença.

5.1. A balança de dois pratos no Ensino de Matemática

Ao fazermos análises em alguns livros didáticos, percebemos que a balança é amplamente usada para o entendimento das unidades de massa e no estudo sobre equações. Consequentemente, os demais conteúdos associados, tais como inequações e sistemas de equações também podem estar relacionados à balança.

Figura 10: A balança de dois pratos no ensino

No 6º ano, ao lidarmos com unidades de massa, podemos fazer um clássico experimento para que o aluno se depare com uma situação que contrasta com sua percepção visual. Tomamos dois recipientes idênticos, onde um deles está preenchido com água e o outro com óleo e colocamos um em cada prato da balança. Para o aluno do 6º ano, recém-iniciado no mundo científico, ver a balança apontar para o recipiente com água, como o mais pesado, sem dúvidas gera amplos questionamentos do ocorrido (Figura 11).

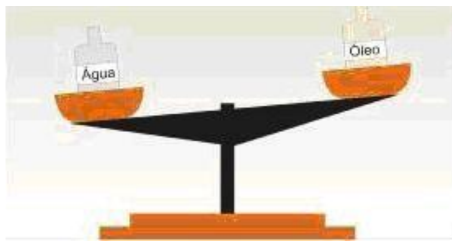


Figura 11: Experiência com massas

A partir daí, com o experimento realizado, podemos então concluir que, embora o volume de ambos seja o mesmo, a quantidade de matéria presente no recipiente com água é maior que a quantidade presente no óleo e seu recipiente.

Essa experiência simples auxilia na percepção do aluno de que é natural que haja uma medida para o fenômeno e, como qualquer medida, é comparativa dentro de parâmetros de referência e que também deve existir uma unidade de medida. Portanto, criamos a situação propícia para definir massa de um corpo, ou seja, a quantidade de matéria que um corpo possui. De forma equivalente, pode-se demonstrar que ao colocar recipientes com o mesmo volume de água, a balança permanece equilibrada, o que prova assim que ambas possuem a mesma massa.

Reparemos que, através desse experimento, podemos extrapolar, para alunos de séries mais avançadas (principalmente onde disciplinas como Física e Química fazem parte da sua grade curricular) explorando o conceito de densidade. Com isso se verifica de maneira prática que a densidade é definida como a razão entre a massa e o volume do corpo. Essa verificação tem então fundamento científico e experimental.

Essa constatação fica ainda mais clara quando misturamos a água ao óleo e observamos o óleo flutuar sobre a água, tornando assim a definição de densidade algo fundamental para explorar outros fenômenos. Embora essa ênfase tenha mais pertinência ao ramo disciplinar da física e da química, a avaliação e a definição matemática se fazem de grande importância e suporte para essas áreas da ciência. Ainda no âmbito das unidades de massa, pode-se apresentar atividades e discussões a respeito do quilograma como unidade adotada pelo Sistema Internacional de Unidades e fazer assim comparações de objetos adotando essa unidade.

Pode-se ainda fazer comparações com a balança usando o grama, que compreende a milésima parte do quilograma, bem como os múltiplos e submúltiplos do grama. Cabe ao professor discutir também de maneira a ampliar o conhecimento que a adoção do quilograma como a massa padrão se deve à massa de uma peça de platina que se encontra no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na cidade de Sèvres, na França. Tomando esse fato, pode-se instigar aos alunos a adotarem uma medida de massa como a unidade de massa e assim fazer comparações entre os objetos. Além de explorar a balança, somente ao âmbito da unidade de massas, pode ser, muito construtivo e estimulante, o professor apresentar exemplos do uso da balança pelo homem em algum tempo da História e suas serventias e adaptações por outras culturas.

Certamente, no 7º ano, temos outra direção por onde a figura da balança se faz presente no ensino da Matemática, o uso da “incógnita”, ou valor “desconhecido”. É muito comum nessa fase o aluno não se familiarizar com o uso de letras ou outros símbolos que não sejam números diante das quatro operações fundamentais.

É justamente nesse ponto que o uso da balança para ensinar equações pode ter seu ponto forte, fazendo com que seu uso já possa ser, por si só, uma reflexão sobre o que de fato é uma equação. Nessa primeira etapa, podemos usar objetos diversos de nossos conhecidos e colocar um ou mais objetos de massa desconhecida, distribuído entre os pratos de forma a estabelecer o equilíbrio entre eles.

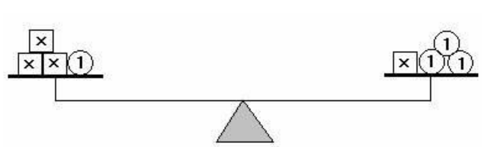
Ao visualizarem essa situação, o que se deve constatar é que a soma das massas de um prato deve ser a mesma que a soma do outro. Diante dessa constatação, já se pode referir ao prato da esquerda como 1º membro da equação e ao prato da direita como 2º membro. Com isso, começamos a armar uma sentença. Feito isso, colocamos de maneira escrita o que foi visualizado ou dialogar sobre igualdade e já construímos mentalmente o cenário do que vem a ser uma equação. Paralelo a isso podemos, então, formalmente, definir equação como uma sentença matemática que contém uma ou mais incógnitas e é expressa por uma igualdade.

Durante o processo, ao(s) valores desconhecidos atribuímos letra(s) (as incógnitas), que representem sua massa em questão. Assim, as expressões que representam os membros dessa equação serão mais facilmente compreendidas pelo do aluno. Montar a sentença matemática que simboliza o problema pode ser, sem dúvida, um ótimo exercício para assimilação e compreensão para a resolução de problemas posteriormente.

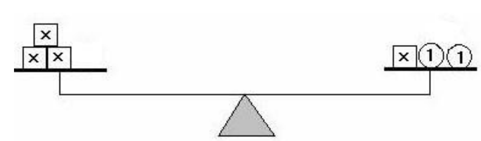
O segundo passo importante ao usar a balança é constatar e discorrer sobre o que significa uma solução de uma equação. Sabemos que uma solução vem a ser o valor que colocamos no lugar da incógnita e que transforma a equação numa sentença verdadeira.

Para isso, o uso experimental da balança pode ser um exemplo contundente para essa realidade. Ao lidar com o equilíbrio da balança, o professor pode substituir o corpo com massa desconhecida por objetos de massa conhecida e assim constatar quando a balança se desequilibra e quando ela se mantém equilibrada, para assim avaliar esse fenômeno nas sentenças matemáticas. Com esse tipo de comparação, pode-se constatar a unicidade da solução, pois estamos lidando com equações do 1º grau e ter, na sentença matemática, o reflexo do que ocorre nos pratos da balança.

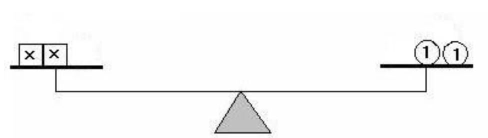
O terceiro passo, talvez o mais importante para o aluno no campo da álgebra, trata das operações elementares que podem ser realizadas nas equações. Para isso, o uso da balança mostra de fato que a alterar igualmente as massas dos pratos não desfaz sua igualdade, como no exemplo que segue (Figura 12)



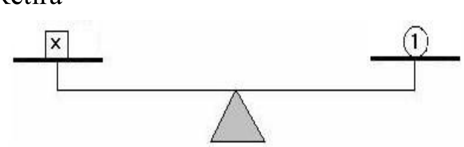
1º→ Retira-se uma unidade de cada prato.



2º→ Retira-se um valor desconhecido de cada prato.



3º→ Retira-se a metade do valor de cada prato.



4º → Solução : x = 1.

Figura 12: Resolução na balança

No decorrer dessa mostra com a balança, pode-se acrescentar massas iguais aos dois pratos, como também retirar, quando possível, para constatar que mesmo com um valor desconhecido, a propriedade de adição e subtração simultâneas nos dois membros prevalece a equivalência entre a primeira situação com a segunda. Vale lembrar que acrescentar ou retirar vale para qualquer medida. Portanto, tendo outros objetos de massa idêntica ao de massa desconhecida do problema, acrescentá-los igualmente entre os pratos ajuda a mostrar que as “incógnitas” representam números e, portanto, têm as mesmas propriedades.

O mesmo deve ocorrer no caso da multiplicação e da divisão: dobrar a mesma quantidade de objetos em cada prato, mantendo assim o equilíbrio. Novamente realizando as mesmas operações com as massas “desconhecidas”. Assim, traduzindo essas idéias para as operações elementares, teremos:

- Adicionar um mesmo número aos dois membros da equação.
- Multiplicar por um mesmo número, não nulo, os dois diferentes membros da equação.

Trabalhar conceitos abstratos primeiramente numa forma concreta faz com que o aluno tenha mais segurança e veja sentido naquilo que esteja aprendendo. Com esses três passos bem trabalhados, certamente o estudante adquire um aprofundamento nesses conceitos e torna a aprendizagem de futuros conteúdos pertinentes muito mais fácil.

Ao lidar com os fundamentos básicos, acompanhado da experiência concreta, a abordagem de conteúdos subsequentes se torna quase análogo e com um grau de assimilação mais receptível. Isso pode ocorrer ao trabalharmos com a inequação.

Inequação

Ao fazermos as exemplificações das sentenças nesse caso, podemos melhor apresentar o conceito da desigualdade. Obviamente, devemos observar que nos limitamos ao conjunto de números positivos, portanto essa amostragem visa somente atestar propriedades através de um exemplo concreto (Figura 13).

As operações realizadas nas equações são análogas às feitas na inequação, assim como o processo de isolamento do peso desconhecido. Entretanto, multiplicarmos por um negativo se torna uma limitação para esse tipo de exemplo, visto que isso sempre é necessário quando o coeficiente é negativo.

Esse tipo de caso tem que ser trabalhado posteriormente. O uso da balança fica limitado aos números positivos e toda a experiência com a balança nesse campo tem como finalidade contextualizar as propriedades e torná-las compreensíveis para o aluno.

Figura 13: Balança e a inequação

Sistema de equações do 1º grau

Aqui podemos introduzir novos conceitos e, com a ajuda da balança, podemos mostrar, através de exemplos, que buscamos realizar operações entre sentenças matemáticas que possuem a mesma solução. Mas, para isso, é necessário que apresentemos, primeiramente, exemplos de equações com duas incógnitas e com isso verificar que não há uma solução nesse caso. Podemos colocar num dos pratos dois pesos de massa desconhecida e no outro um de massa conhecida. E, através de substituições de cada massa desconhecida por um valor, de maneira que a soma dessas massas de fato resulte no valor da massa do outro prato, mostramos que há diversos pares de possibilidades para as massas desconhecidas, o que seria o caso de um parâmetro livre.

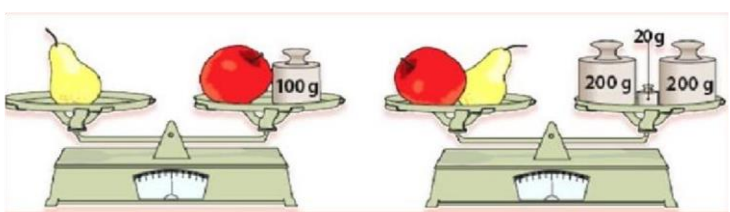


Figura 14: Balança e sistema

Aqui fica até pertinente o uso dos pares ordenados e até mesmo mostrar uma relação de interdependência entre as massas na questão. Nesse caso, podemos exemplificar que, ao escolhermos um valor para uma das massas desconhecidas, a outra massa desconhecida fica univocamente determinada, realizando assim o mesmo processo de resolução de uma equação (Figura 14).

O passo inicial para a resolução de sistemas de equações é fazer com que esse pensamento de "infinitas soluções" visto anteriormente seja analisado criticamente. Ao fazer as duas pesagens, mostrando assim as duas equações, o aluno deve assimilar que cada sentença ainda assim possui particularmente infinitas soluções, Entretanto, pelos objetos colocados nas duas pesagens, mesmo que tenham suas massas "desconhecidas", possuem um valor único para as duas sentenças. Sendo assim, só há uma solução para satisfazer essa sentença.

Outro passo que se torna muito importante será o de mostrar ao aluno os métodos de resolução de sistemas. Por exemplo, tomemos na balança, dois pesos desconhecidos, x e y, tais que juntos num prato, equivalem a 25g. E também dois pesos x com um peso y que equivalem a 35g. Sendo assim, x+y= 25 e 2x+y= 35 compõem o nosso sistema.

- Método de Substituição

1º passo: Escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas no 1º membro.

Na equação: $x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x$.

Na balança: deixamos o peso y sozinho no primeiro prato e discutimos que devemos retirar o peso de x dos 25g no 2º prato, para que continue equilibrada.

2º passo: Na outra equação, substituímos a incógnita isolada (no 1º passo) pela expressão obtida e resolvemos a equação resultante.

Na equação: substituamos y por (25-x) e resolvemos: $2x+y= 35 \rightarrow 2x+(25-x) = 35 \rightarrow 2x+25 - x = 35 \rightarrow 2x - x = 35 - 25 \rightarrow x=10$.

Na balança: na segunda pesagem (2x+y= 35), no primeiro prato, tiramos o peso y, adicionamos 25g e retiramos um peso x. Assim, realizamos na prática a substituição de y por 25-x e, dessa forma, teremos que o peso x adicionado de 25g equivale a 35g. Ao retirarmos 25g de cada prato, completamos a resolução do 2º passo, achando o valor do peso x, sendo 10g.

3º passo: Calculamos a outra incógnita na expressão obtida no 1º passo e damos a resposta.

Na equação: calculamos y em: $y= 25 - x \rightarrow y= 25 - 10 \rightarrow y=15$.

Na balança: voltamos na situação da balança obtida no 1º passo, onde y está sozinho no 1º prato e assim, dos 25g do outro prato, fazemos o desconto de 10g, que é o valor de x. Sendo assim, vamos obter que o valor o do peso y é 15g.

 Método de Comparação

1º passo: Escolhemos uma incógnita e a isolamos no primeiro membro de cada equação.

Na equação: vamos isolar y nas duas equações:

$x+y = 25 \rightarrow y= 25 - x$.

$2x+y = 35 \rightarrow y= 35 - 2x$.

Na balança: deixamos o y sozinho no 1º prato e discutimos que devemos retirar do 2º prato as medidas de x que foram retiradas do 1º prato.

2º passo: Igualamos as duas expressões obtidas para a mesma incógnita e resolvemos a equação resultante.

Na equação: Igualamos as duas expressões obtidas para y e resolvemos: $25-x= 35-2x \rightarrow -x+2x= 35-25 \rightarrow x=10$.

Na balança: Como visto no 1º passo, as situações do 2º prato em ambas as equações são equivalentes, pois nelas o 1º prato só possui o peso y. Para resolvermos usamos a propriedade elementar da adição e verificamos que, ao adicionarmos dois pesos x em ambas os pratos e retiramos 25g de ambos, o equilíbrio não altera. Logo, na situação final, temos um peso x num prato e 10g no outro. Sendo assim, o peso x vale 10g.

3º passo: Calculamos a outra incógnita numa das expressões obtidas no 1º passo e damos a resposta.

Na equação: $y= 25-x \rightarrow y= 25-10 \rightarrow y=15$.

Na balança: análogo ao método de substituição, terminamos retomando a pesagem em que y vale 25g menos a massa de x. Como x vale 10g, y vale 15g.

 Método de Adição

1º passo: Em alguns casos, preparamos o sistema de modo que os coeficientes de uma das incógnitas fiquem simétricos.

Na equação: $x+y= 25$ multiplicando a equação por $(-1) \rightarrow -x-y = -25$.

Na balança: simplesmente vamos realizar a operação elementar da subtração, usando os valores da equação $x+y= 25$, onde os valores de cada prato são equivalentes.

2º passo: Somamos membro a membro as duas equações.

Na equação: $2x+y= 35 + (-x-y= -25) \rightarrow x=10$.

Na balança: na sentença em que dois pesos de x mais um de y valem juntos 35g, no prato das incógnitas retiramos um peso de cada e no prato dos valores conhecidos retiramos 25g. Assim, restará um peso x no 1º prato e 10g no outro prato. Sendo assim, x vale 10g.

3º passo: Calculamos a outra incógnita, repetindo assim os mesmos procedimentos já vistos nos métodos anteriores.

Muitas são as atividades envolvendo esses conteúdos que podem ser abordados com o uso da balança. Vale lembrar que cabe ao professor mediar esse processo. Portanto, assim como os outros objetos estudados nesse trabalho, devemos estar atentos aos tipos de abordagens incorporadas e as maneiras convenientes de se usar a balança em sala de aula. O ideal é que os alunos participem dos experimentos aprendendo a manipular a balança e consequentemente, as operações para solucionar os problemas propostos.

5.2. Maneiras de usar a balança

Nesse capítulo, ao avaliarmos a balança e seu papel no ensino, onde foram destacadas anteriormente, como é trabalhada dentro de alguns conteúdos, fazendo a experiência com os objetos em sala, vemos a seguir as diversas maneiras que o professor pode abordar pedagogicamente esses conteúdos.

Recurso motivacional

O professor pode levar os materiais necessários em conjunto com a balança e abordar, de maneira expositiva, experiências concretas, conduzindo o aluno através da resolução de problemas, fazendo-o um construtor desse conhecimento.

Essa motivação, sendo dada de maneira passiva, pode ser positiva através das indagações ao docente. Uma boa sugestão, como exemplo, pode ser o uso do conteúdo de unidades de medidas e do caso de comparação entre a água e o óleo, onde foi constatado que o peso do recipiente com água pode ser superior ao do recipiente com óleo, tendo ambos o mesmo volume de líquido.

Assumindo um caráter mais ativo, o professor, ao colocar problemas, como nas equações do 1º grau, pode fazer com que o aluno comande a experiência e, com as devidas orientações e propriedades operatórias elementares, assumam o papel do explorador e consiga encontrar as soluções dos problemas abordados. Nesse mesmo campo de atuação do aluno, o professor pode sugerir que os alunos por si só mantenham suas equações na balança e peçam que um colega tente resolvê-la, realizando as operações concretas na balança.

Muitas vezes, motivar o aluno é colocá-lo numa postura mais crítica, onde sua relação com o problema assuma outros pontos de vista. Ao ser um criador de novos problemas, os próprios mecanismos de autorresolução vão sendo incorporados ao seu raciocínio, bem similar ao que vemos no clássico dispositivo da prova real.

Essas recomendações, além de não serem únicas, também se estendem aos outros conteúdos onde a balança está inserida, tais como inequações e sistemas de equações.

Recurso empírico

Ao colocarmos o aluno em livre interação com o objeto, para que ele próprio retire dele as conclusões e conhecimentos necessários, o professor pode explorar o aspecto de resoluções de problemas. Há uma disponibilidade grande de questões e provas de seleção e livros que o professor pode adaptá-las ao contexto real e concreto, com seus devidos materiais, respeitando os enunciados, estruturas dos problemas e orientar o aluno, de forma empírica, na determinação da solução. Segue um exemplo:

(ENEM/98-99) "Um armazém recebe sacos de açúcar de 24kg para que sejam empacotados em embalagens menores, O único objeto disponível para a pesagem é uma balança de dois pratos, sem os pesos metálicos.

1) Realizando uma única pesagem, é possível montar pacotes de:

a) 3kg b) 4kg c) 6kg d) 8kg e) 12kg

2) Realizando exatamente duas pesagens, os pacotes que podem ser feitos são os de: a)
3kg e 6kg

b) 3kg, 6kg e 12kg

c) 6kg, 12kg e 18kg

d) 4kg e 8kg

e) 4kg, 6kg e 8kg”

Note que nesse caso, trata-se de um assunto pertinente à aritmética e contextualizada à nossa realidade trabalhista. Abordando de maneira empírica, pode-se trazer a balança e utilizar um material, tal como açúcar, areia ou outros e deixar claro o objetivo dessas questões.

O que vai interessar nessa abordagem não é somente a resposta, mas os mecanismos mentais empregados pelos alunos ao manipularem a balança e averiguarem os caminhos encontrados para a resposta.

Além de ser muito usual, o trabalhador ter que usar raciocínios similares, no caso da escassez de recursos necessários ao se trabalhar da experiência concreta para o percurso mental da resolução, pode-se dar crédito ao olhar dos alunos sobre todo o processo lógico e matemático.

De fato, temos que alcançar em suas consciências que o pensar matemático tem a ver com a realidade, com problemas reais, normais e cotidianos, principalmente em se tratando do campo profissional. Essa eurística embutida nesses tipos de problemas e nas suas resoluções concretas e abstratas vai acompanhar o aluno para outras situações além do espaço escolar.

Recurso avaliativo

Na ideia de avaliação e mensuração do conhecimento, devemos exigir dos alunos registros das experiências realizadas com a balança.

Para isso, podemos realizar o processo de modelagem matemática, onde construímos o contexto com a balança, seja equação, inequação ou sistema de equações, bem como outros conteúdos e exigir que sejam redigidas as devidas sentenças, a partir do que é mostrado no instrumento.

Podemos também pedir para montarem as equações e discutir aspectos teóricos como, por exemplo, o sinal negativo da incógnita e seu papel no contexto concreto. Por exemplo, como montar na balança uma equação do tipo $2x-3y+z= 5$?

Repare que o aluno, ao se deparar com esse tipo de pergunta, visualiza cada membro da equação como cada prato da balança. Entretanto, não é possível “instalar” um valor de medida sendo negativo. Portanto, fazendo uso das operações elementares, o indivíduo pode obter na forma escrita, uma sentença equivalente, onde os coeficientes sejam todos positivos.

Note que, no caso da equação anterior, $2x-3y+y= 5$, basta adicionar 3 pesos “y” em cada prato que obtemos a equação $2x+z= 5+3y$, sendo esta possível de se montar nos devidos pratos.

De uma forma geral, o professor pode montar questionários ou provas com perguntas referentes aos conteúdos abordados na experiência e assim quantificar o desempenho do aluno.

Seguem abaixo algumas das perguntas realizadas em cada conteúdo.

- Experiências com unidades de massa
  - Antes de pesar a água e óleo, perguntar qual deles tem “mais”, para que o aluno de fato associe às alturas que os líquidos estão marcados nos recipientes e perceba que o critério utilizado é o de massa.
  - Após a pesagem, perguntar o motivo do desequilíbrio da balança.
  - Para alunos de séries mais avançadas, perguntar qual a relação entre massa e volume.
  - Fazer perguntas sobre valores, com possíveis pesagens, que envolvam múltiplos e submúltiplos do grama.
  - Perguntas sobre os processos de conversão de unidades de massa.
- Experiências com equações
  - Perguntas sobre a incógnita e sua função num contexto real.
  - Perguntar qual a equação que representa a situação explorada.
  - Perguntas sobre o significado da raiz na equação e no que se reflete no experimento.
  - Quando possui mais de uma incógnita, perguntas sobre as soluções que eles possam imaginar.
  - Se possível, discutir a finitude ou não das soluções, bem com as restrições dos recursos da atividade.

- Perguntar sobre a situação do coeficiente da incógnita ser negativo. ○ Perguntar sobre as vantagens de se utilizar a balança na aprendizagem.
- Perguntar sobre as operações elementares.
- Associar que, nessa experiência, não podemos admitir soluções negativas.

• Experiências com Inequações ○ Perguntar sobre a multiplicidade de valores que a incógnita pode assumir.

- Associar os sinais "<" e ">" com as atividades concretas relacionando peso.
- Discutir a validade das operações elementares no contexto.
- Trabalhar com as soluções, quando houver mais de uma incógnita.
- No caso, discutir questões como proporcionalidade, direta e inversa, entre incógnitas, estando no mesmo prato ou em pratos distintos.
- Discutir a aplicabilidade da operação de multiplicar a inequação por (-1) e sua consequência no experimento.

• Experiências com sistemas de equações

○ Explorar o contexto das incógnitas nas equações apresentadas.
○ Explorar soluções particulares de cada equação e constatar a solução comum.
○ Perguntar sobre os métodos de resolução de sistemas e suas aplicações na balança.
○ Questionar sobre os raciocínios particulares dos alunos no processo de resolução.

- Perguntar sobre a facilidade ou dificuldade de resolver o problema diretamente na balança.
- Em nível mais avançado, questionar com dados sobre a classificação do sistema.
- Discutir sobre sistemas equivalentes, mediante as operações realizadas.
- Outros.

Recurso transcendente

Diferentemente dos outros materiais, a balança é um instrumento para medir, quantificar e comparar. Logo há uma série de aplicações que percorrem outros conteúdos da matemática e que podem estar em sintonia com outras áreas da ciência, tais como ocorre em Física e Química.

O objetivo maior nessa abordagem com a balança é mostrar que esse instrumento é objeto de resolução de problemas, ou seja, através das funções e características que lhes são pertinentes, muitos problemas, como muitas idéias diferentes, podem ser resolvidos com seu auxílio.

Abaixo, seguem algumas maneiras de se abordar essa transcendência.

1) Sistema de Inequação do 1º grau

Vimos as diversas aplicações em equações, inequações e sistemas de equações. Agora podemos estender esses conceitos aos sistemas de inequações do 1º grau que são formados por duas ou mais inequações, trabalhando com uma incógnita em cada inequação.

O que torna essa prática interessante é o fato do aluno buscar um conjunto solução, ao invés de uma única solução. Isso faz com que, no experimento, ao montarmos as inequações na balança, o valor desconhecido não precisa ser o mesmo, bastando tomar valores dentro do conjunto solução.

Outro aspecto muito bom seria se o aluno detalhar os procedimentos de resolução das inequações durante as pesagens. Mais uma vez, temos que estar atentos ao fato de o conjunto solução não conter números negativos, já que a quantidade de massa é um valor não negativo.

2) Razões e Proporções

Sem dúvidas, este é um tópico em que a balança se distingue dos outros materiais, já que uma de suas finalidades como instrumento, é o de estabelecer comparações entre massas de objetos.

No campo das razões, podemos fazer comparações entre objetos na balança e perguntar sobre as razões entre as massas dos objetos. Observe o exemplo (Figura 15)

“ Nessa figura, objetos iguais possuem pesos iguais.

Quantas xícaras sem pires, são necessárias para equilibrar uma garrafa?”

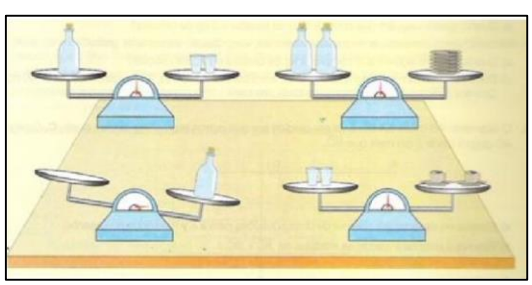


Figura 15: Problema com razões

Nesse tipo de questão será crucial para o aluno observar as equivalências de massas obtidas no objeto e, com isso, manipular os objetos sobre os pratos e concluir quantas xícaras devem ocupar o prato da balança que está vazio.

Já, no campo das proporções, podemos usar clássicas atividades, como colocar um recipiente cilíndrico num prato, marcar diferentes alturas no recipiente e ao encher com água, calibrar a balança, aumentar os pesos colocados no outro prato e assim registrar que o peso do recipiente é diretamente proporcional à altura da água no recipiente.

Já, no caso de inversamente proporcional, basta tornar o caso da equação com duas incógnitas, onde as duas massas desconhecidas estejam no mesmo prato e no outro tenha um valor de massa conhecido. Ao ter que manipular os pesos desconhecidos, será analisado justamente que, ao aumentarmos a medida em um deles, o outro deverá ser reduzido para que o equilíbrio se mantenha.

3) O Princípio de Cavalieri

Ao estudarmos sobre os volumes dos prismas, temos que considerar o que o princípio de Cavalieri afirma: “Dados dois sólidos apoiados num mesmo plano A, se todo plano paralelo a A determinar nos sólidos seções transversais equivalentes, então tais sólidos terão o mesmo volume.”

Essa é uma grande oportunidade de constatar-se esse princípio concretamente. Basta que se tenha recipientes do mesmo material nas condições do princípio (de preferência transparentes) e enchê-los com água até uma mesma altura.

Fica fácil observar que a água terá sempre a mesma densidade e o mesmo deverá ocorrer com o material do recipiente. Com a balança apontando que ambos possuem a mesma quantidade de massa, será bem fácil concluir-se que o volume de ambos também devem ser os mesmos.

4) Problemas lógicos.

(PROFMAT - Problema 1.8- apostila *Resolução de Problemas*) “Numa cesta encontram-se 9 moedas idênticas, sendo que 8 delas têm o mesmo peso e uma moeda é mais leve que as demais.

Usando duas vezes uma balança de dois pratos, como encontrar a moeda mais leve?”

Nas etapas da resolução é interessante destacar a manipulação desses objetos na balança, como real constatação do pensamento lógico.

Solução: A idéia é dividir as moedas em três grupos, com 3 moedas cada grupo. Chamamos esses grupos de A, B e C, colocando na balança os grupos A e , deixando o grupo C fora. Ocorrem duas possibilidades:

1) Os pratos ficam equilibrados;
2) Os pratos ficam desequilibrados;

No caso de (A), temos que os grupos A e B têm o mesmo peso, logo a moeda mais leve deve estar no grupo C. No caso de (B), um dos grupos ficou mais leve, o que significa que a moeda está nesse grupo. Nos dois casos, com uma pesagem mais é possível descobrir em qual grupo essa moeda está. Digamos que seja o grupo A. Para achar a moeda mais leve, procedemos de modo análogo: separamos as três moedas e pesamos na balança somente duas moedas, deixando uma de fora. Se as moedas ficaram equilibradas, então a que ficou fora é a moeda mais leve e caso ocorra o desequilíbrio, a moeda estará no prato que indicou ter menor peso. No final, usamos a balança exatamente duas vezes.

Outros problemas similares:

(PROFMAT, apostila *Resolução de Problemas*, pág. 28, nº 13) “Num saco encontram-se 64 moedas leves e 64 moedas pesadas. É possível separar duas moedas de pesos diferentes com 7 pesagens?”

(Gelson Iezzi, 9º ano, página 313, desafio) “Em um grupo de 12 bolinhas de mesmo tamanho e cor, 11 bolinhas tem o mesmo peso e uma é mais pesada que as outras. Como se pode descobrir qual bolinha é a mais pesada, em três etapas, usando uma balança de dois pratos?”

5) Jogo

Um tipo de jogo muito interessante que pode cativar os alunos no aspecto visual e intuitivo sobre a medida de massa seria o de “equilibrar a balança”.

Esse jogo pode ser encontrado em *software*. Consiste em estipular valores, de maneira não numérica, mas visual, de uma certa massa para que a balança fique equilibrada. Uma forma muito simples de se adaptar esse jogo do *software* para a vida real seria a de colocar copos descartáveis e sem medidas para que os alunos colocassem água em seu interior e o pusesse nos pratos da balança de forma que se equilibrasse com a massa do outro recipiente.

Além de toda a percepção exigida, o professor pode estipular regras como o número de tentativas e critérios para melhor pontuação, como menor número de tentativas ou maior proximidade de equilíbrio.

Outras variedades podem ser feitas com o aumento do grau de dificuldade nas partidas exigindo maior concentração, raciocínio e abstração, pertinentes ao estudo das massas.

6) Interdisciplinaridade

Ao se trabalhar questões relacionadas às massas na balança, relacionando as unidades de massa, como o grama e seus múltiplos e submúltiplos, torna-se muito oportuno, para o professor de Física ou de Química, fazer explorações nas diversas realidades que são trabalhadas em seus devidos conteúdos. Citamos alguns exemplos

Uma boa adaptação para colaborar com o Princípio de Centro de Gravidade e da Alavanca, leva a conceitos tão importantes que podem trazer grandes considerações ao nosso estudo.

Expor primeiramente o conceito de momento binário, onde o momento é definido pelo produto de força pela distância. Por isso, ao verificarmos as grandezas físicas, entendemos por que medimos as massas na balança de pratos convencional. Como as massas estão equidistantes do centro de gravidade, a resultante dos momentos será nula (equilíbrio) quando as forças aplicadas em cada prato forem idênticas.

Seria interessante que, nessa abordagem interdisciplinar, o professor de Física conseguisse apresentar balanças com seus braços de tamanhos distintos, para estudar na Física, o conceito de momento e alavanca e, na Matemática princípios pertinentes à proporcionalidade. Uma questão que poderia ilustrar o que foi dito acima:

(Ramalho. *Os Fundamentos da Física,* pag 431, T.379)

A figura representa uma régua homogênea com vários furos equidistantes entre si, suspensos por um eixo que passa pelo ponto central O (Figura 16).

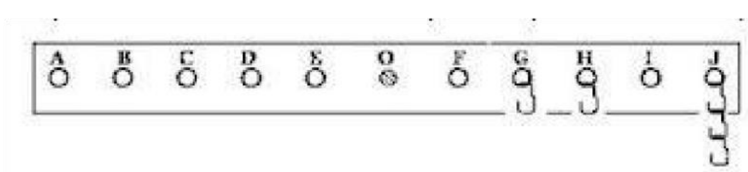


Figura 16: Régua homogênea

Colocam-se cinco ganchos idênticos, de peso P cada um, nos furos G, H e J na seguinte ordem: 1 em G, 1 em H e 3 em J. Para equilibrar a régua colocam-se outros cinco ganchos, idênticos aos já usados, num único furo, qual dos furos usaremos?

a) A b) B c) C d) D e) E

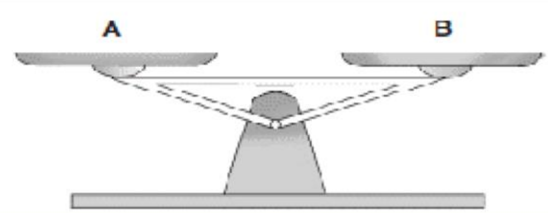
Resposta: opção B

Se, nessa abordagem, o professor apresentar a régua com os ganchos citados, essa será uma ótima atividade para que os alunos trabalhem com as duas disciplinas ao mesmo tempo.

A utilização de produtos simples, como réguas e clips para instrumentos de uma experiência como a citada, incentiva também a criatividade dos alunos. Já, na disciplina de Química, em sintonia com a análise entre massas, essa pode ser a oportunidade de averiguar alguns fenômenos e estudá-los sob a ótica da balança. Alguns processos como combustão em materiais podem alterar a massa de certos objetos. Nisso, a balança de dois pratos pode servir de instrumento para esse tipo de experiência.

(Usberco, Química, Volume Único, pág. 246, nº2)

(FUVEST-SP) "Os pratos A e B de uma balança (Figura 17) foram equilibrados com um pedaço de papel em cada prato e efetuou-se a combustão apenas no material contido no prato A. Esse procedimento foi repetido com a palha de aço em lugar de papel. Após cada combustão, observou-se:



	Com papel	Com palha de aço
a)	**A** e **B** no mesmo nível	**A** e **B** no mesmo nível
b)	**A** abaixo de **B**	**A** abaixo de **B**
c)	**A** acima de **B**	**A** acima de **B**
d)	**A** acima de **B**	**A** abaixo de **B**
e)	**A** abaixo de **B**	**A** e **B** no mesmo nível

Figura 17: Balança e a combustão Assinale a observação correta.”

Resposta : opção D

Integrando conhecimentos das áreas das ciências, podemos proporcionar ao aluno a aplicação e a relação da questão abordada em sala com o a vida real. Toda experiência nesse sentido vale a pena ser realizada.

CAPÍTULO 6

Objetos para o Ensino da Geometria

Neste capítulo, diferentemente do que foi feito nos três que o antecedem, não nos atemos a apenas um material. Iniciamos discorrendo um pouco sobre a abordagem da geometria no ensino básico; selecionamos alguns produtos disponíveis no mercado, alguns experimentos e finalizamos com comentários sobre os recursos desses materiais em sala de aula.

6.1. Investigações no Campo da Geometria

Na matemática escolar, a geometria se apresenta como uma área propícia à realização de atividades exploratórias e de caráter investigativo. Na visão da matemática moderna, a geometria ocupa uma posição muito secundária no currículo escolar onde, até mesmo numa abordagem formal, vemos a álgebra linear como privilegiada em relação a construções geométricas.

Vemos, cada vez mais, a importância prática da Geometria se reduzir ao Teorema de Pitágoras e a umas fórmulas para cálculos de áreas e volumes, fazendo assim com que a intuição e a visualização desempenhem um papel menos significativo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo Hans Freudenthal (1973), a geometria consiste em “compreender o espaço”, onde a criança ou o indivíduo “deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor”.

Na visão desse autor, a geometria é vista em toda a matemática como uma parte privilegiada, pois dela decorre a matematização da realidade e da realização de descobertas. Além disso, sua maior riqueza está relacionada a dois aspectos aparentemente contraditórios, mas que se completam:

- As descobertas geométricas, quando feitas “com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes”.
- Salientar a necessidade de explicação lógica das suas conclusões.

Nessas duas “faces da mesma moeda”, Freudenthal (1973) mostra que a geometria pode fazer os alunos sentirem “a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito”.

Fazendo-se fortemente o uso da intuição e da visualização, recorrendo naturalmente à manipulação de matérias, a geometria abre portas para a realização de descobertas e para a resolução de problemas em diversos níveis escolares.

Há um imenso repertório de atividades para escolher tarefas, de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas em sala de aula, sem necessidade de uma grande quantidade de pré-conhecimentos e pré-requisitos, evitando-se dificultar uma visão matemática sempre baseada em formulismos e receitas.

Seguem abaixo alguns tópicos, nos quais podemos perceber a vasta riqueza e variedade presentes na geometria, valorizando assim sua maior importância e participação no currículo escolar e no ensino de Matemática.

- O contato com uma grande variedade de objetos e situações. Trabalha-se no plano ou no espaço, com figuras planas ou com poliedros, por exemplo, descobrindo e explorando um grande número de propriedades e conexões. A relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na geometria inúmeros exemplos e concretizações.
- Fonte de problemas de vários tipos:
    - Visualização e representação; ○ Construção e lugares geométricos; ○ Envolvendo transformações geométricas; ○ Com ideias de forma e dimensão; ○ Em conexão com outros domínios da matemática, tais como a álgebra, os números e a combinatória;
    - Em processos de "organização local" da matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades;
- Atividades investigativas. Estas conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com aspectos relacionados à natureza essencial da própria Matemática. Entre elas:
    - Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutálas, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações;
    - Discutir os papéis das definições e avaliar as consequências de se adotar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática.
    - Tomar conhecimento nos exemplos da História e na evolução da Matemática.

6.2. Alguns materiais utilizados no ensino de Geometria

Muitas são as oportunidades de se utilizar materiais para ensinar conteúdos pertinentes à área de Geometria. Analisamos o percurso da Geometria na vida escolar do aluno e assim discursar sobre as possíveis atividades que podem ser desenvolvidas, bem como os tipos de abordagens pedagógicas.

No início da geometria escolar, muito é enfatizado na apresentação de figuras geométricas, noções relacionadas a comprimento, área e volume ocorrendo no 6º ano. Já no 7º ano, a geometria se desenvolve em duas partes: uma relacionada aos ângulos e retas e outra relacionada a áreas. A parte de ângulos e retas é aprofundada, com classificações e interligação com a álgebra. Na parte pertinente ao estudo das áreas, é retomado o assunto visto no 6º ano, porém apresentando maneiras lógicas de calcular áreas de figuras como paralelogramo, triângulo, losango e trapézio.

No 8º ano, além de se buscar maior aprofundamento nos conteúdos vistos no ano anterior, se inserem conceitos de maior relevância, tais como congruência. Também é vista a importância das posições entre entes geométricos, tais como as relações entre retas e circunferências.

No 9º ano temos como ênfase a semelhança de triângulos, como consequência do Teorema de Talles e dos casos de semelhança de triângulos obtemos as relações métricas no triângulo retângulo, destacando o Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

No ensino médio, a geometria se apresenta de maneira mais ramificada, sendo distribuída ao longo dos anos em alguns blocos como: Geometria plana, trigonometria, geometria espacial de posição, geometria espacial métrica e a Geometria analítica. No que se refere à parte da geometria plana, temos uma abordagem que resgata alguns princípios do Ensino Fundamental, tais como a semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, polígonos regulares inscritos na circunferência e áreas de superfície plana.

Na parte que confere a trigonometria são abordados aspectos pertinentes ao ensino fundamental como a trigonometria no triângulo retângulo. Com o auxílio dos conceitos trigonométricos básicos, esse bloco avança para conceitos como funções circulares, relações trigonométricas, transformações trigonométricas e a resolução em triângulos quaisquer.

A geometria espacial de posição é o bloco que vai expandir os conceitos antes vistos no plano para o espaço. Com isso, essa parte conta com as posições relativas entre retas e planos, assim como os aspectos de paralelismo e perpendicularidade.

A geometria espacial métrica abrange o estudo das medidas das figuras no espaço, abordando os poliedros, os prismas, as pirâmides, os cilindros, os cones e a esfera.

Por último, na geometria analítica, temos o casamento entre a álgebra e a geometria, onde são definidas noções da circunferência, suas particularidades e relações, e o estudo das cônicas, sendo elas a parábola, a elipse e a hipérbole.

Neste capítulo serão apresentados alguns objetos que podem ser usados para auxiliar e motivar o ensino de Geometria. Entretanto, por ser muito vasto esse campo e pela limitação da própria pesquisa, não podemos atingir todos os tópicos do ensino básico como foi citado. Seguem abaixo os objetos, suas respectivas funcionalidades e problemas relacionados:

- Tangran: Também conhecido como tábua das sete sabedorias. É um quebra-cabeça oriental formado por sete peças, sendo elas: 2 triângulos grandes iguais; 1 triângulo médio; 2 triângulos pequenos iguais; 1 quadrado; 1 paralelogramo.

Todas essas peças, quando juntos originalmente, formam um quadrado.

Dentre suas principais finalidades está o estudo das áreas, onde podemos usar uma das peças como unidade de medida, por exemplo o triângulo pequeno, e com ele medir a área de outras figuras do quebra-cabeça. Outra grande utilidade está na parte criativa, onde os alunos podem com essas 7 peças formar outras figuras conhecidas.

Os materiais que podem ser usados nas atividades envolvendo o Tangram (Figura 18) são diversos. Porém, os mais comuns são papéis ou cartolina. Existem, além disso, outros modelos feitos de madeira.

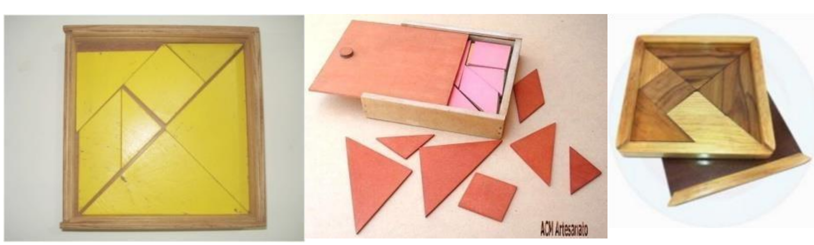


Figura 18: Modelos de tangram

Com o papel, podemos também adotar a estratégia de montar o Tangram, onde a riqueza desse recurso permite desenvolver alguns conceitos, elementos e propriedades geométricas de forma experimental, como o método de dobraduras.

- Geoplano

Na parte da geometria plana, certamente esse é um dos materiais pedagógicos que mais podem explorar propriedades e conceitos nessa parte do conteúdo matemático. Podendo ser feito com materiais usuais como uma tábua de madeira e pregos, ele consiste numa estrutura que visa a reproduzir um plano cartesiano, ou parte dele representado por uma malha (Figura 19).

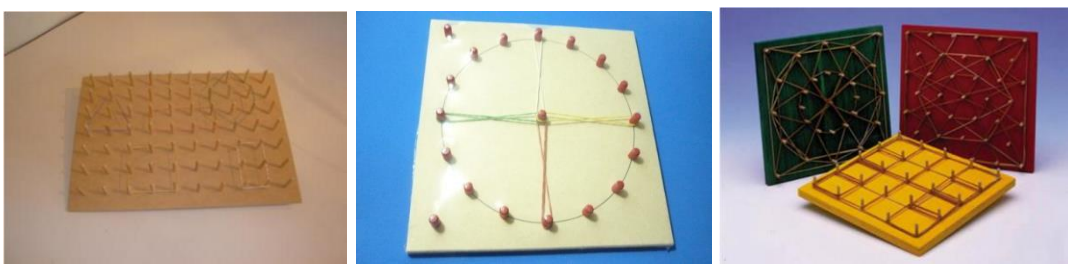


Figura 19: Modelos de geoplanos

Certamente existem muitos geoplanos com formatos distintos e com outras finalidades geométricas. Entretanto, vamos nos focar no geoplano convencional que possui a forma quadrada.

Das opções que podem ser usadas para esse material, o que é mais comum e produtiva, é de usar elásticos ou barbantes para formar figuras planas sobre ele. Esse material foi criado por Caleb Gattegno que foi um professor do Instituto de Educação da Universidade de Londres.

Uma das mais importantes aplicações desse material que podemos destacar é a empregada por grupos de educadores no ensino de matemática para deficientes visuais. Ele se mostra como uma poderosa ferramenta para executar essa tarefa que, além de proporcionar uma melhor compreensão, promove a inclusão social dentro da esfera de ensino.

- Palitometria

Na geometria, temos a oportunidade de utilizar objetos simples para caracterizar um problema. Seguem abaixo, alguns problemas geométricos na parte plana, que fazem uso de palitos:

(Problema 1- Iezzi, 7º ano, p. 158) “Mudando de posição 3 palitos de fósforo, forme uma figura com 5 quadrados de 1 palito de lado.”

São 20 palitos. Para formar 5 quadrados de 1 palito de lado, cada palito deve participar de um só quadrado (Figura 20).

Posição inicial Solução

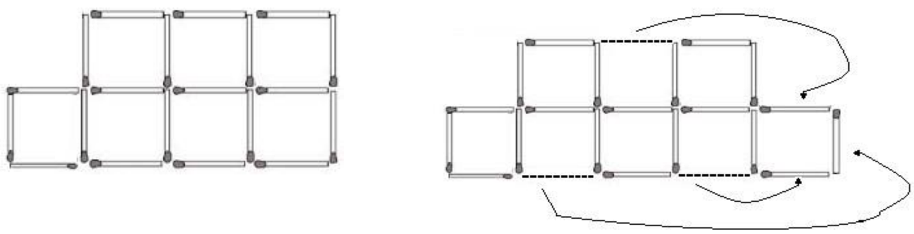


Figura 20: Palitos

(Problema 2- Iezzi, 8º ano, p. 79) “Tirando o lixo da pá. Com apenas dois movimentos, ou seja, mudar somente 2 palitos, devemos formar a pá novamente, só de que de maneira que o lixo não esteja mais nela.”

Solução: basta deslizar um palito e mudar um outro completamente, como mostra a Figura 21.

Posição inicial Solução

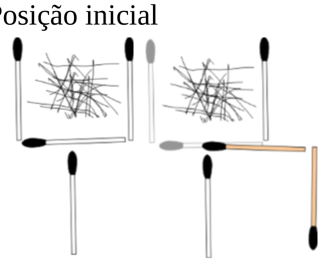


Figura 21: Questão da pá de lixo

(Problema 3- Iezzi, 6º ano, p. 14) “Números poligonais. São aqueles que correspondem à quantidade de vértices de polígonos congruentes que sobrepostos formam polígonos da mesma espécie proporcionais. Para melhor compreensão, vejamos exemplos: os números triangulares

(triângulos equiláteros –Figura 22) e os números quadrangulares (Figura 23).

Há ainda os números pentagonais, hexagonais e assim por diante. Essa é uma atividade em que podemos facilmente explorar muitos aspectos da Matemática, como reconhecer o padrão em cada tipo de sequência, modelar algebricamente a expressão que associa o número de palitos com a ordem das figuras.

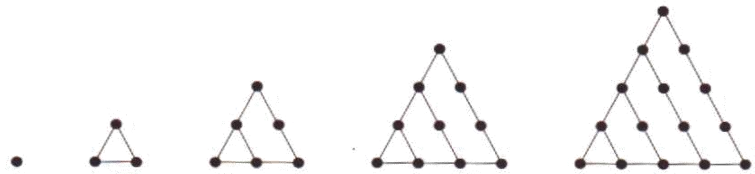


Figura 22: Números triangulares

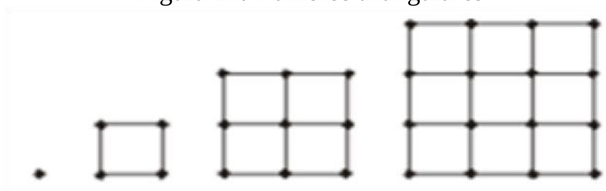


Figura 23: Números quadrangulares

Certamente, trabalhar com os alunos também propriedades envolvendo os números naturais e as figuras promove uma integração da matemática, entre seus conteúdos e a história da Matemática.

- O quadrado com elásticos

Podemos construir sobre uma tábua ou outro objeto de madeira um quadrado, onde seus lados podem ser confeccionados com pregos. Usamos elásticos para representar segmentos internos e formar novas figuras no interior do quadrado. Seguem abaixo duas situações onde podemos fazer algumas construções.

(Situação 1- Bianchini, 9º ano, p. 159) "Uma quase circunferência".

Uma professora sugeriu construir uma „quase circunferência‟ usando triângulos retângulos. Para isso, pediu que fosse desenhado no caderno, com régua e esquadro, um quadrado de 12 cm de lado. A seguir, deveriam:

- o Em cada lado do quadrado marcar pontos de 0,5 cm em 0,5 cm, a partir do vértice; o Construir 8 triângulos retângulos com catetos nas bordas dos quadrados, sendo que um cateto mede 0,5 cm e outro 6 cm;
- o Construir grupos de 8 triângulos retângulos com catetos nos lados de quadrados, sendo que em cada um a soma das medidas dos catetos seja sempre igual a 6,5 cm (Figura 24).

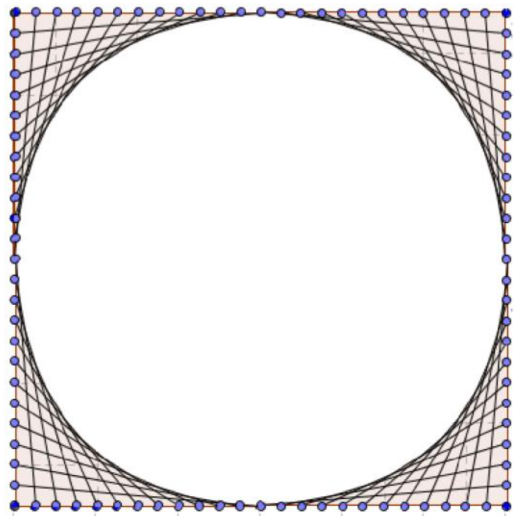


Figura 24: Quadrado com a circunferência

Num papel quadriculado, faça o desenho do quadrado com lado igual a 24 unidades e siga o processo descrito pela professora para obter a „quase circunferência‟. O que poderia ser feito para obter uma figura mais próxima de uma circunferência?”

Resposta: dividir os lados em um número maior de pontos.

Em uma experiência como essa, com uma pergunta nesse aspecto, trazemos ao raciocínio do aluno a ideia de limite. Além disso, permitimos que ele no ensino fundamental compreenda que, se o número de pontos se estender infinitamente, teremos maior precisão na circunferência formada no interior do quadrado.

- Teorema de Pitágoras

Quando o aluno constata através das relações métricas no triângulo retângulo que o Teorema de Pitágoras é uma de suas consequências, não fica *a priori* completamente convencido da geometria que esse teorema afirma. Seu enunciado diz: “O quadrado da hipotenusa vale a soma dos quadrados dos catetos”.

Ao aplicarmos esse teorema em exercícios, o aluno só percebe a associação aritmética dos comprimentos dos lados baseando-se nos cálculos realizados. Para que essa constatação atinja outros significados, usamos materiais que possam mostrar a relação entre áreas de quadrados, cujos lados são os lados do triângulo retângulo referido.

Figura 25: Materiais usando o Teorema de Pitágoras

Esse material pode ser feito nos moldes do triângulo retângulo, com certo volume sobre o triângulo e os quadrados formados com os lados e utilizar-se de água ou outra substância para preencher esses quadrados e assim demonstrar uma aplicação real e contextualizada do referido teorema.

- Problema com cenário geométrico

Assim como nos capítulos 3 e 4, podemos modelar um problema envolvendo um contexto e construir objetos e materiais que "personifiquem" o referido problema. Segue o exemplo:

(PROFMAT, Apostila Resolução do Problema,Unidade 1, número 9, p. 28 adaptada)

Um castelo que está com suas pontes guardadas possui um abismo que cerca seu terreno num formato quadrangular, cuja largura vale 4,0m. Com duas pranchas de 3,5m de comprimento cada uma, é possível atravessar o abismo e chegar ao castelo?

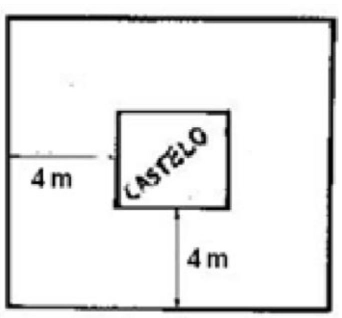


Figura 26: O problema do castelo

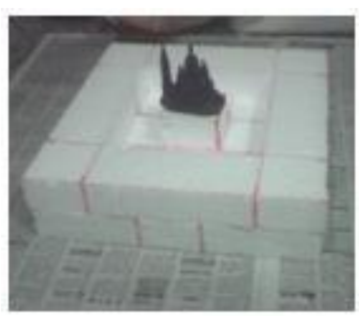


Figura 27: Réplica do problema

Nessa situação, colocamos o aluno diante de um problema que, sem o material para visualização será difícil debruçar-se sobre ele e pensar na solução. Ao colocarmos um material que disponha tal problema, o aluno poderá, ao manuseá-lo, elaborar estratégias visuais que lhe permita concluir sobre a possibilidade ou não de se atravessar o abismo e chegar ao castelo (Figuras 26 e 27).

O material usado para isso pode ser isopor ou alguma caixa de papelão que se encaixa na descrição do problema. E, colocando nas mesmas proporções, podemos tomar dois palitos de picolé e cortá-los de maneira que a razão entre seu comprimento e a largura do abismo se mantenha a mesma.

- Sólidos Geométricos

É muito comum no ensino dos sólidos geométricos, principalmente na parte introdutória desses conceitos, usarmos no ensino fundamental gravuras e ditar exemplos de como encontrar os sólidos no nosso dia-a-dia. Entretanto, torna-se muito mais atrativo até mesmo para alunos de séries mais adiantadas, manipular tais objetos que representam esses sólidos. Isso até para que, por si só, realize sua própria compreensão do espaço.

Dos principais objetivos dessa prática, podemos destacar a associação entre os sólidos geométricos e objetos do cotidiano; classificar os sólidos geométricos; analisar os principais componentes de figuras geométricas planas e tridimensionais e, até, trabalhar na construção de figuras geométricas.

Dos materiais que podemos apresentar para o aluno, seguem algumas sugestões:

- Embalagens: Enfatizando principalmente os sólidos mais conhecidos, como também os de forma mais complexa.

- Dados numerados: Descrevendo e exemplificando os poliedros de Platão, bem como suas notórias características. Pode-se também apresentar dados como o poliedro de 10 faces como exemplo de poliedro não regular, fazendo assim a distinção de suas características.

- Formas geométricas de outros materiais: Exemplificar outras formas como prismas, cilindros ou cones.
- Sabão e outros materiais com suas secções: Principalmente para fazer demonstrações de volumes, como calcular o volume das partes.
- Réplicas de monumentos: Além de reforçar o elo com as construções humanas do cotidiano, apresenta a matemática presente no mundo e no espírito humano.
- Figuras transparentes e compostas com outras formas espaciais: Muito útil para mostrar casos pertinentes na geometria espacial, tal como uma esfera que está contida num poliedro, bem como suas aplicações e utilidades (Figura 28) .

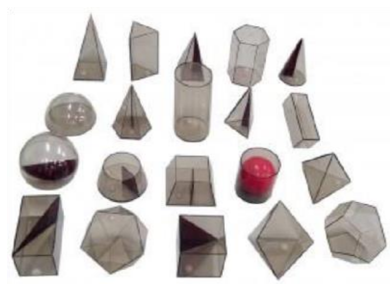


Figura 28: Sólidos de acrílico

Esses materiais podem conectar e contextualizar muitos tópicos da Geometria espacial. Além disso, tendo o objeto em mãos, o aluno adquire uma autonomia natural durante sua manipulação e interação que mudará seu conceito sobre aprender matemática.

- Cubo mágico (Rubik‟s cube)

Talvez no campo dos desafios matemáticos refrentes à Geometria espacial, o cubo mágico seja o quebra-cabeça mais famoso dos últimos tempos. É um jogo para desafiar o raciocínio e capturar a imaginação e estratégias para solucioná-lo.

Trata-se de um cubo composto por 27 cubos menores (Figura 29), sendo cada face do cubo maior composta por uma cor. Ele é maleável e permite que qualquer face do cubo, composta por 9 cubos menores, possa realizar giros. O objetivo principal é tomar o cubo com as cores de cada cubinho embaralhadas e, através desses movimentos de giro, devolver o cubo no formato original. Ou seja, com cada face contendo um único tipo de cor.

Um fato interessante sobre o cubo mágico, ou também chamado de Cubo de Rubik é que foi inventado por Erno Rubik, um professor húngaro de Arquitetura e Design. Após um ano de seu lançamento, em 1980, ele se tornou o jogo com o maior número de vendas no mundo. Este quebra-cabeça tem um número de vendas cogitado atualmente em 250 milhões de unidades.

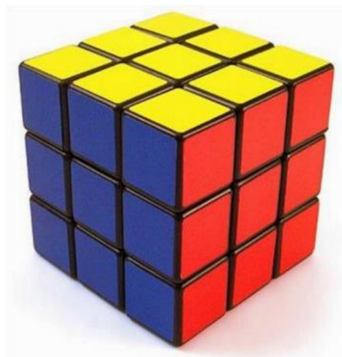


Figura 29: Cubo de Rubik

Outro fato bem interessante é que podem ser resolvidos com apenas 17 movimentos com a ajuda de um computador e, teoricamente, se afirma que nenhum cubo necessita de mais de 20 movimentos para ser resolvido. Dentre as combinações possíveis entre as posições que o cubo pode assumir, tem-se cogitado mais de 43 quintilhões.

6.3. Maneiras de se usar os objetos na Geometria

Vamos agora colocar sugestões de uma forma mais ampla de como usar tais materiais, de acordo com as abordagens pedagógicas mais viáveis. Alguns objetos terão mais compatibilidade com uma determinada maneira pedagógica, no que vis ao melhor método de ensino-aprendizagem.

Recurso motivacional

Pode ser usado principalmente no início de determinados conteúdos, mediante o contato do aluno com um novo aspecto da geometria. Os objetos mais recomendados para essa prática seriam os sólidos geométricos, fazendo-se da extrema importância nas fases iniciais do ensino fundamental que essa motivação ocorra de maneira ativa, ou seja, com o aluno interagindo com o objeto para que este realize sua própria assimilação do espaço que o rodeia. O uso das diversas formas pode ajudar a raciocinar e ,de maneira intuitiva, compreender as definições formais que são dadas a cada ente geométrico no espaço.

Outro material, que possui uma estrutura voltada para observação, que pode ser realizada pelo método passivo de motivação, seria o material que envolve o Teorema de Pitágoras. Através da observação, o aluno pode constatar que o resultado geométrico não se limita ao contexto do comprimento, mas também de área e volume. Este tipo de aplicação, para além do contexto geométrico, desperta um questionamento de qual seria o sentido do número.

Este questionamento nos leva a raízes mais abstratas no contexto do ensino de Matemática, sobre como caracterizar e discriminar o contexto e a natureza de um número. Essa dificuldade certamente também deve ser observada em outras disciplinas como Física ou Química, onde as unidades estão sempre presentes.

Esses são os melhores materiais para se trabalhar o aspecto motivacional. Entretanto, isso não impede ao professor de recorrer também à amostragem dos outros objetos para recomendar ou exemplificar alguma atividade relacionada ao conteúdo.

Recurso empírico

Valorizando atividades que tenham como centro de aprendizagem o indivíduo e o objeto, o campo da geometria e seus materiais disponíveis se mostram muito permissivos neste tipo de abordagem pedagógica. Colocar o aluno diante de materiais que exploram uma visualização plana e espacial, ao mesmo tempo em que se busca estratégias para se obter uma solução, tornam-se o centro desse tipo de atividade.

Os materiais mais impactantes para se abordar empiricamente, seriam os palitos, referentes à palitometria, o geoplano, o material envolvendo o problema do castelo e o cubo mágico. Estes, de maneira particular, têm o claro objetivo de se criar e construir figuras, como também obter solução para um problema pré-estabelecido, sendo assim ideais para desafiar a compreensão dos estudantes.

Nos palitos, temos o clássico objetivo de instigar a visualização e as estratégias de mudança de posição. Ao menos nos problemas dos quadrados e da pá, a investigação pessoal do aluno para mudar corretamente os palitos de posição se torna muito útil, quando o leitor precisa compreender o lugar geométrico e as posições relativas de segmentos em problemas mais abstratos da Geometria.

Trabalhar também na dedução de números triangulares e quadrangulares torna-se um ótimo exercício para que o aluno assim desenvolva um olhar específico para sequências e padrões na Matemática, principalmente por essas unirem a aritmética e a geometria.

Com o geoplano, podemos fazer com que os alunos construam figuras planas e sejam desafiados quanto à exigência das características e propriedades que adornam essas formas geométricas. Por exemplo, pode-se sugerir que construam figuras com um determinado perímetro ou área, o que vai fazer recorrência a uma análise e contagem no processo de medida.

Outra forma, que poderia explorar conceitos como construção de polígonos regulares, polígonos com lados paralelos, com questões envolvendo simetria, proporções e semelhança e muitas outras situações, em que o aluno, na interação com o objeto, possa averiguar conceitualmente o que deve ser construído.

No problema do castelo damos ao aluno a oportunidade de pensar em situações reais, em que o uso da geometria se torna fundamental para resolver problemas concretos. Ter o conhecimento geométrico é fundamental. Contudo, na busca empírica pelo raciocínio lógico e estratégias visuais, busca-se no aluno integrar tais partes antes vistas como complementares, para conectar conceitos a soluções práticas.

Observar que o problema inicialmente fornece dados que não tornam tão claras certas conclusões geométricas acerca da possibilidade ou não de cruzar o abismo e chegar ao castelo. É justamente nesse tipo de problema que, tendo o material que representa este cenário, é que o aluno vai "colocar a mão na massa". Ao manusear as tábuas no material representando o cenário, ele vai poder perceber as estratégias e os conceitos geométricos que estão implicitamente inseridos na resolução do problema.

Já o cubo mágico oferece a oportunidade de se trabalhar movimentos no espaço, como a rotação das faces. Ao mesmo tempo, a busca pela solução e a montagem das faces trazem, implicitamente, o aspecto classificativo dos cubinhos presentes no quebra-cabeça, bem como as estratégias fundamentais das posições para o montar corretamente.

É, nesse sentido, que essa forma empírica de se trabalhar com os alunos alcança sua principal finalidade. A busca pela própria heurística, na tentativa de resolver um determinado problema, permite ao aluno detectar e analisar aspectos pertinentes à teoria, como as definições, os lugares geométricos, os tipos de ângulos, dentre outros.

Novamente, nas sugestões desse trabalho, não buscamos excluir alternativas que poderiam ser empregadas nesse método. Apenas destacamos o que foi de maior relevância pedagógica observada. Pode-se também usar outros materiais nesse âmbito, como o *tangram* ou o quadrado com elásticos, desde que haja uma finalidade para a aprendizagem.

De fato, muitas são as possibilidades, por exemplo, a construção empírica de figuras com o *tangram*, que pode ser um excelente exercício que estimula a criatividade do estudante, ou dar o quadrado e os elásticos e pedir que os alunos o montem de forma que surja uma figura geométrica a partir disso. Isto pode significar explorar conceitos de visualização e abstração que muitas vezes estão acomodados e adormecidos no interior cognitivo do indivíduo.

Certamente essa é uma das melhores formas de se trabalhar na área da geometria, pois é, na interação com o objeto e o espaço, que o indivíduo se sente livre para compreendê-lo.

Recurso avaliativo

Trabalhar na geometria, realizando registros e mensurando o conhecimento implica explorar de forma escrita conceitos e medidas pertinentes a uma determinada experiência. A título de exemplo de material propício para trabalhar a geometria desta forma, citamos o *tangram*,

Com o *tangram*, pode-se explorar, num questionário, diversos conceitos abordando nas figuras planas e também relacionar suas áreas de acordo com o critério de escolha da unidade de superfície. Aspectos como a semelhança entre os triângulos podem ser muito bem explorados, buscando assim do aluno o contato direto com a figura para que, nessa interação, ele possa notar suas diversas características e peculiaridades. No caso do cubo mágico, podem-se explorar aspectos para a própria geometria.

Recurso transcendente

Cabe aqui discutir e seguir outras formas de se abordar a geometria e bem conectá-la a outras áreas da matemática, mostrando assim que apesar de a estudarmos separadamente, não se deve considerar que ela está desconectada de outros contextos.

1. A geometria com os números

É algo até muito comum em diversas situações. Podem-se explorar diversas representações dos números, principalmente quando há o envolvimento com medidas como a área.

No *tangram*, podemos explorar conceitos relativos à fração, como pedir as frações que representam cada peça em relação ao quadrado formado pelas 7 peças. Notar que, ao trabalhar com porcentagem, não se perde essa conduta em lidar com comparações das figuras.

2. Construção dos objetos

Na busca pela prática que mais se aproxima da geometria pura, a construção de objetos geométricos, talvez seja o momento em que temos a melhor aplicação dos conceitos nas etapas de construção.

No caso do *tangram*, isso pode ser feito de muitas maneiras. As mais conhecidas formas de se construir o *tangram* seriam com régua e compasso e outra com dobradura sobre um papel quadrangular.

Em ambas as formas, a construção do material não se torna uma mera cópia de outro trabalho produzido, mas cheio de conceitos geométricos como bissetriz, paralelismo, perpendicularismo e outros, trabalha-se com o que seria o núcleo de uma abordagem geométrica mais pura.

Essas oportunidades são excelentes para além de explorar aspectos relacionados ao raciocínio e aos conceitos geométricos, mas também às atividades que envolvem mais prazer e descontração, dando espaço para o âmbito artístico, onde o aluno pode se expressar.

Além desses materiais, o professor pode adequar outros tipos de estruturas onde ocorra etapas de montagens e construções.

3. A História da Matemática

Para que essa abordagem fique mais enriquecida, seria muito interessante, ao longo das atividades com os objetos no ensino de geometria, contar também com a visão histórica e suas curiosidades. Isso até para que o aluno não tenha uma visão distorcida e anacrônica da realidade.

Essa é uma importante área da matemática e pouco explorada, onde de fato temos a concepção de matemática como obra do intelecto humano, bem como suas necessidades e momentos históricos do homem. Com essa abordagem, podemos explorar essas construções geométricas de duas formas: como foram concebidas em seu contexto original e sobre os autores envolvidos, bem como suas motivações e relevâncias teóricas. Esses dois tópicos podem perfigurar os objetos aqui apresentados, até mesmo durante a realização dessas atividades.

Pode-se por exemplo, explorar o histórico e as origens do *tangram*, revelando aproximadamente sua data de origem e a matemática relevante na época. Da mesma forma, pode-se abordar os poliedros de Platão, suas características cósmicas e seus significados filosóficos.

Pode-se também, no que se diz respeito aos teoremas e provas matemáticas, apresentar uma ou mais provas históricas como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras e, assim, associar que o conhecimento se transforma ao longo do tempo, não sendo cristalizado e simplesmente repassado para gerações futuras.

O outro foco que se pode considerar está nos autores envolvidos nessas obras, bem como suas condutas e culturas de época. Aqui, cabe detalhar a bibliografia de vários autores famosos da matemática como Platão, Pitágoras, Arquimedes, Tales de Mileto, Euclides e muitos outros que contribuíram para a construção da ciência matemática.

CONCLUSÃO

Apresentamos o material didático concreto para o ensino de matemática com destaque no processo de ensino-aprendizagem, não no sentido de colocá-lo como instrumento essencial em todos os níveis de ensino ou em atividades com todos os conteúdos matemáticos trabalhados na Educação Básica, mas no sentido de atribuir-lhe a atenção analítica de seus recursos nesse processo.

Estamos numa época em que não podemos fechar nossos olhos às demandas da sociedade em crescente mudança, em função do desenvolvimento científico e tecnológico resultando em nova roupagem dos recursos para o ensino-aprendizagem dos conteúdos, na mídia e consequentemente na escola. Se a escola muda, o professor tem a obrigação de mudar, pois é um formador, não basta a informação. O professor deve proporcionar aos seus alunos atividades que propiciem o aprendizado, a criatividade e o desenvolvimento do pensamento matemático.

Mergulhamos, em nosso trabalho, numa reflexão sobre a prática pedagógica e na observação dos materiais didáticos em todas as etapas da construção de conhecimento específico e na resolução de problemas, visando, com a utilização de material concreto, atingir um nível significativo de participação dos alunos em sala de aula com resultados no aprendizado superior ao que se tem notado em atividades sem tais recursos.

Apresentamos propostas de utilização de materiais concretos com recursos eficientes na introdução de conceitos, com princípio meio e fim, ou seja, partimos de seu uso como recurso motivacional, passando pelos recursos empírico e crítico, chegando à transcendência, quando o produto vai além de seus objetivos, abrangendo também a interdisciplinaridade.

Na proposição de atividades com material concreto devemos nos ater às dificuldades de sua execução envolvendo os três tipos de participantes: alunos, professores e escola.

Quando os obstáculos estão presentes no professor, esses estão relacionados, geralmente, com o tempo limitado para cumprir o programa bimestral, como também a confiança necessária para conduzir atividades que possuam caráter mais imprevisível. Já no papel da escola, vemos que sempre teremos as mesmas dificuldades como o espaço apropriado, o grande número de alunos por sala e sem os recursos disponíveis para a aplicação.

Mas as dificuldades não se encontram apenas nesses três elementos. Também na estrutura da maioria das escolas do país, especialmente as públicas. Além disso, não se pode esperar uma evolução significativa do aluno em pouco tempo, sendo necessário assim mudar aspectos centrais da aula tradicional de Matemática.

Para que a mudança atinja escalas mais avançadas, seria necessária uma ampla mudança no currículo escolar, adotando a investigação matemática como parte integrante, onde esse problema vai exigir muitas experiências, muita reflexão e muita ação em vários níveis, o que exige maior tempo de permanência do aluno e do professor na escola.

Ainda assim, ações como essas vão exigir maior aprofundamento nos elementos da educação, desde mudanças na gestão curricular na escola, desde a concepção do currículo à formação de professores e do investimento em infraestrutura nas escolas e a criação de um laboratório específico para atividades matemáticas.

Condições ideais à parte, esperamos que este trabalho tenha atingido seus objetivos, trazendo, ao leitor professor, elementos que contribuam para trabalhar a matemática de uma forma diferenciada, buscando a constante integração do aluno ao processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Paulo. *Investigação em geometria na sala de aula*. In: VELOSO, Eduardo et al (Eds). *Ensino da geometria no virar do milênio*. Lisboa: DEFCUL, 1999.

ALICE, Maria (Coord). *Projeto- a formação continuada do professor. A interdisciplinaridade e a Educação Básica da Rede Pública do Estado/RJ*. Rio de Janeiro: SEE/RJ.

ARCONCHER, Cláudio. *Octógono perverso*. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 36, 1997.

ÁVILA, Roberto. *Matemática*. Ensino Médio. Volume único. Edição revisada.

BECKER, F. *A propósito da desconstrução. Educação e Realidade*. Porto Alegre: Faculdade de Educação, UFRGS, 1994.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática*. 7ª edição. São Paulo. Editora Moderna, 2011.

CENTURIÓN, Marília**.** *Nova matemática na medida certa.* 8ª série, Centurión, Jakubovic, Lellis. São Paulo. Editora Scipione, 2003.

CUNHA, Leonor e ABRANTES, Paulo. *Is it possible to integrate learning and asessment?*, 45º encontro da CIEAEM, 1994.

HADDAD, Sérgio. *Educação e exclusão*. Le Monde Diplomatique Brasil, páginas 32 e 33, maio de 2008.

HOLE, V. *Como ensinar matemática no básico e no secundário.* Lisboa: Livros Horizonte, 1977.

IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade*. 6º ano/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. 6ª edição. São Paulo. Editora Atual, 2009.

IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade*. 7º ano/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. 6ª edição. São Paulo. Editora Atual, 2009.

IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade*. 8º ano/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. 6ª edição. São Paulo. Editora Atual, 2009.

IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade*. 9º ano/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. 6ª edição. São Paulo. Editora Atual, 2009.

JOSÉ, Antônio. *Resolução de problemas*, observações a partir do desempenho dos alunos, 1994- *A educação matemática em revista- SBEM*, nº3- 2º semestre.

LEITE, Miriam. *Abordagens didático-pedagógicas: Do sonho de Comênio às perspectivas críticas*. Rio de Janeiro: Faculdade de Educação/UFRJ, 2005.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. *O ensino e as propostas pedagógicas*. São Paulo, Editora UNESP, 1999.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. *Ensino: as abordagens do processo*. São Paulo: EPU, 1986.

OLIVEIRA, Krerley. Material *Resolução de Problemas, Unidade 1*. PROFMAT: 1º semestre de 2013.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In BICUDO, M. A. V. (Org.)

Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997

PÓLYA, G.. *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva, 2003.

RAMALHO, Júnior, Nicolau Gilberto Ferrano, Paulo Antônio de Toledo Soares. *Os fundamentos da física.* 7ª edição revisada e ampliada. São Paulo. Editora Moderna, 1999.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: desfazendo clichês e situando os conceitos*, Rio de Janeiro: IM/UFRJ.

SEGADAS, Claudia (Coord). *Visualizando figuras espaciais*, Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2008.

SZENDREI, Julianna: Concrete Materials in The Classroom. In: International Handbook of Mathematics Education. Chapter 11. Kluwer, Dordretcht, 1997.

USBERCO, João. *Química*. Volume único/ João Usberco, Edgard Salvador. 7ª edição reformada. São Paulo. Editoria Saraiva, 2006.

VYGOTSKY, L. S. A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

Informações retiradas da internet:

- portal.inep.gov.br/saeb
- http://eesmeraldotarquinio.blogspot.com.br/p/artigos.html
- http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/pne.pdf
- http://www.coladaweb.com/pedagogia/principios-do-ensino-e-finalidades-da-educacao
- http://www.oei.es/quipu/brasil/sistema_nacional_formacion_profesores.pdf

Imagens retiradas dos sites:

- http://agavelar.no.sapo.pt/n/n.htm
- http://aredesnet.blogspot.com.br/2010/07/desafio-21-resposta.html
- http://cleanlourenco.blogspot.com.br/2010/03/formas-geometricas-espaciais.html
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teorema_de_Pitagoras.jpg
- http://content.blackgold.ca/courses/math10_C/u4/m6/m10c_m6_l03_p6.html
- http://diadematematica.com/vestibular/conteudo/GE_PRI2.htm
- http://estagiodocenciafebf.blogspot.com.br/2012/05/questao-uso-das-pulseirinhaspelos.html
- http://fisicaidesa2.blogspot.com.br/2013/03/aula-4-hidrostatica-pressao-e-densidade.html
- http://g2solidos.blogspot.com.br/2011/02/as-formas-geometricas-pode-ser-de.html
- http://likeanerd.pop.com.br/chocolates-em-forma-de-planetas
- http://lista.mercadolivre.com.br/piramide-do-egito
- http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1580
- http://vivianesorriso.blogspot.com.br/2012/05/parque-de-las-ciencias-granadaesp.html
- http://superasantos.blogspot.com.br/2013/08/desafio-dos-palitos.html
- http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?pagina=espaco%2Fvisualizar_aula&aula=25256&secao=espaco&request_locale=es
- http://ptmat.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Problemas/konigsberg.html

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Role-playing_game
- http://secretariamunicipalmarilia.blogspot.com.br/2013/04/o-geoplano.html
- https://sites.google.com/site/susana9ano/sistemasdeequa%C3%A7%C3%B5es
- http://slideplayer.com.br/slide/358603/
- http://terceiroano-csjd.blogspot.com.br/2014/04/interagindo-com-o-livro-material.html
- http://www.todasasconfiguracoes.com/2012/06/15/as-pontes-de-konigsberg/
- http://trabalhosdaescola-2c.blogspot.com.br/2012/03/balanca-de-pratos.html
- http://vestiweb.blogspot.com.br/2012/02/questoes-estatica-fisica.html
- http://www.apena.rcts.pt/aproximar/matematicando
- http://www.cempem.fe.unicamp.br/lapemmec/cursos/ed615a2001/FABIANA/Desafiosmatematicos.htm
- http://www.criarimagem.com.br/gal_mostra.asp?id=5788
- http://www.cursosprime.com.br/blogprime/2011/09/photoshop-faca-um-cubo-magicouma-fotografia-sua
- http://www.ebah.com.br/content/ABAAAA7g8AG/exercicios-estequiometria-dasreacoes-quimicas
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm36/propriedades.htm
- http://www.elo7.com.br/lista/tangram
- http://www.elo7.com.br/tangram/dp/3DB34C
- http://www.engenhariae.com.br/curiosidades/matematicos-provam-que-qualquercombinacao-no-cubo-magico-pode-ser-resolvida-em-apenas-20-movimentos
- http://www.mundoeducacao.com/matematica/equacao-equivalente.htm
- http://www.snetcommerce9.com.br/ecommerce_site/produto_137796_2641_Ki-deSolidos-Geometricos-Acrilico-
- http://www.therapy-pro.net/br/motricidad-fina/geoplano-circular
- http://www.ufvjm.edu.br/site/parquedaciencia/atracoes-do-parque
- http://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o