UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Inversão Geométrica Aplicada à Resolução dos Problemas de Apolônio

Por

Cristiano Benevides de Sousa

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Inversão Geométrica Aplicada à Resolução dos Problemas de Apolônio

†

por

Cristiano Benevides de Sousa

sob orientação da

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2014

João Pessoa - PB

† Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Inversão Geométrica Aplicada à Resolução dos Problemas de Apolônio

por

Cristiano Benevides de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes-UFPB

(Orientadora)

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa - UFPB

Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB

Setembro/2014

Agradecimentos

A Deus, meu único e suficiente companheiro nas longas madrugadas em que passei dedicado aos estudos. A Ele, toda a honra e toda a glória.

A minha orientadora, Elisandra de Fátima Gloss de Morais , por toda a sua contribuição intelectual e pela sua compreensão e paciência demonstradas quando externava minhas limitações.

A minha mãe, Clemilda Lima Benevides, que sempre acreditou e me incentivou a ir mais longe.

Aos meus irmãos, Giseuda, Gisele e Cledson que venceram na vida e que também me ajudaram a vencer e a superar a dor da ausência do nosso pai.

A minha esposa, Fransuela Lucena Benevides, pelas palavras de incentivo, pelo companheirismo e por ser compreensiva nas minhas muitas ausências do lar.

A minha filha, Kézia Lucena Benevides, pelas alegrias contagiantes que demonstrava nas minhas aflições.

Aos meus inseparáveis companheiros de estudo, Alan e Genaldo, que muito me ajudaram com suas sugestões e incentivos.

Aos professores do PROFMAT, pela disposição em nos ensinar e nos fazer acreditar que éramos capazes.

A turma 2012 da UFPB, pela amizade e solidariedade demonstrada nas minhas necessidades.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

À minha mãe, Clemilda, que também assumiu com responsabilidade o papel de pai em nossas vidas.

Resumo

O presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar uma nova abordagem dentro da Geometria; a Inversão. A Geometria Inversiva é uma Geometria não Euclidiana que possui inúmeras aplicações, principalmente relacionada a problemas de tangência. Essa "nova" Geometria é apresentada ao longo desse trabalho com o objetivo de solucionar os dez problemas de Apolônio. Todas as construções são realizadas com o auxílio de um software de Geometria Dinâmica; o Geogebra. Como o trabalho é direcionado para professores e alunos do ensino básico, então há uma proposta de roteiro para que o leitor possa participar do processo de construção das soluções dos referidos problemas, o que possibilitará o desenvolvimento da criatividade, do pensamento lógico, da argumentação e da prática em construções geométricas.

Palvras-chave: Geometria Inversiva. Problemas de Apolônio. Geometria Dinâmica. Construções Geométricas.

Abstract

This work was developed with the aim of presenting a new approach within the Geometry, the Inversion. The Inversive Geometry is a non-Euclidean geometry that has several applications, mainly related to problems of tangency. This "new" Geometry is presented throughout this work in order to solve the ten problems of Apollonius. All constructions are carried out with the aid of a Dynamic Geometry software, Geogebra. Since the work is directed to teachers and students of basic education, then there is a proposed roadmap for the reader to participate in the construction of the solutions of these problems process, which will enable the development of creativity, logical thinking, reasoning and practice of geometric constructions.

Keywords: Inversive Geometry; Problems of Apollonius; Dynamic Geometry; Geometric constructions.

Sumário

Introdução

A palavra Geometria, derivada do grego **geometrein**, significa medição da terra (**geo** = terra e **metrein** = medida). A Geometria é o ramo da Matemática que estuda as propriedades do espaço, normalmente em termos de figuras do plano (bidimensional) e sólidas (tridimensional). Ela divide-se em Geometria Sintética, a qual é axiomática e estuda o plano e os sólidos, tema trabalhado na mais conhecida obra de Euclides: Os Elementos; e em Geometria Analítica (Geometria de coordenadas), na qual os problemas são resolvidos com métodos algébricos.

Um grande desenvolvimento da geometria aconteceu na chamada Idade Áurea da matemática grega, ou período helenístico, ou ainda período Alexandrino e se estendeu de aproximadamente 324 a.C a 600 d.C. Foi neste período que Apolônio propôs dez problemas, que vieram a receber seu nome. Estes problemas, em especial o último, despertou o interesse de vários matemáticos ao longo dos séculos, cada qual buscando soluções segundo as mais diversas abordagens que refletiam o instrumental matemático disponível em cada época. Mas, embora muitas soluções tenham sido produzidas na era "moderna", ainda não atendiam ao almejado novo paradigma: encontrar um método direto, aplicável a todos os casos, e se possível, que permitisse determinar o número de soluções admissíveis para o problema.

Historicamente, o estudo da Geometria, principalmente entre os gregos, foi considerado indispensável para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a formação intelectual do indivíduo. Então, por que essa ciência tem sido tratada, no atual sistema de ensino, como algo tão desprezível? Será que a matemática moderna evoluiu tanto a ponto de tornar desnecessário o ensino da geometria nas nossas escolas? Acredito que não. Mas apesar da sua importância dentro da Matemática, a maneira de se trabalhar a Geometria tem apresentado problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à sua aprendizagem. Contudo, a preocupação em se resgatar a Geometria como uma das áreas fundamentais da Matemática tem levado muitos professores e pesquisadores apoiados em teorias cognitivas a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades que são frequentes na abordagem desse tema.

Entendendo que a arte da Matemática está em resolver problemas, é que o presente trabalho busca desenvolver um roteiro que possibilite solucionar problemas clássicos de tangência da Geometria Euclidiana: Os Dez Problemas de Apolônio, através da utilização de algumas propriedades da Geometria Inversiva. Pelo fato de ser uma geometria não-Euclidiana, o método inversivo possibilitará novas estratégias de resolução, instigando desta maneira o raciocínio na busca de novas soluções para tais problemas.

Resolver os problemas de Apolônio por meio da inversão exige um conhecimento geométrico prévio que nos dará suporte para chegarmos a tais soluções. Sendo assim, os dois capítulos que antecedem a resolução de tais problemas tem como objetivo trazer o embasamento necessário para que haja compreensão às construções feitas no Capítulo 3.

O Capítulo 1 é composto de alguns conceitos da Geometria Plana dados em forma de definições, proposições e suas respectivas demonstrações. Dentre estes destacam-se o lugar geométrico e a tangência entre dois elementos. Conceitos amplamente utilizados na construção dos problemas de Apolônio.

No Capítulo 2, são apresentadas definições e proposições da Geometria Inversiva numa sequência lógico-didática, sempre utilizando como suporte um ambiente computacional: Geogebra. Nesta parte do trabalho há uma interessante discussão sobre *O Ponto no Infinito*.

O terceiro e último capítulo é dedicado exclusivamente às construções das soluções dos dez problemas de Apolônio. No entanto, anteriormente a isto, é feita uma breve apresentação da vida e obra do referido autor, bem como dos desafios ao longo dos tempos para se solucionar o décimo e mais intrigante problema proposto por ele.

A proposta deste trabalho é oferecer uma outra alternativa, além da régua e do compasso, para construir as soluções dos problemas de Apolônio. Contudo, espera-se do leitor que possa haver familiaridade com um software de Geometria Dinâmica.

Capítulo 1

Alguns Conceitos Geométricos

Objetivando resolver os problemas de Apolônio, faremos uma breve abordagem de alguns conceitos geométricos que serão indispensáveis na construção das soluções dos referidos problemas.

1.1 Lugar Geométrico e Pontos Notáveis de um Triângulo

Comecemos com algumas definições. Veja [8] para maiores detalhes.

Definição 1.1.1: *Mediatriz* de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.

Definição 1.1.2: *Bissetriz* de um ângulo $\angle AOB$ é a semirreta OC tal que $\angle AOC = \angle COB$.

Definição 1.1.3: *Lugar Geometrico* consiste no conjunto de pontos de um plano que gozam de uma determinada propriedade.

As duas proposições a seguir caracterizam a mediatriz de um segmento e a bissetriz de um ângulo como lugar geométrico, segundo consta em [6] e [9].

Proposição 1.1.1: Dados pontos A e B no plano, a mediatriz de AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

Demonstração: Sejam M o ponto médio e m a mediatriz de AB (veja Figura 1.1). Se $P \in m$, então, no triângulo PAB, PM é mediana e altura, o que garante que PAB é triângulo isósceles de base AB. Logo $\overline{PA} = \overline{PB}$.

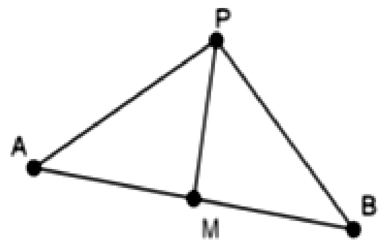


Figura 1.1: $P \in$ (mediatriz de AB) $\Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$

Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Então o triângulo PAB é isósceles de base AB, donde segue que a mediana e a altura relativas a AB coincidem. Como a mediana de PAB relativa a AB é o segmento PM, segue que $PM \perp AB$, o que é o mesmo que dizer que a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é mediatriz de AB. Como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.1.2: Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então $d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \Leftrightarrow P \in$ (bissetriz de $\angle AOB$).

Demonstração: Suponha, primeiro, que P pertence à bissetriz de $\angle AOB$ (veja Figura 1.2) e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Como $M\widehat{O}P = N\widehat{O}P$, $O\widehat{M}P = O\widehat{N}P = 90^{\circ}$ e $\overline{OP}$ é comum, segue que os triângulos OMP e ONP são congruentes por $LAAo$. Daí, $\overline{PM} = \overline{PN}$, ou seja, $d(P, \overleftrightarrow{AO}) = d(P, \overleftrightarrow{BO})$.

Reciprocamente, seja P um ponto no interior do ângulo $\angle AOB$, tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, onde M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Então, os triângulos MOP e NOP são novamente congruentes

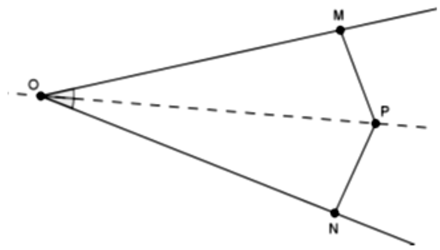


Figura 1.2: $P \in$ a bissetriz do ângulo $\angle AOB$

($\overline{PM} = \overline{PN}$ e OP comum - caso *Cateto, Hipotenusa*). Mas aí $M\widehat{O}P = N\widehat{O}P$, donde P está sobre a bissetriz de $\angle AOB$. Como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.1.3: Em todo triângulo as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto chamado de circuncentro.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer, r, s e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados BC, CA e AB, e O o ponto de interseção das retas r e s (veja Figura 1.3).

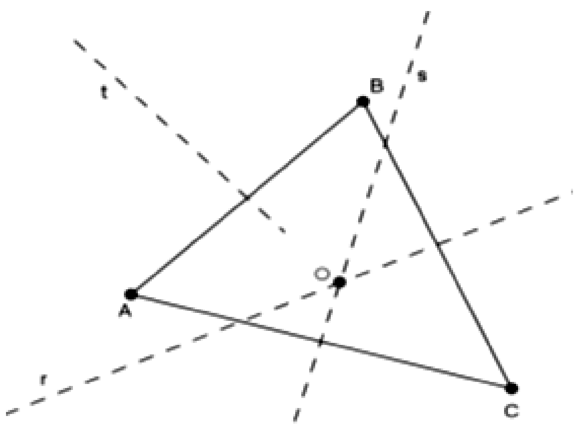


Figura 1.3: Circuncentro de um triângulo

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como lugar geométrico, temos $\overline{OB} = \overline{OC}$ (pois $O \in r$) e $\overline{OC} = \overline{OA}$ (pois $O \in s$). Portanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$ e segue novamente da caracterização da mediatriz como lugar geométrico que $O \in t$. Como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.1.4: As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o incentro do triângulo.

Demonstração: Sejam r, s e t, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle BAC, \angle ABC$ e $\angle BCA$ do triângulo ABC (veja Figura 1.4) e I o ponto de interseção das retas r e s. Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como lugar geométrico, que I equidista dos lados AB e AC de ABC. Analogamente, $I \in s$ garante que I eqüidista dos lados AB e BC. Portanto, I eqüidista de AC e BC e, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo $\angle BCA$, ou seja, à reta t. Assim, r, s e t concorrem em I. ■

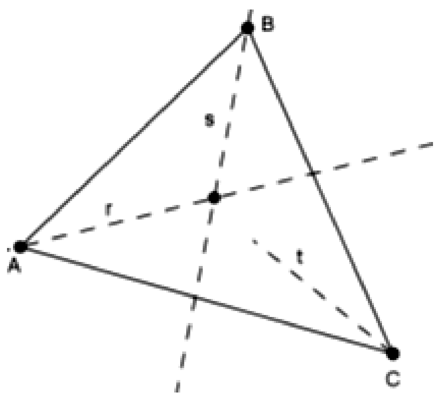


Figura 1.4: Incentro de um triângulo

Proposição 1.1.5: Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

Demonstração: Seja ABC um triângulo de circuncentro O, (conforme Figura 1.5). Como O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, temos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Denotando por R tal distância comum, segue que o círculo de centro O e raio R passa por A, B e C. Existe, portanto, um círculo passando pelos vértices de ABC. Reciprocamente, o centro de um círculo que passa pelos vértices

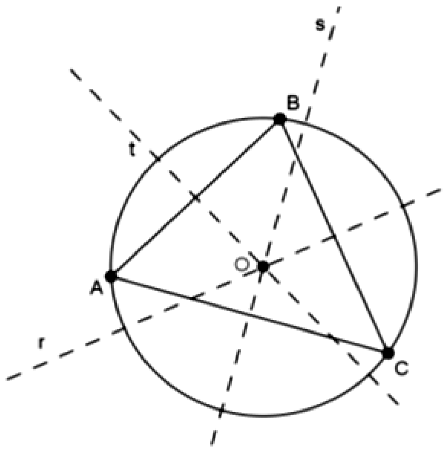


Figura 1.5: Círculo circunscrito a um triângulo.

de ABC deve equidistar dos mesmos. Portanto, o centro pertence às mediatrizes dos lados de ABC donde coincide com o ponto de interseção das mesmas, que é o circuncentro O. Por fim, o raio do círculo, sendo a distância de O aos vértices, é igual a R. ■

Proposição 1.1.6: Todo triângulo admite um único círculo contido no mesmo e tangente a seus lados. Tal círculo é dito inscrito no triângulo e seu centro é o incentro do mesmo.

Demonstração: Seja I o incentro de um triângulo ABC (veja Figura 1.6). Como

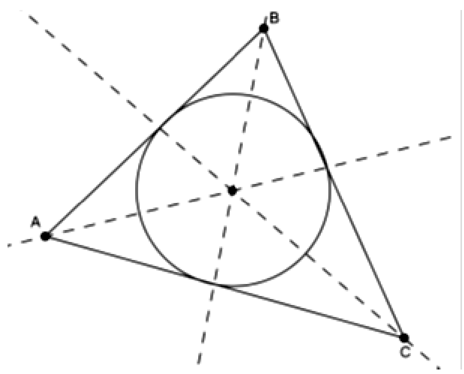


Figura 1.6: Círculo inscrito em um triângulo

I é o ponto de interseção das bissetrizes internas de ABC, temos que I equidista dos lados de ABC. Sendo r tal distância comum aos lados, segue que o círculo de centro I e raio r está contido em ABC e tangencia seus lados. A unicidade do círculo inscrito pode ser estabelecida mediante um argumento análogo ao da unicidade do círculo circunscrito. ∎

Proposição 1.1.7: Em todo triângulo ABC, existe um único círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC. Tal círculo é o círculo ex-inscrito ao lado BC e seu centro é o ex-incentro de ABC relativo a BC (ou ao vértice A).

Demonstração: Sejam r e s as bissetrizes externas dos vértices B e C do triângulo ABC e I_e seu ponto de interseção. Como $I_e \in r$ e r é bissetriz, segue que $d(I_e, \overrightarrow{BC}) = d(I_e, \overrightarrow{AB})$. Do mesmo modo, uma vez que $I_e \in s$, concluímos que $d(I_e, \overrightarrow{BC}) = d(I_e, \overrightarrow{AC})$. Denotando por r_e a distância comum de I_e às retas suportes dos lados, segue que o círculo de centro I_e e raio r_e tangencia BC e os prolongamentos de AB e AC (veja Figura 1.7). ∎

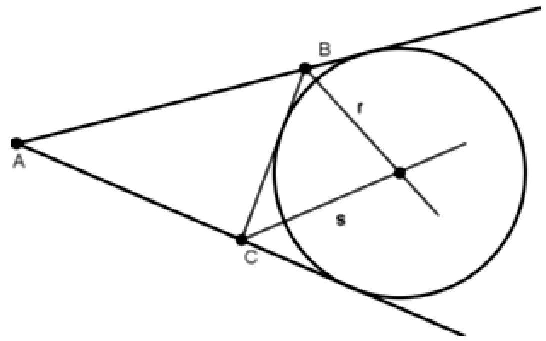


Figura 1.7: Círculo ex-inscrito ao lado BC do triângulo ABC.

1.2 Tangência

Além dessas proposições demonstradas anteriormente, para que possamos dar seguimento ao nosso estudo faz-se necessário enunciarmos também alguns conceitos importantes sobre a relação de tangência entre circunferência e reta.

Definição 1.2.1: Sejam C e D duas circunferências que se interceptam em um ponto P. Se C e D possuem tangentes s e t, respectivamente, em P, então dizemos que o ângulo entre C e D em P é o ângulo entre s e t. Em particular, dizemos que C e D são ortogonais em P se s e t são perpendiculares.

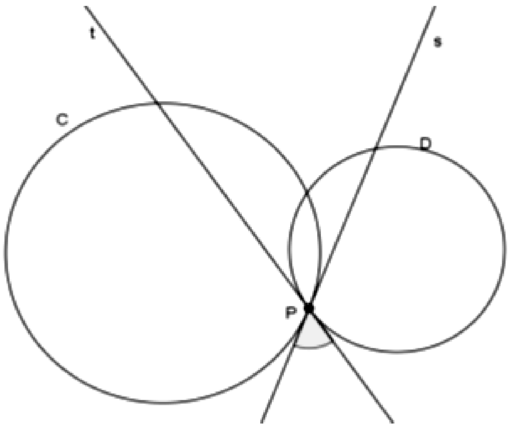


Figura 1.8: ângulo entre circunferências

Lembremos que uma circunferência C e uma reta r são ditos tangentes, se existir um único ponto P comum a C e a r.

Das quatro propriedades do Desenho Geométrico que se seguem, demonstraremos apenas a terceira. O leitor interessado na demonstração dos outros itens pode encontrá-la em [1].

Proposição 1.2.1: Sejam C e D duas circunferências secantes nos pontos P e Q. Então, o ângulo entre C e D no ponto P é igual ao ângulo entre C e D no ponto Q. (Veja Figura 1.9).

Proposição 1.2.2: Sejam C uma circunferência e r uma reta secante a C nos pontos P e Q. Então, o ângulo entre C e r no ponto P é igual ao ângulo entre C e r no ponto Q. (Veja Figura 1.10).

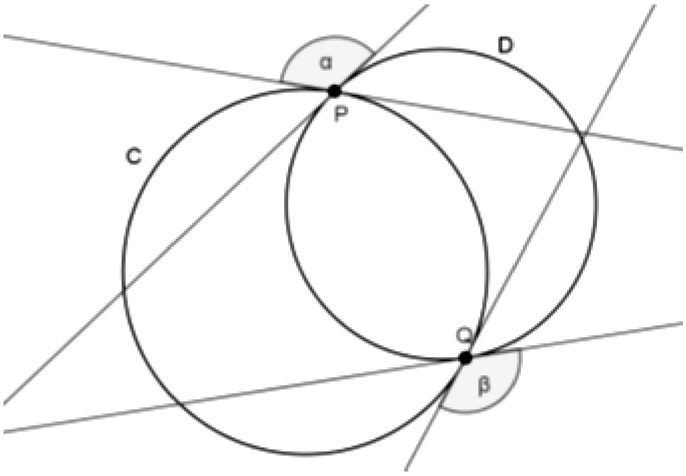


Figura 1.9: Ângulo entre circunferências secantes ($\alpha = \beta$)

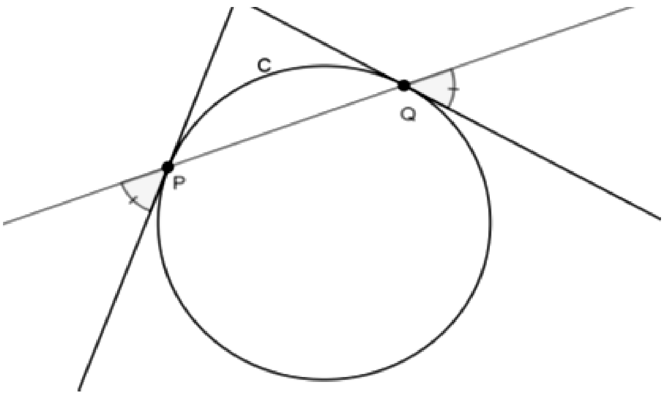


Figura 1.10: Ângulo entre circunferência e reta secante

Proposição 1.2.3: Seja C uma circunferência de centro O, e P um ponto de C. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular à $\overrightarrow{OP}$, então t é tangente a C.

Demonstração: Seja R o raio de C. Se $Q \neq P$ é outro ponto de t (veja Figura 1.11), então temos $\overline{QO} > \overline{PO} = R$, uma vez que $Q\widehat{P}O = 90°$ é o maior ângulo do triângulo OPQ. Portanto $Q \notin C$ e, assim, P é o único ponto em comum a t e C. Logo, t é a reta tangente a C em P. ■

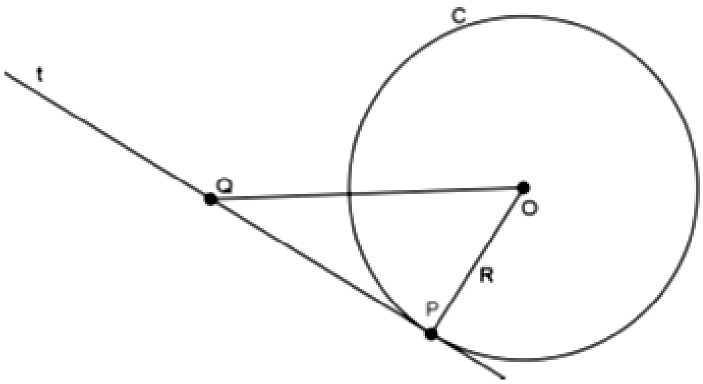


Figura 1.11: Reta tangente a circunferência

Proposição 1.2.4: Com centro em um ponto P fora da circunferência C passa uma única circunferência D ortogonal à C.

Um outro conceito importante da Geometria Plana que será de grande valia para este trabalho é o de Conjugado Harmônico.

Definição 1.2.2: Dados três pontos colineares A, B e P, com $A \neq B$, dizemos que P' é o conjugado harmônico de P em relação ao segmento AB se

$$\overline{AP}/\overline{BP} = \overline{AP'}/\overline{BP'}.$$

Para melhor nos apropriarmos desta definição, encontraremos o conjugado harmônico de um ponto através da seguinte construção: Dados os pontos A, B e P sobre uma reta r, traçamos duas retas quaisquer a_1 e a_2 passando por A e uma

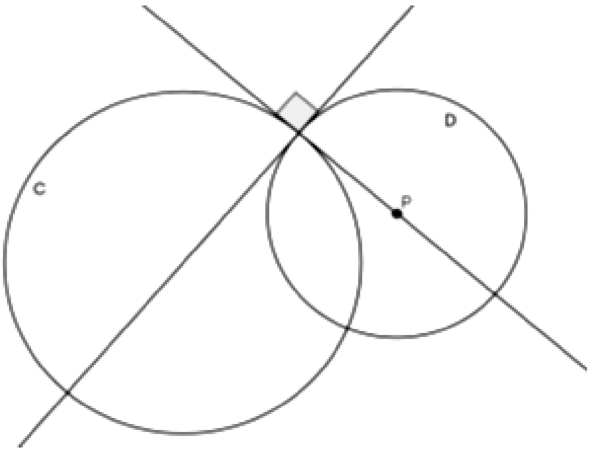


Figura 1.12: Circunferência ortogonal a C com centro P

reta c passando por P. Unindo a B os pontos de incidência de c com a_1 e a_2 , respectivamente, obtemos as retas b_1 e b_2. Fica então formado um quadrilátero ($EFHG$, na Figura 1.13) tal que os lados opostos concorrem em A e B, e tal que uma de suas diagonais passa por P. Seja P' o ponto de encontro de r com a outra diagonal do quadrilátero. Então P' é o conjugado harmônico de P em relação a $\overline{AB}$.

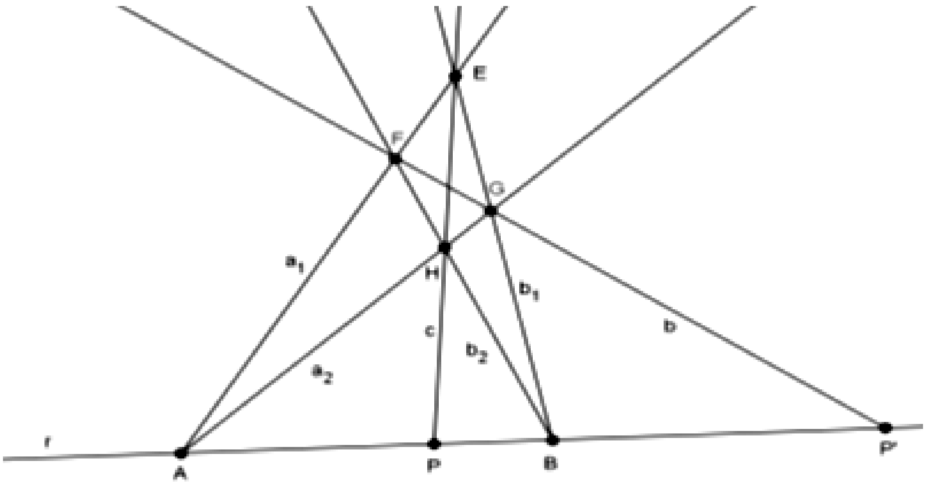


Figura 1.13: Conjugado harmônico de P em relação a $\overline{AB}$

Capítulo 2

Geometria Inversiva

2.1 Um pouco da História

A Geometria Inversiva teve seu desenvolvimento num período bastante recente em relação a todo o desenvolvimento da Matemática, que é milenar. Data-se do século XIX, e tem como responsável Jacob Steiner (1796-1863), matemático suíço que só foi para a escola após os 18 anos, mas que apesar disso foi considerado o maior geômetra sintético dos tempos modernos. O seu trabalho serviu para solucionar problemas que até então não eram possíveis de serem resolvidos pela Geometria Euclidiana, dentre estes está o famoso problema de Apolônio que consiste em traçar circunferências tangentes a outras três circunferências dadas, veja [4].

2.2 Definição de Inversão Geométrica

Por se tratar de uma Geometria não-Euclidiana e, consequentemente, não ser familiar aos nossos estudos matemáticos (já que os nossos livros didáticos não a abordam), começaremos a explorá-la pela condição inicial necessária ao seu entendimento.

Jakob Steiner (1796-1863)

Definição 2.2.1: Dada uma circunferência de centro em O e raio r, dizemos que a inversão é a transformação que faz corresponder, a cada ponto P do plano, diferente de O, o ponto P' que se encontra sobre a semirreta $\overrightarrow{OP}$ e que satisfaz

$$\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$$

Podemos estender esta definição fazendo uso da seguinte proposição que relaciona inversão de um ponto com o conceito de conjugados harmônicos.

Proposição 2.2.1: Os pontos P e P' são inversos em relação à circunferência C de centro O e raio r se, e somente se, são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro $\overline{AB}$ determinado pela interseção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a circunferência C.

Demonstração: Considerando o alinhamento na ordem A, P', B e P, como na Figura 2.1, temos:

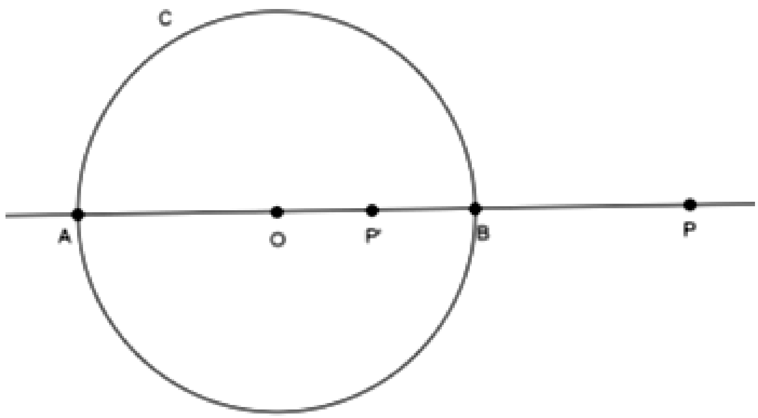


Figura 2.1: Inversão de ponto e conjugado harmônico

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}} &\Leftrightarrow \frac{(\overline{AO} + \overline{OP})}{(\overline{OP} - \overline{OB})} = \frac{(\overline{AO} + \overline{OP'})}{(\overline{OB} - \overline{OP'})} \\
&\Leftrightarrow \frac{(r + \overline{OP})}{(\overline{OP} - r)} = \frac{(r + \overline{OP'})}{(r - \overline{OP'})} \\
&\Leftrightarrow (r + \overline{OP}).(r - \overline{OP'}) = (\overline{OP} - r).(r + \overline{OP'}) \\
&\Leftrightarrow r^2 - r.\overline{OP'} + r.\overline{OP} - \overline{OP}.\overline{OP'} = r.\overline{OP} + \overline{OP}.\overline{OP'} - r^2 - r.\overline{OP'} \\
&\Leftrightarrow 2.r^2 = 2.\overline{OP}.\overline{OP'} \Leftrightarrow \overline{OP}.\overline{OP'} = r^2.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a prova da demonstração. ■

Para facilitar a compreensão de Inversão Geométrica, usaremos o recurso da Geometria Dinâmica, mais especificamente o Geogebra, para obtermos a localização de um ponto inverso de um dado ponto, diferente de O (Figura 2.2). Vamos a construção:

1. Desenhe a circunferência de inversão λ de centro O e raio r;

2. Marque um ponto P e desenhe a semirreta $\overrightarrow{OP}$;

3. Passando por O, traçar a perpendicular à semirreta $\overrightarrow{OP}$ e assinalar os pontos A e B de intersecção com a circunferência;

4. Traçar a semirreta $\overrightarrow{AP}$ e assinalar o ponto C, outro ponto que intersecta a circunferência;

5. Traçar a semirreta $\overrightarrow{BC}$;

6. Assinalar o ponto P', inverso de P em relação a λ , que resulta da intersecção da semirreta $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Veja que P' assim construído, de fato, é o inverso do ponto P, pois os triângulos retângulos AOP e BOP' são semelhantes pelo caso AA, logo, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}$, ou seja, $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OP}.\overline{OP'}$. Como $\overline{OA} = \overline{OB} = r^2$, então, $\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$.

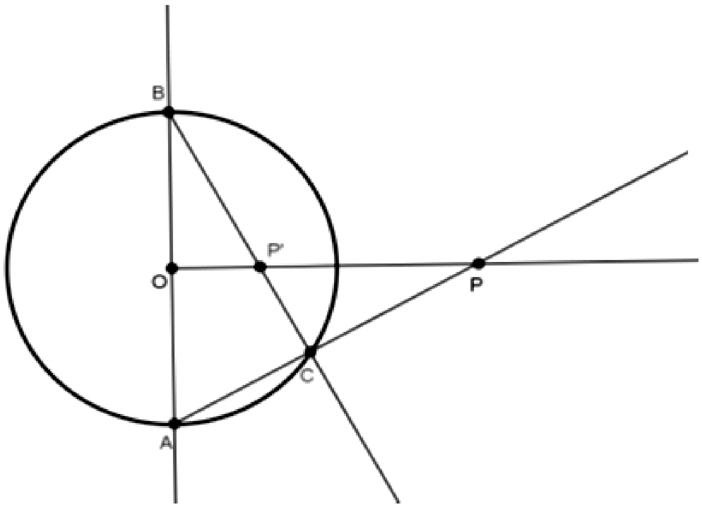


Figura 2.2: Construção do inverso de um ponto

Observe, pela definição dada acima, que P' é inverso de P em relação a λ, se e somente se P é inverso de P' relativamente a λ. Além disso, temos que se $A \neq O$, $(A')' = A$ e, portanto, a inversão é uma aplicação bijetora do plano, com exceção de O. Diante da construção apresentada, surge o seguinte questionamento: é possível encontrar o inverso de qualquer ponto do plano? A resposta é não! Pois verifica-se que o afastamento de qualquer ponto do centro da circunferência de inversão leva o seu inverso a uma aproximação do mesmo centro e vice-versa. No entanto, para que a inversão seja verdadeiramente uma transformação geométrica se faz necessário estabelecer uma transformação biunívoca entre cada ponto do plano e seu respectivo inverso. Mas como o inverso de O está infinitamente longe, convencionamos um ponto no infinito que denotaremos por Ω, de modo que O é o inverso de Ω e Ω é o inverso de O. Veja [7].

Antes da próxima definição, é necessário postular que Ω está em todas as retas, pois $\overline{OP}$ pode crescer infinitamente ao longo de uma reta qualquer. Logo, concluímos que todas as retas do plano possuem pelo menos um ponto em comum. E a esse novo plano damos o nome de Plano Inversivo.

Definição 2.2.2: Seja λ uma circunferência de centro O e raio r. A transformação geométrica no Plano Inversivo que associa cada ponto $P \neq O$ o seu inverso P' em relação à λ e é tal que O é o inverso de Ω e Ω é o inverso de O é denominada inversão.

Desta forma, a inversão torna-se uma transformação definida em todo o plano e com valores em todo o plano.

Agora com uma definição precisa de inversão, podemos explorar essa "nova" geometria numa perspectiva de construção de novos conceitos que nos possibilitarão desvendar soluções para problemas que, até então, tornavam-se trabalhosos sobre a ótica da Geometria Euclidiana ou até mesmo irresolúveis. Para este fim, serão construídas, através de um recurso computacional: o Geogebra, todas as figuras que terão a finalidade de dar o suporte visual às definições, teoremas, proposições, lemas, corolários e demonstrações presentes neste trabalho. Este recurso torna-se útil por possuir uma ferramenta chamada inversão, que facilitará a construção das referidas figuras.

Seria a inversão uma isometria? Qual é, por exemplo, o inverso de uma corda $\overline{AB}$ da circunferência de inversão? Veja a construção abaixo:

Observe que o inverso de $\overline{AB}$ é o arco $\widehat{AC}$ e, consequentemente, conclui-se que

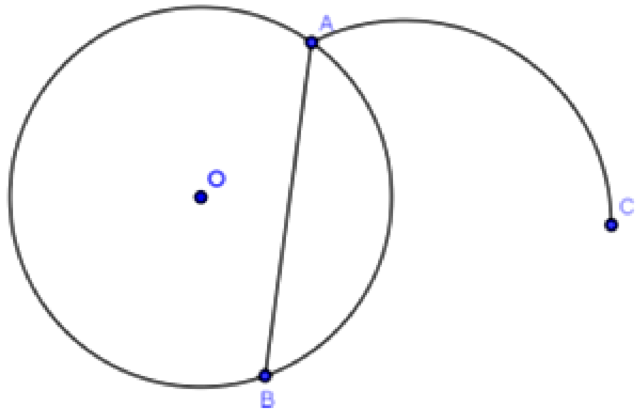


Figura 2.3: inverso de $\overline{AB}$ em relação a λ

a inversão não é uma isometria, pois não preserva distâncias.

Com as conclusões dadas acima, somos instigados a perguntar: qual seria a figura formada pela inversão de uma circunferência? E de um quadrado? E de um polígono qualquer? Mais uma vez o uso da Geometria Dinâmica será essencial para obtermos essas respostas. A princípio descrevemos a seguir o roteiro que nos possibilitará tirar uma conclusão em relação ao inverso de uma circunferência que passa pelo centro da circunferência de inversão:

1. Construa uma circunferência de inversão C de centro O;

2. Construa uma circunferência C_1 de centro O' passando por O;

3. Construa um ponto P sobre C_1;

4. Construa P', o inverso de P em relação à C;

5. Ligue o rastro do ponto P' e movimente o ponto P sobre toda a circunferência C_1(Figura 2.4).

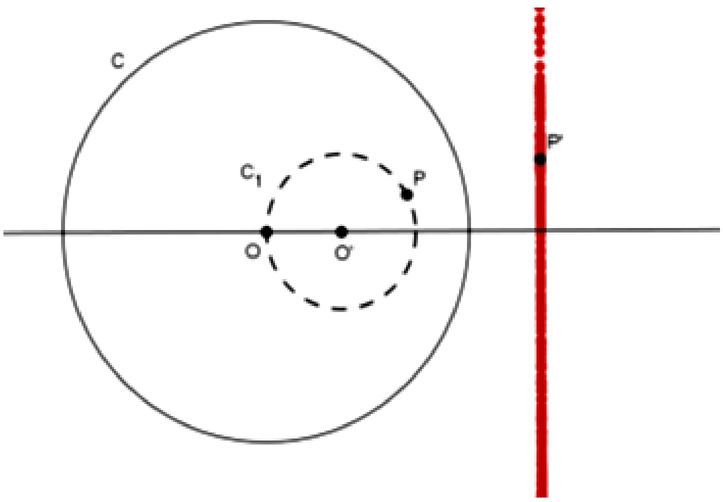


Figura 2.4: Rastro de P'

Observe que o rastro de P' forma uma reta. Mais do que isto, a reta formada é perpendicular a reta OO'. Logo, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2.2.2: Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação à C de uma circunferência C_1, de centro O', que passa por O é uma reta que não passa por O a qual é perpendicular a OO'.

Demonstração: Mostremos primeiramente que para qualquer ponto P sobre C_1, seu inverso P' estará sobre a reta r, perpendicular à OO',(veja Figura 2.5). Por construção, C é círculo de centro O e raio r e C_1 é círculo de centro O' passando por O. Considere P diametralmente oposto à O. Seja P' inverso de P relativo à C. Considere Q sobre C_1 e seja Q' seu inverso relativo à C. Os ângulos $\angle POQ$ e $\angle P'OQ'$ são congruentes. Além disso temos $\overline{OQ}.\overline{OQ'} = \overline{OP}.\overline{OP'}$, ambos inversos por construção. Logo, $\overline{OQ}/\overline{OP'} = \overline{OP}/\overline{OQ'}$. Observe também que os triângulos POQ e $Q'OP'$ são semelhantes (caso LAL). E como o ângulo OQP é reto (triângulo inscrito em circunferência em que um dos lados ($\overline{OP}$) é diâmetro), então o ângulo $OP'Q'$ também é reto pois é congruente a OQP. Logo, $Q'P'$ é reta (lado do triângulo) perpendicular a OO'.

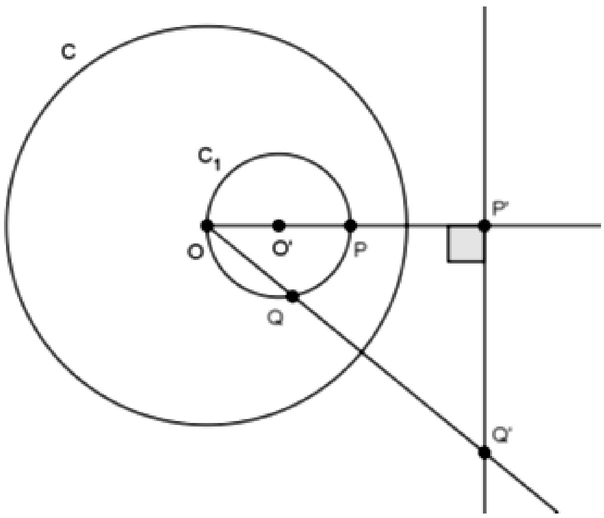


Figura 2.5: Inversão de circunferência que passa pelo centro de inversão.

Reciprocamente, devemos mostrar também que para qualquer ponto U' sobre r existe sua imagem U sobre C_1. Por construção, C é círculo de centro O e raio r e C_1 é círculo de centro O' passando por O. Considere $P \in C_1$ diametralmente oposto à O. Construamos P' inverso de P relativo à C e seja r a reta que passa por P' e é perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$. Considere U' ponto sobre r. A semirreta OU' corta C_1 em um ponto U. Os triângulos POU e $U'OP'$ são semelhantes (caso AAA). Logo, $OP/OU' = OU/OP'$. Portanto $(OP).(OP') = (OU).(OU')$. Mas, por construção $(OU).(OU') = r^2$ pois $(OP).(OP') = r^2$. Logo U e U' são inversos relativos a C, como queríamos mostrar. ■

Após vermos este resultado fica a seguinte pergunta: o inverso de qualquer circunferência resulta em uma reta? Vejamos o que acontece se a circunferência não passa pelo centro da circunferência de inversão. Seguindo os mesmos passos da construção anterior, temos a Figura 2.6:

Partindo das conclusões obtidas a partir do rastro de P', na figura acima, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2.3: Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em

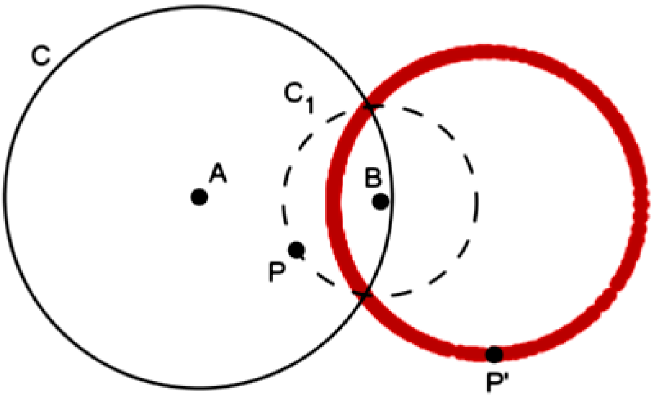


Figura 2.6: Rastro de P'

relação à C de uma circunferência C_1 que não passa por O é uma circunferência que não passa por O.

Demonstração: Seja C uma circunferência de centro O e raio r e C_1 uma circunferência que não passa por O. Seja s uma reta que passa por O e é secante à circunferência C_1, veja Figura 2.7. Sendo $A \neq B$ os pontos de interseção de s com C_1, então, os inversos A' e B' de A e B, respectivamente, em relação à C, pertencem à reta s. Agora, seja $P \notin s$ tal que $P \in C_1$. Se P' é o inverso de P em relação à C, então, temos que

$$r^2 = \overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OP}.\overline{OP'}.$$

Logo, $\overline{OA}/\overline{OP'} = \overline{OP}/\overline{OA'}$. Portanto, como os ângulos $P\widehat{O}A$ e $P'\widehat{O}A'$ coincidem, temos que os triângulos OAP e $OP'A'$ são semelhantes. Assim,

$$O\widehat{A}P \quad = \quad O\widehat{P'}A' \tag{2.1}$$

Analogamente, temos que

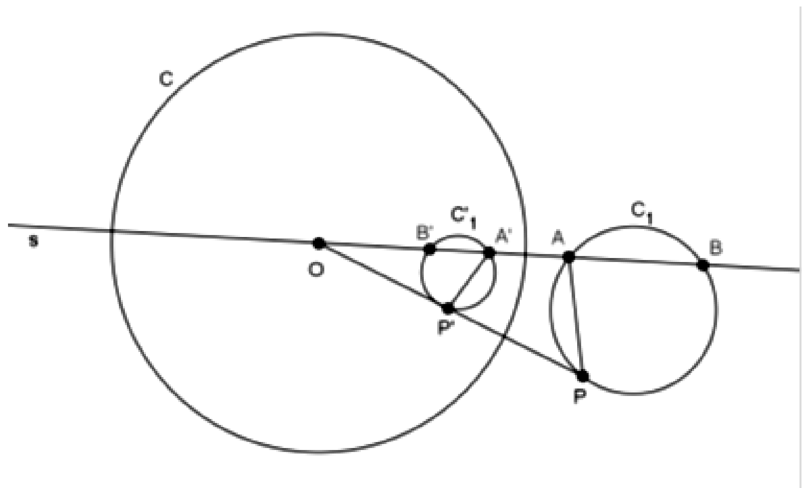


Figura 2.7: Inversão de circunferência que não passa pelo centro de inversão.

$$O\widehat{B}P \quad = \quad O\widehat{P'}B' \tag{2.2}$$

Agora, pelas propriedades de soma dos ângulos de um triângulo, temos que:

$$O\widehat{A}P = A\widehat{B}P + A\widehat{P}B = O\widehat{P}B + A\widehat{P}B.$$

Logo,

$$A\widehat{P}B = O\widehat{A}P - O\widehat{B}P \tag{2.3}$$

Por outro lado, O $\widehat{P'}A' = O\widehat{P'}B' + A'\widehat{P'}B'$, logo,

$$A'\widehat{P'}B' = O\widehat{P'}A' - O\widehat{P'}B' \tag{2.4}$$

Como consequência das equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), temos que

$$A\widehat{P}B = A'\widehat{P'}B'.$$

Portanto, como P descreve a circunferência C_1, então, P' descreve a circunferência C_1', como queríamos mostrar. ■

A partir desse momento, dedicaremos nossos esforços para tentarmos desvendar que tipo de figura será formada ao calcularmos o inverso de uma reta passando ou não pelo centro da circunferência de inversão. Feito isto, estaremos em condições de resolver alguns problemas da Geometria Euclidiana por meio da inversão.

Proposição 2.2.4: Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação a C de uma reta s que passa por O é a própria reta s.

Demonstração: Vamos mostrar que os inversos dos pontos de s também estão em s. Veja Figura 2.8.

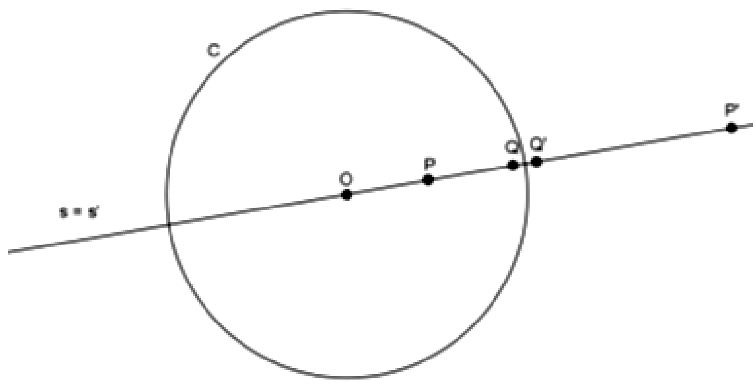


Figura 2.8: Inversão da reta que passa pelo centro de inversão.

Se $P \neq O$ é um ponto da reta s, então, o inverso P' de P pertence à semirreta $\overrightarrow{OP}$, logo, como P e O pertencem à s, então, $P' \in s$. Se $P = O$, então, seu inverso que é Ω pertence à s, pois pertence a todas as retas. Agora, resta mostrar que cada ponto

Q de s é inverso de algum ponto de s. Como $Q \in s$, então, chamando de P o inverso de Q temos que $P = Q' \in s$. Logo, $P' \in s$ e, como $P' = Q'' = Q$, então, Q é o inverso de um ponto P de s. Portanto, temos que $s' = s$, como queríamos mostrar.

■

Proposição 2.2.5: Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação à C de uma reta s que não passa por O é uma circunferência que passa por O.

Demonstração: Dada uma reta s que não passa em O, trace a semirreta $\overrightarrow{OA}$ perpendicular a s no ponto A e o ponto A', inverso de A, veja Figura 2.9. Para cada $P \in s$, $P \neq A$, trace seu inverso P'. Dessa forma, tem-se

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OP}.\overline{OP'} = r^2.$$

E assim como na demonstração da Proposição 2.2.2 , concluímos que os triângulos $\Delta OA'P'$ e ΔOPA são semelhantes (pelo caso LAL de semelhança) e, portanto, o triângulo $\Delta OA'P'$ é retângulo em P'.

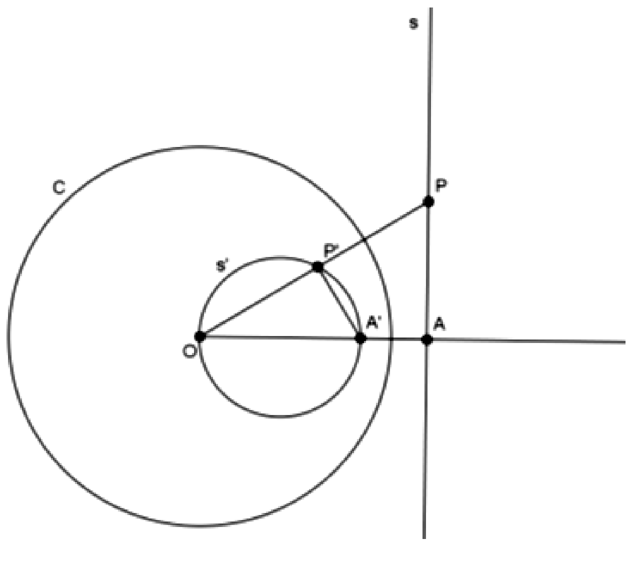


Figura 2.9: Inversão da reta que não passa pelo centro de inversão.

Mas como todo triângulo retângulo é inscritível numa semicircunferência, segue que P' está na circunferência de diâmetro OA'. Como queríamos mostrar. ■

2.3 Propriedades da Inversão Geométrica

Ao focarmos na resolução dos problemas de Apolônio, torna-se indispensável abordarmos algumas propriedades de tangência envolvendo inversão.

Proposição 2.3.1: Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Se t é uma reta que não passa por O, então a reta tangente à circunferência t' (inversa de t) em O é paralela à reta t.

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que a reta tangente t_0 à circunferência t' no ponto O intercepte a reta t num ponto P que não é Ω. Se $P = t_0 \cap t$, então, $P \neq O$, pois $O \notin t$, e $P' \in t_0' \cap t'$. Pela Proposição 2.2.4, temos $t_0' = t_0$ e então os pontos P' e O pertencem à t_0 e também à circunferência t'. Logo, t_0 não é tangente a t'. Veja a Figura 2.10. ■

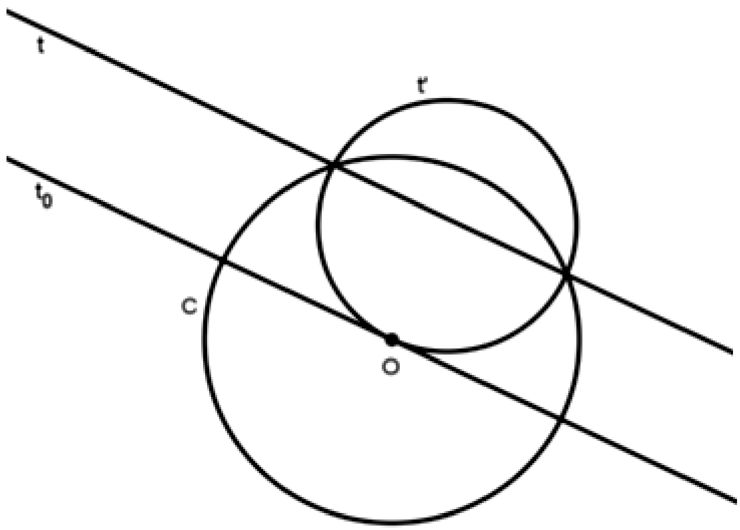


Figura 2.10: A reta t_0 tangente a t' e paralela a t.

Proposição 2.3.2: Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Sejam m e n duas retas concorrentes em P diferente de Ω . Então, o ângulo entre as retas m e n é o mesmo ângulo entre m' e n'.

Demonstração: Dividiremos em três casos possíveis:

I) Suponhamos que as retas m e n passam por O. Então, como $m = m'$ e $n = n'$, o ângulo entre m e n é o mesmo ângulo entre m' e n'.

II) Suponhamos que m e n não passem por O (veja Figura 2.11). Então, m' e n' são circunferências que passam por O. Pela Proposição 2.3.1, a reta tangente à m' em O é paralela à m e a reta tangente à n' em O é paralela à n. Logo, o ângulo entre m' e n' é igual ao ângulo entre m e n.

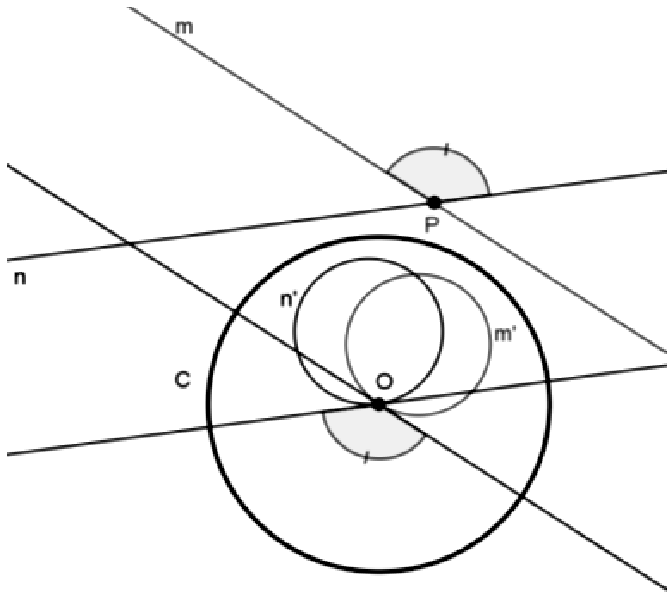


Figura 2.11: Ângulos entre retas concorrentes e suas inversas

III) Suponhamos que a reta m passe por O e n não passe por O (veja Figura 2.12). Então, $m' = m$ e n' é uma circunferência que passa por O, logo, m' e n' interceptam-se em O. Assim, o ângulo entre m' e n' no ponto P' é igual ao ângulo no ponto O. Além disso, a reta tangente à $m' = m$ em O é a própria reta m e a reta tangente à n' em O é paralela à n. Portanto, o ângulo entre as retas tangentes à m'

e n' é igual ao ângulo entre m e n, como queríamos mostrar.

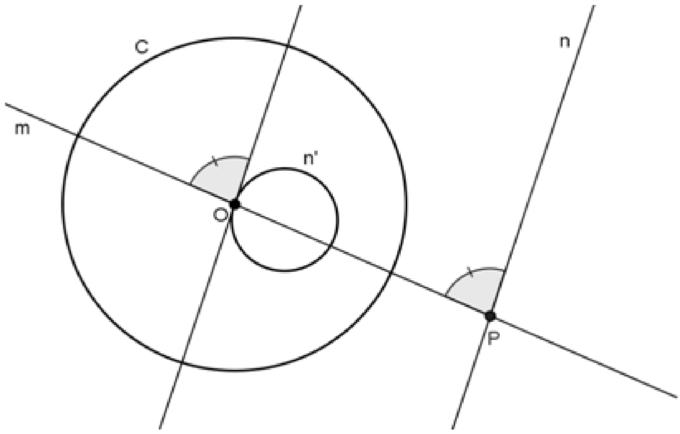


Figura 2.12: Ângulos entre retas concorrentes se uma passa por O e suas inversas

Isto conclui a prova da proposição. ■

Proposição 2.3.3: Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Se A e B são circunferências que não passam por O, então, o ângulo entre A e B é igual ao ângulo entre A' e B'.

Demonstração: Sejam A e B duas circunferências que não passam por O. Veja Figura 2.13. Sejam t e u as retas tangentes à A e B, respectivamente, no ponto P de interseção das circunferências. Então, a circunferência t' é tangente à circunferência A' e a circunferência u' é tangente à B'. Pela Proposição 2.3.2, o ângulo entre t e u é igual ao ângulo entre t' e u'. Sejam v a reta tangente à A' no ponto P' e w a reta tangente à B' no ponto P'. Assim, v é tangente à t' em P' e w é tangente à u' em P'. Logo, o ângulo entre v e w é o ângulo entre t' e u' que, por sua vez, é o ângulo entre t e u, como queríamos demonstrar. ■

A proposição a seguir não será demonstrada neste trabalho. No entanto, o leitor pode encontrar sua demonstração em [5].

Proposição 2.3.4: Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Se O, P e P_0 estão alinhados, então, P e P_0 são inversos em relação à C se, e somente se, qualquer circunferência que passe por P e P_0 for ortogonal à circunferência C.

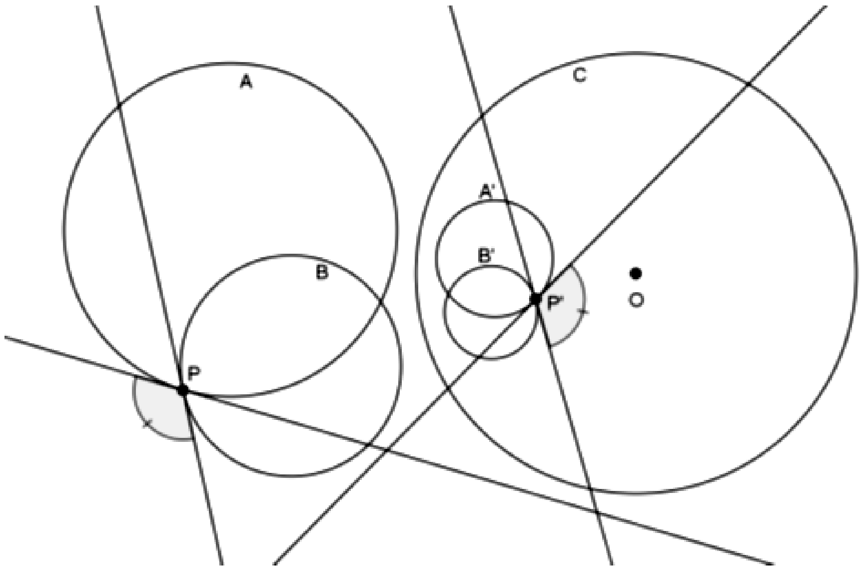


Figura 2.13: A inversão preserva ângulos de circunferências

Uma curiosidade referente à inversão de circunferência diz respeito ao seu centro. Intuitivamente, somos levados a imaginar que o centro da circunferência dada por uma inversão é o inverso do centro da respectiva circunferência invertida. Será isto verdade? Analisemos a próxima proposição:

Proposição 2.3.5: Seja C uma circunferência de inversão de centro O e D uma circunferência que não passa por O. Seja A o inverso de O em relação à D e D' a inversa de D com relação à C. Então, A', o inverso de A em relação à C é o centro da circunferência D'.

Demonstração: Seja t a reta que passa pelos centros O de C e B de D, veja Figura 2.14. Se A é o inverso do ponto O em relação à D, então, $A \in t$. Seja S uma circunferência que passa pelos pontos O e A, então, S é ortogonal a D. Agora, a inversa S' da circunferência S em relação à C é uma reta, pois, S passa pelo centro de C. Mais do que isso, S' é ortogonal à D', logo, S' passa pelo centro O_1 de D'. Temos também que $O_1 \in t$, logo, $O_1 = S' \cap t$. Como $A \in t$ e $A \in S$, então, sendo

A' o inverso de A em relação à C, temos que $A' = S' \cap t'$, mas, como $t = t'$, então $A' = S' \cap t$. Portanto, $A' = O_1$, ou seja, o inverso de A em relação à C é centro da circunferência D', como queríamos demonstrar. ■

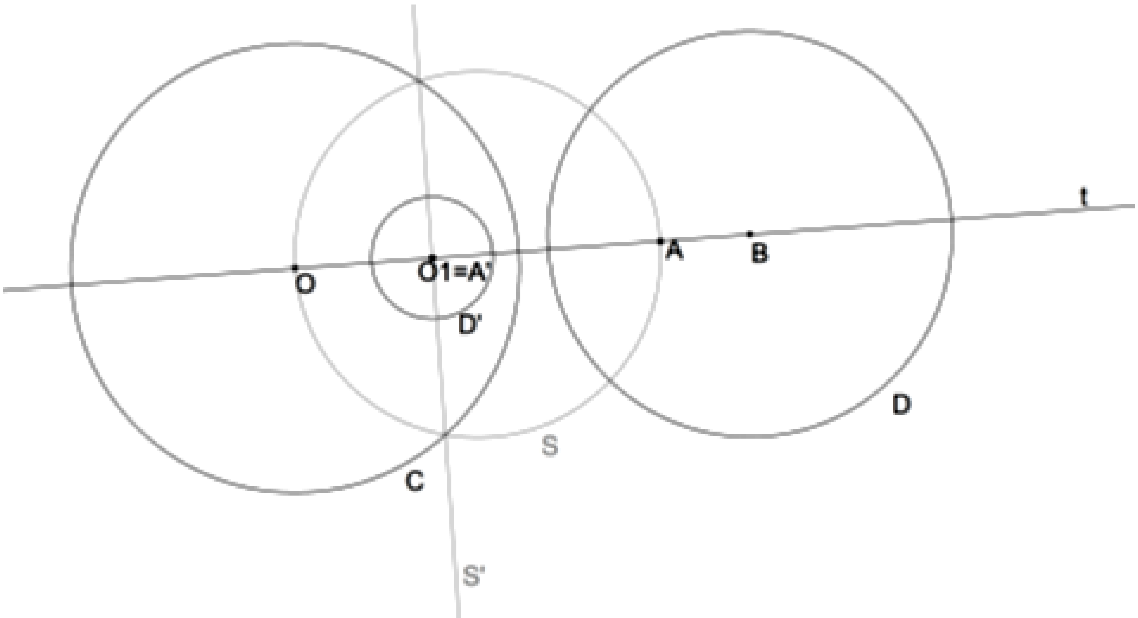


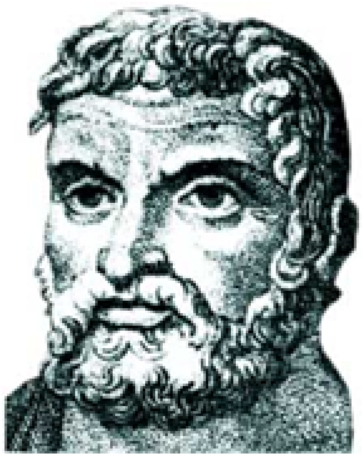
Figura 2.14: O centro da circunferência invertida

Capítulo 3

Os Problemas de Apolônio

3.1 Contexto Histórico

O matemático Apolônio nasceu em Perga, cidade da Anatólia, cerca de 262 a.C onde hoje é a atual Turquia. Ainda jovem, Apolônio deixou Perga em direcção a Alexandria, onde estudou sob a orientação dos seguidores de Euclides, tendo mais tarde ensinado na Universidade de Alexandria. Sabe-se que Apolônio foi autor de uma vasta obra, apesar de muitos desses livros terem se perdido ao longo do tempo. Na verdade, apenas dois de seus diversos trabalhos se preservaram substancialmente: "Dividir Segundo uma Razão" e "As Cônicas", sendo esta última considerada sua obra prima. Este trabalho possui cerca de quatrocentas proposições em seus oito livros, e só os quatro primeiros ainda existem, em grego. Há também uma versão traduzida dos três livros seguintes, feita pelo matemático árabe Tâbit ibn Qorra (826-901). Esta obra extraordinária traz um estudo exaustivo das curvas que a nomeiam, e supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmus (380-320 a.C.) e Euclides sobre o assunto. Mais do que isso, afirma-se que Apolônio tenha completado e ampliado a obra "Cônicas" de Euclides, composta de quatro livros, que, juntamente com outros trabalhos perdidos, é conhecida apenas por referências posteriores.



Apolônio de Pérgamo (262 a.C – 190 a.C)

Entre outras contribuições, Apolônio obteve uma aproximação melhor de π do que aquela conhecida $\frac{22}{7} < \pi < \frac{23}{7}$, estabelecida por Arquimedes. Em um de seus trabalhos intitulado "Sobre Tangências", descrito por Pappus de Alexandria (300 d.C), constam os dez problemas de Apolônio que é enunciado do seguinte modo:

"Dados três objetos do plano, cada um dos quais podendo ser pontos, retas ou circunferências, construir todas as circunferências tangentes aos três simultaneamente".

Os casos são: três pontos dados (PPP), três retas dadas (RRR), dois pontos e uma reta (PPR), dois pontos e uma circunferência (PPC), um ponto e duas retas (PRR), um ponto e duas circunferências (PCC), uma circunferência e duas retas (CRR), um ponto, uma reta e uma circunferência (PRC), uma reta e duas circunferências (RCC) e três circunferências (CCC). Dentre os quais o mais simples, o caso de três pontos, até o mais difícil que é traçar circunferências tangentes a outras três dadas. Este último caso foi considerado um desafio para os matemáticos dos séculos XVI e XVII que pensavam que o autor não o teria resolvido. Foi resolvido pelo belga Adriaan van Roomen (1561 - 1615) no fim do século XVI, usando interseção de cônicas. Pouco tempo depois, o francês François Viète (1540 - 1603) resolveu-o utilizando apenas régua e compasso. Veja [4] para maiores detalhes.

3.2 Resolução dos Problemas de Apolônio usando Inversão

Para construirmos as soluções dos dez problemas de Apolônio usando inversão, continuaremos fazendo uso do software de matemática dinâmica: o GeoGebra.

3.2.1 Problema 1 (PPP)

Neste caso a solução só é possível se os três pontos não estiverem alinhados. Vejam os passos a seguir:

1. Construa os três pontos O, P e Q;
2. Construa a circunferência C de inversão com centro em qualquer um dos pontos dados, digamos no ponto O;
3. Construa os inversos P' e Q' dos pontos P e Q, respectivamente, em relação a C;
4. Trace a reta r passando por P' e Q';
5. Construa r', o inverso de r em relação a C, que é a solução procurada (veja Figura 3.1).

3.2.2 Problema 2 (RRR)

Para este caso o número de soluções dependerá das posições relativas entre as retas, são elas: as três serem paralelas, ou coincidentes, ou concorrentes no mesmo

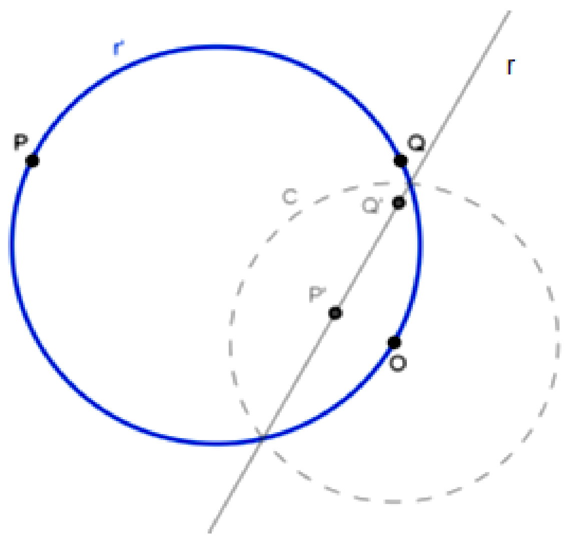


Figura 3.1: Solução do caso PPP

ponto, ou concorrentes duas a duas, ou duas paralelas e uma concorrente a ambas. Para os subcasos de ambas serem paralelas ou concorrentes num mesmo ponto não existe solução e se forem coincidentes teremos infinitas soluções. Já para o subcaso de ter duas paralelas e uma concorrente a ambas, encontraremos duas soluções. Entretanto, focaremos nossa construção no subcaso das retas serem concorrente duas a duas, o que resultará em quatro soluções. Para a construção a seguir veja Figura 3.2.

1. Construa as três retas a, b e c concorrentes duas a duas;

2. Considere o triângulo ABC, onde A, B e C são os pontos de interseção entre as retas a e b, a e c, b e c, respectivamente;

3. Construa o incentro I do triângulo ABC;

4. Trace a reta r, perpendicular a c, passando por I e seja O o ponto de interseção entre r e c;

5. Construa a circunferência de inversão D de centro O e raio qualquer;

6. Construa as circunferências a' e b', inversas das retas a e b, respectivamente, em relação a D;

7. Trace a reta t, tangente às circunferências a' e b';

8. Construa t', a inversas de t em relação a D que é a circunferências inscrita no triângulo ABC e, consequentemente, tangente as retas a, b e c;

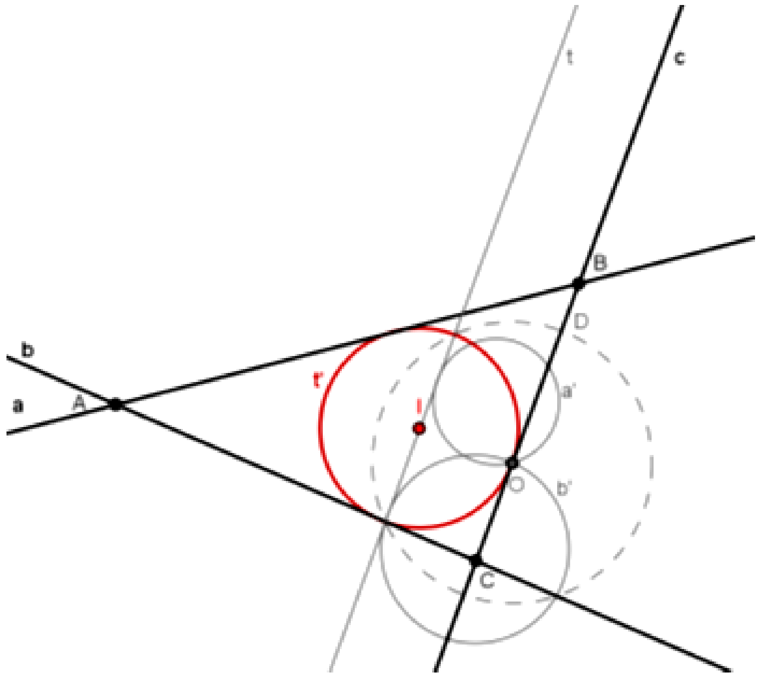


Figura 3.2: Circunferência inscrita no triângulo ABC

9. Agora, construa os três ex-incentro do triângulo ABC: um relativo a BC, outro relativo a AB e um último relativo a AC;

10. Proceda de maneira análoga aos passos de 4 a 8 acima para com os ex-incentros, e encontrarás as circunferências ex-inscritas aos lados BC, AB e AC, concluindo a solução procurada. Ver Figura 3.3.

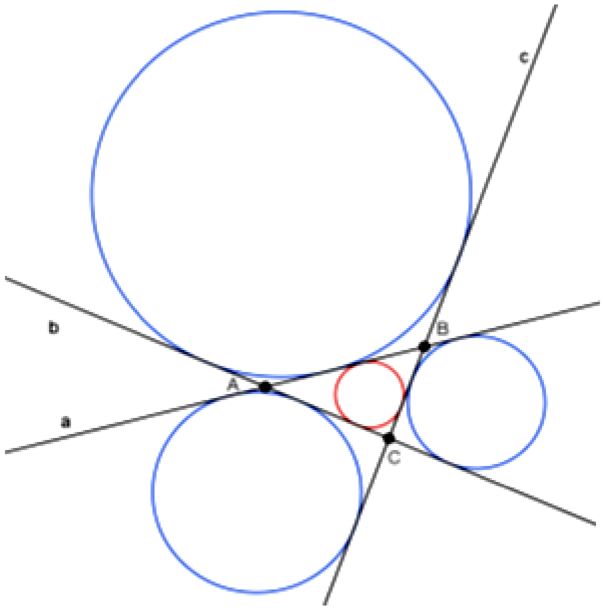


Figura 3.3: Solução do caso RRR

3.2.3 Problema 3 (PPR)

Vamos considerar os pontos dados em um mesmo semiplano e pertencentes a uma reta não paralela a reta dada, pois se esses pontos pertencerem a semiplanos distintos da reta dada, não haverá solução, e se pertencerem a uma reta paralela a reta dada, teremos uma única solução. Acompanhe a construção a seguir na Figura 3.4.

1. Trace a reta r e os pontos distintos A e B não pertencentes a r;
2. Construa a circunferência de inversão C de centro em A e raio AB;
3. Construa a circunferência r', inversa de r em relação a C;
4. Trace as retas a e b passando por B e tangentes a r';
5. Construa a' e b', inversas de a e b, respectivamente, em relação a C. a' e b' são as soluções procuradas.

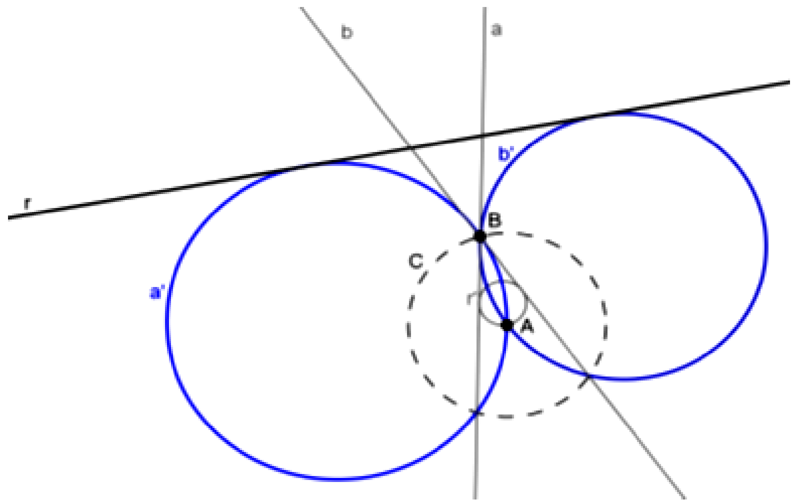


Figura 3.4: Solução do caso PPR

3.2.4 Problema 4 (PPC)

Para resolvermos este problema, devemos considerar ambos os pontos dados no interior da circunferência dada ou ambos no exterior, pois se eles pertencerem à regiões distintas da circunferência não haverá solução. Para acompanhar a construção a seguir veja Figura 3.5.

1. Construa a circunferência C de centro O com os pontos distintos A e B no exterior da mesma;

2. Construa uma circunferência D passando por A e B e secante a C;

3. Considere os pontos E e F, interseções entre C e D;

4. Trace as retas a passando por E e F, e b passando por A e B e considere o ponto G interseção entre a e b;

5. Construa a circunferência C_1 com centro no ponto médio H do segmento OG e raio OH;

6. Considere I e J os pontos de interseções entre C e C_1;

7. Construa duas circunferências de inversão, C_2 e C_3, com centros em I e J, respectivamente, e raios qualquer;

8. Construa A' e B', os inversos de A e B, respectivamente, em relação a C_2. E A'' e B'', os inversos de A e B, respectivamente, em relação a C_3;

9. Traçar a reta r passando por A' e B', e a reta s passando por A'' e B'';

10. Finalmente, construa r' e s', as inversas de r e s em relação a C_2 e C_3, respectivamente.

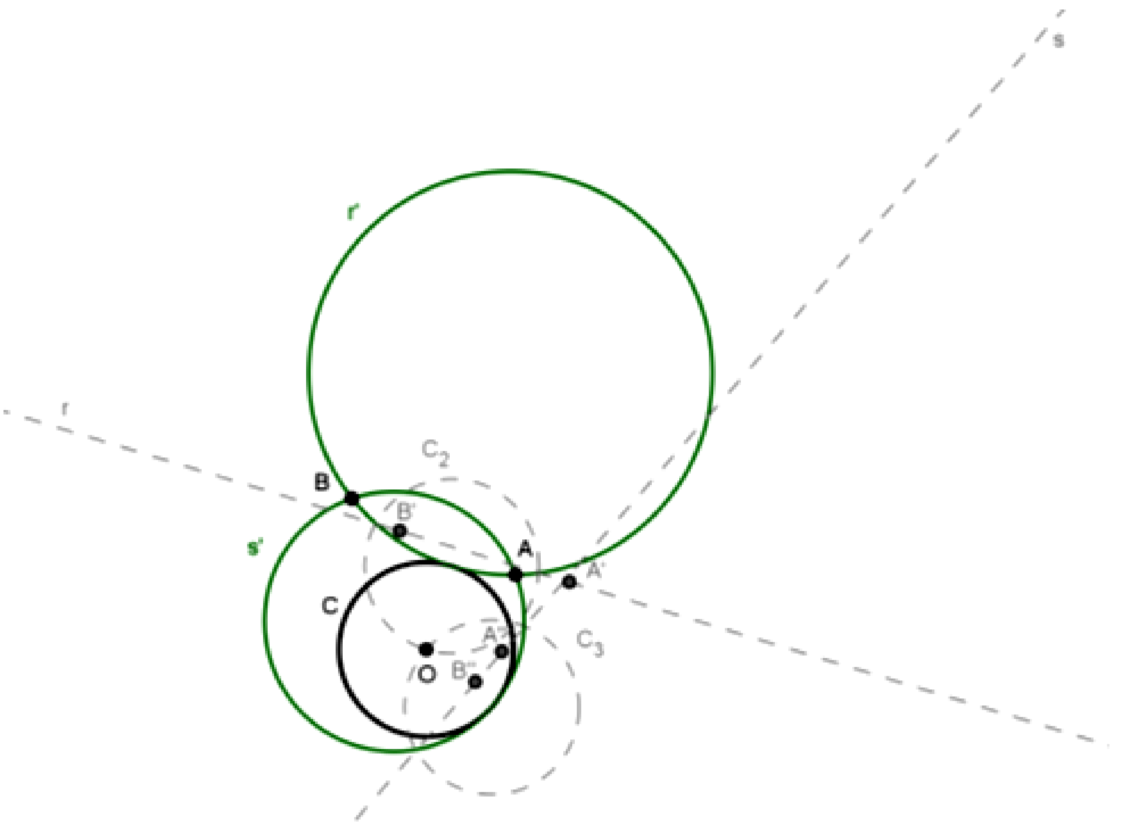


Figura 3.5: Solução do caso PPC

3.2.5 Problema 5 (PRR)

Observe que este problema tem solução em quatro subcasos: duas retas paralelas e o ponto no interior de ambas, duas retas paralelas e o ponto pertencente a uma delas (reduzindo ao caso RR), duas retas concorrentes e o ponto pertencente a uma delas (também RR) e duas retas concorrentes e o ponto não pertencente a nenhuma delas. Focaremos nossa construção neste último caso. Para acompanhar a construção veja Figura 3.6.

1. Construa as retas concorrentes r e s e o ponto A não pertencente a nenhuma delas;

2. Construa a bissetriz b, do ângulo formado por r e s , de maneira que esteja contida na região do plano a qual pertença o ponto A;

3. Encontre A', a reflexão do ponto A em relação à b;

4. Construa a circunferência de inversão C de centro A' e raio AA';

5. Construa a inversa de uma das retas, r ou s, em relação a C. Considere r', inversa de r;

6. Trace as retas a e c, tangentes a r' e passando por A;

7. Encontre a' e c', inversas de a e c, respectivamente, em relação a C as quais são as soluções procuradas.

3.2.6 Problema 6 (PCC)

Para este problema temos dois subcasos solucionáveis: as duas circunferências serem secantes e o ponto exterior a ambas (há duas circunferências como solução), e o subcaso que iremos tratar em seguida que consiste de duas circunferências disjuntas e o ponto exterior a ambas (há quatro soluções possíveis).

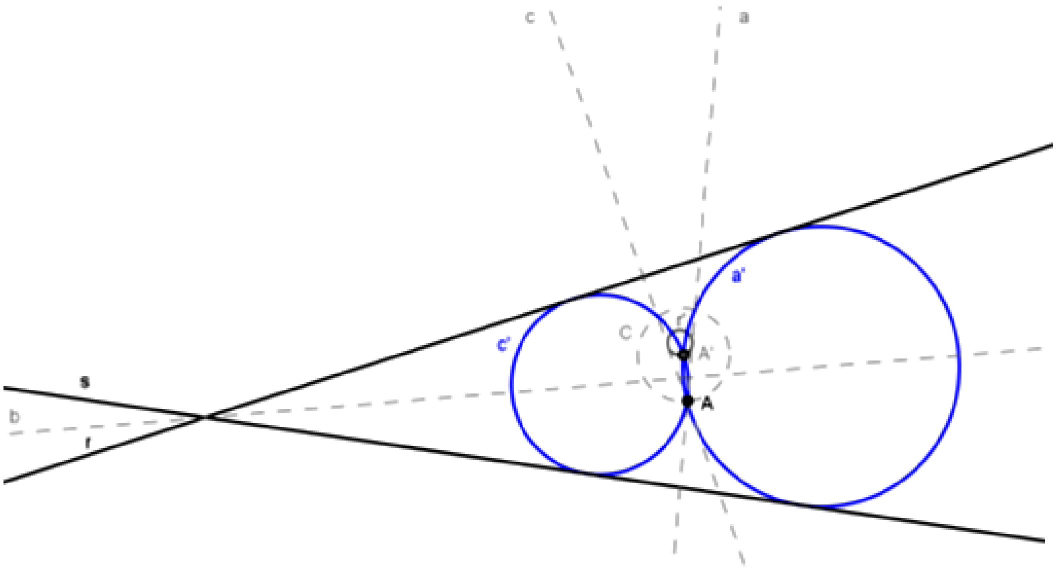


Figura 3.6: Solução do caso PRR

1. Construa as circunferências C e D e o ponto P exterior a ambas;

2. Com centro em P, construa a circunferência de inversão E;

3. Construa C' e D', inversos de C e D respectivamente, em relação a E;

4. Trace as retas a, b, c e d tangentes as circunferências C' e D' simultaneamente (Figura 3.7);

5. Por último, construa as inversas a', b', c' e d' das retas a, b, c e d respectivamente, em relação a E (Figura 3.8).

3.2.7 Problema 7 (CRR)

A análise que faremos nesse caso será baseada no subcaso em que temos duas retas concorrentes e exteriores a circunferência dada. Como a solução procurada

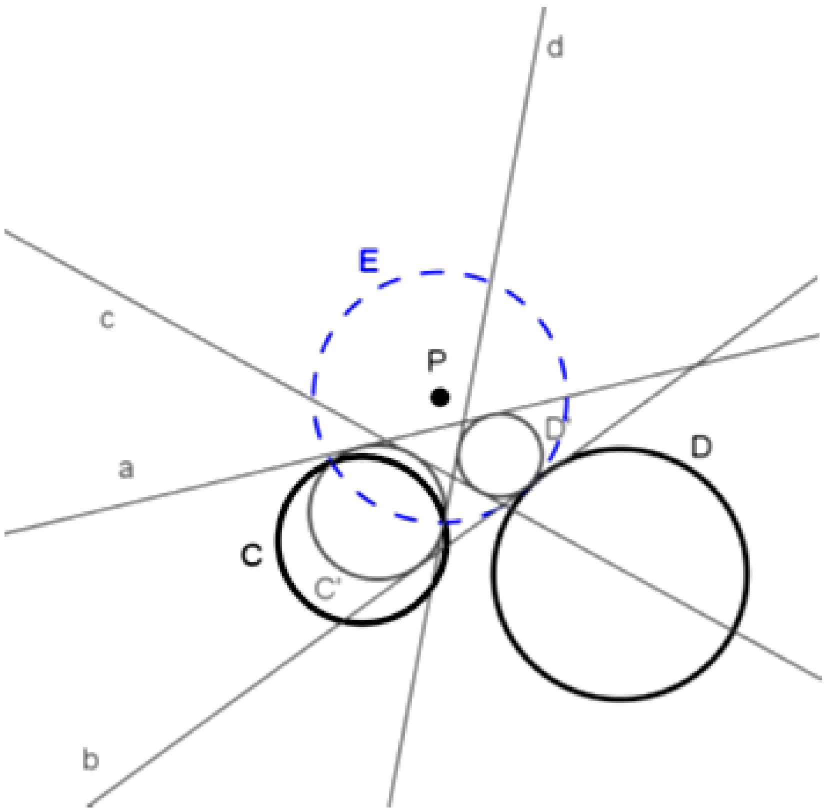


Figura 3.7: Retas tangentes a C' e D' simultaneamente

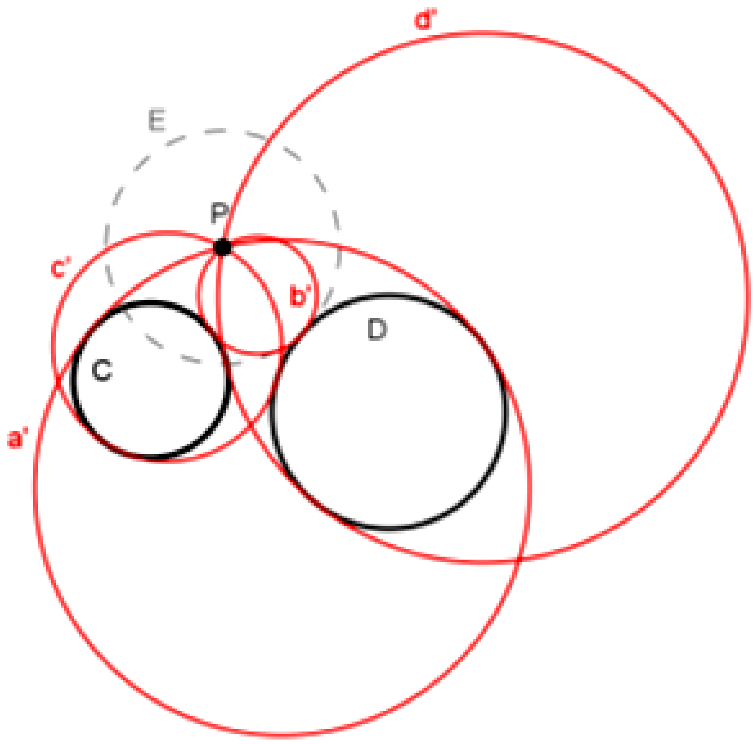


Figura 3.8: Solução do caso PCC

consiste de quatro circunferências que além de serem tangentes às duas retas concorrentes, também serão tangentes a circunferência dada, então a distância entre os centros da circunferência dada e de cada circunferência da solução será a soma ou a diferença entre seus respectivos raios.

1. Construa as retas s e t e a circunferência C de centro O e raio r;

2. Construa um par de retas paralelas a s com distância r da mesma. Sejam g e h essas retas;

3. De forma análoga ao passo anterior faça para com a reta t. Sejam p e q essas retas;

4. Proceda analogamente ao caso PRR e construa circunferências auxiliares C_1 e C_2 passando por O e tangentes as retas h e p (Figura 3.9);

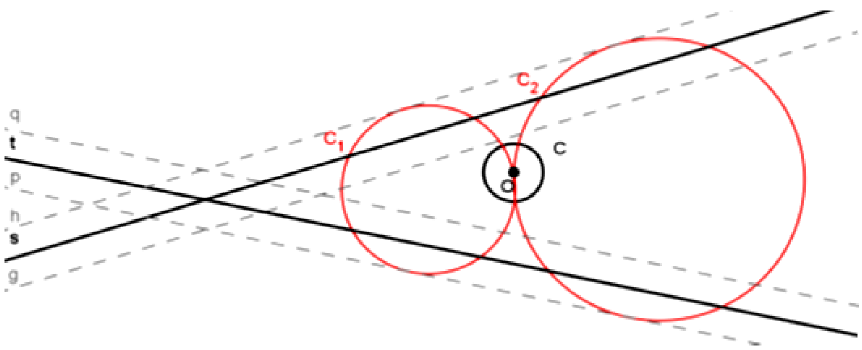


Figura 3.9: Circunferências auxiliares C_1 e C_2

5. Considere o ponto K, interseção entre C_1 e h;

6. Trace a reta d, perpendicular à s passando por K. Seja N o ponto de interseção entre d e s;

7. Construa a bissetriz b do ângulo $A\widehat{P}B$ (Figura 3.10);

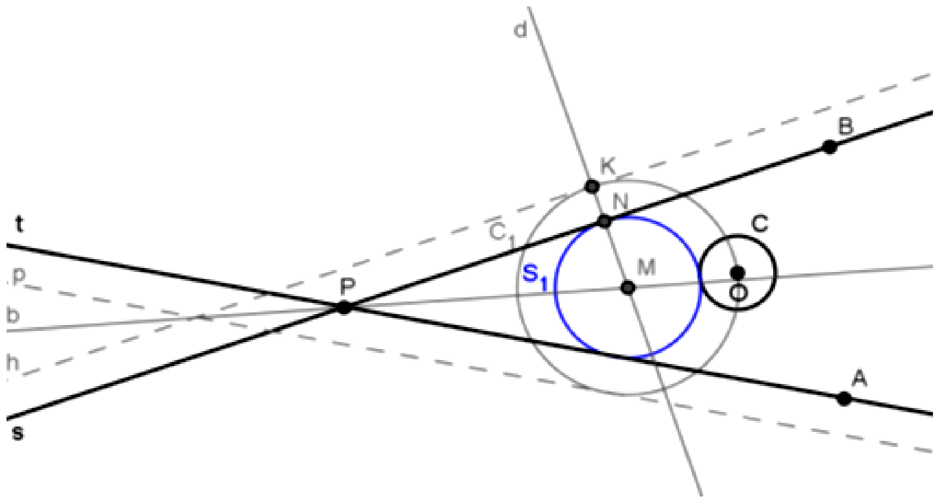


Figura 3.10: 1ª parte da solução do caso CRR

8. Considere M como ponto de interseção entre b e d e construa a circunferência de centro M e raio MN, que é a 1ª circunferência-solução do problema. (Lembre-se que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados deste ângulo);

9. Agora, trace a reta f perpendicular a s, passando pelo ponto L, interseção de h e C_2;

10. Sejam Q e R os pontos de interseção entre f e s, e entre b e f respectivamente; Construa a circunferência de centro R e raio QR, que é a 2ª parte da solução (Figura 3.11);

11. Análogo a todos os passos anteriores, encontre as outras duas soluções utilizando as retas g e q. Observe, na ilustração da Figura 3.12, como ficará a solução final.

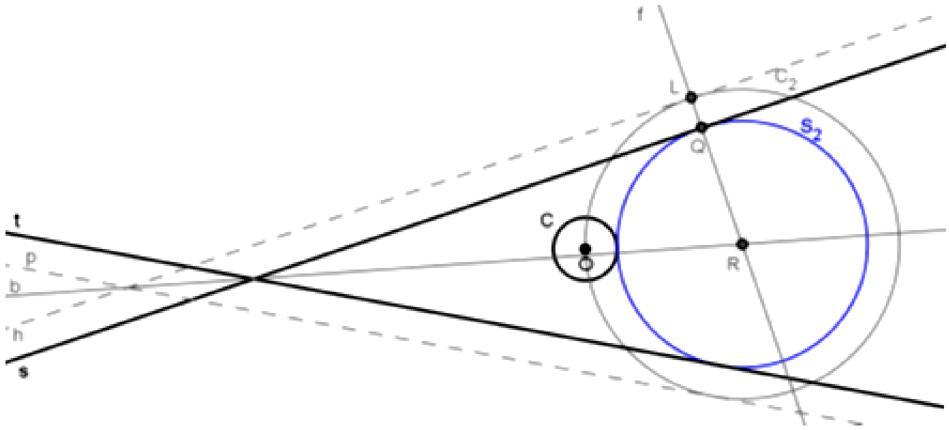


Figura 3.11: 2ª parte da solução do caso CRR

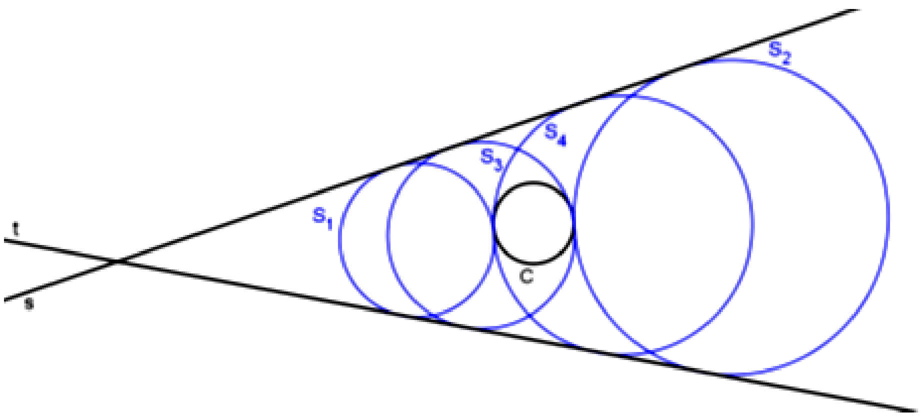


Figura 3.12: Solução do caso CRR

3.2.8 Problema 8 (PRC)

Assim como nos problemas anteriores, o caso PRC possui vários subcasos, sendo que o mais interessante é sem dúvida aquele em que os três elementos não se interceptam, já que o subcaso em que o ponto é interno a circunferência e a reta não é secante a mesma não tem solução; e se o ponto estiver no interior da circunferência e a reta tangencia a mesma teremos apenas uma solução; mas se o ponto é comum à reta e à circunferência haverá infinitas soluções. Vamos a construção do primeiro subcaso citado:

1. Construa os três elementos independentes um do outro: a circunferência C, a reta r e o ponto P exterior a circunferência;

2. Com centro em P, construa a circunferência de inversão D;

3. Construa C' e r', inversas de C e r respectivamente, em relação a D (Figura 3.13);

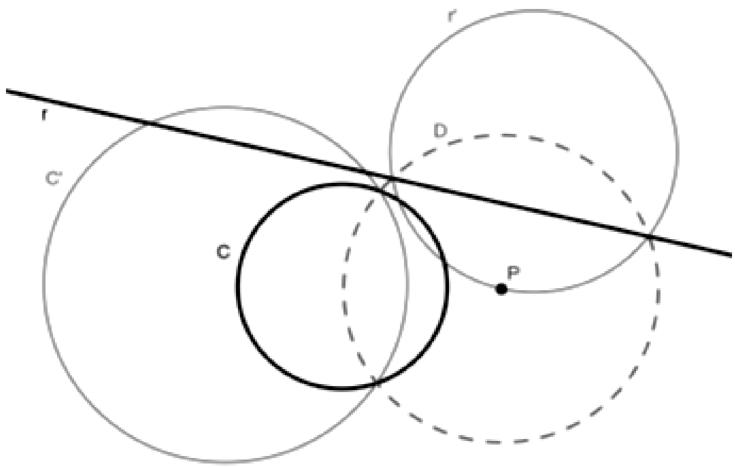


Figura 3.13: Inversas da reta r e da circunferência C

4. Trace as retas a, b, c e d, tangentes a C' e r' simultaneamente;

5. Construa as inversas a', b', c' e d' das retas a, b, c e d respectivamente, que serão as quatro soluções procuradas (Figura 3.14).

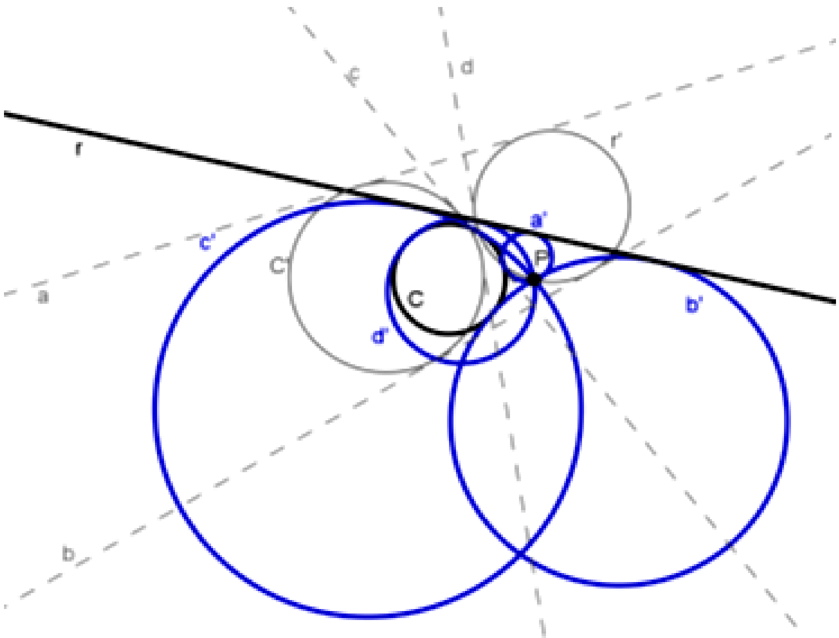


Figura 3.14: Solução do caso PRC

Os dois últimos casos sugerem uma atenção especial pelo fato de não termos um ponto de interseção que possa ser o centro da circunferência de inversão, o que faria com que tivéssemos duas ou três retas no Problema 9 (interseção da reta com uma das circunferências ou interseção entre as duas circunferências) e duas retas no Problema 10 (interseção entre duas circunferências), tornando as resoluções mais simples já que seriam reduzidos a um dos casos solucionados anteriormente. No entanto, para resolvermos estes casos lançaremos mão de uma estratégia geométrica: encontrar uma inversão que transforme os três elementos envolvidos nos citados problemas em três circunferências, de maneira que possamos obter um caso particular mais simples de se resolver, veja [5] e [8]. Para tanto, faz-se necessário enunciarmos mais alguns conceitos da Geometria Plana:

Proposição 3.2.1: Sejam C e D circunferências disjuntas e não concêntricas. Então, existe um único par de pontos P e Q que são inversos em relação a C e inversos em relação à D simultaneamente.

Demonstração: Provemos primeiramente a existência. Sejam C e D circunferências disjuntas e não concêntricas. Chamemos de s a reta dos centros e AB e EF os diâmetros determinados por s em C e D, respectivamente. Agora, uma inversão com centro em A transforma a circunferência C em uma reta C' e a circunferência D em uma circunferência D'. A inversa s' de s é a própria reta s (Figura 3.15).

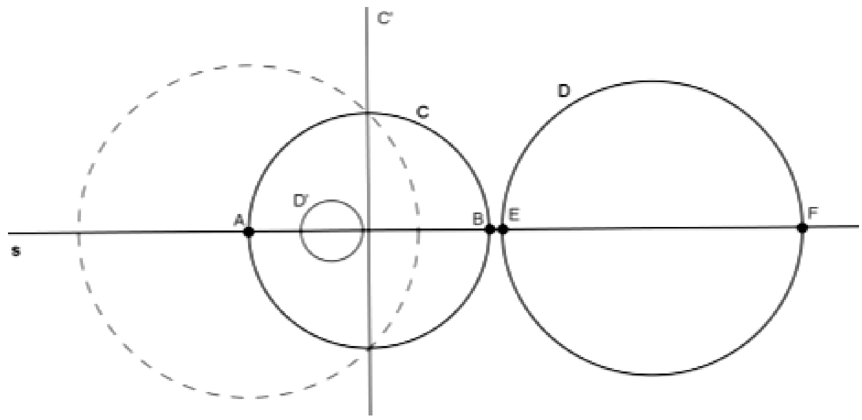


Figura 3.15: Inversão com centro em A das circunferências C e D

Com centro em B', existe uma única circunferência G ortogonal a D'(Proposição 1.2.4). Desta forma, temos que G também é ortogonal a C', pois, C' é uma reta que passa pelo centro de G. Note que s' é ortogonal a C' e D'. Portanto, como a inversão preserva ângulos, sendo G' o inverso de G, temos que G' e s são ortogonais a C e a D. Portanto, suas interseções P e Q são inversos em relação a C e a D simultaneamente (Figura 3.16).

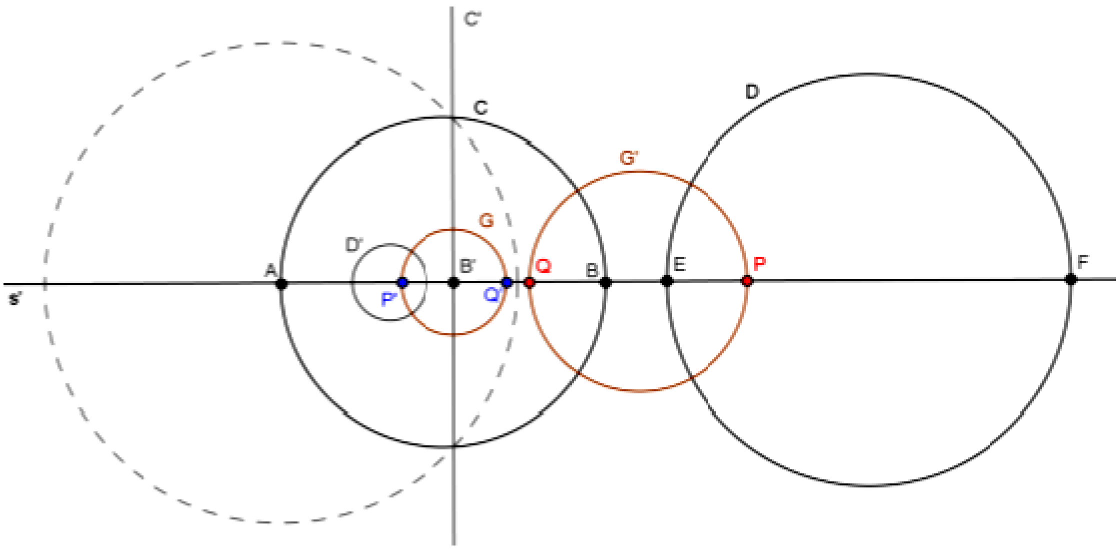


Figura 3.16: Descobrindo P' e Q'

Provemos agora a unicidade. Para encontrar pontos que são simultaneamente inversos em relação a C e a D, devemos encontrar as interseções de quaisquer duas circunferências X e Y que sejam ortogonais a C e a D. Por preservar ângulos, podemos pensar em encontrar duas circunferências X' e Y' que sejam simultaneamente ortogonais a C' e a D'. Mas, com a inversão feita acima, temos que C' é uma reta e, portanto, as circunferências ortogonais a C' têm centros em C'. Para mostrar a existência, usamos um caso particular onde, $X' = s'$ e $Y' = G'$. Queremos mostrar agora, que qualquer circunferência ortogonal a C' e a D' simultaneamente, passa por P' e Q'. Assim, seja O um ponto de C'. Com centro em O, existe uma única circunferência X' ortogonal a D'. Agora, seja W a circunferência de centro em O passando por P' (inverso de P). Então, como P' e Q' são inversos em relação a C' e W é ortogonal a C', temos que W passa por Q'. Logo, como P' e Q' são inversos com relação a D', então, W é ortogonal a D', mas, como X' é única com centro em O ortogonal a D', então, $W = X'$ e, portanto, X' passa por P' e Q'. Concluímos, então, que qualquer circunferência ortogonal a C' e a D' passa por P' e Q', logo, este par de pontos é o único a ser inverso em relação a C' e a D'

simultaneamente. Portanto, P e Q é o único par de pontos inversos em relação a C e a D simultaneamente. ■

Definição 3.2.1: Sejam C e D circunferências disjuntas e não concêntricas de centros O_1 e O_2, respectivamente. Chamemos de s a reta que passa por O_1 e O_2 e AB e EF os diâmetros determinados por s em C e D, respectivamente. Os pontos P e Q que são conjugados harmônicos simultaneamente de AB e EF são denominados **pontos mágicos** de C e D.

Os pontos mágicos de C e D são, portanto, os pontos que são inversos em relação a C e a D simultaneamente.

Com a definição de pontos mágicos, podemos demonstrar a seguinte proposição que será de grande importância para resolvermos os dois últimos casos dos problemas de Apolônio:

Proposição 3.2.2: Sejam C e D circunferências disjuntas e não concêntricas. Então, existe uma inversão que transforma C e D em circunferências concêntricas.

Demonstração: Sejam P e Q os pontos mágicos de C e D. Seja S uma circunferência com centro em P e C' a inversa de C em relação à S. Temos que o inverso do centro P de S em relação à C é o ponto Q, logo, pela Proposição 2.3.5, o inverso de Q em relação à S é o centro de C'. Analogamente, se D' é o inverso de D em relação à S, então, como o inverso de P em relação à D é o ponto Q, temos que o inverso de Q em relação à S é o centro de D'. Portanto, Q' é o centro de C' e D', ou seja, C' e D' são concêntricas (Figura 3.17). ■

Agora, com essas últimas considerações feitas, estamos aptos a concluir as resoluções dos problemas de Apolônio por meio da inversão.

3.2.9 Problema 9 (RCC)

Assim como na maioria dos problemas anteriores, o número de soluções depende da posição dos três elementos envolvidos. Contudo, abordaremos o caso mais geral:

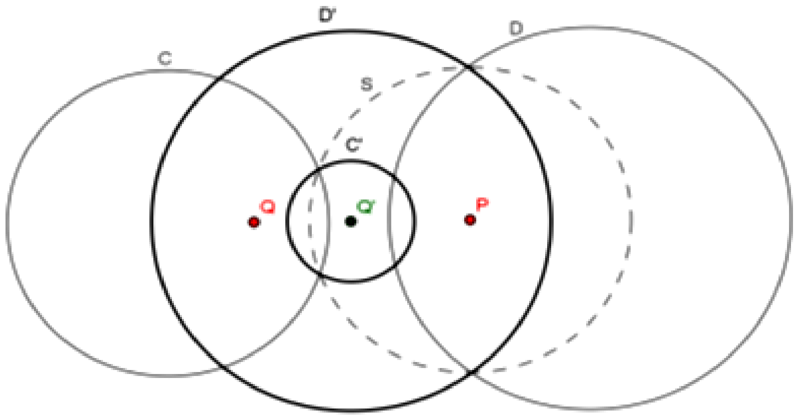


Figura 3.17: Circunferências concêntricas por meio da inversão

duas circunferências disjuntas contidas em um mesmo semiplano e uma reta exterior a ambas as circunferências.

1. Construa os três elementos independentes um do outro: a circunferência C, a circunferência D e a reta s;

2. Construa P e Q, pontos mágicos de C e D, de maneira que P seja interno a D. Logo Q será, obrigatoriamente, interno a C;

3. Construa a circunferência de inversão T com centro em P;

4. Construa os inversos C', D' e s' de C, D e s, respectivamente, em relação a T (Figura 3.18);

5. Construa a circunferência A com centro em Q' e raio $(r'_C + r'_D)/2$, onde Q' é o inverso de Q em relação a T;

6. Construa as quatro circunferências tangentes a s' com centros pertencentes à A e de diâmetro $r'_D - r'_C$. Sejam R_1, R_2, R_3 e R_4 tais circunferências (Figura 3.19);

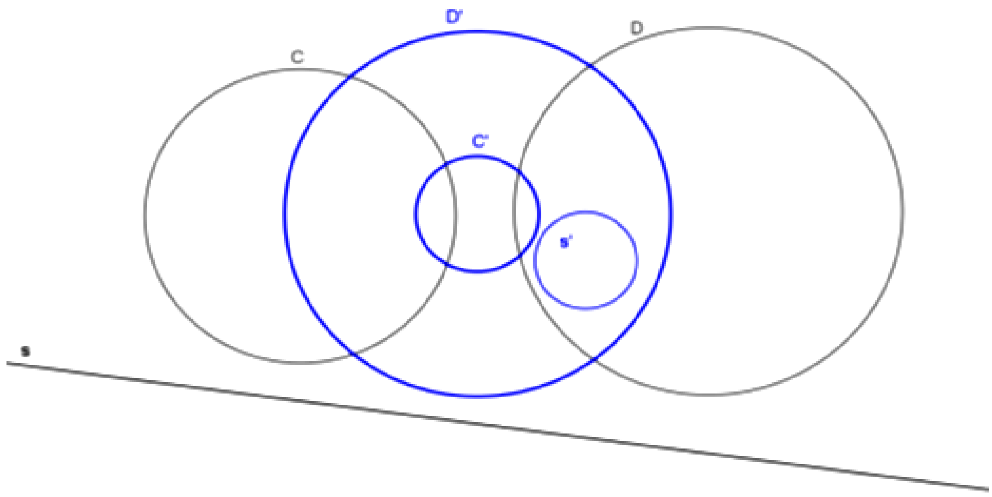


Figura 3.18: Inversos das circunferências C e D e da reta s

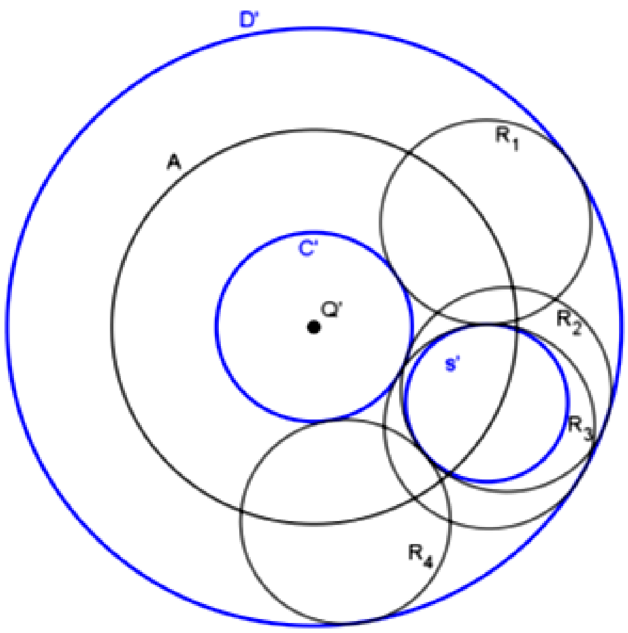


Figura 3.19: Circunferências com centro em A e tangentes a C', D' e s' simultaneamente

7. Agora, construa a circunferência B de centro Q' e raio $(r'_D + r'_C)/2$ e trace as circunferências R_5, R_6, R_7 e R_8, tangentes a s', de centros pertencentes a B e cujo raio é $r'_D - r_B$. Veja Figura 3.20;

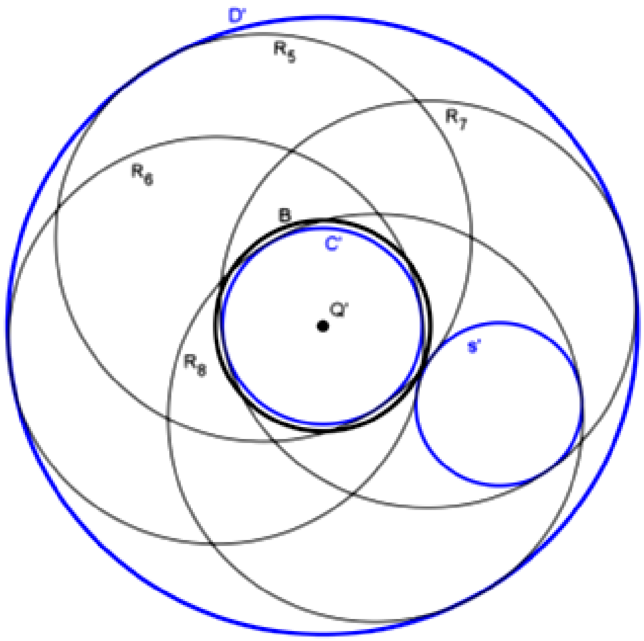


Figura 3.20: Circunferências com centro em B e tangentes a C', D' e s' simultaneamente

8. Calcule as inversas, em relação a T, das oito circunferências construídas acima, o que resulta na solução do problema (Figura 3.21).

3.2.10 Problema 10 (CCC)

Este último problema será solucionado fazendo a construção de forma análoga ao que fizemos no caso RCC. Isto faz sentido, haja vista que a inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão também é uma circunferência que não passa pelo centro de inversão (Proposição 2.2.3). Logo, ao invertermos a

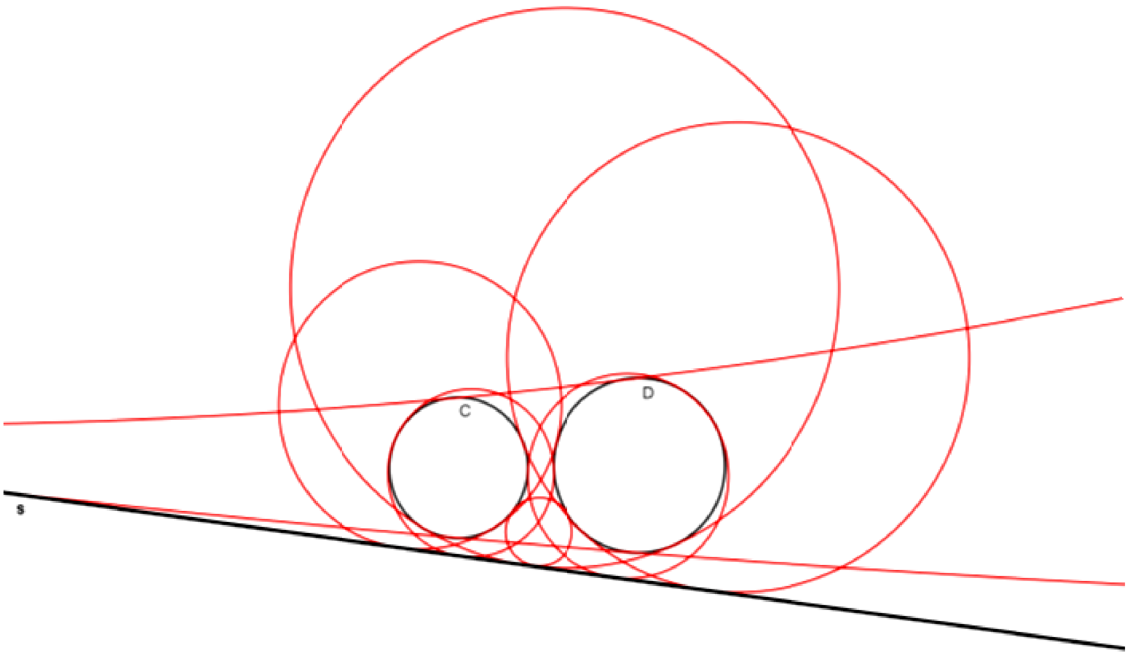


Figura 3.21: Solução do caso RCC

circunferência, cujos pontos mágicos não pertencem ao seu interior, obteremos uma circunferência contida no anel formado pelas circunferências concêntricas (Figura 3.22). Além disso, também teremos oito soluções se as circunferências dadas forem disjuntas (Figura 3.23).

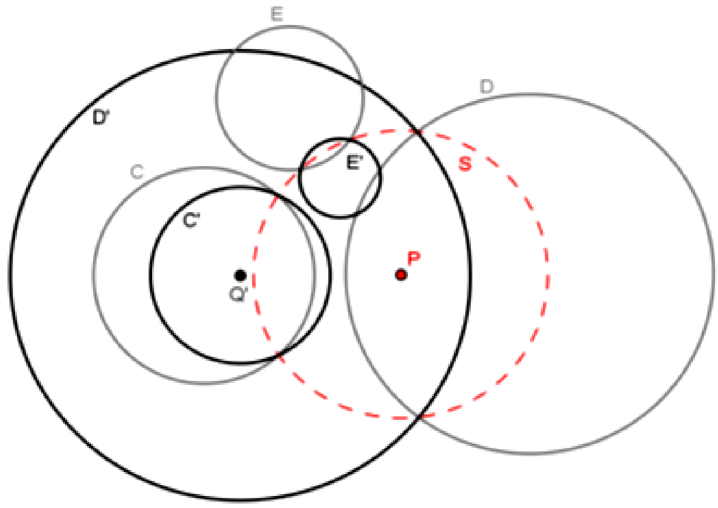


Figura 3.22: Inversos das circunferências C, D e E em relação a S

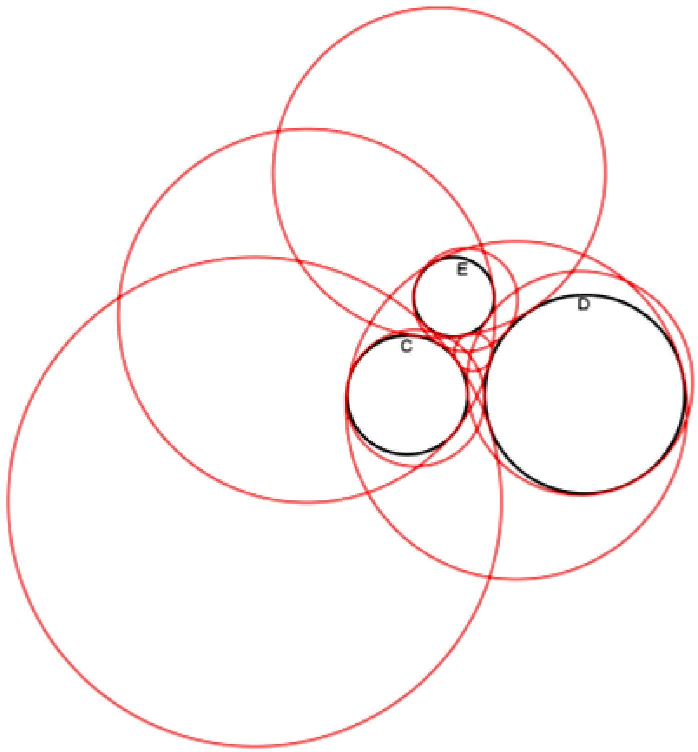


Figura 3.23: Solução do caso CCC

Referências Bibliográficas

[1] Almouloud, S. A.; Mello, E. G. S., *Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos.* 23ª reunião anual da ANPED, 2000.

[2] Boyer, C. B., *História da Matemática.* Edgard Blucher, São Paulo, 1974.

[3] Coxeter, H. S., Greitzer, S. L., *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.

[4] `http://www.academia.edu/1068945/Solucao_do_problema_de_Apolonio_utilizando_Geometria_Inversiva.`

[5] Munaretto, A. C., *Resolução do Problema de Apolônio por meio da Inversão: Um roteiro de estudo para a formação de Professores em Geometria.* Monografia de Especialização em Expressão Gráfica no Ensino, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

[6] Neto, A. C. M., *Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 2: Geometria Euclidiana Plana.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2012.

[7] Oliveira, P. M., *Será o infinito um ponto?!* Educação e Matemática: Notas sobre o ensino de Geometria. Revista da Associação dos Professores de Matemática. Vol. 95, 2007.

[8] Spira, M., *Como Transformar Retas em Círculos e Vice Versa: A inversão e construções geométricas.* In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2004.

[9] Wagner, E., *Construções Geométricas.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.