UFRRJ

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO

Análise e Sugestões de Atividades Relacionadas a Demonstrações Matemáticas para o Desenvolvimento do Raciocínio Lógico-dedutivo em Sala de Aula

Luis Antonio Cardoso

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

ANÁLISE E SUGESTÕES DE ATIVIDADES RELACIONADAS A DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO LÓGICO-DEDUTIVO EM SALA DE AULA

LUIS ANTONIO CARDOSO

Sob a Orientação do Professor
Pedro Carlos Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Seropédica, RJ
Maio de 2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Primeiramente a Deus pela minha saúde e existência;

A minha esposa Andreza e à minha filha Maria Elis pela paciência, compreensão da minha ausência e pelo apoio nos momentos de dificuldade desta caminhada;

Aos meus pais Mario (em memória) e Maria das Graças que me fizeram aluno esforçado e dedicado durante a minha infância e adolescência;

Ao meu irmão Rodrigo e meus amigos que diretamente ou indiretamente me incentivaram para que esse trabalho fosse bem sucedido;

A todos os meus colegas de turma Anderson Ribeiro, Carla Fernandes, Cristiano Baraúna, Fábio Médice, Leonardo Bueno, Nelson Coutinho, Renato Neves, Cael Scherpel, Erickson Martins, Fernanda Nogueira e, em especial, Marcelo Guedes, Aline Viana, Luiz Claudio Longo e Fluvio Alves por fazerem parte da minha família durante o curso;

A SBM e à CAPES por acreditar e contribuir financeiramente tornando o trabalho possível;

À RURAL e aos meus professores Aline Maurício Barbosa, André Luiz Martins, Douglas Monsôres, Duilio Tadeu, Montauban Moreira, coordenador Orlando dos Santos, e ao meu orientador Pedro Carlos Pereira pela dedicação, esforço e pela contribuição intelectual;

Ao Curso Preparatório Maria Valim, em especial, professor Vagner que muito contribuiu para a minha formação e permitiu a utilização do espaço físico ao qual foi realizada a pesquisa;

À minha amiga e companheira de trabalho Naira que muito me ajudou a escrever o texto da dissertação e me deu dicas para a escrita;

Ao meu amigo e eterno mestre Luiz Carlos da Silva que me mostrou a mágica da Matemática e a real importância da busca pelo conhecimento.

RESUMO

CARDOSO, Luis Antonio, Análise e sugestões de atividades relacionadas a demonstrações matemáticas para desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo em sala de aula: 2014. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, Rio de Janeiro.

Este trabalho é um estudo sobre demonstrações, provas e argumentações matemáticas na Educação Básica. Procura verificar as indicações dos PCN relacionadas ao tema e entender e diferenciar prova, argumentação e demonstração segundo autores como Balacheff, Lilian Nasser, Lúcia Tinoco e Duval. É também o resultado de uma pesquisa de campo realizada com alunos do final do Ensino Fundamental e do início do Ensino Médio, para avaliar quantitativamente, o nível de conhecimento em escrita argumentativa e demonstrativa. Também propomos algumas demonstrações importantes que consideramos imprescindíveis à Educação Básica. Como resultado observou-se que os PCN indicam, mas não prescrevem o ensino de demonstrações nos Ensinos Fundamental e Médio e os alunos que participaram das atividades têm dificuldades no processo argumentativo e demonstrativo ficando, em média, no mesmo patamar de nível de conhecimento matemático dos alunos participantes da Prova Brasil e da OBMEP.

Palavras-chave: demonstração, argumentação, ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

Cardoso, Luis Antonio, analysis and suggestions for activities related to mathematical statements for development of logical-deductive reasoning in the classroom: 2014. Working Master Course Completion, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, Rio de Janeiro.

This work is a study of statements, evidence and mathematical arguments in Basic Education. It searches to verify the indications of NCP related to the theme, understand and differentiate evidence, argument and demonstration according to authors as Balacheff, Lilian Nasser, Lucia Tinoco and Duval. It is also the result of a field research with students at the end of elementary school and early high school, to quantitatively assess the level of knowledge in argumentative and demonstrative writing. We also propose some important statements that we consider essential for the Basic Education. Results revealed that the NCP indicate, but do not prescribe teaching demonstrations in primary and secondary education and the students who participated in the activities had difficulties in getting argumentative and demonstrative process, on average, the same mathematical knowledge extent in the level of the students who took part in Prova Brazil and OBMEP.

keywords: demonstration , arguments, teaching and learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sempre me deparei com muitas dificuldades em "provas" na faculdade. Quando falo provas, além daquelas com datas marcadas (Análise, Geometria Analítica e outras), me refiro às demonstrações matemáticas. Na educação básica nem sequer tinha ouvido falar. No 1º período do curso de licenciatura em Matemática, minha concepção sobre demonstrações não passava de uma grande decoreba para obter resultados que poderiam servir para resolver problemas. Atualmente, após 11 anos de formação e 10 atuando como professor nos Ensinos Fundamental e Médio, a demonstração a qual falo representa um conjunto de operações e regras (ou axiomas) pelo qual posso utilizar para chegar a um resultado que já foi demonstrado por outros. E perguntas surgiram ao longo desses 11 anos. A prova é o mesmo que demonstração. Em que nível o professor deve saber demonstrar? E o aluno? Ele deve saber fazer demonstrações? O saber demonstrar pode influenciar significativamente no ensino/aprendizado? É possível obter níveis de conhecimento em demonstrações Matemáticas? Essas perguntas representaram grande incentivo para aprofundar os conhecimentos sobre o tema e desenvolver uma pesquisa buscando respostas, se é que elas existem.

O objetivo do presente trabalho tem três pilares principais: 1) Utilizando uma amostra de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio, pretendemos analisar a capacidade do aluno realizar demonstrações matemáticas dentro do nível de conhecimento de cada ano e exigência de acordo com os descritores das matrizes de referências da Prova Brasil, que são elaboradas pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira). 2) Esclarecer as diferenças entre prova, demonstração e argumentação através de uma fundamentação teórica buscando autores que já desenvolveram pesquisas sobre o tema. 3) Apresentar exemplos de demonstrações que consideramos importantes e indispensáveis aos alunos da educação básica a serem aplicadas na sala de aula visando desenvolver aspectos relevantes para um do processo dedutivo e argumentativo. Nossa expectativa com relação às atividades realizadas pelos alunos é obter resultados próximos aos da Prova Brasil, no que diz respeito aos alunos com habilidades matemáticas desejada.

O trabalho será realizado em 4 capítulos assim distribuídos: no capítulo 2 observamos as orientações indicadas, segundo os PCN (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS). No capítulo 3 temos a fundamentação teórica relacionada às demonstrações e provas matemáticas apresentando suas diferenças, tipos de provas e os exemplos aplicáveis ao ensino Fundamental e Médio. As atividades aplicadas em sala de aula para os alunos do 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio, suas respectivas soluções e algumas respostas desses alunos são expostas no capítulo 4. Ao final do trabalho apresentamos as conclusões e os resultados da pesquisa. Sabemos que é um tema de extrema importância para a educação básica e que pode proporcionar uma possível melhora no desempenho de nossos alunos.

1.1 Os resultados da Prova Brasil e da OBMEP

Os resultados dos alunos da Educação Básica em alguns exames nacionais, no que diz respeito à Matemática, estão abaixo do esperado. Analisemos os resultados da Avaliação Nacional de Rendimento Escolar (Anresc), ou Prova Brasil, aplicada a cada 2 anos. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), a avaliação, com foco na resolução de problemas, é aplicada ao 5º e ao 9º ano do Ensino Fundamental e, censitariamente, à 3ª série do Ensino Médio. Os resultados são apresentados pelo INEP, com as médias dos Estados Brasileiros, com notas de 0 a 500 distribuídas em níveis de 0 (zero) a 13. Cada nível descreve as habilidades e competências matemáticas que o aluno deve dominar. Considerando a média dos três últimos anos de aplicação da prova para o 9º ano do Ensino Fundamental, segundo o INEP, cerca de 10,5% dos alunos estão dentro dos níveis de conhecimento Matemático desejado. Esses percentuais estão em crescimento. Em 2007, o percentual foi de 9%, em 2009, 10% e, em 2011, 12%. Mas se observarmos o gráfico 1, abaixo, apresentado pelo INEP percebemos que esses números representam menos da metade dos valores observados para o 5º ano.

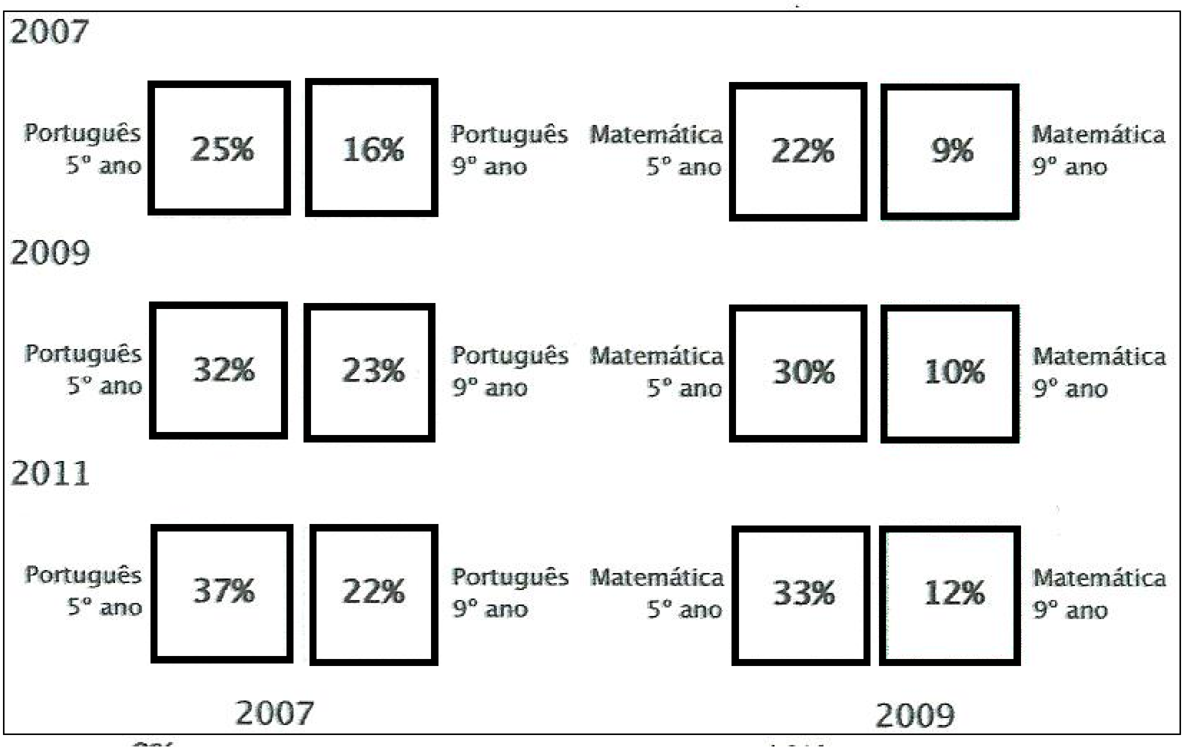


Gráfico 1
Fonte: INEP

Vamos analisar os resultados de outra avaliação nacional: a Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escola Públicas (OBMEP). Segundo INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA (IMPA), o objetivo da prova, constituída em duas fases, é estimular o estudo de Matemática e descobrir novos talentos, distribuídos em três níveis:

1- Alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental;
2- Alunos do 8º e 9º do Ensino Fundamental;
3- Alunos das três séries do Ensino Médio.

De acordo com o IMPA, a prova é constituída de 20 questões e para passar à segunda fase, que é discursiva, é necessário que o aluno tenha, no mínimo, 10 acertos. Observemos os resultados dos três últimos anos: Em 2011, 4,3% dos participantes avançaram à segunda fase. Destes alunos que realizaram a prova da segunda fase, 4% receberam premiações. O que representa 0,01% do total que participou da OBMEP. Em 2012, 4,2% passaram para a segunda fase e destes, 5,5% foram premiados. Logo, 0,2% do total de participantes receberam premiações. Em 2013, 5% dos alunos chegaram à segunda fase. Destes, 4,6% foram premiados, o que representa 0,2% dos participantes.

E importante ressaltar que as duas avaliações diferem em alguns pontos de caráter pedagógicos. A Prova Brasil não avalia os alunos com questões discursivas e não premia aqueles com resultados de excelência. Mesmo assim, observamos que os resultados têm pontos em comum, principalmente se analisarmos os resultados em Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Na Prova Brasil percebemos que, aproximadamente, 10% dos alunos estão no nível de aprendizado esperado e na OBMEP, em torno de 6% dos alunos participantes avançam à segunda fase. E daqueles que participam da segunda fase, aproximadamente 5% chega a ganhar algum tipo de prêmio.

Ou seja, de acordo com os resultados da Prova Brasil o aprendizado, na disciplina de Matemática, está abaixo do esperado, Por outro lado, os resultados da OBMEP, deixam transparentes que, em torno de 5% dos alunos têm condições de chegar ao final de um exame com reais habilidades e competências matemáticas absorvidas.

A colunista da Revista Veja e professora da (UFRGS) UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, Lya Luft, diz que: não conseguimos nos expressar direito e não aprendemos a pensar, observar e argumentar, portanto não sabemos organizar nosso pensamento, muito menos expressá-lo por escrito.(Veja, 9 de Outubro de 2013, pag. 26), referindo-se à língua portuguesa.

O Fato dos baixos resultados em conhecimentos matemáticos (pelo menos para o final do Ensino Fundamental) promove uma contradição, já que o principal objetivo da educação, não apenas da Matemática, é preparar o aluno para a vida transformando-o em um cidadão crítico.

Essa dificuldade em Matemática também foi diagnosticada pela avaliação internacional PISA (*Programme for International Student Assessment*/ Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), que consiste em uma prova aplicada a cada três anos a alunos na faixa etária de 15 anos, cujo objetivo é produzir indicadores que contribuam para a melhoria da qualidade da educação dos países participantes. No Brasil, o PISA é coordenado pelo INEP. A Matemática, que é uma das três áreas avaliadas deixou o Brasil no final da fila. Em 2012, 65 países participaram e, em matemática, onde são exigidos do aluno raciocínio e argumentação para resolver problemas do cotidiano, o Brasil ficou em 58º lugar, com 391 pontos. Além do ranking entre os países que participam da avaliação, o PISA constatou também que apenas 1,8% dos alunos brasileiros avaliados são considerados *top-perfomance,* ou seja, são extraordinários para resolver problemas considerando todas as variáveis que podem afetar o resultado, ficando muito abaixo de países como, por exemplo, Singapura e Japão, que ficaram com percentuais próximos dos 30% nesse quesito.

1.2 Material e métodos

O trabalho, que ora apresentamos, foi realizado com fundamentação teórica e pesquisa em meio físico entre os meses de fevereiro e maio de 2014, com 148 alunos, sendo 120 do 9º ano do ensino fundamental e 28 do 1º ano do ensino médio. A fundamentação teórica foi obtida através de livros, revistas e sites retirados ou visualizados da internet relacionados ao tema. O espaço físico de realização da pesquisa foi o Curso Maria Valim Preparatório para as Escolas Técnicas Estaduais e Federais situado no Município de Nova Iguaçu. Escolhemos o curso preparatório por ser um local de reunião de alunos de diferentes escolas municipais, estaduais e particulares dos municípios de Nova Iguaçu e adjacências como Queimados, Belford Roxo, Mesquita, Nilópolis e outros. Acreditamos que esta escolha retratará uma realidade bem próxima da nacional para a nossa pesquisa.

Os alunos fizeram uma avaliação contendo 5 atividades envolvendo álgebra, aritmética e geometria relacionadas à demonstração e argumentação matemática. Escolhemos alguns descritores da matriz de referência para o 9º ano do Ensino Fundamental e para a 3ª série do Ensino Médio. Essa matriz é elaborada pelo INEP. O tempo para realizar a avaliação foi de 40 minutos e não foi permitido o uso de livros, calculadoras, internet ou qualquer outro meio de consulta. Foi aplicada sem qualquer explicação ou leitura prévia das questões. O intuito foi avaliar a escrita, a destreza e a capacidade de argumentação nas questões de matemática envolvendo o raciocínio lógico e dedutivo. Não foi citada a palavra “prove” ou “demonstre” em nenhuma das atividades. Foram consideradas corretas as respostas que apresentavam clareza, exatidão e conexão com os argumentos utilizados nas soluções das atividades, sejam por objetos formais da matemática ou por textos elucidativos na língua materna.

Segundo Ludke (1968), o estudo de caso visa a descoberta, enfatiza a interpretação do contexto, busca retratar a realidade de forma completa e profunda, usando variedades de fontes de informação, revela experiências e permite generalizações específicas, procura os diferentes e conflitantes pontos de vista presentes numa situação social.

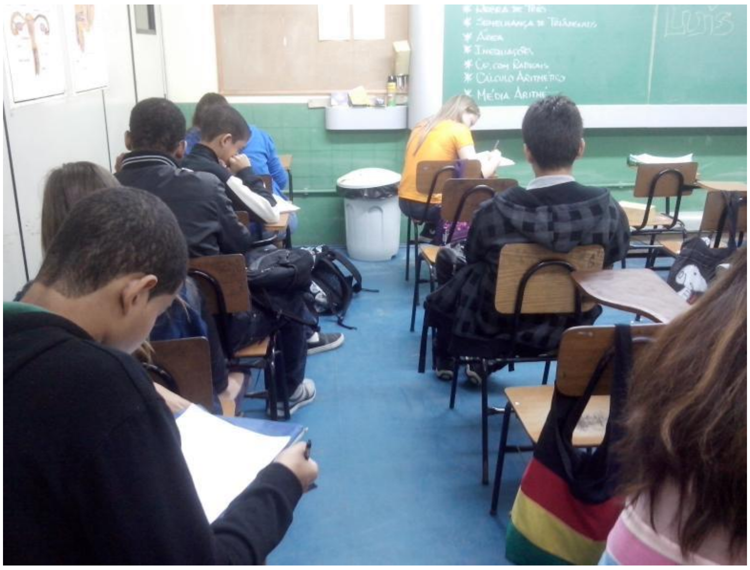


Figura 1. Alunos realizando as atividades

Figura 2. Alunos realizando as atividades.

Figura 3. Alunos realizando as atividades

2- OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, PCN (Brasil,1997), indicam caminhos para a formulação de um Currículo de Matemática que permita desenvolver o saber matemático dos estudantes, ao postular que a Matemática compõem resolução de problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimento de outras áreas curriculares, inferindo fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas. (PCN, 1998)

Além disso, os PCN para o Ensino Fundamental e Médio enfatizam a importância da demonstração em Matemática, procurando dar orientações para o estudo de teoremas pelos alunos, com posterior demonstração formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, permitindo assim, que o aluno desenvolva suas capacidades de raciocínio nas outras áreas do conhecimento.

As habilidades de criar conjecturas, observar regularidades e fazer demonstrações deve ser iniciadas ainda no primeiro segmento do ensino fundamental. Segundo os PCN:

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (PCN, 1998, p. 71).

Além disso, é importante desenvolver uma matemática significativa no Ensino Fundamental para que esta seja útil para as séries seguintes e no Ensino Médio.

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (PCN, 2002, pag. 40; 41)

Analisando as orientações dos PCN percebemos que o processo de pensar e fazer matemática está ligado a uma concepção de utilização posterior do conhecimento adquirido em situações da vida frequentemente presentes para os alunos. Esta concepção pode ser desenvolvida pelos conteúdos matemáticos relacionados às demonstrações, já que os mesmos têm uma representatividade relevante de desafio para os discentes.

> Assim, as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (PCN, 2002, pag. 41; 42)

Apresentamos algumas competências e habilidades propostas nos PCN que devem ser desenvolvidas pelos alunos:

> Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
> Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> Formular hipóteses e prever resultados.
> Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.
> (PCN 2002)

Ou seja, o saber matemático está diretamente ligado às orientações dos PCN e o desenvolvimento das habilidades relacionadas à autonomia, criticidade e capacidade de resolver problemas, seja em matemática, ou em qualquer outra disciplina, está ligada à compreensão do pensamento lógico-dedutivo que podem ser desenvolvidos pelos conteúdos trabalhados em sala de aula, ou em laboratórios, pelo professor. Essa ação não está ligada apenas ao professor. É aceitável que, qualquer indivíduo com capacidade de discernimento relevante, seja possível aprimorar essas habilidades utilizando várias fontes de conhecimento.
Com isso, é pertinente dizer que a demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio como parte integrante do currículo da escola básica. Para isso é necessário que se conheça, com certa relevância, os conceitos ligados às demonstrações matemáticas.

3- PROVAS, ARGUMENTAÇÃO E DEMONSTRAÇÕES

Para entender melhor os conteúdos matemáticos, desenvolver uma aprendizagem significativa e desenvolver seu raciocínio, o aluno deve aprender a fazer demonstrações dentro do seu nível de habilidade e grau de escolaridade. O professor, por algum motivo, que não faz, ou faz poucas demonstrações, pode estar incentivando o aluno a aceitar resultados prontos, e com isso, tirar desse aluno o instinto de curiosidade. A equivalência abaixo exemplifica esse fato: um conteúdo do 9º ano do ensino fundamental.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sabemos que, ao apresentar essa equivalência aos alunos estamos omitindo uma série de etapas envolvendo operações básicas que são pré-requisitos ao aprendizado da equação do 2º grau. Além disso, perde-se a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo que é de extrema importância para a vida desses alunos.

Vejamos uma demonstração para esta equivalência:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ .(4a) \ \Leftrightarrow \ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ac = -4ac \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \ \Leftrightarrow$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad \Leftrightarrow \ 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \ \Leftrightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observe que utilizamos para esta demonstração a lei do cancelamento e o caso de fatoração trinômio quadrado perfeito, que são conteúdos de anos anteriores ao 9º do Ensino Fundamental. Logo, o processo de aquisição do conhecimento, em Matemática, é equivalente a uma escada onde cada degrau é um conjunto de conteúdos.

Este exemplo é apenas um dentre uma série de conteúdos que exigem demonstrações. Não podemos exigir de um aluno do 6º ano, por exemplo, demonstre a fórmula para resolução de equações do segundo grau exemplificada acima. Existem diferentes maneiras para motivar e ensinar demonstrações aos alunos. Em Argumentação e provas no ensino da matemática, Nasser e Tinoco, dizem que as habilidades de domínio do processo dedutivo devem ser adquiridas aos poucos, mas é importante que o professor explore em suas aulas de Matemática atividades que desenvolvam tais habilidades. As autoras apresentam, segundo Galbraith (1981), uma lista de componentes que são considerados essenciais para se fazer uma boa argumentação em Matemática:

> (a) entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares;
> (b) detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação;
> (c) utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado a ser alcançado;

> (d) reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
> (e) interpretar corretamente condições e afirmativas;
> (f) ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento

Segundo Nasser e Tinoco (2003):

> essa relação de competências confirma de que os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo. Isto é, se não os ajudarmos a desenvolver habilidades como as citadas por Galbraith, como garantir que são capazes de argumentar satisfatoriamente?(Nasser e Tonoco, 2003).

Neste sentido fica claro que desenvolver habilidades para argumentar, provar e demonstrar em matemática, na sala de aula, envolve uma série de fatores que estão às margens dos conteúdos e planejamentos das escolas.

3.1 O que é demonstração ?

Consideramos que demonstrar uma proposição consiste em convencer o outro de que a sua argumentação é verdadeira não deixando dúvidas após a demonstração. Em muitas ciências essas demonstrações são feitas através da experimentação. Ou seja, após repetidas experiências observadas sobre diferentes aspectos cria-se uma conjectura sobre tal experiência. É claro, que sob determinadas circunstâncias, surgem a exceções. Nasser e Tinoco (2003) afirmam que a prova ou demonstração tem diversas funções. A mais usada é a de validar um resultado, isto é, comprovar que é verdadeiro. Aqui são consideradas prova e demonstração com o mesmo conceito, mas veremos nas seções adiantes que elas se distinguem em alguns aspectos. Outra função da prova é a de explicar ou elucidar, isto é, mostrar por que o resultado é verdadeiro (Nasser e Tinoco, 2003). No livro, as autoras, dizem que alguns pesquisadores como Bell (1976), enfatizam a função da prova de sistematizar, isto é, preparar para o domínio do processo dedutivo. De acordo com o livro, o aluno vai se familiarizando com as estruturas matemáticas para, no futuro, dominar o processo dedutivo e, até ser capaz de fazer demonstrações por si mesmo.

Duval (1995) diz que a demonstração envolve uma atividade cognitiva específica e que sua aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. É um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio, como a indução, a argumentação, e interpretação. A aprendizagem consiste primeiramente na conscientização de que se trata de um discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural.

Segundo Gouvêa (1998):

> para que a demonstração seja um meio eficiente para convencer, é preciso que os instrumentos à disposição dos alunos sejam colocados à prova. O professor, na situação de sala de aula, deve fornecer, o mais cedo possível, atividades onde a observação e a medição não permitem validar um resultado, advindo daí a necessidade de serem utilizados outros instrumentos. (Gouvêa, 1998, p. 194).

No entanto, admitimos que a prova matemática (ou demonstração) está ligada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados e que o conjunto organizado desses fatos deve comprovar de forma irrefutável algum tipo de proposição matemática.

3.2 O que é argumentação?

Segundo Oléron (1996) , argumentação é como um percurso "através do qual uma pessoa — ou um grupo — tenta conduzir um auditório a adotar uma posição recorrendo a apresentações ou asserções — argumentos — que visam mostrar a sua validade ou fundamento". Segundo Boavida (2005):

> Esta definição permite destacar três características fundamentais da argumentação. Em primeiro lugar, é um fenômeno social, na medida em que mobiliza diversas pessoas. Em segundo lugar é um percurso através do qual se procura influenciar alguém. Em terceiro lugar, ao fazer intervir justificações e elementos de prova a favor da tese defendida, é um processo que comporta elementos racionais pelo que tem ligações com o raciocínio e a lógica. (pag. 23)
> [...] Mobilizando raciocínios, linguagem, símbolos, imagens, a argumentação põe em jogo relações entre pessoas, mobiliza intenções, estratégias, processos de persuasão, e situa-se num contexto social, científico, econômico, político, ideológico. (Boavida, 2005, pag. 24)

Acreditamos, então, que argumentação é todo artifício que se pode utilizar para chegar a uma comprovação, ou demonstração. Os argumentos podem ser representados por proposições, símbolos, desenhos, material concreto e outros. Consideremos o exemplo 1:

Exemplo 1:

Ao efetuar a multiplicação com os números inteiros 23 e 45 devemos proceder da seguinte forma: Multiplicamos 23 por 5 e, em seguida, pulamos uma casa à esquerda e multiplicamos o 23 por 4 como ilustrado a seguir.

$$\begin{array}{r@{}l} 23 & \\ \times 45 & \\ \hline 115 & \\ 92 & + \\ \hline 1035 & \end{array}$$

Essa forma gráfica de representar a operação é uma justificativa para a propriedade distributiva. Obtemos o resultado adicionando 115 a 920. Mas por que 920? Por que devemos pular uma casa à esquerda? Podemos utilizar um argumento muito simples para justificar, ou demonstrar, que o resultado pode ser obtido com a adição 115+920. Tal argumento é a propriedade distributiva em relação à adição, que é do currículo do 1º segmento do Ensino

Fundamental. Colocamos a multiplicação em questão na forma 23.45 que também pode ser escrito, sem perda de generalidade como 23.(40+5) e, aplicando a propriedade distributiva temos 920+115. Ou seja, o que a maioria dos alunos aprendem como "pular uma casa à direita" nada mais significa do que colocar um zero ao lado do 92 , ou seja, na verdade estamos multiplicando o 23 não por 4, mas sim por 40.

3.3 O que é prova?

Quando se trata de comprovar a veracidade de uma proposição devemos considerar dois elementos fundamentais: a hipótese e a tese. A primeira é considerada o elemento de partida do procedimento de provar tal proposição. É considerada como verdadeira. A tese é o elemento que se pretende chegar, concluir. A prova refere-se a um estado de comprovação de uma proposição, seja ela verdadeira ou falsa. Ou seja, parte-se da hipótese e chega-se à tese.

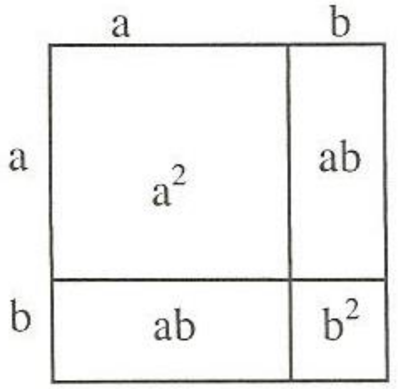
As provas são explicações aceitas por outros num determinado momento. Pode ser considerada prova para um determinado grupo e não para outro grupo, isto é, a tese pode ser aceita por um determinado grupo, mas não por outro. A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade. Segundo Balacheff, existem níveis aceitáveis de provas e, quando se trata de um enunciado matemático, ele a chama, somente neste caso, de demonstração. Balacheff identifica dois diferentes níveis de prova: provas pragmáticas e provas conceituais:

> Empirismo ingênuo: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;
> Experimento crucial: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar;
> Exemplo genérico: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos;
> Experimento de pensamento: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.(Balacheff, 1982)

Podemos exemplificar o Empirismo Ingênuo com o seguinte problema: A soma de dois números pares é sempre um número par? E o aluno responde: sim, pois 2+4=6, que é par. Ele usou um caso particular para mostrar que a soma de dois pares é sempre um número par.

Em Argumentação e provas no ensino da matemática, as autoras apresentam ainda, a justificativa gráfica exemplificada abaixo.

Exemplo 2:
Explique por que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. A justificativa pode ser:



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Figura 4
Fonte: *Argumentação e provas no ensino da matemática*

Dependendo da faixa etária e do nível de raciocínio dos alunos, o professor deve aceitar e, até mesmo, estimular justificativas desses tipos (Nasser e Tinoco, 2003).

3.4 Tipos de provas

Há vários tipos de provas. Os mais utilizados são: por indução e por absurdo/contradição. Mas existem também as provas diretas e provas por construção.

Na prova por indução verifica-se que uma proposição é válida para um determinado número específico (em alguns casos, o número 1, considerado por alguns o primeiro número natural) depois, considera-se que tal proposição seja válida para um número n (hipótese), não específico e, utilizando argumentos e propriedades matemáticas, prova-se que a proposição é válida para o sucessor desse número n, ou seja, prova-se que a proposição é válida para n+1 (tese). Com isso, considera-se provado que a proposição é válida para qualquer número n. Vejamos os exemplos 2 e 3:

Exemplo 3: Prove, por indução, que $3^{2n}+7$ é divisível por 8, para n inteiro.
Demonstração:
1.Verifiquemos se a proposição é verdadeira para n=0.
$3^{2.0}+7=3^0+7=1+7=8$ ok.
2.Suponha que a proposição seja verdadeira para n=k. Logo, $3^{2k}+7$ é divisível por 8. Ou seja, existe q inteiro tal que $8q=3^{2k}+7$. Então, $3^{2k}=8q-7$ (hipótese).
3.Provaremos que a proposição é verdadeira para n=k+1. Ou seja, temos que provar que $3^{2.(k+1)}+7$ é divisível por 8.
Sabemos que $3^{2.(k+1)}+7=3^{2k+2}+7=3^{2k}.3^2+7$. Como, por hipótese, $3^{2k}=8q-7$ temos que: $(8q-7).3^2+7=8q.3^2-7.3^2+7=8q.3^2-7.(3^2-1)=8q.3^2-7.8=8.(q.3^2-7)$. Logo, $3^{2n}+7$ é divisível por 8.

Exemplo 4: Prove por indução que a igualdade $1+2+3+\cdots+n=\frac{n.(n+1)}{2}$.
Demonstração:
1. Verificamos se a proposição é verdadeira para n=1. $1=\frac{1.(1+1)}{2}=1$ ok.

2. Suponha que a proposição seja verdadeira para n=k.
Ou seja, por hipótese, admitimos que a equação $1+2+3+\cdots+k=\frac{k.(k+1)}{2}$ é verdadeira.

3. Provaremos que a proposição é verdadeira para n=k+1. Isto é, que a equação $1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{(k+1).(k+2)}{2}$. Como, por hipótese, $1+2+3+\cdots+k=\frac{k.(k+1)}{2}$ então, $\frac{k.(k+1)}{2}+k=\frac{k.(k+1)+2k+2}{2}=\frac{k.(k+1)+2.(k+1)}{2}=\frac{(k+1).(k+2)}{2}$.

Na prova por absurdo/contradição nega-se a tese e, verificando as propriedades do que se quer provar, chega-se a um absurdo contradizendo a hipótese. Nesse processo também prova-se que a proposição é verdadeira. Vejamos os exemplos 5 e 6.

Exemplo 5: Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração: Suponha por absurdo que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, existem a e b, primos entre si, tal que $\sqrt{2}$=a/b. Elevando os dois membros ao quadrado temos: $2=a^2/b^2$ e $b^2=2a^2$. Então, b^2 é par. Logo, b também é par e pode ser escrito da forma 2n. Substituindo na última igualdade temos $(2n)^2=2a^2$ e $4n^2=2a^2$. Logo, $2n^2=a^2$. Observe que a também é um número par, o que é absurdo e contradiz a hipótese de que a e b são primos entre si. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Exemplo 6: Prove que o conjunto dos números primos é infinito.

Demonstração: Suponhamos que exista um último número primo, ou seja, que o conjunto dos números primos é finito. Considere a sequência de primos $p_1,p_2,p_3,...,p_n$ e o número $m=p_1.p_2.p_3...p_n+1$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, como m é inteiro maior que 1, temos que m é primo ou é múltiplo de um número primo. Observe que m não é múltiplo de nenhum primo p_n, pois a divisão por qualquer desses deixa resto 1. Logo, m é primo, o que é absurdo, pois nossa hipótese é que existem finitos primos. Logo, a conclusão é que o conjunto dos números primos é infinito.

A demonstração direta é quando usamos uma combinação de axiomas, definições e teoremas já demonstrados e estabelecidos anteriormente por dedução lógica. Em cada passo, usamos a implicação: "se p, então q" com p verdadeira. Chamamos de p a hipótese e q, a tese. Observe os exemplos 7 e 8.

Exemplo 7: Prove que o número $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ é racional.

Demonstração: Considere o número $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$. Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado temos: $x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$. Substituindo x nesta última equação temos: $x^2=2+x$, daí $x^2-x-2=0$ que tem como raízes 2 e -1. Logo, x é um número racional.

Exemplo 8: Prove que a soma de dois números pares é sempre um número par.

Demonstração: Sejam os números pares m=2p e n=2q. Somando-os temos: m+n=2p+2q=2.(p+q), que é par. Logo, a soma de dois números pares é sempre um número par.

Usamos a demonstração por exaustão quando uma conjectura é uma asserção sobre um conjunto finito de elementos. Pode ser provada verificando-se que ela é verdadeira para cada elemento desse conjunto. Veja exemplo 9:

Exemplo 9: Prove que existem três múltiplos de 3 maiores que 1 e menores que 20.

Demonstração: Usando a prova por exaustão podemos mostrar que a proposição é verdadeira.

Considere o conjunto M dos números maiores que 1 e menores que 20.
M={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}. Efetuando a divisão ou usando a regra da divisibilidade por 3 temos que os únicos são 3, 6, 9, 12, 15 e 18. Logo, maiores que 1 e menores que 20, são três números múltiplos de 3.

A demonstração por construção é um tipo de prova de existência de um objeto matemático através de uma construção geométrica. Observemos os exemplos 9, 10 e 11.

Exemplo 10: Prove que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180º.

Demonstração: Uma maneira de demonstrar a proposição é utilizando retas paralelas cortadas por retas transversais. Considere o triângulo ABC da figura abaixo com ângulos internos a, b e c.

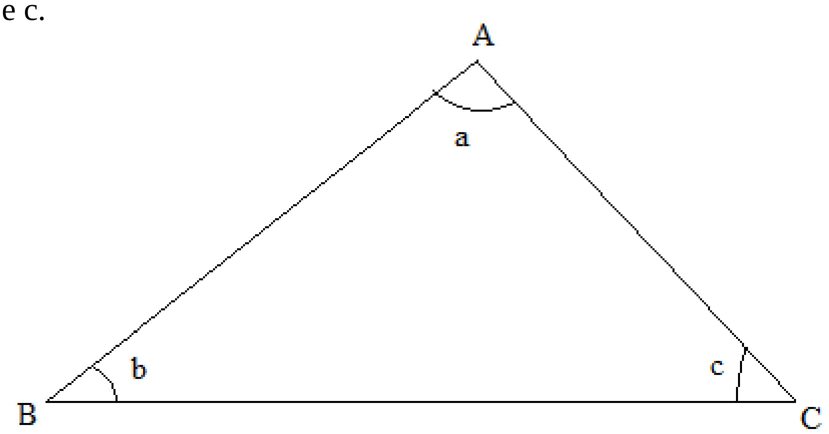


Figura 5
Fonte: Autor

Traçamos uma reta paralela ao segmento BC passando pelo vértice A. Com isso determinamos ângulos alternos internos em relação aos segmentos AB e AC. Logo, por construção, a soma dos ângulos a, b e c é 180º.

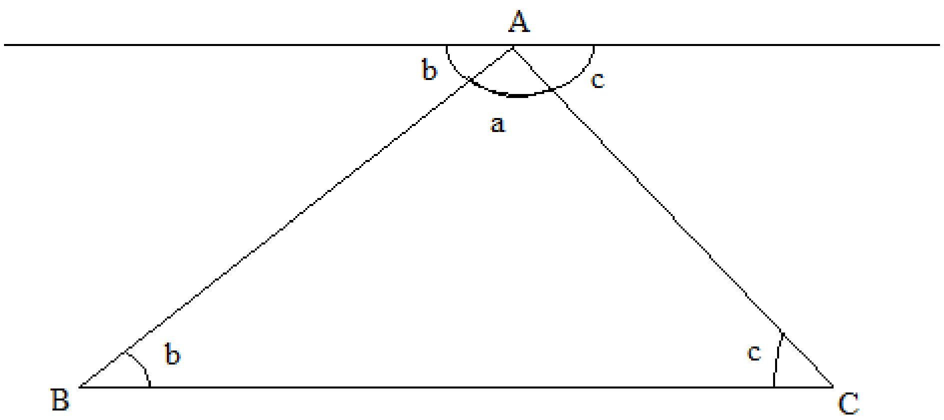


Figura 6
Fonte: Autor

Outra maneira de mostrar que a proposição é verdadeira é utilizar um triângulo qualquer confeccionado de papel ou cartolina, efetuar cortes e depois juntar os três vértices do triângulo.

Exemplo 11: Prove que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Considere o quadrado de lado b+c da figura 7 abaixo com um quadrado inscrito de lado a.

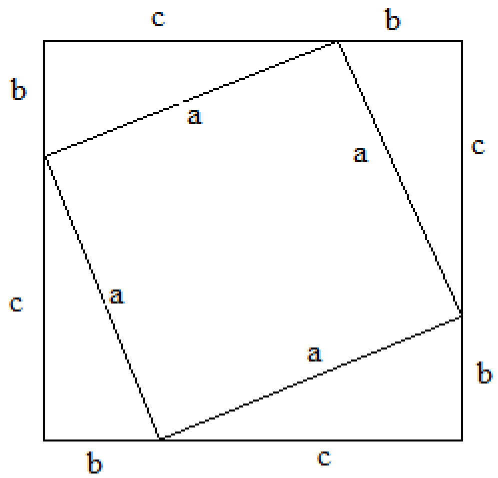


Figura 7
Fonte: Autor

Observe que há duas maneiras de calcular a área do quadrado de lado b+c. A primeira é elevando b+c ao quadrado. A segunda é somando as áreas do quadrado de lado a e as áreas de quatro triângulos retângulos de base c e altura b. Logo, $(b+c)^2=a^2+4bc/2$. O que resulta em $b^2+2bc+c^2=a^2+2bc$. Então, $b^2+c^2=a^2$. Portanto, em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos catetos.

Exemplo 12: Prove que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma de dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Podemos provar a proposição por construção ou usar a demonstração direta, já que no exemplo 10 já foi demonstrado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Considere o triângulo de vértices ABC e ângulos internos a, b e c e ângulo externo d.

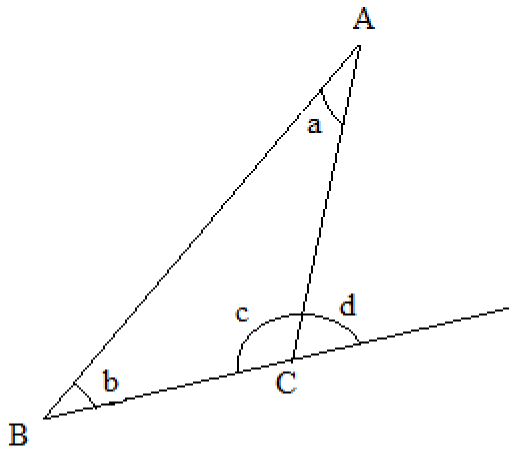


Figura 8
Fonte: Autor

Usando a demonstração direta: sabemos que a+b+c=180 e claro, pela figura, que c+d=180. Logo, c=180-d. Substituindo na primeira equação temos que a+b+180-d=180. Logo, a+b=d. Ou seja, o ângulo externo de um triângulo é igual à soma de dois ângulos internos não adjacentes a ele.

3.5 Argumentação e demonstração em matemática

Segundo Balacheff (1982), consideramos, usualmente, que a demonstração serve como procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais e ocupa lugar de destaque na disciplina. As demonstrações são provas particulares e apresentam as seguintes características:
- São as únicas aceitas pelos matemáticos;
- Respeitam certas regras: alguns enunciados são aceitos verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
- Trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

É normal considerar que as demonstrações são utilizadas como recurso para eliminar as dúvidas, mas Villiers (2002) alerta que as demonstrações tem outras funções em matemática:

> 1) Verificação: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma firmação;
> 2) Explicação: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
> 3) Descoberta: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectuta;
> 4) Comunicação: negociação do significado de objetos matemáticos;
> 5) Desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
> 6) Sistematização: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Mas a principal função da demonstração é a comprovação de diversas asserções (afirmações). Comprovação esta que depois de demonstrada não pode deixar espaço para dúvida. Segundo Arsac (2009), ela se divide em demonstração formal, prova e argumentação e diferenciá-las não é algo tão fácil, pois normalmente, elas se entrelaçam, existindo muita confusão entre esses três conceitos.

Com relação ao significado da prova , Pietropaolo (2005) encontra em sua pesquisa com educadores matemáticos a preocupação para que se faça em sala de aula um trabalho que esteja de acordo com as capacidades intelectuais dos alunos: os currículos devem ter como meta o nível formal da Matemática, mas o trabalho com prova nas escolas não poderia ser considerado somente no seu sentido estrito. Ele exemplifica citando se as verificações empíricas fossem incluídas no significado de prova poderiam servir para obter uma estratégia didática para a compreensão de proposições e propriedades. Assim, a prova deveria fazer parte da formação dos alunos da Educação Básica e, apesar de ser desejável que se discuta com os alunos algumas demonstrações rigorosas, a prova deveria ser resignificada como um:

> Processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação e não com o sentido formalista que a caracteriza nos currículos praticados em outros períodos. (Pietropaolo, 2005, p.212)

O ato de demonstrar em Wal, nem sempre se encontra presente em salas de aula. Para Gilbert Arsac (apud Sales, 2009), isto se dá devido ao fato de que nem sempre esta visão se encontra clara para professores que atuam na educação básica.

Demonstrar é argumentar, visando responder a pergunta: “por que é verdadeiro?” Esta possui rigor e formalidade enquanto argumentar não tem a preocupação com a validade da tese ou, melhor dizendo, aplica-se ainda que não se conheça o desfecho. Argumentação e prova podem der colocadas como etapas da demonstração, se assemelham e se diferem da demonstração nos seguintes pontos: a demonstração é teórica e restrita a uma comunidade em particular, que tenha uma linguagem em comum, partindo de axiomas (postulados) e teoremas, tem por fim uma única verdade sem deixar espaço para dúvidas a respeito de sua validação. Enquanto a argumentação não fica limitada a um campo do saber, a demonstração visa uma comunidade especial que se interessa pelo estudo da matemática. A prova e a argumentação não têm a necessidade de formalismo, e seus pressupostos ainda não necessitam estar estabelecidos. Estas partem de objetivos sensíveis pertencentes ao mundo real, podendo ser palavras, desenhos, gestos, esboço. Um outro exemplo de prova, já mencionado anteriormente, é apresentado quando se utiliza dobraduras para se provar que os ângulos internos de um triângulo somam 180º (lei angular de Tales). A argumentação é toda tentativa de convencer alguém de que se está na direção da verdade. É toda ação de justificar ainda que não corretamente. Seu valor formativo não está na verdade de defender ou na ausência da verdade, quando ocorre um equívoco, mas na contribuição para o processo de construção de um raciocínio lógico-dedutivo ou lógico-indutivo. Existem muitas formas de demonstrar a chamada lei angular de Tales. Uma outra, além de usar dobraduras, é usar o axioma das retas paralelas cortadas por retas transversais. Consideramos que a parte argumentativa é representada pela citação dos axiomas considerados verdadeiros já provados anteriormente, no caso, que retas paralelas cortadas por transversais determinam ângulos alternos internos congruentes. A demonstração é completada pela conclusão do que se queria demonstrar, validar ou mostrar.

3.6 A distinção entre argumentação e demonstração

Diferenciar argumentação e demonstração não é algo muito fácil como já foi citado. Alguns autores como Perelman (1977), defende:

> O que é que distingue a *argumentação* de uma *demonstração* formalmente correta?
> Antes de tudo, o fato de, numa demonstração, os signos utilizados serem, em princípio, desprovidos de qualquer ambiguidade, contrariamente à argumentação, que se desenrola numa língua natural, cuja ambiguidade não se encontra previamente excluída. Depois, porque a demonstração correta é uma demonstração conforme a regras explicitadas em sistemas formalizados. Mas também, e insisto neste ponto, porque o estatuto dos axiomas, dos princípios de que se parte, é diferente na demonstração e na argumentação. Numa demonstração matemática, os axiomas não estão em discussão; sejam eles considerados como evidentes, como verdadeiros ou como simples hipóteses, não há qualquer preocupação em saber se eles são, ou não, aceites pelo auditório. Como o fim de uma argumentação não é deduzir consequências de certas premissas, mas provocar ou aumentar a adesão de um auditório às teses que se apresentam ao seu assentimento, ela não se desenvolve nunca no vazio. Pressupõe, com efeito, um contato de espíritos entre o orador e o seu auditório: é preciso que um discurso seja escutado, que um livro seja lido, pois, sem isso, a sua ação seria nula." (Perelman, 1977)

Tanto a demonstração como a argumentação são manifestações da racionalidade. Mas tratam-se de usos diferentes da razão: no caso da demonstração, a razão é usada para estabelecer verdades universais que se apresentam como conclusões de raciocínios formalmente válidos e assentes axiomas (princípios) universais e cientificamente verdadeiros. Na demonstração não há auditório, ou seja, quem demonstra fá-lo seguindo procedimentos racionais e objetivos, sendo indiferente, do ponto de vista demonstrativo, saber quem irá tomar conhecimento da demonstração. No caso da argumentação, os seus axiomas são estabelecidos caso a caso, consoante o auditório. De fato, a argumentação versa sobre o que é verosímil, provável ou desejável. Nela não está presente o pressuposto de que tem que haver uma verdade universal, estabelecida de forma objetiva e independentemente do contexto sócio cultural em que se desenrola a argumentação. Os axiomas da argumentação resultam de um acordo, tácito ou estabelecido de forma consciente, entre o orador e o auditório. Assim, o que é verosímil num contexto, pode não o ser noutro, o mesmo se passa com o provável e o desejável. Por exemplo, numa sociedade dominada por crenças de carácter mítico-religioso, pode ser verosímil que um homem de fé consiga caminhar sobre as águas, para um determinado grupo social pode ser desejável a subida das taxas de juro, enquanto que para outros isso pode ser visto como uma calamidade. Para certos auditórios pode ser provável a visita de extraterrestres, enquanto que para outros isso pode ser encarado como uma crença sem sentido. E o orador tem que estar atento a essas diferenças. Isto porque na argumentação o que importa são os efeitos do discurso (seja qual for a sua forma) sobre o auditório, pois o objetivo central do ato de argumentar, é provocar um efeito em determinado auditório, conseguir a sua adesão e, em muitos casos, levá-lo a tomar esta ou aquela atitude face a determinados objetos culturais ou sociais (e não só), conduzi-lo a efetuar um determinado comportamento, como no caso de um discurso eleitoral, o seu objetivo e levar os membros do auditório a votarem num partido ou num candidato. Se os membros do auditório votarem noutro partido ou não votarem, os objetivos da argumentação não foram alcançados. A argumentação é uma forma de ação, de ação comunicativa. A demonstração não é uma ação, em sentido próprio, nem procura mover à ação, ela é neutra do ponto de vista comunicativo, pois a verdade lógica e científica não tem a ver com a subjetividade, nem se move dentro dum universo axiológico (valorativo). A argumentação lida com valores, os valores são o seu elemento de eleição. Estamos perante algo com que já nos confrontámos quando demos a distinção entre juízos de fato e juízos de valor: os juízos de fato pertencem por direito ao campo científico, o mesmo da demonstração, enquanto os juízos de valor encontram na vida prática o seu elemento de manifestação e estão ligados à ação, em todos os seus níveis e em todas as suas áreas.

Outra característica fundamental da demonstração, é que ela usa linguagens formalizadas, não contaminadas pela polissemia da linguagem natural. Cada símbolo, cada termo, cada enunciado, têm apenas um significado e uma interpretação possível. Por isso a definição dos conceitos é um procedimento fundamental em ciência, pois qualquer ambiguidade mata o rigor e a objetividade. No caso da argumentação, já não é assim, pois nela a razão apoia-se na linguagem natural, nas línguas tal como são faladas no contexto cultural a que pertence o auditório. E isso permite uma explosão em termos de expressão e de comunicação, pois um orador pode jogar com a ambiguidade, pode explorar as palavras para infundir o riso, ou para usar a ironia. Há um mundo de possibilidades que é praticamente inesgotável. Não é possível demonstrar que determinado candidato à Presidência da República será mau Presidente, se eleito. Mas é possível persuadir um auditório dessa probabilidade e de levá-lo a aceitar como verosímil essa tese, conduzindo-o a concluir que a eleição desse candidato não é desejável. Ora, na demonstração utilizam-se argumentos lógico-matemáticos, com um rigor lógico inquestionável (nós demos o silogismo como um exemplo, ainda que bastante rudimentar, de demonstração lógica). Mas na argumentação também se usam argumentos (como não poderia deixar de ser, pois, caso contrário, o termo “argumentação” estaria desajustado), mas estes argumentos são mais abertos nas suas possibilidades de exploração.

A argumentação (legítima) deve ser coerente, ou seja, não pode violar os princípios lógicos da razão, nem usar argumentos falaciosos. E os argumentos que podem ser utilizados como instrumentos retórico-argumentativos, são de três tipos:

1. Argumentos quase-lógicos. Estão ligados ao domínio do pensável, do que pode ser pensado e do que deve ser pensado. Quando um orador afirma que uma tese oposta à sua (ou um argumento) não tem sentido, não tem sustentabilidade lógica, está a usar um argumento quase-lógico. O mesmo se passa se utilizar enunciados lógicos para sustentar uma tese, apelando à sua razoabilidade interna (à sua racionalidade, à sua aceitabilidade racional). Quando demonstramos, no exemplo 3, que o número $n=\sqrt{2}$ é irracional partimos da hipótese de que ele é racional, podendo ser escrito da forma a/b, com a e b primos entre si, inteiros tal que $b\neq 0$. Utilizando argumentos matemáticos concluímos que n, na verdade, não pode ser racional. Então, sabendo o conceito de números irracionais, temos que o argumento n= = a/b (irredutível), é um argumento quase-lógico.

2. Argumentos sobre a estrutura do real. Trata-se de argumentos que têm uma radicação ontológica: referem-se ao que existe, ao que é real e ao que não é admissível como fazendo parte da realidade. E há que partir do princípio que o real é o que é admitido pelo auditório como existente. Assim, há auditórios que consideram reais entidades que são irreais para outros auditórios: para um auditório de pessoas crentes o demônio pode ser real, enquanto que para um auditório de advogados, isso já não é verdade. Por isso o orador deve referir-se à realidade tal como esta é vista pelo auditório. Não podemos exigir do aluno do 9º ano do Ensino Fundamental que encontre as raízes da equação $x^2-4x+5=0$, mesmo por que estas

representam números complexos. Não estamos admitindo que não se fale sobre o assunto, mas cabe ao professor elucidar que, a equação em questão não tem raízes reais, ou seja, que não pertencem ao conjunto dos números reais e que, posteriormente, será estudado. Outra situação onde encontramos os argumentos sobre a estrutura do real é a própria ação de demonstrar em sala. Deve-se usar uma linguagem diferente daquela usada na graduação.

3. Argumentos que fundam a estrutura do real. São argumentos que se referem ao que torna possível a realidade, têm, para usarmos uma terminologia filosófica, uma dimensão metafísica (é de notar que a ontologia e a metafísica podem ser considerados termos sinônimos). Para um cristão, o mundo pode ter a estrutura que tem porque Deus o criou assim, da mesma forma o mal existe por causa do pecado de Adão. Mas para outro auditório estas explicações não terão sentido. Durante uma aula sobre expressões algébricas, ministrada por um professor de Matemática, dificilmente um historiador perceberá sustentação nos argumentos utilizados. Não faz sentido, dentro dos seus conceitos, dizer que a expressão x^2-1 é, ou não, divisível por $x-1$.

4 – ATIVIDADES NA SALA DE AULA

Para analisar a capacidade de argumentação, prova e demonstração, aplicamos cinco atividades para 148 alunos, sendo 120 do 9º ano do ensino fundamental e 28 do 1º ano do ensino médio, em sala de aula.

Tabela da quantidade de alunos: ano de escolaridade, idade e sexo

Sexo	9 ano E.F		1 ano E.M		Totais
	15 anos	16 anos	15 anos	16 anos	
Masculino	29	16	8	3	56
Feminino	49	26	12	5	92
Totais	78	42	20	8	148

Tabela 1
Fonte: Autor

As atividades foram escolhidas de acordo com os temas e descritores da matriz de referência de Matemática do SAEB/Prova Brasil para o 9º ano Ensino Fundamental. Não foi mencionada a palavra prova e, em apenas uma questão foi usado o termo mostre, exigindo que fosse verificada uma igualdade. Pedimos a resolução das questões com justificativa das respostas, sem fazer qualquer explicação prévia das questões ou assuntos abordados.

Apresentamos as atividades, sugestões de respostas e análise de algumas respostas dos alunos. Posteriormente apresentamos os gráficos relacionados aos índices de respostas dos alunos com algumas categorias como respondeu corretamente, não respondeu ou respondeu sem justificativa.

Atividade 1 Tema I: Espaço e Forma. Descritor 8: Resolver problema utilizando a propriedade dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).

Determine a soma dos ângulos internos das pontas da estrela de vértices A, B, C, D, E e F representada na figura abaixo.(Nasser e Tinoco, 2003, p.16)

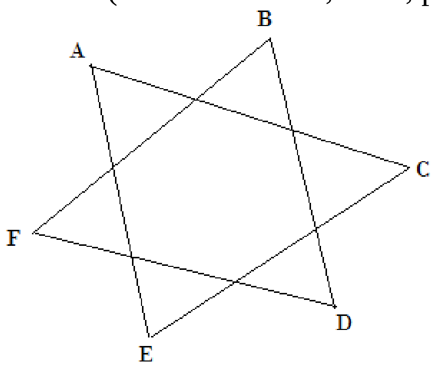


Figura 9
Fonte: (Fonte: *Argumentação e provas no ensino da Matemática*)

Uma das soluções do problema é determinado do seguinte modo:

A soma dos ângulos internos do triângulo de vértices AEC é 180º . Logo, A+E+C=180. Analogamente temos F+B+D=180. Somando as duas equações membro a membro conclui-se que A+B+C+D+E+F=360.

O aluno não precisa, necessariamente, responder com rigorosidade igual à descrita acima, mas precisa de alguma maneira justificar sua resposta.

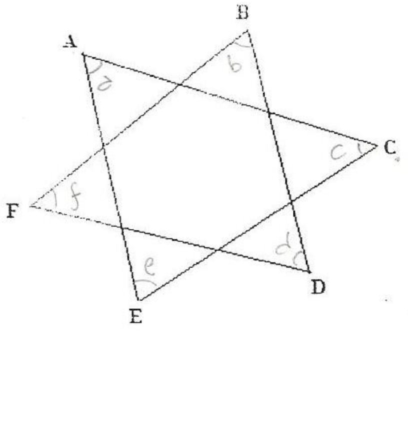
Vamos analisar algumas respostas dos alunos relacionadas a esta atividade.

a soma de $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ e $\hat{F}$
resulta em 360°, pois $\widehat{AEC}$ e $\widehat{BFD}$
formam triangulos (angulos internos
somados equivalem
a 180°)

Esta resposta deixa claro que o aluno sabe o que é a Lei Angular de Tales e sabe aplicá-la, mesmo que não utilize equações e simbologia Matemática.

360°, pois a soma dos ângulos
internos de um triângulo vale
180°, logo de dois triângulos
vale 360°.

Outra resposta em que o aluno utiliza a língua materna para expressar seu raciocínio. Não utiliza equações nem simbologia Matemática.



Soma dos ângulos internos = a+b+c+d+e+f

a+c+e = 180° (triângulo ACE)

b+d+f = 180° (triangulo BDF)

Soma dos angulos internos = 180° + 180°

RESPOSTA = 360°

Resposta em que o aluno utiliza equações para representar a hipótese do problema. A conclusão não utiliza uma equação, mas fica transparente que o aluno sabe organizar seus argumentos. É relevante destacar que alguns alunos ficaram com dúvidas com relação aos ângulos pedidos na questão.

Observamos também algumas respostas incoerentes para o contexto da atividade.

Atividade 2. Tema II: Grandezas e Medidas. Descritor 13: Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

Considere o retângulo ABCD. BD é uma de suas diagonais e os dois segmentos que cortam essa diagonal são perpendiculares. Sejam S_1 e S_2 as áreas dos dois retângulos menores assinalados. Qual é a relação entre S_1 e S_2.? (Nasser e Tinoco, 2003, p.33)

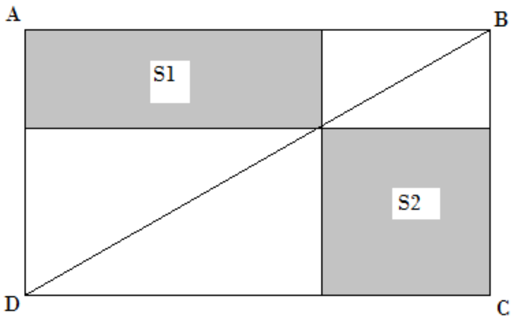


Figura 10

Fonte: (Fonte: *Argumentação e provas no ensino da Matemática*)

Uma das soluções do problema é determinada do seguinte modo:

Observe a figura auxiliar para resolução desta atividade.

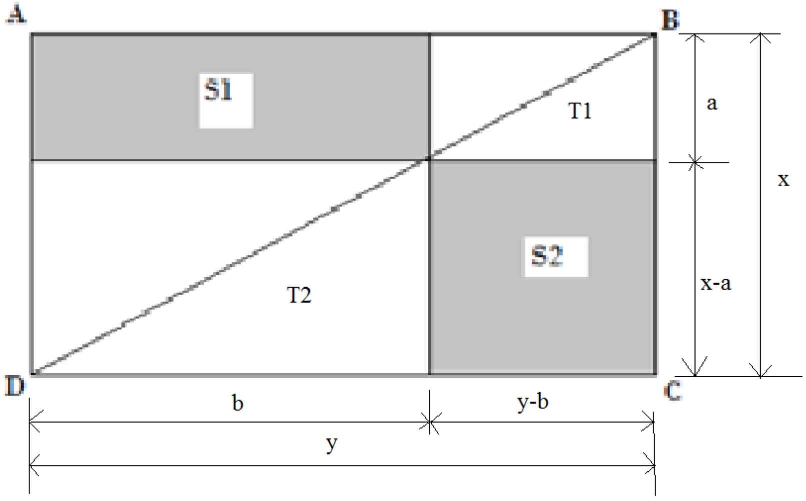
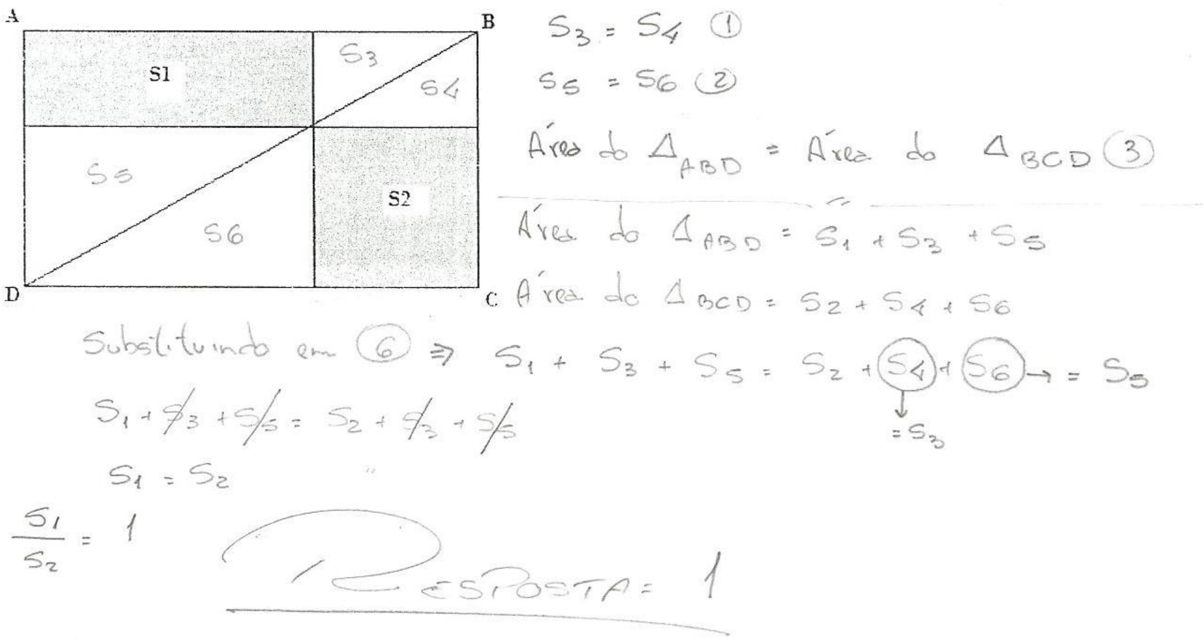


Figura 11
Fonte: Autor

De acordo com a figura auxiliar e com as informações da atividade temos que S1=a.b e S2=(x-a).(y-b). Pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo), os triângulos T1 e T2 são semelhantes. Então: a/(x-a)=(y-b)/y. Daí, ay=(x-a).(y-b). Logo, S1=S2

Vejamos uma resposta



O aluno não usou semelhança de triângulos como nossa resposta, mas escreveu equações que evidenciam o domínio e a organização das informações mostrando entendimento da hipótese, utilização de argumentação e conclusão esperada utilizando equivalência de figuras. Talvez haja uma confusão entre as palavras razão e relação, mas chegou à tese.

Vamos observar outra resposta.

Ambos os retângulos possuem a mesma área, percebe-se isso com a diagonal que corta o mesmo, desta forma, vemos que possuem figuras iguais. Após a divisão, a figura vira um triângulo retângulo semelhantes. Ou seja a área S_1 e S_2 são iguais

Esta resposta está certa, porém o aluno não utiliza argumentos para conclusão da tese e consideramos sua demonstração incompleta. Não é uma resposta que se espera para nossa pesquisa.

Atividade 3. Tema III: Números e Operações/Álgebra e Funções. Descritor 32: Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em seqüências de números ou figuras (padrões).

Verifique se a afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
“A soma de três números naturais consecutivos é um número múltiplo de 3.”(Nasser e Tinoco, 2003, p.50)

Uma das soluções do problema é determinada do seguinte modo:

Considere três números naturais e consecutivos: K, K+1 e K+3. Somando-se temos K+K+1+K+2=3K+3=3.(K+1). Logo, a soma é um número múltiplo de 3.

Observamos, nos resultados obtidos, que nesta atividade houve a maior quantidade de respostas certas e também a maior quantidade da prova pragmática classificada por Balacheff como empirismo ingênuo, onde são verificados alguns casos particulares e afirma-se que a proposição é verdadeira a partir destes. A seguir apresentamos uma dessas respostas.

é verdadeira pois pode ser representada pela expressão $x + (x+1) + (x+2)$, equivalente a $3x+3$ onde qualquer valor atribuido a x resultará em um de seus multiplos

valor natural

Resposta onde o aluno utiliza argumentação algébrica e conclusão com língua materna. Baseada em experiência do valor numérico de expressão algébrica o aluno chega à conclusão de que qualquer valor para x na sentença 3x+3 resultará em um número múltiplo de 3.

$$\left.\begin{array}{l}\text{NÚMERO } a = n \\ \text{NÚMERO } b = n-1 \\ \text{NUMERO } c = n+1\end{array}\right\} n > 0 \qquad \begin{array}{l} a+b+c = n + n-\cancel{1} + n+\cancel{1} \\ a+b+c = 3n \end{array}$$

RESPOSTA = VERDADEIRA

Resposta com utilização de hipótese e conclusão da tese. Resposta considerada correta e esperada para nossa pesquisa.

$$\text{Verdade: } \left.\begin{array}{l} 1+2+3=6 \\ 2+3+4=9 \\ 3+4+5=12 \end{array}\right\} \text{divisíveis por 3}$$

Nesta resposta o aluno usa a, considerada por Balacheff, prova pragmática, onde são utilizado casos particulares para provar que uma proposição é verdadeira. Observe que, neste caso, o aluno não demonstra que a proposição é verdadeira para todas as ternas de números naturais consecutivos. Não é considerada uma resposta totalmente correta para nossa pesquisa.

R: Sim. Pois sendo os números consecutivos 2, 3 e 4, sua soma equivale a 9.

Mais uma reposta utilizando um caso particular para mostrar que a proposição é verdadeira.

Atividade 4 Tema III: Números e Operações/Álgebra e Funções. Descritor 32: Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em seqüências de números ou figuras (padrões).

Observe o produto a seguir: P=1.2.3.4.5...121 e, sem efetuar cálculos, responda, justificando sua resposta:

a) P é par?

b) P é múltiplo de 5?

c) P é múltiplo de 13?

d) Qual é o algarismo das unidades de P? (Nasser e Tinoco, 2003, p.52)

Uma das soluções do problema é determinada do seguinte modo:

a) Podemos escrever o número P na forma P=2.1.3.4.5...121. Como q=1.3.4.5...121 é um número inteiro temos que P=2q. Logo, P é par.

b) Sim. Utilizando o mesmo raciocínio do item a concluímos que P é múltiplo de 5.

c) Sim. Mesmo raciocínio utilizado nos itens a e b.

d) Podemos escrever o número P na forma P=1.2.3.4.5...9.11...121.10. Como m=1.2.3.4.5...9.11...121 é um número inteiro temos que P=10m. Logo, o algarismo das unidades de P é zero. Outra forma de mostrar que o algarismo das unidades de P é zero é utilizar o mesmo raciocínio, mas escrevendo P da forma 100n.

Vejamos algumas respostas dos alunos que se propunham a realizar as atividades

a) P é par?

Sim, pois P foi multiplicado por 121.

b) P é múltiplo de 5?

Sim, pois é multiplicado por 5. Então, é múltiplo do mesmo.

c) P é múltiplo de 13?

Sim, pois em alguma hora o número será multiplicado por 13.

Nesta resposta observamos que o aluno soube responder e justificar corretamente os itens b e c, mas no item a, deu uma justificativa totalmente errada. Se observasse bem, a resposta do item a tem uma justificativa muito parecida com as dos itens b e c. Outro fato observado é que o aluno não soube responder qual é o algarismo das unidades de P.

a) P é par? Sim. Tem números pares e números ímpares, como mostra acima, mas P é uma letra, então, não seria.

b) P é múltiplo de 5?

Sim. Tem números que são multiplicados por 5, mas, se for a letra P, não.

c) P é múltiplo de 13?

Sim. Tem números que são multiplicados por 13, mas, se for a letra P, não.

d) Qual é o algarismo das unidades de P?

1 à 121.

Nesta resposta observamos que o aluno não domina as propriedades Matemáticas relacionadas a múltiplos e divisores, colocando argumentos que descrevem vários números, quando na verdade há somente um número e seus fatores.

a) P é par?

Sim, pois todo número multiplicado por 2 é par.

b) P é múltiplo de 5?

Sim, pois esse número (P) está sendo multiplicado por 5.

c) P é múltiplo de 13?

Sim, pois esse número (P) está sendo multiplicado por 13.

Outra resposta correta utilizando os argumentos apropriados para os itens da questão. Observa-se que, mesmo o aluno respondendo e justificando corretamente, não soube responder o item d.

a) P é par?

Sim. É multiplo de 2

b) P é múltiplo de 5?

Sim. É multiplo de todos os numeros entre 1 e 121

c) P é múltiplo de 13?

Sim.

d) Qual é o algarismo das unidades de P?

O (zero). É multiplo de 10 (dez).

Esta resposta traduz bem o conhecimento aritmético de múltiplos e divisores de um número. Observe que não há confusão com relação ao número P e seus fatores. Acreditamos que esse tipo de resposta é o mais esperado para os professores.

Atividade 5. Tema I. Descritor 2: Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

Sobre os lados de um triângulo retângulo foram colocados quadrados como ilustrado na figura abaixo. Sabe-se que a soma das áreas desses três quadrados vale 18 cm^2. Calcule a medida do lado do maior quadrado justificando sua resposta. (Iezzi, 2009)

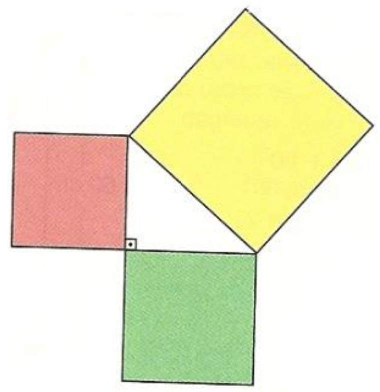
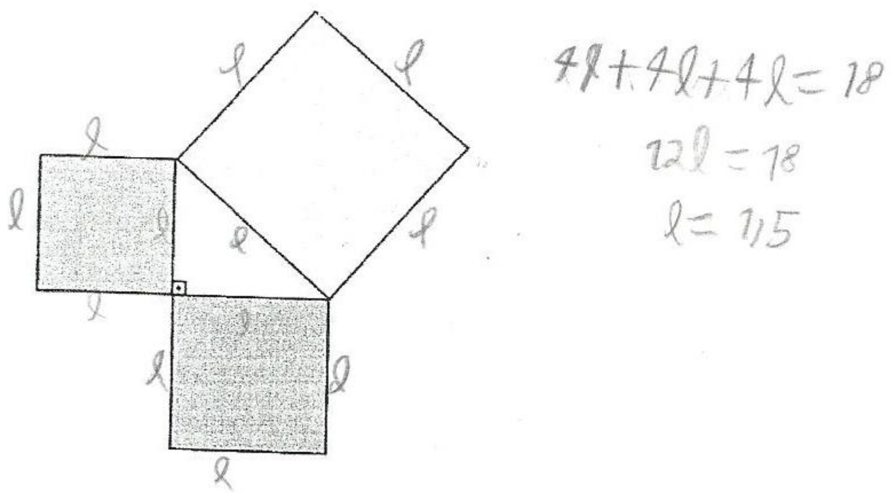


Figura 12
Fonte: Matemática e realidade

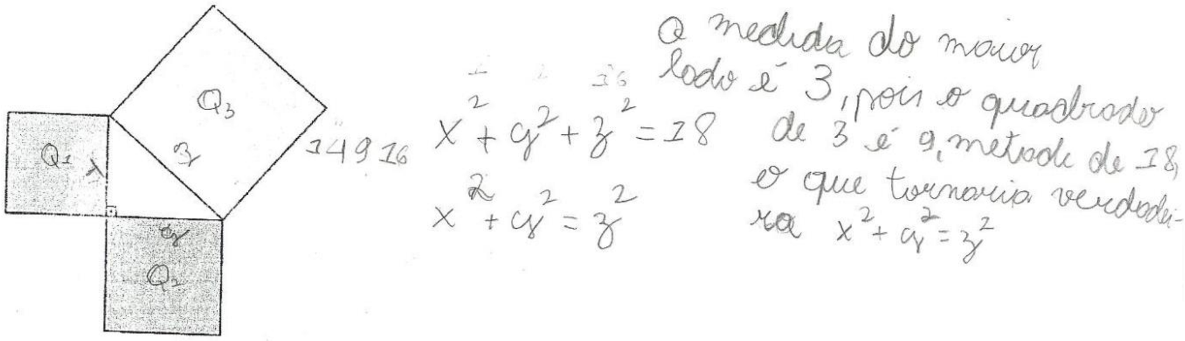
Uma maneira de chegar à solução da atividade é:

Considere a hipotenusa a e os catetos b e c do triângulo retângulo. Observe que essas medidas representam os lados do maior, do médio e do menor quadrado respectivamente. Logo, $a^2+b^2+c^2=18$ (1) . Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo temos: $a^2=b^2+c^2$ (2). Substituindo (2) em (1) temos que $a^2+a^2=18$. Portanto, a=3cm.

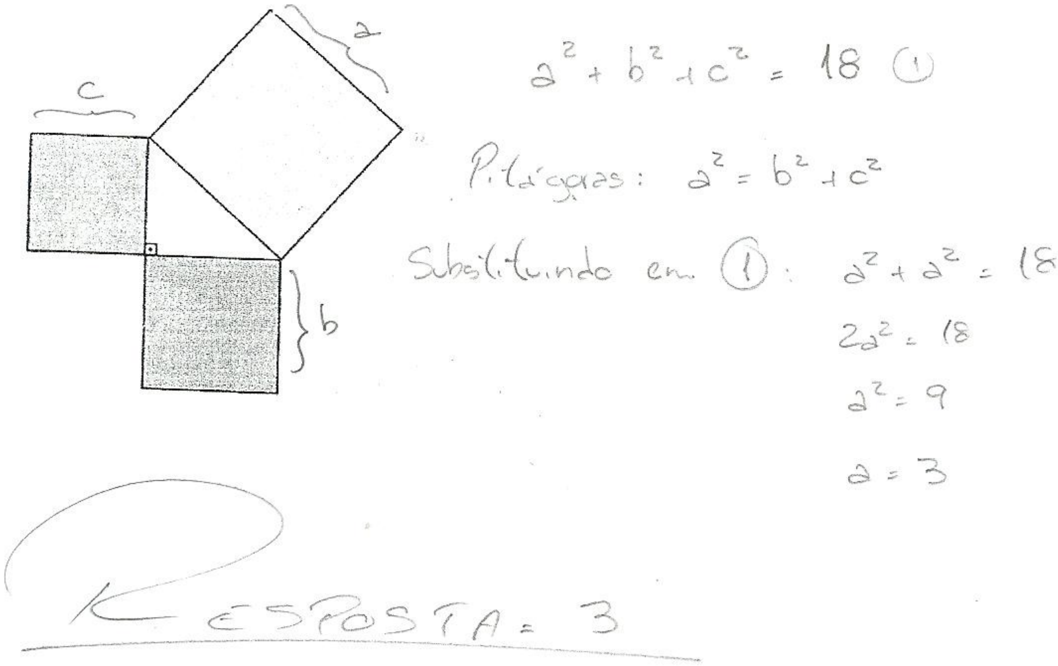
Vejamos algumas repostas dos alunos:



Nesta resposta observamos que o aluno confunde área com perímetro criando hipóteses que não existem para a atividade.



Observamos, nesta resposta, que o aluno escreveu equações condizentes com as hipóteses do problema. Porém, ele não deixa claro que encontrou o valor pedido resolvendo o sistema de equações. Podemos dizer que o aluno provou a teste pela tese. Consideramos essa resposta correta, porém não esperada para a pesquisa.



Esta resposta apresenta clareza nas hipóteses e nos argumentos necessários para chegar à resposta correta. É a mais completa e esperada para a nossa pesquisa.

4.1 Os resultados

Apresentamos nesta seção os gráficos relativos às respostas dos alunos e alguns comentários sobre os mesmos. É relevante destacar que utilizamos os seguintes critérios para contabilizar os resultados:

As questões ou itens deixados em branco foram classificados como NÃO RESPONDEU.

As questões ou itens que foram respondidas foram classificados como: RESPONDEU CORRETAMENTE ou RESPONDEU ERRADO.

As questões ou itens que foram respondidas corretamente, ou seja, com respostas e justificativas corretas foram classificadas como RESPONDEU E JUSTIFICOU CORRETAMENTE.

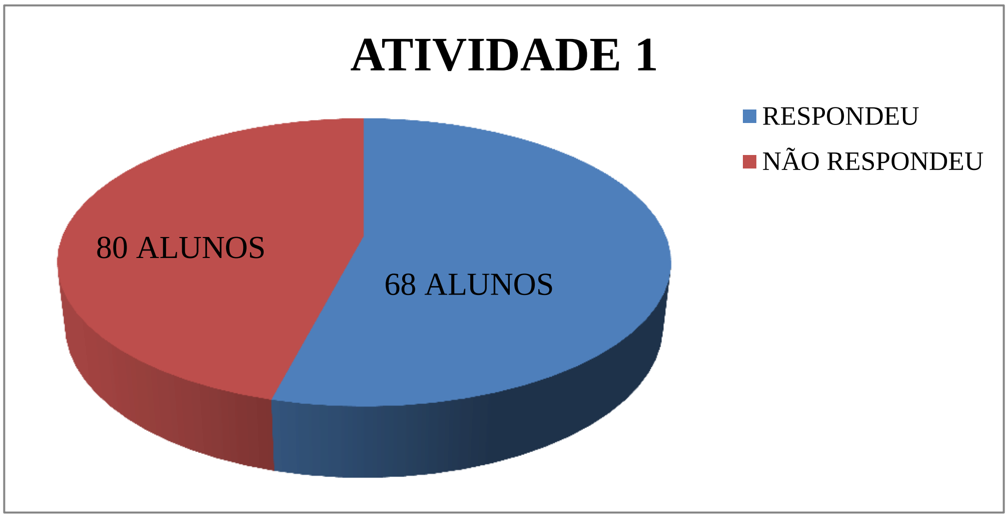


Gráfico 2

Observa-se, com o gráfico 2, que 54% dos alunos responderam à atividade 1 e 46% não responderam.

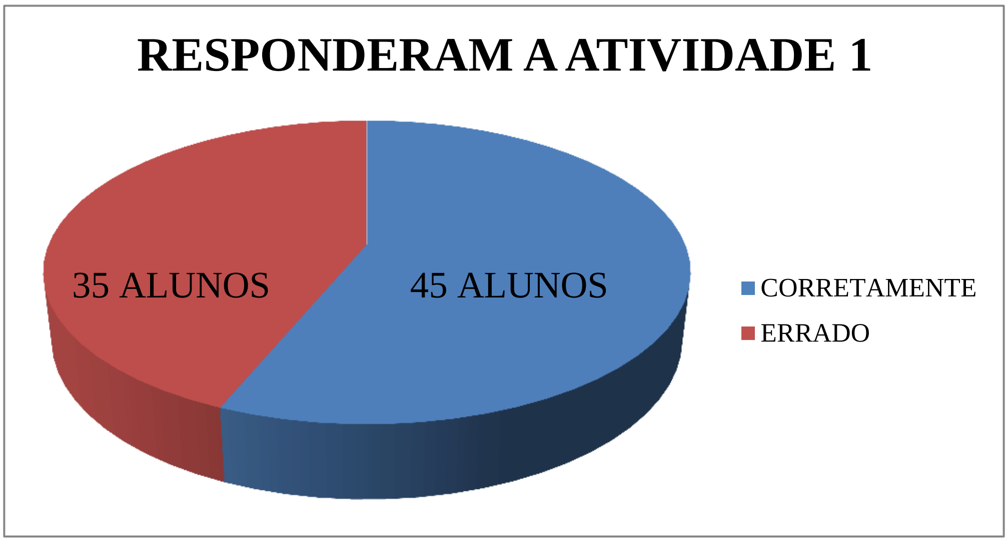


Gráfico 3

Dos 80 alunos que responderam à atividade 1, 45, ou seja, 56% responderam corretamente. E destes, 19% justificaram corretamente suas respostas como mostra o gráfico a seguir.

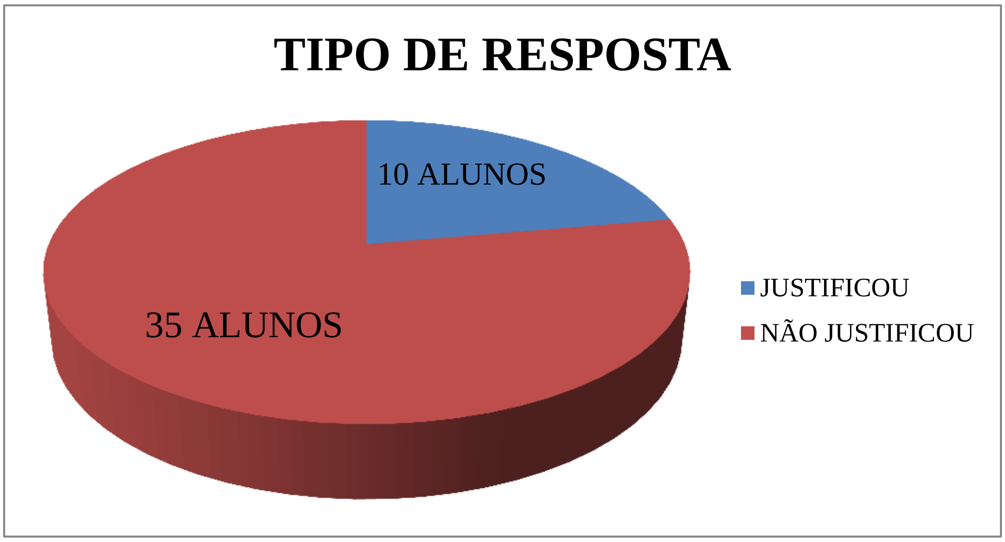


Gráfico 4

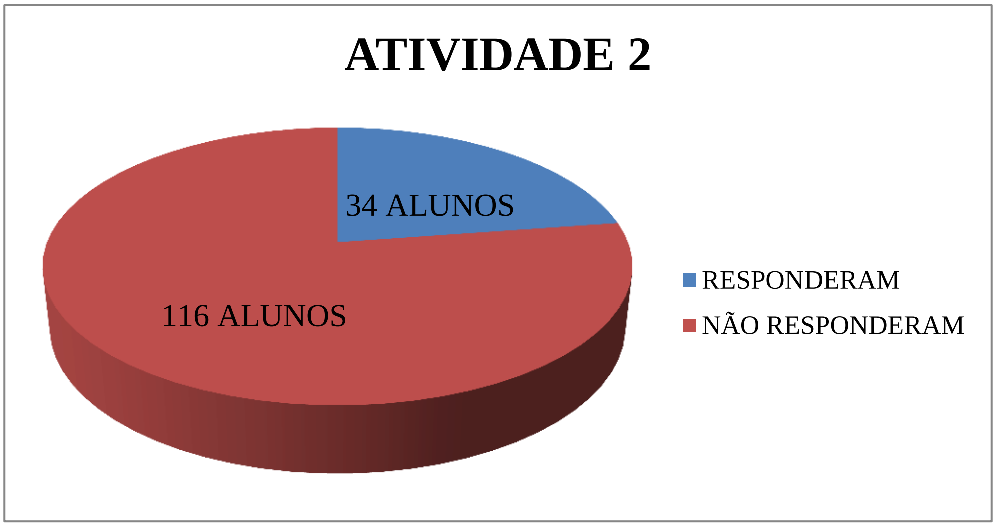


Gráfico 5

Observa-se no gráfico que 77% dos alunos que se propunham a realizar as atividades não responderam à questão 2. E dos 34 alunos que responderam, contabilizamos 2 respostas corretas e 1 aluno acertou e justificou corretamente o raciocínio utilizado.

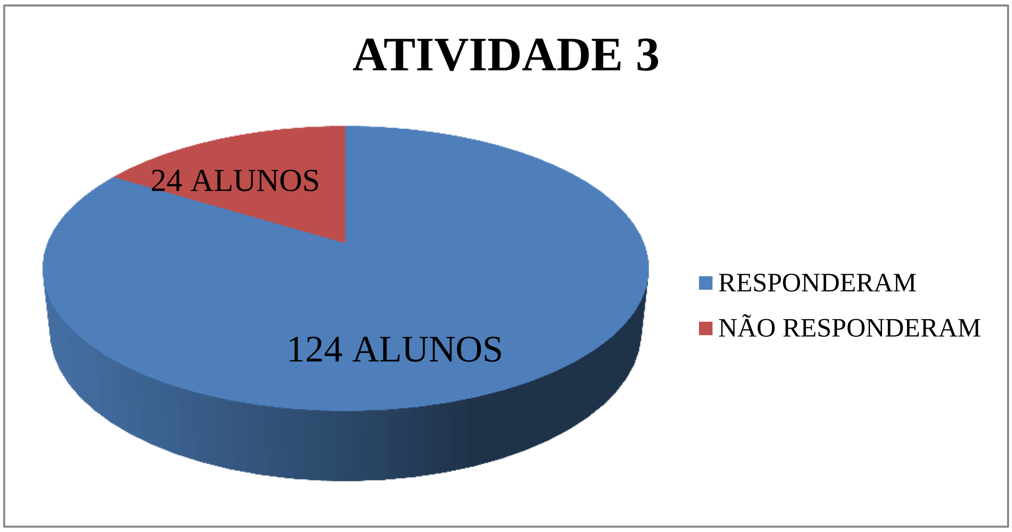


Gráfico 6

De acordo com o gráfico 6, 16% não responderam à atividade 3 e mais de 80% não deixaram a questão em branco. Destes, apresentamos o gráfico 7 a seguir.

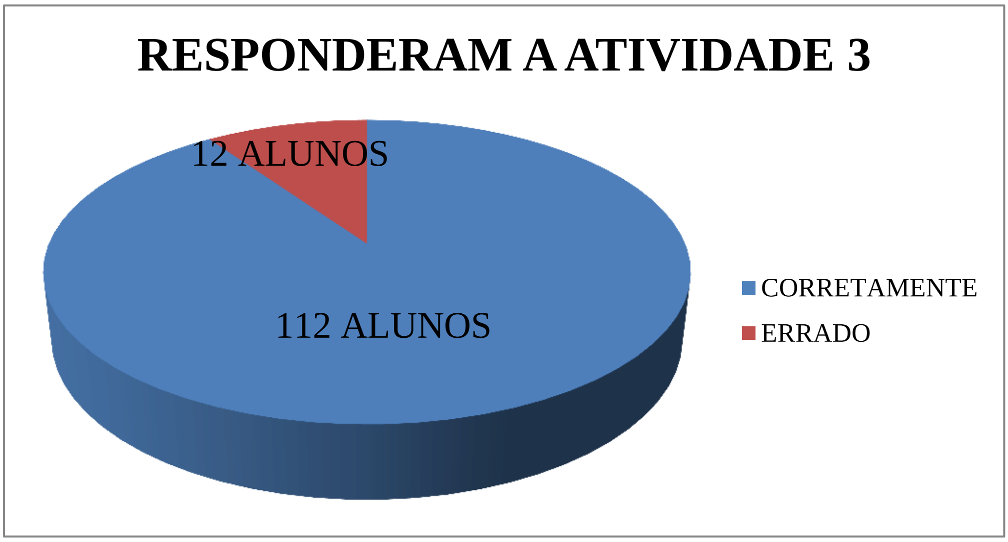


Gráfico 7

Ou seja, 10% erraram a resposta e 90% acertaram. Com relação a estes alunos, vejamos o gráfico a seguir.

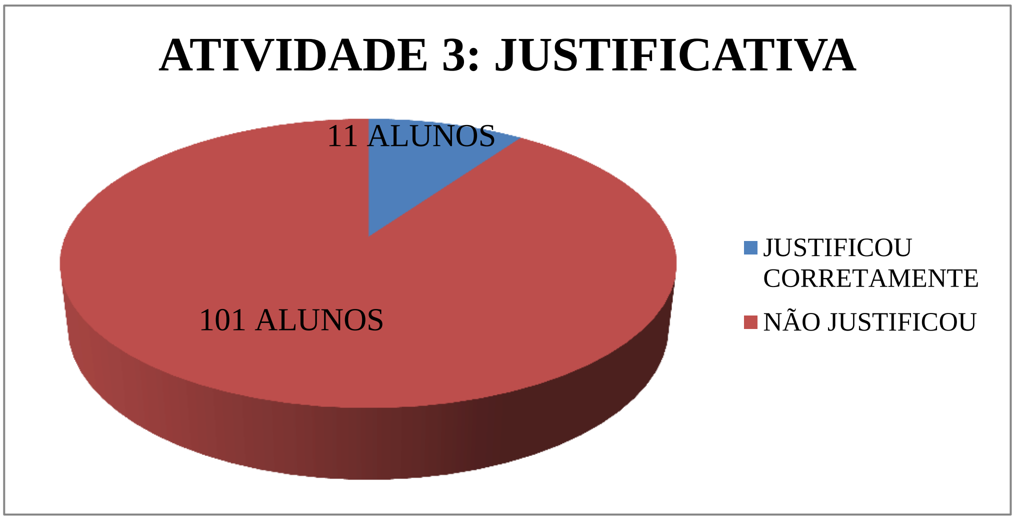


Gráfico 8

Analisemos os resultados da atividade 4

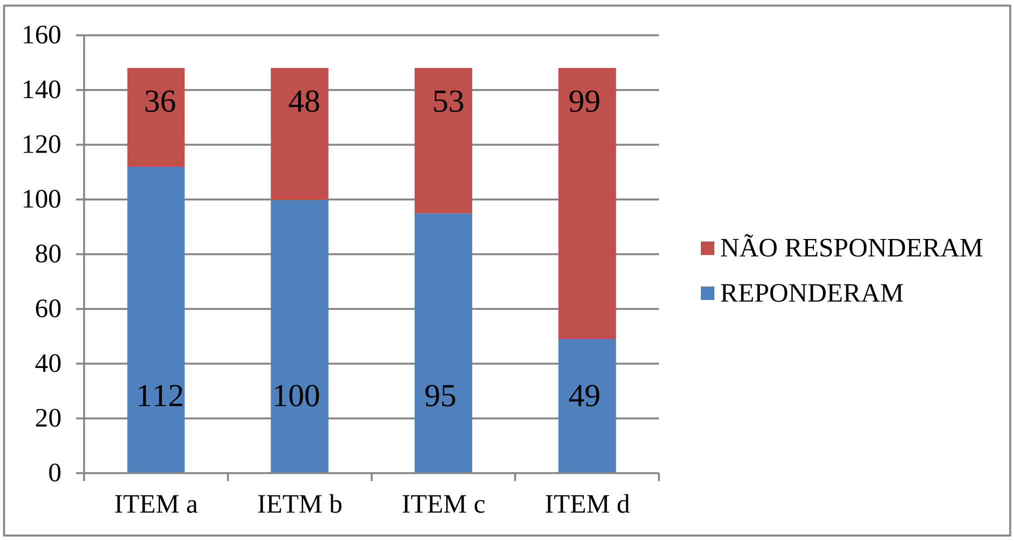


Gráfico 9

Observamos que 78% responderam ao item a, 69% responderam ao item b, 62% ao item c e 38% ao item d.

Vejamos agora os números de alunos que acertaram a atividade 4

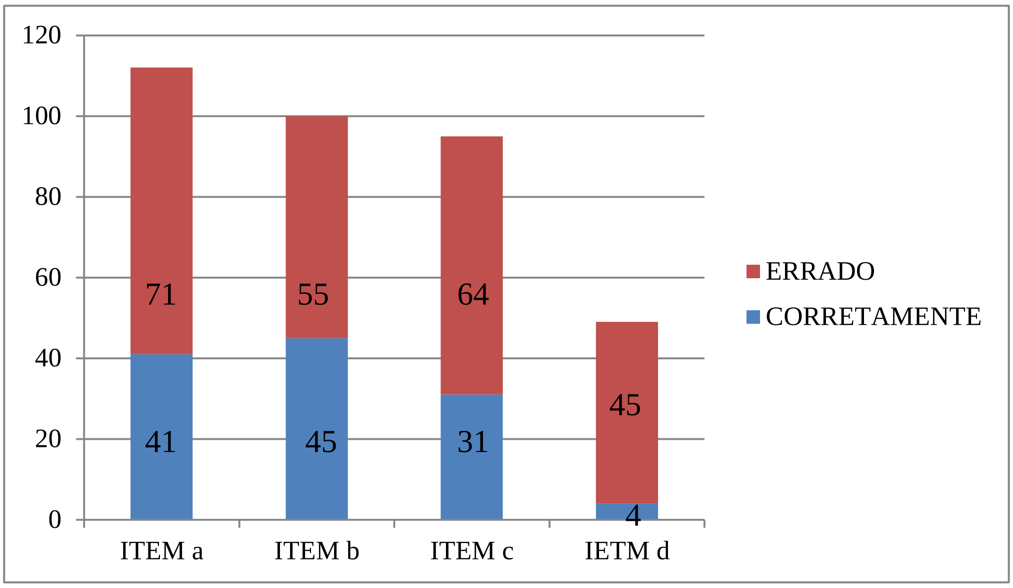


Gráfico 10

Dos alunos que responderam corretamente aos itens da atividade 4 observamos que 7 justificaram o item a, 11 justificaram o item b, 6 o item c e 2 alunos justificaram o item d.

No gráfico 11 a seguir, apresentamos os resultados para a atividade 5.

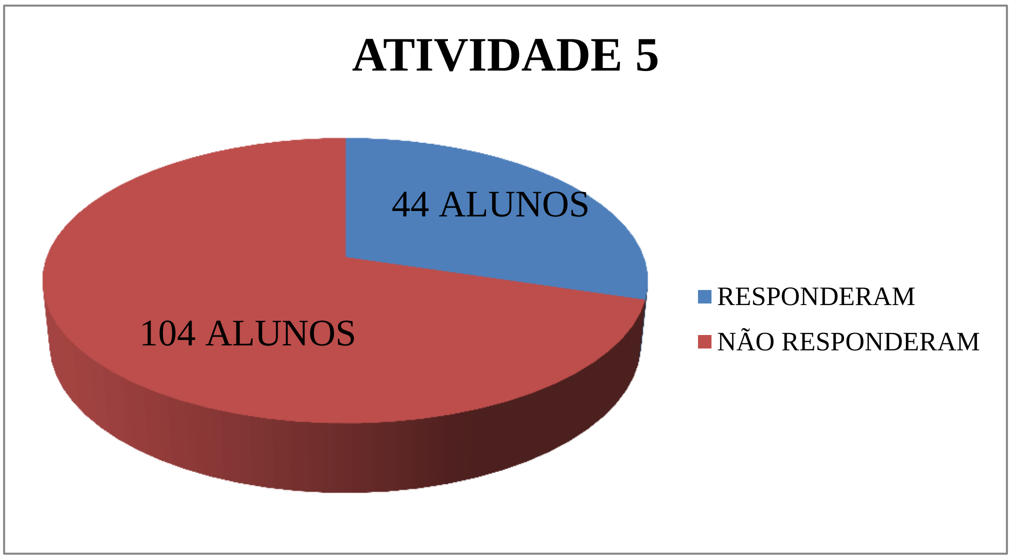


Gráfico 11

Destes 44 alunos que responderam à atividade 1 observamos 2 respostas certas e, destas, 1 aluno respondeu e justificou corretamente.

4.2 Comentários das atividades

Após o tempo determinado para resolver o teste comentamos sobre as questões e os possíveis raciocínios que poderiam ser utilizados. Colocamos a importância do saber fazer demonstrações e o de justificar as respostas sempre, mesmo que para o próprio aluno a solução e justificativa não esteja, ao seu pensar, corretos. Deve-se insistir e habituar-se a escrever Matemática, mesmo que não seja exigido pelo professor durante a aula, pois mesmo que simples, os seus argumentos, eles o ajudarão no momento de escrever uma redação, justificar uma experiência física ou até mesmo em uma questão de Matemática semelhante.

A correção das atividades foi realizada em sala de aula, para que os alunos pudessem observar seus erros e os argumentos, frases, conceitos ou definições utilizados nas soluções. Foram feitos comentários e perguntas sobre as atividades e a maior parte deles relatou muitas dificuldades durante a realização do teste. Uma dessas dificuldades foi a de interpretar as questões, e relacioná-las a um conteúdo matemático. Um aluno perguntou se tais questões eram realmente possíveis de resolver ou se eram aquelas questões deixadas como desafio por algum estudioso matemático. A atividade 5 foi a de maior dificuldade para os alunos. *"Não sabia que era uma questão de Teorema de Pitágoras"*, disse um deles. Um comentário muito falado após as soluções no quadro foi: *"eu ainda não tenho essa visão em Matemática professor"*. Questionados sobre a primeira atividade, alguns alunos disseram que foi a mais fácil de responder, porém, a mais difícil de justificar. Além disso, disseram que não sabiam quais eram os ângulos do qual a questão se referia e relataram não saber que poderiam somar duas equações encontrando uma terceira. Na atividade 3 alguns alunos disseram: *"pensei que se eu colocasse três números consecutivos quaisquer já servia como resposta para justificar."* Uma aluna considerada articulada e participativa nas aulas, que não obteve um resultado muito satisfatório nesta avaliação, disse que estava segura com relação às suas respostas, mas ao observar as soluções cometeu muitos erros. A atividade 4 foi considerada pelos alunos aquela que tinha uma *"pegadinha"*. No item *a* disseram que era fácil, pois o número 2 estava explícito. No item b, o mesmo, mas nos itens *c* e *d* não sabiam a resposta, pois o número 13 não aparecia na sequência, no caso do item *c*. E não era possível responder, no caso do item *d*. Poucos alunos comentaram sobre a atividade 2, mas aqueles que o fizeram relataram ser difícil resolver questões de área sem valores e outro perguntou se podia aplicar Teorema de Pitágoras, já que na figura estavam aparentes dois triângulos retângulos.

O que mais chamou a nossa atenção nessa conversa sobre as atividades foram os comentários do tipo: *"se eu soubesse que era difícil nem tinha tentado responder"*, deixando transparente o desanimo e a baixa-estima para o estudo da Matemática. Talvez esse comportamento seja conseqüência da impressão de tempo perdido nas séries anteriores, já que esses alunos se encontram no 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio. Destaquei para os alunos que sempre há tempo de aprender e recuperar conteúdos aprendidos.

5- CONCLUSÕES

Concluímos que as indicações dos PCN, em desenvolver um currículo que permita o desenvolvimento da demonstração e argumentação, não representam uma obrigatoriedade nos planejamentos do professores da educação básica. Que a prova e a argumentação representam etapas da demonstração não necessitando de formalismo e existem diferentes tipos de prova aplicada a cada caso.

Os resultados de nossas atividades evidenciam que os alunos têm dificuldades na escrita argumentativa e elaboração da estratégia para resolver um problema, além de não conseguir retirar do enunciado as informações (hipóteses) necessárias para relacioná-las com um conteúdo matemático e chegar a uma conclusão (tese) de um problema. Ou seja, os alunos não dominam o processo dedutivo e não têm conhecimento em demonstrações. Em alguns casos observamos que os alunos até sabem como será a resposta, mas no momento de colocar suas idéias a limpo falta organização do pensamento criando um bloqueio tornando-se conformado com resultados prontos. Observamos também que as atividades envolvendo variáveis (onde não são fornecidos valores e o aluno deve expressar o resultado através de uma sentença algébrica) criam uma expectativa aos alunos de falta de informação. Ou seja, quando a questão é numérica, torna-se mais familiar.

Uma pesquisa realizada por Heinze (2008), referindo-se a experiências de ensino realizadas com alunos de 13 a 15 anos em Taiwan e na Alemanha identificou dificuldades muito próximas à de nossos alunos. No trabalho de Heinze, os autores consideram que a complexidade da prova descrita como um conjunto de argumentos que o aluno deve combinar é um dos motivos que os levam a terem dificuldades com demonstração.

Percentualmente, os alunos de nossa amostra, ficaram próximos dos resultados nacionais da Prova Brasil, ou seja, 10% dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e anos iniciais do Ensino Médio têm conhecimentos matemáticos esperados.

5.1 Considerações finais

As dificuldades em demonstrar, ou provar, na sala de aula, visando a melhoria da qualidade de ensino são muitas e evidentes. Como relatamos em nossa introdução, os percentuais de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com conhecimento matemático esperado, está em crescimento, mas ainda representam valores baixos em relação aos números do 5º ano, por exemplo. Fica o seguinte questionamento: por que durante o 2º segmento do Ensino Fundamental há essa queda no conhecimento em Matemática? É necessário outra pesquisa visando responder essa pergunta.

Observamos que, pesquisadores como Arsac (2009), defendem que esta dificuldade dos alunos é um reflexo da má formação dos professores de Matemática, que não têm uma visão muito clara com relação às demonstrações.

Não podemos desistir perante essa situação atual, pois exatamente nos momentos mais difíceis que surge a necessidade de mudança e evolução. O que seria da tecnologia de hoje se não tivessem existido as duas grandes guerras. É exatamente isso que estamos passando no momento: uma guerra entre a educação e a facilidade, esta última que está presente na sala de aula através do telefone celular do aluno ou das respostas prontas que existem nos livros didáticos. Em alguns casos a dificuldade está na formação do professor, na falta de interesse em melhorar suas aulas ou na estrutura deficiente da escola.

Segundo Almouloud (2012), nos últimos anos vimos sofrendo com uma “síndrome do imediatismo” e que tudo que se faz ou se pensa deve gerar um resultado prático e imediato. É necessário realizar procedimentos que tornem possível o uso de demonstrações e argumentações em sala. O professor deve fazer uma reflexão dos seus métodos e aceitar que, em alguns casos é preciso mudar. O provar, o demonstrar e o argumentar, mesmo que simplório, devem ser ensinados aos poucos e de preferência no início da educação básica através da língua materna. Ou seja, precisamos destacar a importância do saber escrever Matemática.

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, PR, 18 a 21 de julho de 2013.

ARSAC, G. *L'origine de la dèmonstration: essai d'Èpistémologie didactique. Recherches en Didatique des Mathémtiques*, V. 8, n.3, p. 267-312, 1987. Disponível em: <http://rdm.penseesauvage.com>. Acesso em 23 de julho de 2014.

BALACHEFF, Nicolas. *Preuve et démonstrations em mathemátiques au collège. Recherches em Didactique dês Matémathiques*, Genoble, v. 3, n 3, p. 261-304, 1982. Disponível em <http://www.noe-kaleidoscope.org>. Acesso em 11 de junho de 2014.

BALACHEFF, Nicolas. *Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies em Mathematics*, Vol. 18, n 2, p. 147-176, 1987. Disponível em: <http://cimm.ucr.ac.cr>. Acesso em 11 de junho de 2014.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Tese de doutorado. Universidade de Lisboa 2005. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt>. Acesso em 10 de junho de 2014.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais: Brasília (1998).

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar,* 9: Geometria Plana. 7ª Ed. Editora Atual, São Paulo. 1993.

DUVAL, R. Régistres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensèe. *Annales de Didatique et des Sciences Cognitives*, vol. V, p. 35-68, IREM de Strasbourg, 1993. Disponível em <https://archive.org> Acesso em 10 de junho de 2014.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R; GIOVANNI Jr., J. R. *Matemática Completa*: ensino médio, volume único. Editora FTD. São Paulo. 2002.

GOUVÊA, Filomena Aparecida Teixeira. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC. São Paulo. 1998. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado/educacao-matematica> Acesso em 20 de março de 2014.

HEINZE, A. et. AL. *Strategies to Foster estudents' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: twaching experiments in Taiwan and Germany*. In: ZDM Mathematics Education, Heidelberg: Springer Berlin, v 40, n 3, p. 443-453, 2008. Disponível em: <http://www.researchgate.net>. Acesso em 02 de Maio de 2014.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Oswaldo. *Matemática e Realidade*, 9º ano. 6ª edição. Ed. Atual. São Paulo, 2009.

LAKATOS, I. A *logíca do descobrimento matemático - provas e refutações,* Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. Pesquisa em Educação: *Abordagens Qualitativas*. São Paulo, EPU, 1986.

LUFT, Lya. *Sem esforço e sem exemplo*. Revista Veja, nº 2342, p. 26, 9 out. São Paulo 2013.

NASSER, Lilian; TINOCO, Lucia A. A. *Argumentação e provas no ensino da matemática*. 2 ed, Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

OLÉRON, P. L' argumentation. Paris: *Presses Universitaires de France.* 2001. Disponível em: <http://is.muni.cz>. Acesso em 08 de agosto de 2014.

PERELMAN, Chaïm. (1977a) Argumentação. In: Enciclopédia Einaudi. vol. 11. Imprensa nacional – casa da moeda, Lisboa, 1987, pp.234-265. [1ª publicação: Argomentazione. In: Enciclopedia Einaudi, vol.I, 1977, pp.791-823].

PIETROPAOLO, R. C. *“(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática”*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pointifícia Universidade Católica de São Paulo. 2005. Disponível em: <htpp://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado>. Acesso em 02 de maio de 2014.

SADDO, Almoloud; FERREIRA DA SILVA, Maria José; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. RPEM- Revista Paranaense de Educação Matemática, n. 1, jul-dez 2012.

SADDO, Almouloud. Prova e demonstração em matemática: *problemática de seus processos de ensino e aprendizagem*; PUC. São Paulo. GT: Educação Matemática, n.19. 2010. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo.../docs_30/prova.pdf>. Acesso em 06 de julho de 2014