

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JEANE ANDREANE PAVELEGINI DE MEDEIROS DE
BRITTO

O Teorema de Morley

Curitiba

2015

**JEANE ANDREANE PAVELEGINI DE MEDEIROS DE
BRITTO**

O Teorema de Morley

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Paraná-UFPR, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

Curitiba

2015

O Teorema de Morley

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Paraná-UFPR, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Profa. Dra. Adriana Luiza do Prado

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Profa. Dra. Lucelina Batista Santos

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Campus Ponta Grossa

Curitiba - 2015

Agradecimentos

Sempre que finalizamos um trabalho nos damos conta de que ele é fruto de um esforço conjunto, e percebemos que precisamos agradecer aos companheiros de jornada: professores, familiares e amigos, que foram fundamentais para a concretização de nosso sonho.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Dr. Aldemir, que foi durante todo o curso do mestrado um verdadeiro Professor, empenhado, amigo, preocupado com a aprendizagem de seus alunos, sempre incentivando e colaborando para que pudéssemos evoluir como seres humanos, alunos e professores.

No PROFMAT confirmei mais uma vez a importância do trabalho em grupo e o quanto os amigos são fundamentais para o nosso sucesso. Um agradecimento especial à amiga de todas as horas, Ana Maria, com a qual eu dividi noites e noites de estudo e aprendi o quanto a generosidade é valiosa.

Aos Professores sérios e dedicados que nos apresentaram as “armas” para enfrentarmos a “batalha” com sabedoria, dignidade, respeito e coragem, em especial a Professora Dra. Adriana Luiza do Prado, generosa e sempre pronta a ajudar.

Ao meu marido Rui Carlos, que soube compreender as minhas ausências e que com amor, companheirismo e compreensão, me deu forças para perseverar, mesmo nos momentos mais difíceis.

Por fim, quero agradecer aos meus Pais, Cassiano (in memoriam) e Lourdes, dois vencedores, pais amorosos e conscientes da importância da educação. Exemplos de dignidade e sabedoria. Aprender para ensinar melhor e transformar o mundo em um lugar melhor para toda a humanidade, essa é a nossa missão.

*Deus dá a todos uma estrela.
Uns fazem da estrela um sol.
Outros nem conseguem vê-la.*

Helena Kolody

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema de Morley: os três pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes dos ângulos de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero. Fez-se a opção em iniciar o trabalho com algumas definições básicas relacionadas aos triângulos, semelhança e congruência e o estudo do incentro, um dos pontos notáveis do triângulo, para finalizar com a apresentação e demonstração do Teorema de Morley, em três versões, utilizando-se semelhança de triângulos, trigonometria e produto vetorial, e um passo a passo para construção do Teorema de Morley com o auxílio do Geogebra.

Palavras-chave: triângulo; semelhança; congruência; incentro; trigonometria; produto vetorial; Teorema de Morley; Geogebra.

Conteúdo

1	Introdução	14
2	Definições básicas	16
2.1	Os Postulados de Euclides	17
2.2	Triângulos	20
2.2.1	Bissetriz	21
2.2.2	Mediana	21
2.2.3	Altura	22
2.2.4	Incentro	22
2.3	Congruência de Triângulos	23
2.4	Desigualdade Triangular	33
2.5	O V Postulado de Euclides	35
2.5.1	As Paralelas	36
2.6	Semelhança de triângulos	38
2.6.1	Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade	38
2.6.2	Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade	41
3	O Incentro	49
3.1	Incentro	49

4	Teorema de Morley	56
4.1	A prova do teorema de Morley	57
4.1.1	A trigonometria e o Teorema de Morley	68
4.1.2	Uma demonstração usando vetores e trigonometria	77
4.1.3	A área do triângulo de Morley	82
4.2	Construção do Triângulo de Morley utilizando o Geogebra	85
5	Conclusão	103
	Referências Bibliográficas	105

Lista de Figuras

2.1	Reta entre dois pontos	17
2.2	Segmento	18
2.3	Círculo	18
2.4	Ângulo reto tipo 1	19
2.5	Ângulo reto tipo 1	19
2.6	Triângulo	20
2.7	Bissetriz	21
2.8	Mediana	21
2.9	Alturas	22
2.10	Incentro	22
2.11	Triângulos congruentes	23
2.12	Congruência entre triângulos	24
2.13	Ângulos de um triângulo	25
2.14	Congruência LAL	26
2.15	Congruência ALA	27
2.16	Triângulo isósceles	27
2.17	Triângulos isósceles (demonstração)	28
2.18	Triângulo isósceles (demonstração)	29

2.19	Congruência LLL	29
2.20	Congruência LLL (demonstração)	30
2.21	Ângulos internos do triângulo	31
2.22	Ângulos externos do triângulo	31
2.23	Desigualdade triangular figura 1	33
2.24	Desigualdade triangular figura 2	34
2.25	Comprimento dos lados de um triângulo	34
2.26	Soma dos ângulos internos	36
2.27	Correspondência entre triângulos	37
2.28	Correspondência entre triângulos	38
2.29	Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade figura 1	39
2.30	Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade figura 2	40
2.31	Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade figura 3	40
2.32	Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade	42
2.33	Semelhança de triângulos figura 1	43
2.34	Semelhança de triângulos figura 2	44
2.35	Correspondência de triângulos	45
2.36	Lado-Ângulo-Lado	46
2.37	Lado-Lado-Lado	47
3.1	Incentro	50
3.2	Incentro do triângulo ABC	51
3.3	Lema sobre o incentro figura 1	51
3.4	Lema sobre o incentro figura 2	53
3.5	Circunferência	55

4.1	Trisseccção de um ângulo	56
4.2	Trissetrizes	59
4.3	Ponto de intersecção das trissetrizes	59
4.4	Triângulo de Morley	60
4.5	Construção de triângulos isósceles	62
4.6	Triângulo DEF	63
4.7	Teorema de Morley	66
4.8	Razão de semelhança entre os lados do triângulo	67
4.9	Teorema de Morley, trigonometria e os sete triângulos	69
4.10	Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 1	69
4.11	Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 2	73
4.12	Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 3	74
4.13	Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 4	74
4.14	Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 5	75
4.15	Triângulo de Morley e vetores	77
4.16	Área do Triângulo de Morley	83
4.17	Círculo circunscrito	83
4.18	Altura relativa ao lado BC	84
4.19	Razão entre as áreas dos triângulos	84
4.20	Geogebra atividade 1 passo 1	86
4.21	Geogebra atividade 1 passo 2	87
4.22	Geogebra atividade 1 passo 3	87
4.23	Geogebra atividade 1 passo 4	87
4.24	Geogebra atividade 1 passo 5	88

4.25	Geogebra atividade 1 passo 6	88
4.26	Geogebra atividade 1 passo 7	89
4.27	Geogebra atividade 1 passo 8	89
4.28	Geogebra atividade 1 passo 9	90
4.29	Geogebra atividade 1 passo 10	90
4.30	Geogebra atividade 1 passo 11	91
4.31	Geogebra atividade 1 passo 12	91
4.32	Geogebra atividade 1 passo 13	92
4.33	Geogebra atividade 1 passo 14	92
4.34	Geogebra atividade 1 passo 15	93
4.35	Geogebra atividade 1 passo 16	93
4.36	Geogebra atividade 1 passo 17	94
4.37	Geogebra atividade 1 passo 18	94
4.38	Geogebra atividade 2 passo 1	95
4.39	Geogebra atividade 2 passo 2	96
4.40	Geogebra atividade 2 passo 3	96
4.41	Geogebra atividade 2 passo 4	97
4.42	Geogebra atividade 2 passo 5	97
4.43	Geogebra atividade 2 passo 6	98
4.44	Geogebra atividade 2 passo 7	98
4.45	Geogebra atividade 2 passo 8	99
4.46	Geogebra atividade 2 passo 9	99
4.47	Geogebra atividade 2 passo 10	100
4.48	Geogebra atividade 2 passo 11	100

4.49 Geogebra atividade 2 passo 12	101
4.50 Geogebra atividade 2 passo 13	101
4.51 Geogebra atividade 2 passo 14	102

Lista de Símbolos

A	Ponto A
AB	Segmento definido pelos pontos A e B
\overline{AB}	Medida do segmento definido pelos pontos A e B
\overleftrightarrow{AB}	Reta definida pelos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	Semirreta definida pelos pontos A e B
$\angle ABC$	Ângulo definido pelos pontos A, B e C
$m(\angle ABC)$	medida do ângulo definido pelos pontos A, B e C
$\triangle ABC$	Triângulo definido pelos pontos A, B e C
\cong	Congruente
\sim	Semelhante

Capítulo 1

Introdução

Podemos definir uma obra de arte como resultado de uma criação humana, que possui um objetivo simbólico, beleza incomparável ou que representa um determinado conceito. Normalmente citamos como um exemplo de obra de arte, esculturas, pinturas, poemas, obras arquitetônicas, filmes, músicas, artefatos etc. Algumas obras de arte possuem utilidade prática e útil aos seres humanos.

Ouso dizer que um Teorema é uma verdadeira obra de arte, de beleza ímpar e que vai além disso. Em diversos casos contribui para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, gerando melhorias para a vida da humanidade.

A Matemática possui muitos aspectos fascinantes, representados através de suas obras. Neste trabalho pretendemos apresentar algumas *obras de arte* da Geometria Euclidiana, Teoremas que se relacionam entre si e que resultam em belezas ímpares.

Veremos que as três bissetrizes de um triângulo qualquer se encontram em um ponto denominado de incentro, que está relacionado com a demonstração do surpreendente e belíssimo Teorema de Morley, que será desenvolvida com o auxílio de semelhança de triângulos, os postulados de Euclides, pontos notáveis de um triângulo, relações trigonométricas, Leis dos Senos e Cossenos, adição de arcos e transformação em produto, bem como produto escalar, conteúdos que foram trabalhados durante o PROFMAT.

O Teorema de Morley é assim denominado em razão de seu descobridor, o matemático anglo-americano Frank Morley, Professor de Matemática no Quaker College em Haver-

ford, Pensilvânia, Estados Unidos da América, e reconhecidíssimo por suas pesquisas e trabalhos sobre Álgebra e Geometria.

Em 1899 Frank Morley fez conjecturas sobre o triângulo equilátero cujos vértices são os pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes dos ângulos de um triângulo qualquer.

Em dezembro de 1924, Frank Morley fez comentários acerca do Teorema na Revista Japonesa de Educação Secundária - Journal of the Mathematical Association of Japón for the Secondary Education - em um artigo denominado: *On the intersections of the trisectors of the angles of a triangle*.

A prova do Teorema de Morley só foi apresentada cerca de 30 anos após o Professor Morley ter feito suas conjecturas e, dessa forma, o Teorema é considerado como sendo do século XX.

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Morley. Para o presente trabalho selecionamos três. As escolhas não foram feitas ao acaso, procuramos apresentar demonstrações que utilizam conceitos e conteúdos trabalhados durante o PROFMAT.

A primeira demonstração é desenvolvida utilizando-se semelhança de triângulos, os postulados de Euclides e pontos notáveis de um triângulo. É uma demonstração que pode ser desenvolvida com o auxílio de softwares para o ensino de Geometria, a exemplo do Geogebra. Foi baseada na demonstração contida no livro *Geometry: A Metric Approach with Models*[10].

A segunda demonstração é desenvolvida com o auxílio da Trigonometria. Recorrendo-se às relações trigonométricas, Leis dos Senos e Cossenos, adição de arcos e transformação em produto é possível provar o Teorema de Morley. É uma demonstração que pode muito bem ser trabalhada nas aulas de Matemática no Ensino Médio. Foi baseada em um artigo do Professor Aloísio Teixeira e na demonstração de Constantin Cocea[5].

Na sequência, apresentamos uma demonstração desenvolvida com produto vetorial, trigonometria e conceitos elementares de Geometria, baseada na prova do Professor Cesare Donolato.[16]

Capítulo 2

Definições básicas

A Geometria estuda as propriedades determinadas pela forma, grandeza e posição relativa dos objetos. Nos primórdios a necessidade de conhecer essas propriedades estava diretamente ligada às questões práticas dos homens, tais como: medir comprimentos, áreas e volumes. Dessa forma, os primeiros conhecimentos geométricos decorreram de observações e experiências do homem no meio em que vivia.

À medida que as informações geométricas foram se acumulando, os estudiosos começaram a perceber que a partir de algumas informações geométricas era possível obter novas informações apenas por dedução, sem precisar recorrer a experiências práticas. Estava surgindo a possibilidade de fazer demonstrações em Geometria.

Para que possamos desenvolver uma demonstração, de forma clara e bem estruturada, precisamos partir de um *ponto fixo*, a partir do qual iniciaremos nossas deduções e construiremos nossa argumentação.

Esses *pontos fixos* são os axiomas, que são afirmações e/ou proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração.

Algumas demonstrações necessitam de outros conceitos e teoremas. Veremos neste trabalho a demonstração de um belíssimo e contemporâneo Teorema: o Teorema de Morley.

Foi pensando em como poderíamos desenvolver a demonstração do Teorema de Morley

de forma clara e didática que fizemos a opção em elaborar este capítulo, que trata de conceitos e teoremas importantes da Geometria e que estão relacionados aos triângulos, tais como os Postulados de Euclides, Congruência de Triângulos, Desigualdade Triangular, Teorema Fundamental da Proporcionalidade e Semelhança de Triângulos.

2.1 Os Postulados de Euclides

Postulados ou axiomas são afirmações que devemos aceitar sem provas. Os Postulados de Euclides são proposições Geométricas específicas.

Postulado 1: Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une.

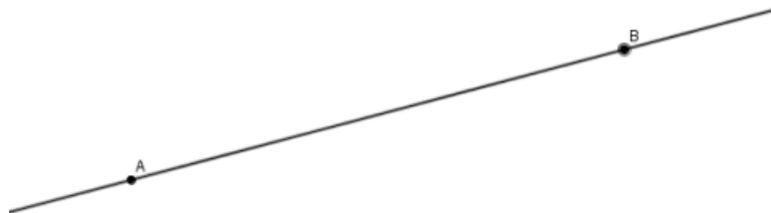


Figura 2.1: Reta entre dois pontos

Este postulado também pode ser enunciado das seguintes maneiras:

- a) Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos distintos;
- b) Por dois pontos distintos passa uma e só uma reta;
- c) Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer.

Observação 1. *A palavra reta na obra de Euclides, equivale ao nosso segmento de reta.*

Observação 2. *É um postulado que garante a existência do segmento.*

Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.

Esse postulado, também pode ser enunciado da seguinte maneira:



Figura 2.2: Segmento

- a) Pode-se continuar de uma única maneira qualquer segmento em uma reta;
- b) Para todo segmento de reta \overline{AB} e todo segmento de reta \overline{CD} existe um único ponto E , tal que B está entre A e E e o segmento \overline{CD} é congruente com o segmento \overline{BE} ;
- c) Pode-se prolongar uma reta infinitamente.

Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada.

Este postulado, também pode ser enunciado da seguinte maneira:

- a) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;
- b) Para todo ponto C e todo ponto A não coincidente com C existe uma circunferência com centro C e raio congruente com \overline{CA} ;

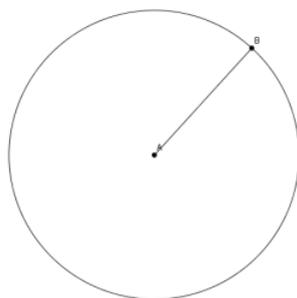


Figura 2.3: Círculo

Observação 3. *Esse postulado garante a existência da circunferência.*

Postulado 4: Todos os ângulos retos são iguais.

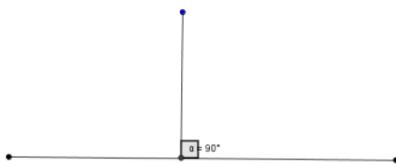


Figura 2.4: Ângulo reto tipo 1

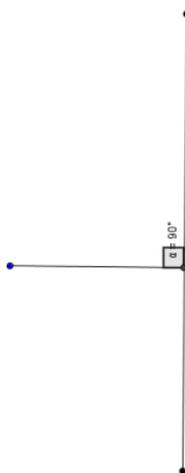


Figura 2.5: Ângulo reto tipo 1

Este postulado, também pode ser enunciado da seguinte maneira:

- a) Todos os ângulos retos são congruentes entre si;

Postulado 5: Se uma reta corta duas outras retas e a soma dos dois ângulos colaterais internos é menor que dois ângulos retos, as duas retas continuadas infinitamente encontram-se no lado no qual a soma é menor que dois retos.

Euclides também enunciou as Noções Comuns, em número de cinco. As cinco noções comuns são válidas na Geometria Euclidiana e em outros ramos da ciência.

Noção Comum 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais; ou, ainda: Duas coisas iguais (ou congruentes) a uma terceira, são iguais (ou congruentes).

Noção Comum 2: Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais; ou ainda: se iguais (ou congruentes) forem somados iguais (ou congruentes), os resultados são iguais (ou congruentes).

Noção Comum 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais; ou ainda: se iguais (ou congruentes) forem subtraídos de iguais (ou congruentes) os resultados são iguais (ou congruentes).

Noção Comum 4: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais; ou, ainda: coisas que coincidem uma a outra são iguais (ou congruentes) entre si.

Noção Comum 5: O todo é maior do que qualquer uma de suas partes; ou, ainda: o todo é maior que a parte.

De fato, não é difícil aceitar os postulados e as noções comuns enunciados por Euclides. Nós as usamos no nosso cotidiano.

2.2 Triângulos

Definição 2.1. *Sejam A , B e C três pontos não colineares. A reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} é denominada triângulo e é representada por $\triangle ABC$.*

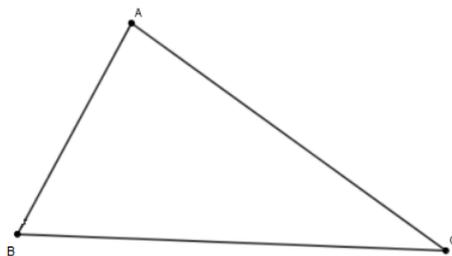


Figura 2.6: Triângulo

Os pontos A , B e C são denominados vértices dos $\triangle ABC$, e os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são seus lados.

Cada $\triangle ABC$ determina três ângulos internos, a saber: $\angle B\hat{A}C$, $\angle A\hat{B}C$ e $\angle A\hat{C}B$. Os ângulos internos podem ser representados também por $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ (ou \hat{A} , \hat{B} e \hat{C}).

2.2.1 Bissetriz

Seja o triângulo $\triangle ABC$ e seja D um ponto pertencente à reta suporte do lado \overline{BC} . O segmento \overline{AD} é a bissetriz do ângulo \hat{A} se a semi-reta \overrightarrow{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes.

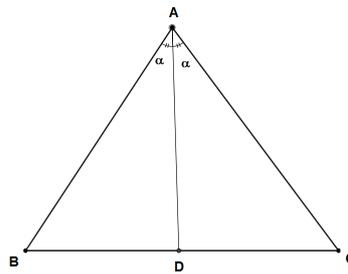


Figura 2.7: Bissetriz

2.2.2 Mediana

Seja o triângulo $\triangle ABC$ e seja D um ponto pertencente à reta suporte do lado \overline{BC} . Se D for o ponto médio do segmento \overline{BC} , então o segmento \overline{AD} é denominado de mediana do triângulo $\triangle ABC$, relativamente ao lado \overline{BC} .

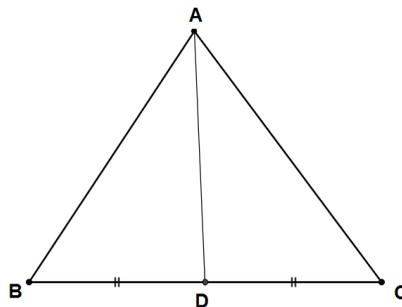


Figura 2.8: Mediana

2.2.3 Altura

Seja o triângulo $\triangle ABC$ de vértices A, B e C e seja D um ponto pertencente à reta suporte do lado \overline{AC} . Se \overline{BD} é perpendicular à reta que contém A e C , então o segmento \overline{BD} é a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativamente ao lado \overline{AC} .

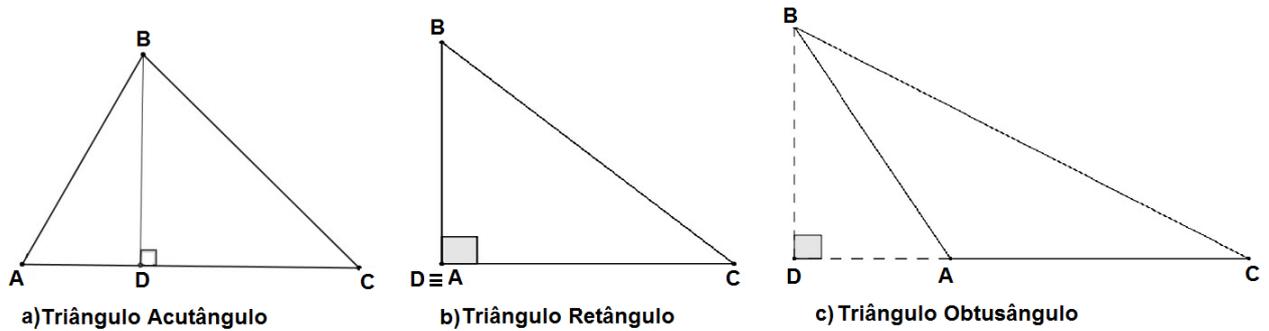


Figura 2.9: Alturas

2.2.4 Incentro

Seja o triângulo $\triangle ABC$ de vértices A, B e C , o incentro I é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

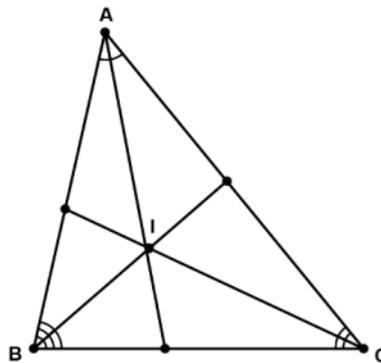


Figura 2.10: Incentro

2.3 Congruência de Triângulos

Definição 2.2. *Dois ângulos são congruentes se têm a mesma medida e, escrevemos $\angle A \cong \angle B$.*

Definição 2.3. *Dois segmentos são congruentes se têm o mesmo comprimento (ou mesma medida) e, escrevemos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.*

Proposição 2.1. *Todo segmento é congruente a si mesmo.*

A demonstração é óbvia, uma vez que todo segmento tem o mesmo comprimento que ele próprio. É o que se denomina de congruência identidade.

$$\angle A \cong \angle B \text{ significa que } m(\angle A) = m(\angle B).$$

Considerando-se uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre os vértices de dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$.

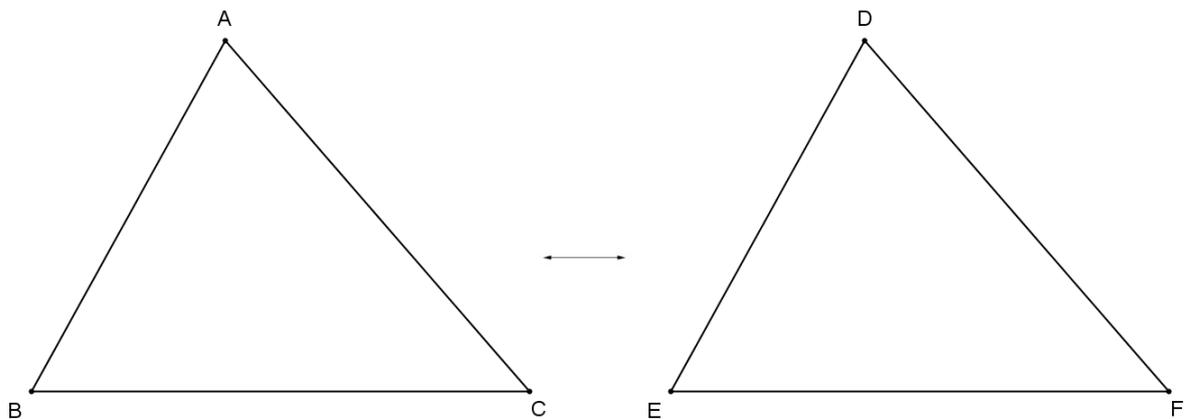


Figura 2.11: Triângulos congruentes

Isso nos dá, de forma automática, uma correspondência entre os lados dos triângulos:

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$$

$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$$

$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$$

e, da mesma forma, uma correspondência entre os ângulos dos dois triângulos:

$$\angle A \leftrightarrow \angle D$$

$$\angle B \leftrightarrow \angle E$$

$$\angle C \leftrightarrow \angle F$$

Pode-se, então, enunciar a definição de uma congruência entre dois triângulos:

Definição 2.4. *Seja dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre os vértices de dois triângulos. Se os pares de lados correspondentes são congruentes e os pares de ângulos correspondentes são congruentes então, a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é denominada de uma congruência entre os dois triângulos.*

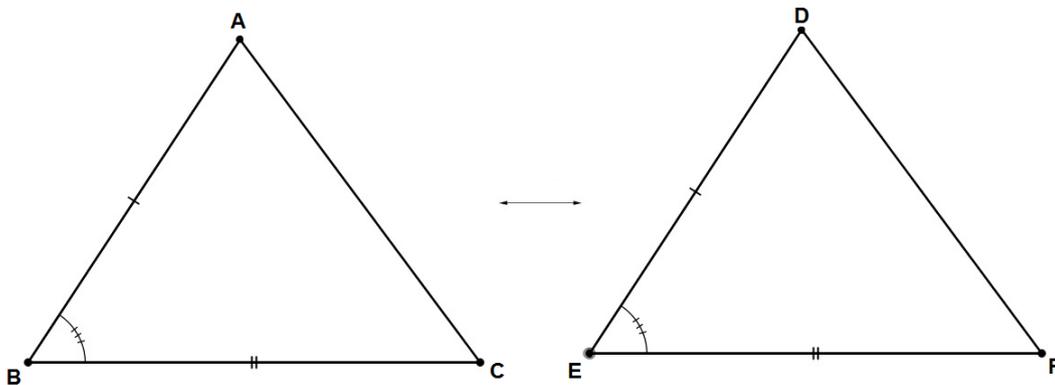


Figura 2.12: Congruência entre triângulos

Quando queremos dizer que a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência, escrevemos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

A expressão $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, traduz-se em seis afirmações simultâneas, que são:

- (i) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, ou $AB = DE$,
- (ii) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, ou $AC = DF$,
- (iii) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, ou $BC = EF$,
- (iv) $\angle A \cong \angle D$, ou $m(\angle A) = m(\angle D)$,
- (v) $\angle B \cong \angle E$, ou $m(\angle B) = m(\angle E)$ e
- (vi) $\angle C \cong \angle F$, ou $m(\angle C) = m(\angle F)$.

É conveniente indicar congruência entre segmentos e ângulos assinalando as referidas congruências nas figuras da seguinte forma:

Definição 2.5. *Um ângulo de um triângulo é determinado pelos lados do triângulo que estão contidos nos lados deste ângulo.*

Exemplo 2.1. *No $\triangle ABC$*

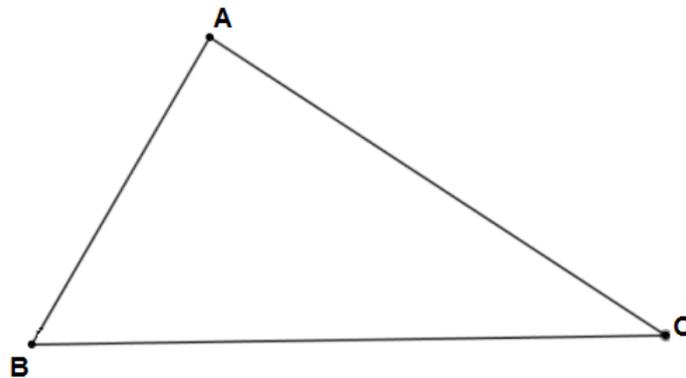


Figura 2.13: Ângulos de um triângulo

$$\hat{A} = \angle B\hat{A}C, \hat{B} = \angle A\hat{B}C, \hat{C} = \angle B\hat{C}A$$

De forma resumida, pode-se dizer que dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices,

$$A \leftrightarrow A'$$

$$B \leftrightarrow B'$$

$$C \leftrightarrow C'$$

de modo que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, ou seja,

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \quad , \quad \angle A \cong \angle A'$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad , \quad \angle B \cong \angle B'$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'} \quad , \quad \angle C \cong \angle C'$$

A seguir, apresentamos o *Axioma de Congruência* de triângulos *LAL*.

LAL respresenta "lado ângulo lado".

Axioma de Congruência de Triângulos: *LAL*

Axioma 2.1. *Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$; $\angle A \cong \angle A'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, então o $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

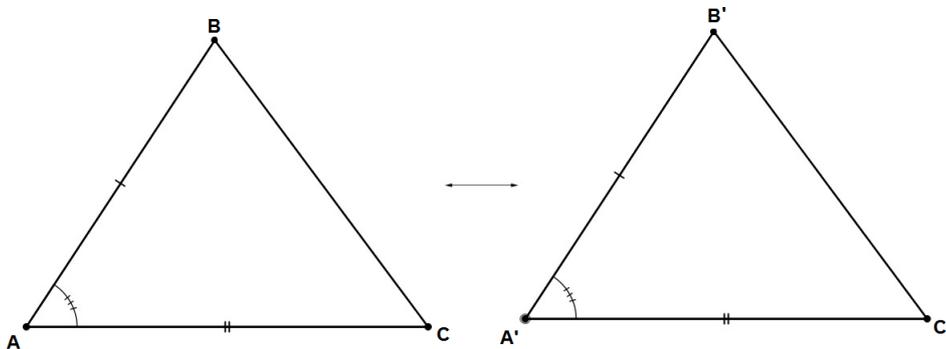


Figura 2.14: Congruência LAL

Os outros casos de congruência de triângulo decorrem do axioma LAL como veremos a seguir:

Teorema 2.1. *ALA (ângulo-lado-ângulo)*

Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ se $\angle A \cong \angle E$; $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ e $\angle B \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

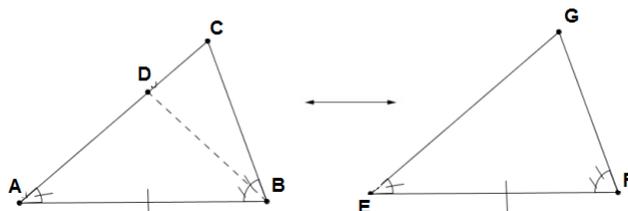


Figura 2.15: Congruência ALA

Demonstração: Seja D um ponto pertencente a \overline{AC} , tal que $\overline{AD} \cong \overline{EG}$. Então,

$$\triangle ABD \cong \triangle EFG$$

Portanto, $\angle ABD \cong \angle F \cong \angle ABC$ e, pelo Postulado de construção do ângulo, devemos ter $D = C$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$. ■

Proposição 2.2. (*Pons Asinorum*) *Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

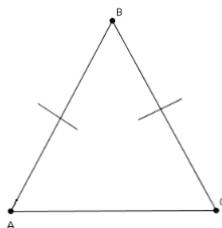


Figura 2.16: Triângulo isósceles

Demonstração:

Seja o $\triangle ABC$, com $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Consideramos a seguinte correspondência:

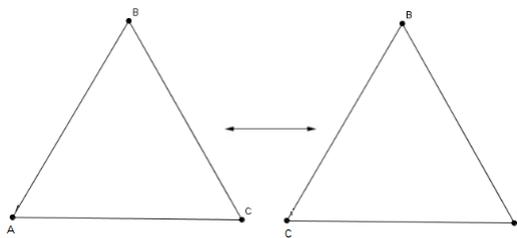


Figura 2.17: Triângulos isósceles (demonstração)

$$B \longleftrightarrow B$$

$$A \longleftrightarrow C$$

$$C \longleftrightarrow A$$

Tem-se que:

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \quad (\text{lado})$$

$$\angle B \cong \angle B \quad (\text{ângulo})$$

$$\overline{BC} \cong \overline{AB} \quad (\text{lado})$$

Pelo axioma LAL, segue que $\angle A \cong \angle C$.

■

Reciprocamente, temos a:

Proposição 2.3. *Se um triângulo $\triangle ABC$ tem dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.*

Demonstração: Dado o $\triangle ABC$, em que $\angle A \cong \angle C$, vamos mostrar que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

Seja a correspondência $ABC \longleftrightarrow CBA$.

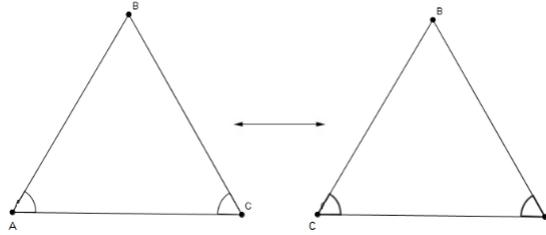


Figura 2.18: Triângulo isósceles (demonstração)

Tem-se que

$$\angle A \cong \angle C \quad (\text{ângulo})$$

$$\overline{AC} \cong \overline{CA} \quad (\text{lado})$$

$$\angle C \cong \angle A \quad (\text{ângulo})$$

Por ALA, tem-se que o $\triangle ABC \cong \triangle CBA$, então, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e, dessa forma, segue que o $\triangle ABC$ é isósceles.



Teorema 2.2. *LLL (lado-lado-lado)*

Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

$$ABC \leftrightarrow EFG$$

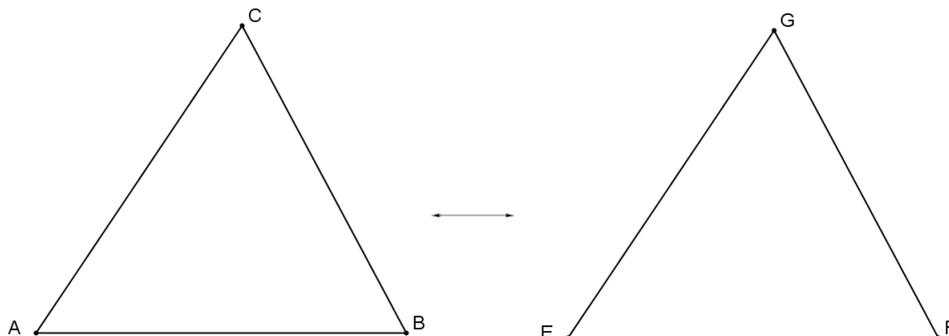


Figura 2.19: Congruência LLL

Demonstração:

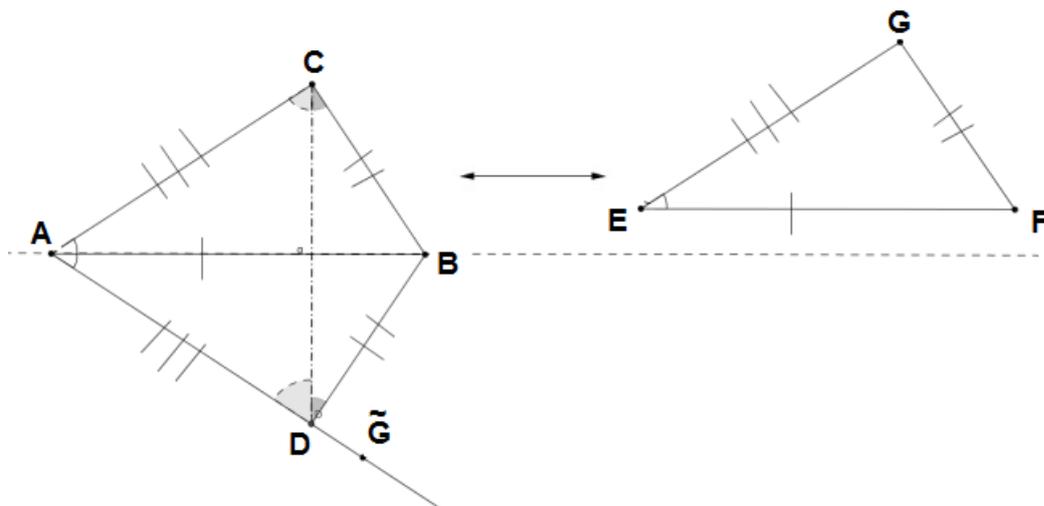


Figura 2.20: Congruência LLL (demonstração)

Pelo Postulado de construção de ângulo, existe um ponto \tilde{G} no semiplano determinado pela reta \overleftrightarrow{AB} , tal que

$$\angle B\hat{A}\tilde{G} \cong \angle E.$$

Seja $D \in \overrightarrow{A\tilde{G}}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{EG}$. Daí, temos:

$$\triangle ABD \cong \triangle EFG \quad (I)$$

por LAL

$$\Rightarrow \overline{BD} \cong \overline{GF}$$

Observamos que:

i)) $\triangle CAD$ é isósceles

$$\Rightarrow \angle A\hat{C}D \cong \angle A\hat{D}C = \theta.$$

ii) $\triangle CBD$ é isósceles

$$\Rightarrow \angle D\hat{C}B \cong \angle C\hat{D}B = \beta$$

Portanto, por LAL

$$\triangle ABD \cong \triangle ABC \quad (II).$$

De (I) e (II) segue que

$$\triangle ABC \cong \triangle EFG.$$

■

Definição 2.6. Dado o $\triangle ABC$

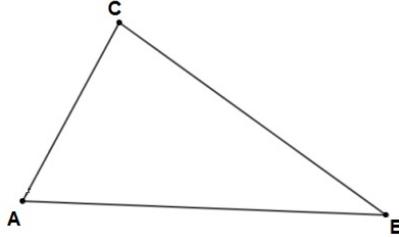


Figura 2.21: Ângulos internos do triângulo

Os ângulos $\angle A\hat{B}C$; $\angle B\hat{C}A$ e $\angle B\hat{A}C$ são chamados de ângulos internos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.

Definição 2.7. Dados os pontos distintos A, B e C . Dizemos que B está entre A e C e escrevemos $A-B-C$ se, e somente se, (i) A, B e C são colineares e (ii) $AC = AB + BC$.

Teorema 2.1 (do Ângulo Externo). : *Todo ângulo externo de um triângulo possui medida maior do que qualquer dos ângulos internos do triângulo, não adjacentes a ele.*

Demonstração:

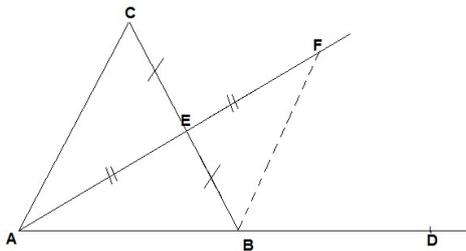


Figura 2.22: Ângulos externos do triângulo

Seja D tal que $A - B - D$. Vamos mostrar que $med(\angle D\hat{B}C) > med(\hat{C})$ e que $med(\angle D\hat{B}C) > med(\hat{A})$.

Seja E o ponto médio de \overline{BC} e F tal que $A - E - F$ e $AE = EF$. Daí, observamos que $\triangle CEA \cong \triangle BEF$ por LAL. Portanto $\hat{C} \cong \angle E\hat{B}F$.

Como F está no interior do $\angle DBC$, temos que: $med(\angle D\hat{B}C) = med(\angle D\hat{B}F) + med(\angle E\hat{B}F)$. Portanto, $med(\angle D\hat{B}C) > med(\hat{C})$.

Analogamente, mostramos que $med(\angle D\hat{B}C) > med(\hat{A})$.

2.4 Desigualdade Triangular

Proposição 2.4. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo se opõe ao maior lado.*

Demonstração:

A primeira parte segue das Proposições 2.2 e 2.3. Seja o $\triangle ABC$

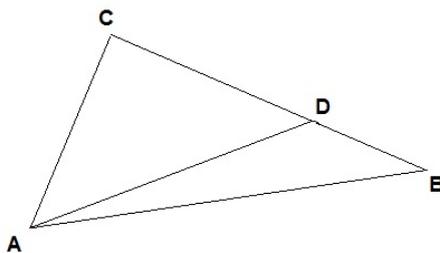


Figura 2.23: Desigualdade triangular figura 1

Suponhamos que $AC < BC$. Vamos mostrar que $med(\angle C\hat{A}B) > med(\angle A\hat{B}C)$.

Seja o ponto D tal que $\overline{CD} \cong \overline{AC}$. Observamos então que $med(\angle C\hat{A}B) > med(\angle C\hat{A}D)$. Como o $\triangle CAD$ é isósceles de base \overline{AD} , temos que: $med(\angle C\hat{A}D) = med(\angle C\hat{D}A)$.

Portanto: $med(\angle C\hat{A}B) > med(\angle C\hat{A}D) = med(\angle C\hat{D}A)$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos: $med(\angle C\hat{D}A) > med(\angle A\hat{B}C)$.

$\Rightarrow med(\angle C\hat{A}B) > med(\angle A\hat{B}C)$.

Proposição 2.5. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos não são congruentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.*

Demonstração:

Seja o $\triangle ABC$

Suponhamos que $med(\angle C\hat{A}B) > med(\angle A\hat{B}C)$. Vamos mostrar que $BC > AC$.

Dados os números BC e AC existem apenas três possibilidades:

1) $BC = AC$

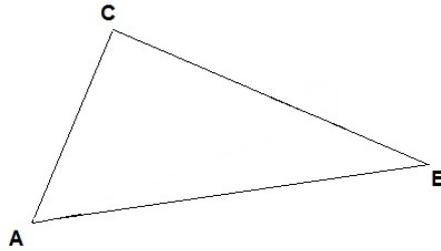


Figura 2.24: Desigualdade triangular figura 2

2) $BC < AC$

3) $BC > AC$

- Se $BC = AC$ teríamos $med(\angle C\hat{A}B) = med(\angle A\hat{B}C)$, contra a hipótese.
- Se $BC < AC$ teríamos pela proposição anterior $med(\angle C\hat{A}B) < med(\angle A\hat{B}C)$, contra a hipótese.

Logo, só resta a possibilidade $BC > AC$.

Teorema 2.3. *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

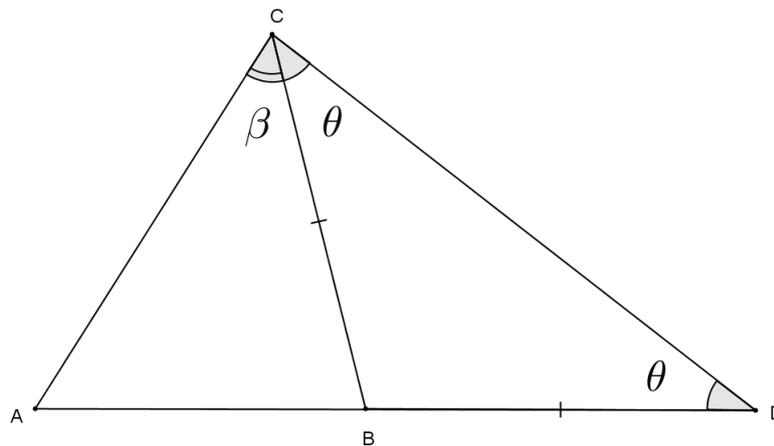


Figura 2.25: Comprimento dos lados de um triângulo

Demonstração:

Seja D na semirreta oposta a \vec{BA} tal que $\overline{BD} \cong \overline{BC}$.

Observamos então que o $\triangle CBD$ é isósceles de base \overline{CD} . Portanto, $\angle B\hat{C}D \cong \angle B\hat{D}C = \theta$. Como B está no interior do ângulo $\angle A\hat{C}D$, temos que

$$\text{med}(\angle A\hat{C}D) = \text{med}(\angle A\hat{C}B) + \text{med}(\angle B\hat{C}D) = \beta + \theta.$$

Como $\beta + \theta > \theta$, então pelas proposições anteriores (aplicadas agora ao $\triangle ACD$), temos:

$$AD > AC,$$

isto é,

$$\Rightarrow AB + BD > AC \quad \Rightarrow AB + BC > AC.$$

2.5 O V Postulado de Euclides

O primeiro sistema axiomático é devido a Euclides que escreveu “Os Elementos”, entre 330-320 A.C., obra matemática composta de treze livros. O trabalho de Euclides, resultou num sistema lógico-dedutivo composto por postulados, noções comuns, proposições e teoremas.

O V Postulado nos diz que: *“Se uma reta corta duas outras retas e a soma dos dois ângulos colaterais internos é menor que dois ângulos retos, as duas retas continuadas infinitamente encontram-se no lado no qual a soma é menor que dois retos.”*[6].

Existem muitas proposições equivalentes ao V Postulado, tais como:

1. Duas paralelas são equidistantes (Proclo).
2. A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (Legendre).
3. Existem triângulos semelhantes não-congruentes (Laplace).
4. Para qualquer ponto de um ângulo menor que $2/3$ de um ângulo reto há uma reta que encontra os dois lados do ângulo (Legendre).

5. Existe circunferência por três pontos não-colineares (Bolyai-Wolfgang).
6. A reta paralela à outra por um ponto fora dela é única (Playfair).

2.5.1 As Paralelas

Definição 2.8. Duas retas r e s coplanares são paralelas $\Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$.

Teorema 2.4. Para todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180° .

Demonstração:

Pelo V Postulado, seja $r // \overleftrightarrow{AC}$ que passa por B .

Sobre r vamos marcar os pontos D e E de tal forma que \vec{BD} é oposta a \vec{BE} .

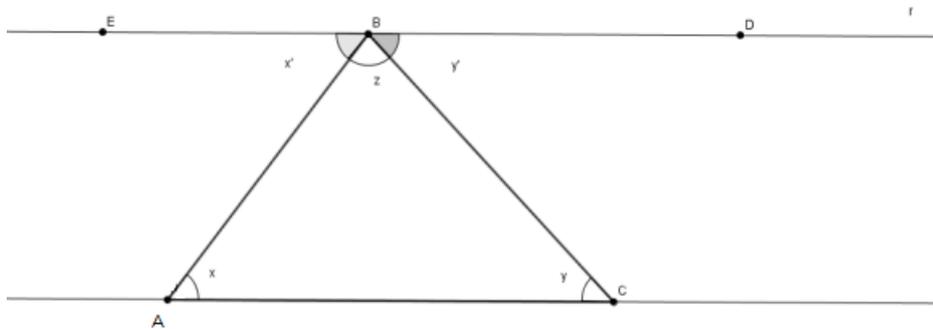


Figura 2.26: Soma dos ângulos internos

Sejam $\angle B\hat{A}C = x$;

$\angle B\hat{C}A = y$;

$\angle A\hat{B}C = z$;

$\angle A\hat{B}E = x'$

$\angle C\hat{B}D = y'$

Note que

- (i) $m(\angle B\hat{A}C) = m(\angle A\hat{B}E)$, uma vez que são ângulos alternos-internos;

- (ii) $m(\angle B\hat{C}A) = m(\angle C\hat{B}D)$, uma vez que são ângulos alternos-internos;
- (iii) $m(\angle A\hat{B}D) = m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle C\hat{B}D)$ pelo postulado da adição de ângulos (pois o ponto C está no interior do ângulo $\angle A\hat{B}D$).
- (iv) $m(\angle A\hat{B}E) + m(\angle A\hat{B}D) = 180^\circ$ pelo postulado do suplemento.
- (v) $m(\angle A\hat{B}E) + m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle C\hat{B}D) = 180^\circ$. Por (iii) e (iv).
- (vi) $m(\angle B\hat{A}C) + m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle B\hat{C}A) = 180^\circ$. Por (i), (ii) e (iv).

■

Desse Teorema, decorrem Corolários muito importantes.

Corolário 2.1. *Dada uma correspondência entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se dois pares de ângulos correspondentes são formados por ângulos congruentes então o terceiro par de ângulos também é formado por ângulos congruentes.*

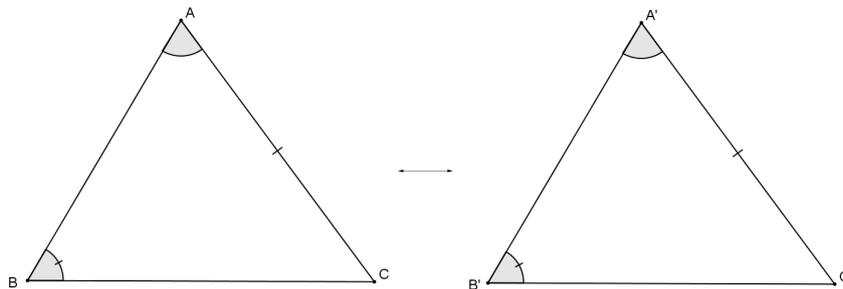


Figura 2.27: Correspondência entre triângulos

Corolário 2.2. *Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.*

Corolário 2.3. *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Teorema 2.5. *LAA₀ (lado-ângulo-ângulo oposto)*

Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle A \cong \angle A'$ e $\angle B \cong \angle B'$, então os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

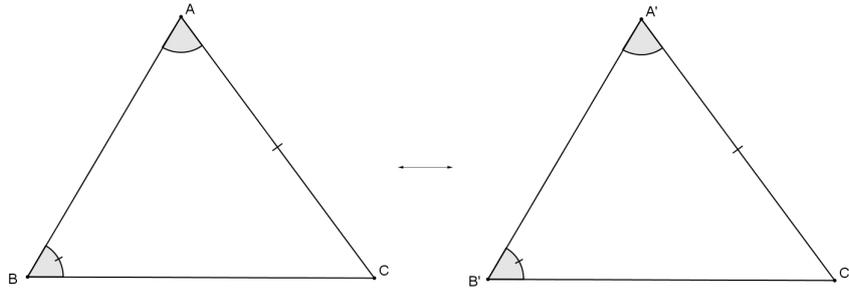


Figura 2.28: Correspondência entre triângulos

Demonstração:

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$$

$$m(\angle A') + m(\angle B') + m(\angle C') = 180^\circ$$

$$m(\angle A) = m(\angle A'), \quad m(\angle B) = m(\angle B')$$

portanto,

$$m(\angle C) = m(\angle C').$$

Logo, $\angle C \cong \angle C'$.

E, dessa forma, por ALA o $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

■

2.6 Semelhança de triângulos

2.6.1 Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade

Teorema 2.6. *Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em postos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.*

Demonstração: Seja o triângulo $\triangle ABC$ e sejam M_b e M_c pontos pertencentes aos lados \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente, tais que $\overline{M_bM_c}$ é paralelo a \overline{BC} .

Então

$$\frac{AB}{AM_c} = \frac{AC}{AM_b}$$

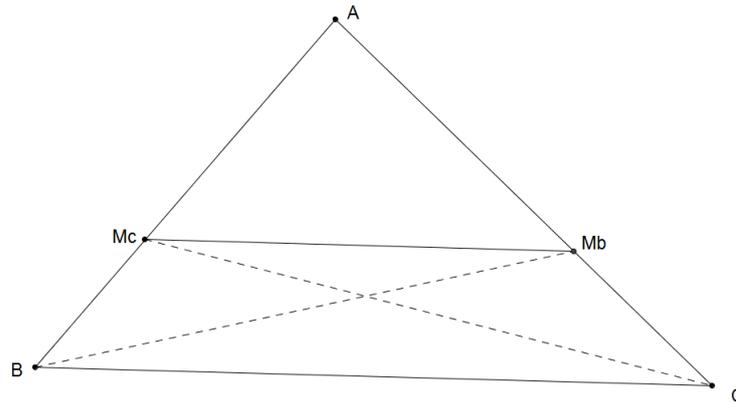


Figura 2.29: Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade figura 1

Vamos à demonstração:

- (i) Nos $\triangle AM_cM_b$ e $\triangle BM_cM_b$ vamos considerar $\overline{AM_c}$ e $\overline{BM_c}$ como bases. Assim, esses triângulos têm alturas iguais. Notamos que a altura relativa ao lado $\overline{AM_c}$, é também altura do $\triangle BM_cM_b$, uma vez que $\overline{M_bH}$ é perpendicular a reta suporte do lado $\overline{BM_c}$.

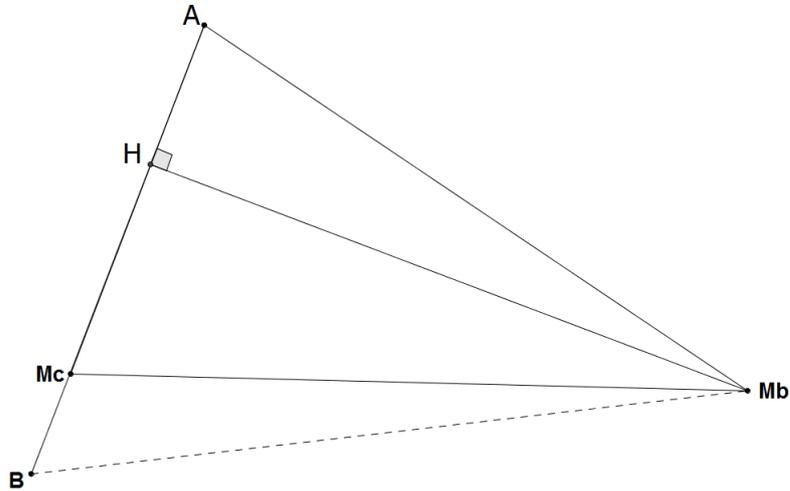


Figura 2.30: Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade figura 2

Portanto a razão de suas áreas é igual a razão de suas bases e temos:

$$\frac{S_{\triangle BM_cM_b}}{S_{\triangle AM_cM_b}} = \frac{BM_c}{AM_c}$$

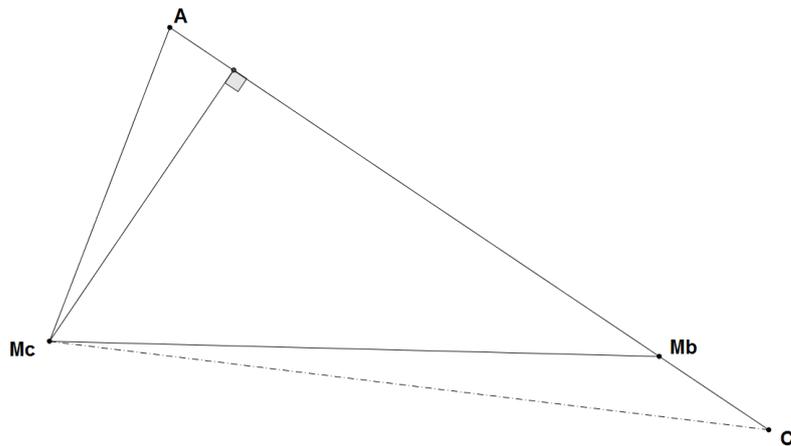


Figura 2.31: Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade figura 3

(ii) De forma análoga, nos $\triangle AM_cM_b$ e $\triangle CM_cM_b$, vamos considerar $\overline{AM_b}$ e $\overline{CM_b}$. Esses triângulos têm a mesma altura e, assim como no item i, concluímos que

$$\frac{S_{\triangle CM_cM_b}}{S_{\triangle AM_cM_b}} = \frac{CM_b}{AM_b}$$

(iii) Os $\triangle BM_cM_b$ e $\triangle CM_cM_b$ têm a mesma base que é o segmento $\overline{M_cM_b}$ e, além disso eles têm a mesma altura, pois $\overleftrightarrow{M_cM_b} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Portanto, a área do $S_{\triangle BM_cM_b} = S_{\triangle CM_cM_b}$.

(iv) Dos itens(i),(ii) e (iii), obtemos

$$\frac{BM_c}{AM_c} = \frac{CM_b}{AM_b}$$

(v) Adicionando um a ambos os membros da equação contida no item(iv), obtemos

$$\frac{BM_c + AM_c}{AM_c} = \frac{CM_b + AM_b}{AM_b} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AM_c} = \frac{AC}{AM_b}.$$

2.6.2 Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 2.7. *Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.*

Demonstração:

Dado o $\triangle ABC$. Seja M_c um ponto entre A e B e seja M_b um ponto entre A e C. Seja $\frac{BM_c}{AM_c} = \frac{CM_b}{AM_b}$. Vamos mostrar que $\overline{M_cM_b} \parallel \overline{BC}$.

Seja $\overleftrightarrow{BC'}$ uma reta por B, paralela a $\overleftrightarrow{M_cM_b}$, interceptando \overleftrightarrow{AC} em C' . Pelo teorema anterior,

$$\frac{AB}{AM_c} = \frac{AC'}{AM_b}.$$

Como, por hipótese,

$$\frac{AB}{AM_c} = \frac{AC}{AM_b},$$

temos

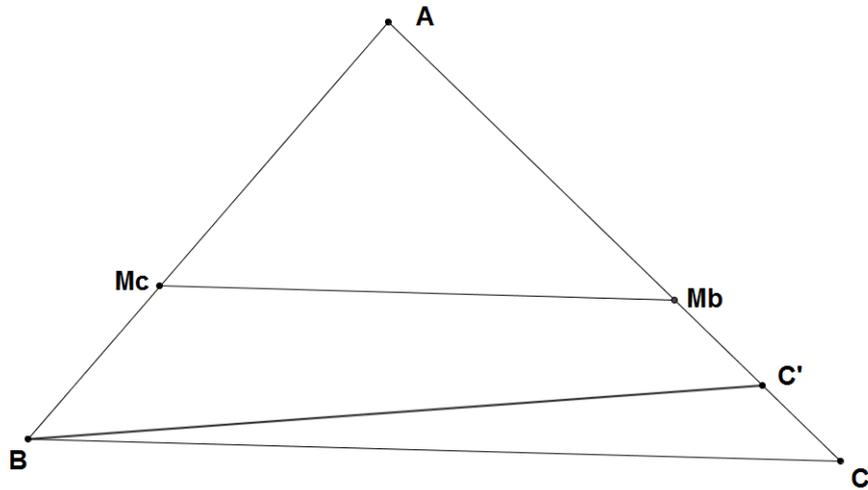


Figura 2.32: Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade

$$\frac{AC'}{AM_c} = \frac{AC}{AM_c}.$$

Então $AC' = AC$. Usando sistemas de coordenadas, obtemos $C = C'$ e, portanto, $\overline{M_c M_b} \parallel \overline{BC}$.

Definição 2.9. Dada uma correspondência entre os vértices de dois triângulos $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta A'B'C'$, dizemos que a correspondência é uma semelhança se, e somente se, os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Escrevemos então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Isto é,

$$\begin{aligned} & \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \\ \Leftrightarrow & \hat{A} \cong \hat{A}', \quad \hat{B} \cong \hat{B}' \quad \text{e} \quad \hat{C} \cong \hat{C}' \\ \text{e} & \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Observação 4. Quando $k = 1$ a correspondência é uma congruência.

Teorema 2.8. Se os ângulos correspondentes são congruentes então a correspondência é uma semelhança.

Demonstração: Dada a correspondência

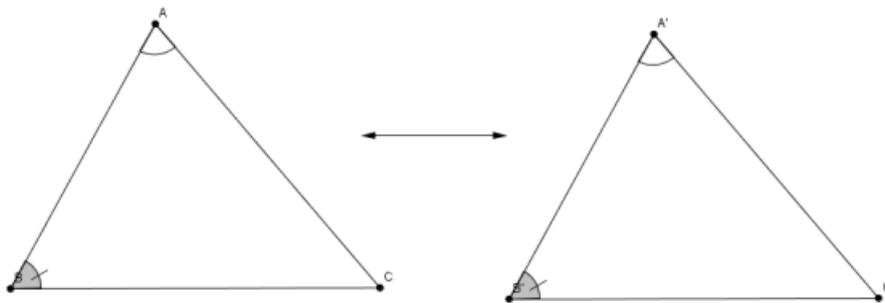


Figura 2.33: Semelhança de triângulos figura 1

Por hipótese:

$$\angle A \cong \angle D$$

$$\angle B \cong \angle E$$

$$\angle C \cong \angle F.$$

Vamos mostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

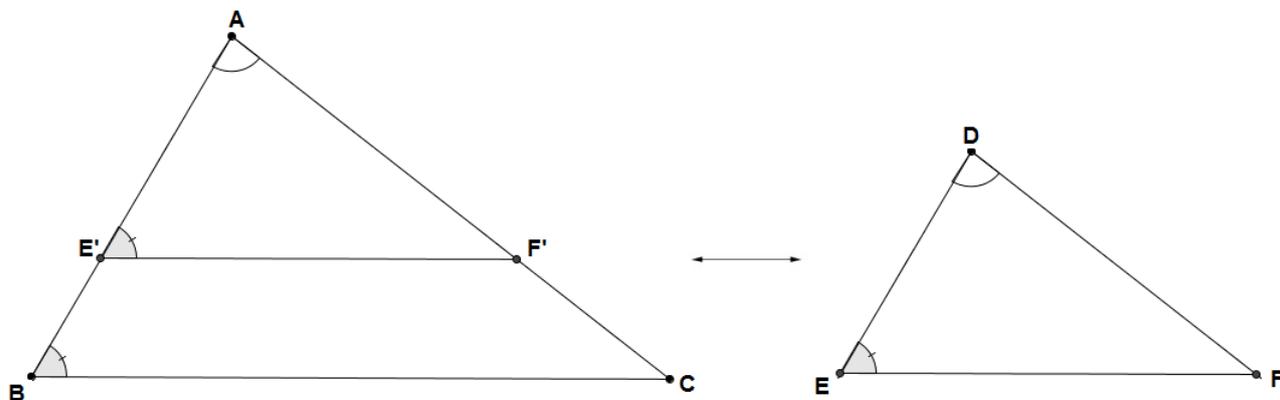


Figura 2.34: Semelhança de triângulos figura 2

Sejam $E' \in AB$ e $F' \in AC$ tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

Por LAL, o $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$.

Portanto, $\angle A\hat{E}'F' \cong \angle \hat{E} \cong \angle B$, por hipótese.

$$\Rightarrow \angle A\hat{E}'F' \cong \angle \hat{B}.$$

Temos dois casos a considerar:

- (i) Se $E' = B$ então os triângulos $\triangle AE'F'$ e $\triangle ABC$ são o mesmo triângulo, ou seja,
 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k = 1$$

- (ii) Se $E' \neq B$ então $\overline{E'F'} \parallel \overline{BC}$.

Pelo Teorema Fundamental de Proporcionalidade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AE'} &= \frac{AC}{AF'} \\ \Rightarrow \frac{AB}{DE} &= \frac{AC}{DF} = k. \end{aligned}$$

Analogamente, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = k$

■

Corolário 2.4. *Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes forem congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

Corolário 2.5. *Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina um triângulo semelhante ao triângulo dado.*

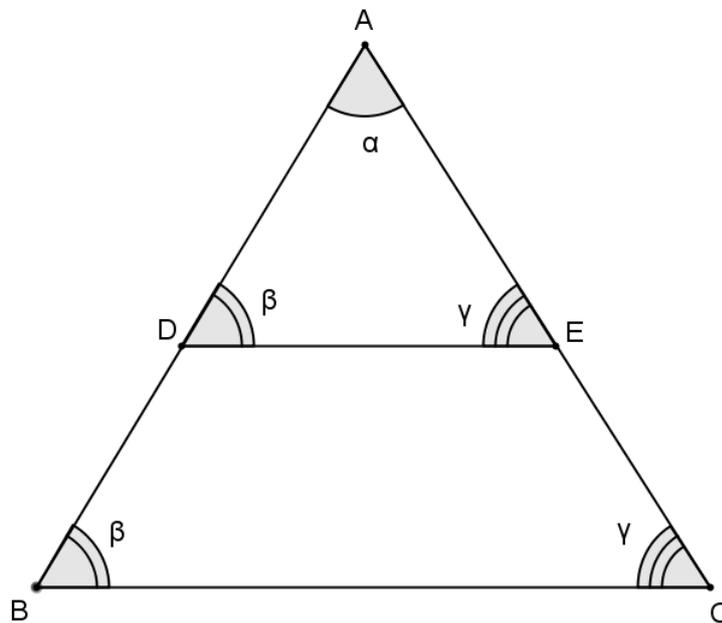


Figura 2.35: Correspondência de triângulos

Demonstração: Tese: $\triangle ADE \cong \triangle ABC$. É imediato por AAA. Temos então,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

■

Observação 5. *Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, então $\triangle ABC \sim \triangle GHI$*

Teorema 2.9. LAL

Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes forem proporcionais e os ângulos que eles determinam forem congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Demonstração:

Hipótese:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k \quad \text{e} \quad \widehat{A} = \widehat{D} \quad (**)$$

Tese: $\triangle AE'F' \approx \triangle DEF$.

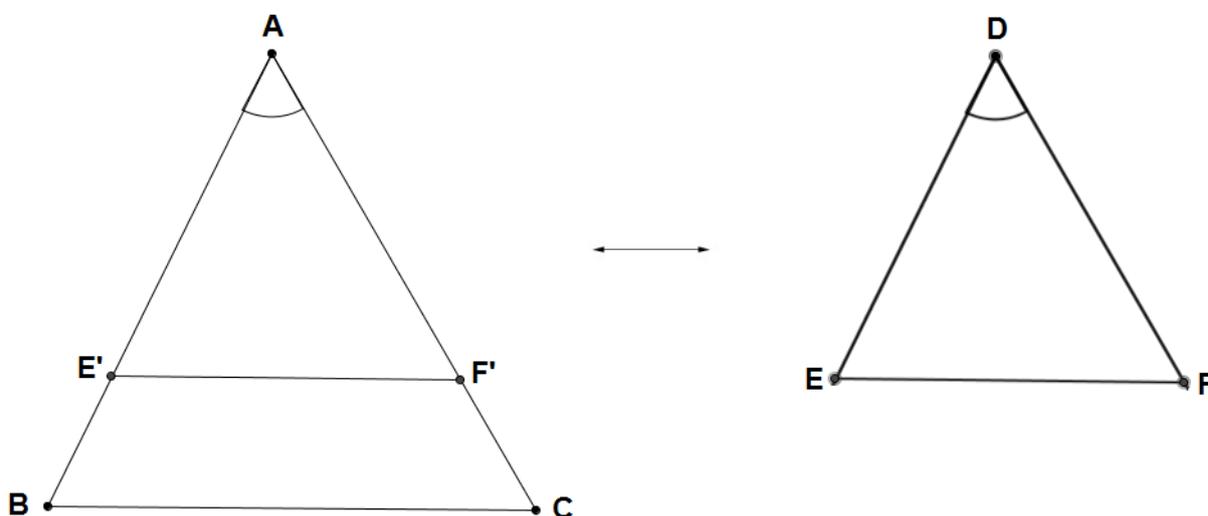


Figura 2.36: Lado-Ângulo-Lado

Sejam $E' \in \overline{AB}$ e $F' \in \overline{AC}$, tais que:

$$\begin{aligned} AE' &= DE \quad \text{e} \quad AF' = DF \\ \Rightarrow \triangle AE'F' &\cong \triangle DEF \quad \text{por LAL} \end{aligned}$$

Temos então $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = k$.

pela recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos que $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Portanto,

$$\widehat{B} \cong \widehat{E'} \cong \widehat{E} \quad \text{e} \quad \widehat{C} \cong \widehat{F'} \cong \widehat{F}.$$

Assim, os $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes por AAA. ■

Teorema 2.10. LLL

Dada a correspondência entre os triângulos: $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$. Se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.

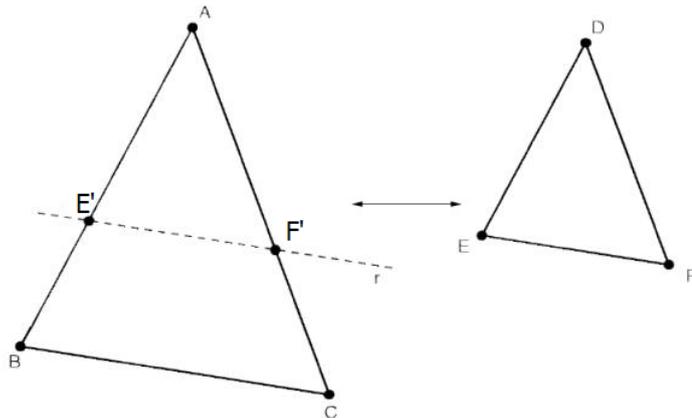


Figura 2.37: Lado-Lado-Lado

Demonstração:

Dados

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k \quad (**)$$

Sejam E' e F' tais que $AE' = DE$, $AF' = DF$. Portanto, temos:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = k \quad \text{e} \quad \angle A \cong \angle A.$$

Por LAL,

$$\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$$

Portanto, $\widehat{B} \cong \widehat{E'}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F'}$.

Voltando em (**), temos:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{E'F'} = k$$

ou seja,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{BC}{E'F'} \Leftrightarrow \frac{AE'}{AB} = \frac{E'F'}{BC}$$

$$\Leftrightarrow E'F' = BC \cdot \frac{AE'}{AB} = BC \cdot \frac{DE}{AB}$$

Por hipótese, temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Leftrightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\Leftrightarrow EF = BC \cdot \frac{DE}{AB}$$

$$\therefore EF = E'F'$$

$$\Rightarrow \triangle AE'F' \cong \triangle DEF$$

por LLL.

Pela *observação 5* temos: $\triangle ABC \sim \triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ (LAL).

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$



Capítulo 3

O Incentro

3.1 Incentro

A Geometria do triângulo é bastante interessante e instigante. Ao longo da história da Matemática muitas propriedades especiais foram identificadas.

Quando pretendemos estudar um assunto ou entender um Teorema precisamos estabelecer uma metodologia de trabalho, com um guia ou um roteiro que facilite a nossa atividade e a compreensão do conteúdo. É semelhante a uma receita de um bolo, que é uma espécie de guia para que o resultado seja o mais adequado e saboroso possível, com o uso correto dos ingredientes e o tempo certo de preparo.

De maneira semelhante, quando estamos estudando ou quando queremos ampliar nossos conhecimentos em determinada área do conhecimento é necessário respeitar o passo a passo e lançar mão de ferramentas auxiliares, formando assim uma cadeia de conhecimentos que facilitarão a jornada e tornarão os estudos produtivo e eficiente.

Foi pensando nessa cadeia de conhecimentos que trabalhamos com as noções básicas e agora trabalharemos com o incentro, um dos pontos notáveis do triângulo.

Entre as relações métricas que temos no triângulo, algumas merecem destaque por causa das propriedades especiais que possuem. Neste capítulo falaremos do incentro em um triângulo qualquer.

O incentro de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. E o incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Trabalhar o incentro é de fundamental importância para melhor compreender a demonstração do Teorema de Morley.

Na primeira demonstração do Teorema de Morley apresentada neste trabalho, veremos que o estudo sobre o incentro é uma ferramenta indispensável para compreendermos e desenvolvermos a referida demonstração.

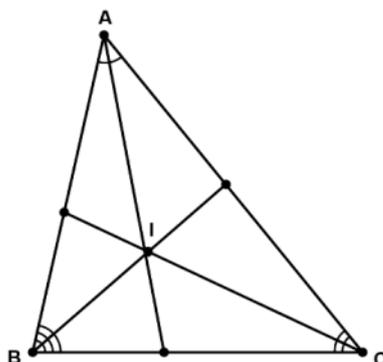


Figura 3.1: Incentro

Proposição 3.1. *As bissetrizes dos ângulos de um triângulo qualquer cruzam-se em um mesmo ponto.*

Sejam o triângulo $\triangle ABC$ e as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$. Seja I o ponto em que ambas as bissetrizes se encontram. Queremos provar que a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ também passa pelo ponto I .

- (i) Por I , vamos traçar as perpendiculares sobre \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , localizando os pontos P , Q e R , respectivamente. Observamos então que:
- (ii) O $\triangle IBP \cong \triangle IBR$, por $(LAA_0) \Rightarrow IP = IR$.
- (iii) O $\triangle ICP \cong \triangle ICQ$, por $(LAA_0) \Rightarrow IP = IQ$.
- (iv) Por transitividade, $\Rightarrow IP = IQ = IR$.

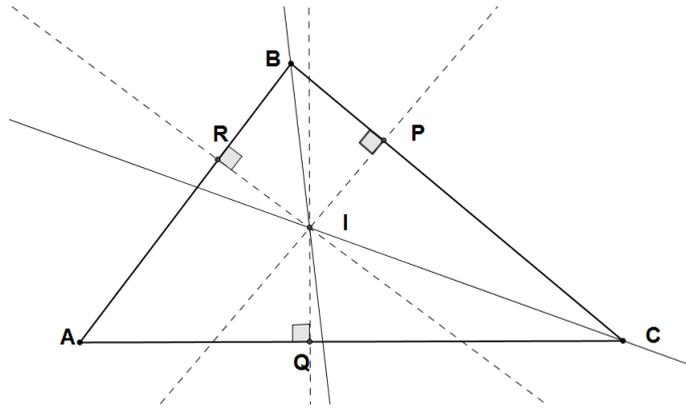


Figura 3.2: Incentro do triângulo ABC

O $\triangle IRA \cong \triangle IQA$ então, o $\angle I\hat{A}R \cong \angle I\hat{A}Q$ e I está sobre a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}C$. Portanto, as bissetrizes dos ângulos de um \triangle cruzam-se em um mesmo ponto I .

Definição 3.1. A circunferência de centro I e raio $IP = IQ = IR$ é chamada de circunferência inscrita. O ponto I é denominado de Incentro do $\triangle ABC$.

Lema 3.1. i) O incentro I de um triângulo $\triangle ABC$ pertence à bissetriz do $\angle B\hat{A}C$, relativamente ao lado \overline{BC} e a $m(\angle B\hat{I}C) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle B\hat{A}C)$.

ii) Se um ponto P , interno ao triângulo, pertence à bissetriz do $\angle B\hat{A}C$, e se $m(\angle B\hat{P}C) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle B\hat{A}C)$, então P é o incentro do triângulo $\triangle ABC$.

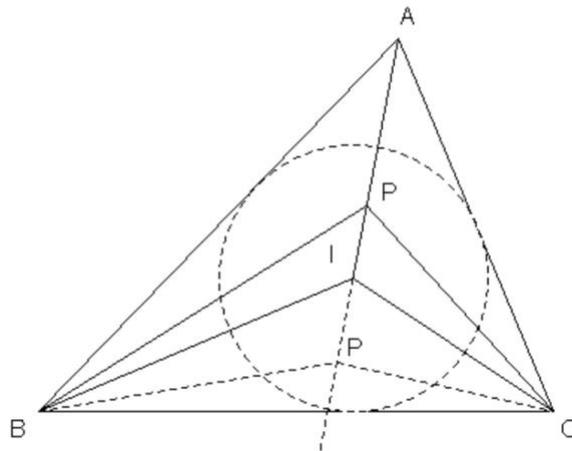


Figura 3.3: Lema sobre o incentro figura 1

Demonstração:

Vamos à primeira parte:

- Considerando-se o triângulo $\triangle ABC$, o seu incentro I e a circunferência inscrita ao $\triangle ABC$.

Se I é o incentro do $\triangle ABC$, então, como demonstrado anteriormente, I pertence às bissetrizes dos ângulos internos do $\triangle ABC$.

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , assim, tem-se que no triângulo $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}m(\angle B\hat{I}C) &= 180^\circ - m(\angle I\hat{B}C) - m(\angle I\hat{C}B) \\ &= 180^\circ - [m(\angle I\hat{B}C) + m(\angle I\hat{C}B)].\end{aligned}$$

Utilizando a definição de bissetriz de um ângulo, segue que

$$\begin{aligned}m(\angle B\hat{I}C) &= 180^\circ - \frac{1}{2}m(\angle A\hat{B}C) - \frac{1}{2}m(\angle A\hat{C}B) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}[m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle A\hat{C}B)] \quad (*)\end{aligned}$$

No triângulo $\triangle ABC$, tem-se que

$$m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle A\hat{C}B) + m(\angle B\hat{A}C) = 180^\circ$$

Então,

$$m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle A\hat{C}B) = 180^\circ - m(\angle B\hat{A}C) \quad (**)$$

De (*) e (**), tem-se que

$$\begin{aligned}m(\angle B\hat{I}C) &= 180^\circ - \frac{1}{2}[180^\circ - m(\angle B\hat{A}C)] \\ &= 180^\circ - 90^\circ + \frac{m(\angle B\hat{A}C)}{2} \\ &= 90^\circ + \frac{m(\angle B\hat{A}C)}{2} \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle B\hat{A}C)\end{aligned}$$

- Por outro lado, suponha que exista um outro ponto P

$$\text{tal que } m(\angle B\hat{P}C) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle B\hat{A}C)$$

e que o ponto P pertence à bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}C$.

Supondo-se que P pertence ao segmento \overline{AI} da bissetriz (I é o incentro do triângulo $\triangle ABC$) e que:

$$m(\angle P\hat{B}C) > m(\angle I\hat{B}C), \quad m(\angle P\hat{C}B) > m(\angle I\hat{C}B),$$

ou seja,

$$m(\angle P\hat{B}C) > \frac{1}{2}m(\angle A\hat{B}C), \quad m(\angle P\hat{C}B) > \frac{1}{2}m(\angle A\hat{C}B).$$

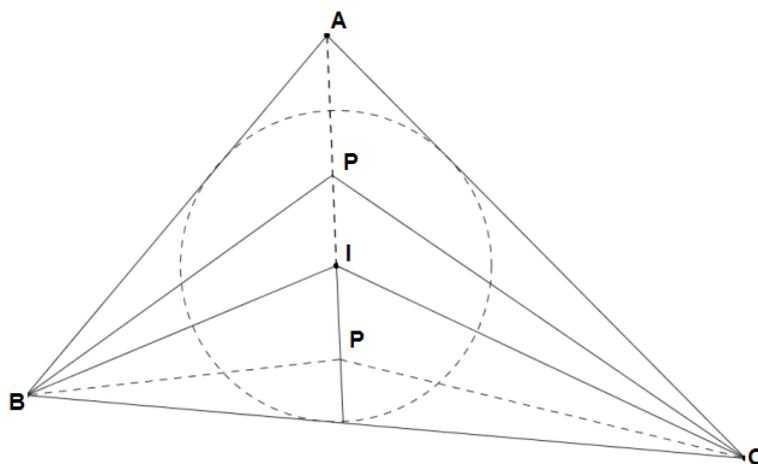


Figura 3.4: Lema sobre o incentro figura 2

Temos

$$m(\angle B\hat{P}C) + m(\angle P\hat{B}C) + m(\angle P\hat{C}B) > m(\angle B\hat{P}C) + \frac{1}{2}m(\angle A\hat{B}C) + \frac{1}{2}m(\angle A\hat{C}B)$$

Dado por hipótese

$$m(\angle B\hat{P}C) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle B\hat{A}C)$$

o segundo membro da desigualdade assume os seguintes valores

$$\begin{aligned}
 & m(\angle B\hat{P}C) + \frac{1}{2}m(\angle A\hat{B}C) + \frac{1}{2}m(\angle A\hat{C}B) \\
 = & 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle B\hat{A}C) + \frac{1}{2}m(\angle A\hat{B}C) + \frac{1}{2}m(\angle A\hat{C}B) \\
 = & 90^\circ + \frac{1}{2} \left[m(\angle B\hat{A}C) + m(\angle A\hat{B}C) + m(\angle A\hat{C}B) \right] \\
 & = 90^\circ + 90^\circ \\
 & = 180^\circ
 \end{aligned}$$

Assim,

$$m(\angle B\hat{P}C) + m(\angle P\hat{B}C) + m(\angle P\hat{C}B) > 180^\circ$$

o que contraria o Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Analogamente, não pode ocorrer

$$m(\angle B\hat{P}C) + m(\angle P\hat{B}C) + m(\angle P\hat{C}B) < 180^\circ.$$

Portanto $P = I$.

■

Definição 3.2. *Dados o ponto C e o número real positivo R , denomina-se circunferência de centro C e raio R o conjunto de todos os pontos P do plano, tais que o segmento de reta $CP = R$, isto é, $\{P|CP = R\}$.*

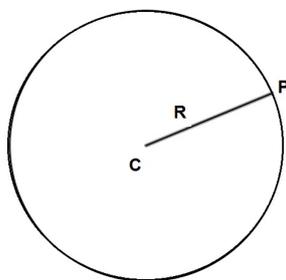


Figura 3.5: Circunferência

Capítulo 4

Teorema de Morley

A trisseccção de um ângulo

Certos ângulos podem ser subdivididos em três partes congruentes, isto é, podem ser trissecados, sem dificuldade alguma.

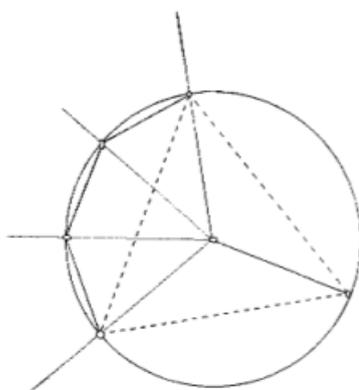


Figura 4.1: Trisseccção de um ângulo

Por exemplo, um ângulo reto (90°) pode ser trissecado, uma vez que resulta quase que imediato construir um ângulo de 30° .

Todavia, trissecar um ângulo arbitrário (qualquer) não é tão simples assim. De fato, trissecar um ângulo é um problema muito antigo.

A trisseccção de um ângulo é um dos clássicos problemas deixados sem solução pela

geometria grega, assim como a quadratura do círculo (ou quadratura da circunferência) e a duplicação do cubo.

Um problema estritamente ligado à trissecção de ângulo é o da construção de um polígono regular. Este foi abordado por Gauss, que já aos 17 anos de idade demonstrou a construção de um polígono regular de 17 lados.

Na sequência, Gauss, definiu quais seriam os polígonos regulares que poderiam ser construídos com régua e compasso, ou seja, aqueles em que o número de lados é um número (primo) de Fermat.

Em 1837 Pierre Wantzel retomou a necessidade da condição de Gauss acerca de polígonos regulares e, ainda, a impossibilidade da trissecção de um ângulo arbitrário apenas com régua (sem graduação) e compasso.

Wantzel provou que cada quantidade de lados construível com régua e compasso deve satisfazer a uma equação de grau 2^n (n inteiro).

Uma abordagem completa sobre construção com régua e compasso pode ser encontrada, por exemplo em [8], justificando tais construções segundo as afirmações de Gauss.

4.1 A prova do teorema de Morley

Trataremos neste capítulo sobre o Teorema de Morley, descoberto em 1904 pelo Professor Frank Morley, Matemático Anglo-americano. O teorema é belíssimo e surpreendente e pode-se dizer recente, uma vez que pertence ao século XX.

O Teorema de Morley, infelizmente pouco estudado e trabalhado nas aulas de Geometria, é uma verdadeira preciosidade: ***As três interseções das trissetrizes adjacentes dos ângulos de um triângulo são vértices de um triângulo equilátero.***

O descobridor desse Teorema foi Frank Morley, nasceu no ano de 1860, aos 9 dias do mês de setembro, na cidade de Woodbridge, Suffolk, Inglaterra, tendo como pais Muskett Elizabeth e Joseph Roberts Morley.

Em sua juventude, Frank Morley ganhou inúmeras medalhas em torneio de xadrez.

Aluno brilhante, fez seu doutorado em Ciências na Universidade de Cambridge, tendo recebido o título de Doctor of Science.

Em 1887, mudou-se para a Pensilvânia, e passou a lecionar em Haverford College. Em 1889 casou-se com Lilian Janet Birde, com a qual teve três filhos, Cristopher Morley, Félix Morley e Frank Vigor Morley. Todos os filhos de Frank Morley eram estudantes Rhodes (Estudantes que tenham concluído um curso de graduação com honras podem ser elegíveis para solicitar a bolsa de estudos Rhodes).

Félix Morley, editor do Washington Post, no período de 1933 a 1940, ganhador do prêmio Pulitzer em 1936 e também foi Presidente do Haverford College no período de 1940 a 1945.

Frank Vigor Morley também era um brilhante matemático e escritor e Cristopher Morley também foi muito bem-sucedido, jornalista, novelista, ensaísta e poeta estadunidense e um famoso escritor.

Frank Morley lecionou no Haverford College de 1887 até 1900, quando passou a exercer a função de Presidente do Departamento de Matemática da universidade Johns Hopkins, onde também lecionou até a sua aposentadoria em 1928.

No período de 1919 a 1920 Frank Morley foi Presidente da American Mathematical Society e editor do American Journal of mathematics de 1900 a 1921.

O matemático Frank Morley foi um professor muito bem-sucedido e eficiente. Sob sua supervisão quarenta e cinco alunos obtiveram o grau de doutorado. Estudioso e um profundo conhecedor de geometria projetiva e métrica, de álgebra, e da teoria física e cinemática, também é considerado um grande escritor de Matemática. Em conjunto com seu filho Frank Vigor Morley, publicou em 1933, um livro considerado notável, intitulado de **Inversive Geometry** e no qual a demonstração do Teorema é apresentada de forma bastante sintética.

Morley era apaixonado por Geometria e por xadrez. Teve uma grande e bem-sucedida produção acadêmica e foi um reconhecido Professor, especialmente pela capacidade de traduzir o abstrato para o concreto.

Faleceu aos 77 anos de idade, em 17 de outubro de 1937, em Baltimore, Maryland.

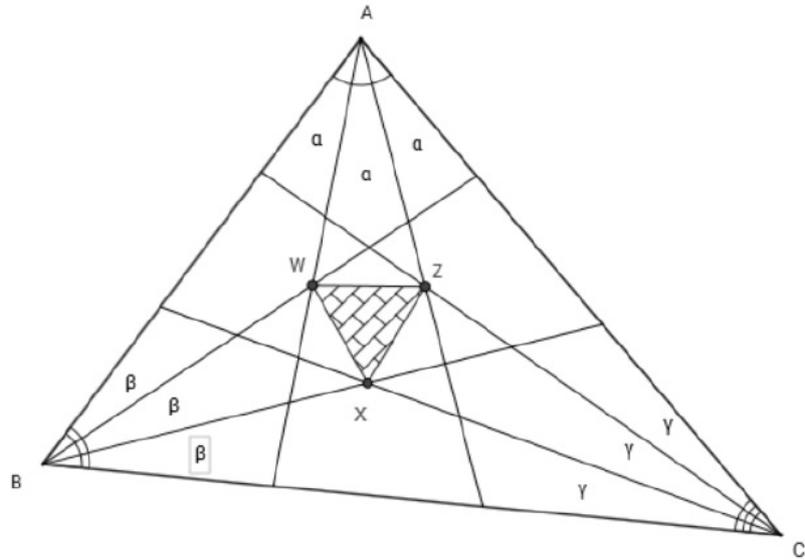


Figura 4.2: Trissetrizes

Definição 4.1. *Dá-se o nome de trissetrizes às duas semirretas que dividem um ângulo interno de um triângulo em três ângulos congruentes.*

Observação 4.1. *Em um triângulo qualquer as trissetrizes se interceptam em seis pontos.*

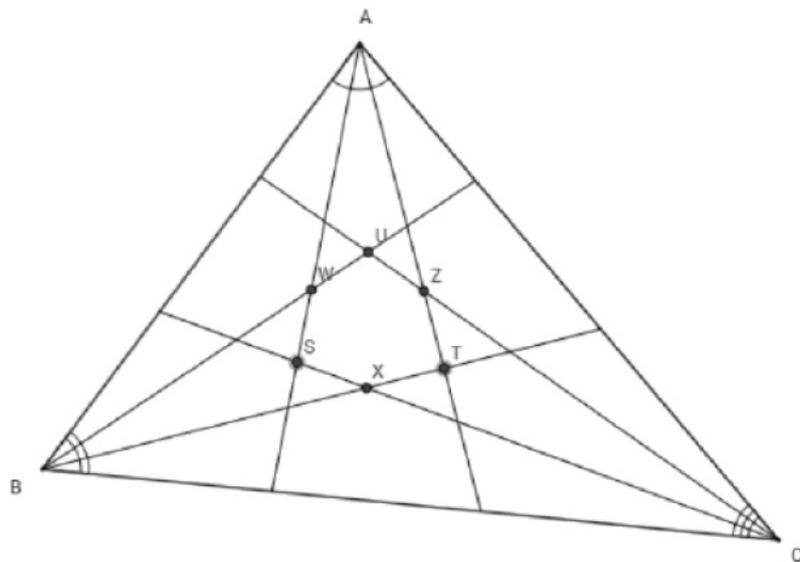


Figura 4.3: Ponto de intersecção das trissetrizes

Definição 4.2. Diremos que duas trissetrizes são adjacentes quando partem de vértices opostos pertencentes a um mesmo lado do triângulo e formam o menor ângulo que uma trissetriz pode formar com esse lado.

Teorema de Morley

Teorema 4.1. O teorema de Morley Os três pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes dos ângulos de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero.

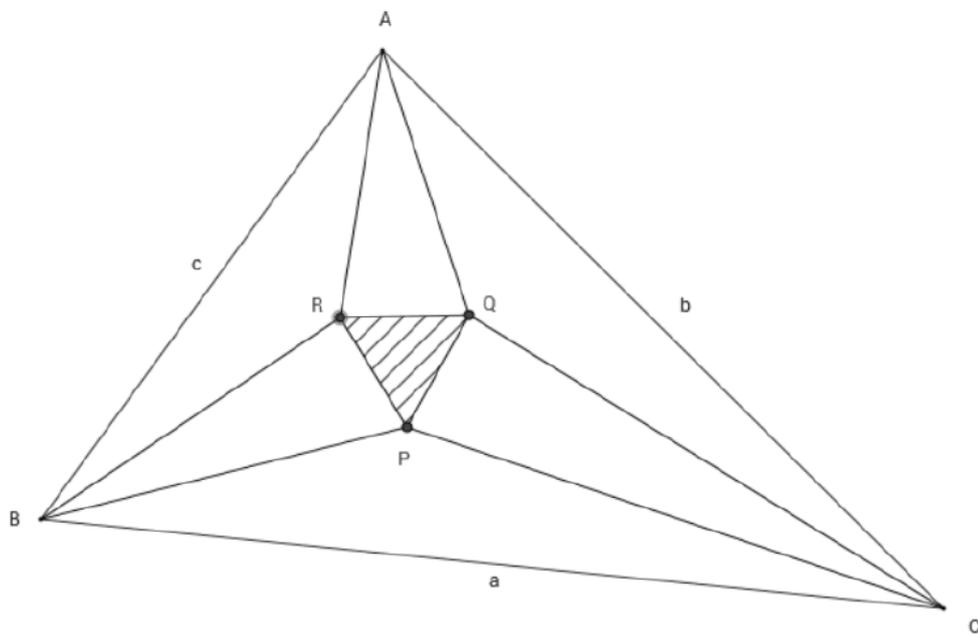


Figura 4.4: Triângulo de Morley

Demonstração: Seja um triângulo equilátero $\triangle XYZ$ e, em torno deste, vamos construir um triângulo semelhante ao $\triangle ABC$. A construção será realizada de tal maneira que X, Y, Z serão os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes do novo triângulo.

i) Inicialmente vamos definir três ângulos: α, β e γ de tal maneira que:

$$\alpha = 60^\circ - \frac{1}{3}m(\angle A)$$

$$\beta = 60^\circ - \frac{1}{3}m(\angle B)$$

$$\gamma = 60^\circ - \frac{1}{3}m(\angle C)$$

ii) Então, α, β e γ são positivos e

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ - \frac{1}{3}m(\angle A) - \frac{1}{3}m(\angle B) - \frac{1}{3}m(\angle C) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{3}[m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C)]\end{aligned}$$

Observamos que $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$.

Assim,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - \frac{1}{3}180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$$

Ainda dessa igualdade tem-se que:

$$\alpha = 120^\circ - \beta - \gamma$$

$$\beta = 120^\circ - \alpha - \gamma$$

$$\gamma = 120^\circ - \beta - \alpha$$

iii) Agora vamos considerar o $\triangle XYZ$ como um triângulo equilátero qualquer.

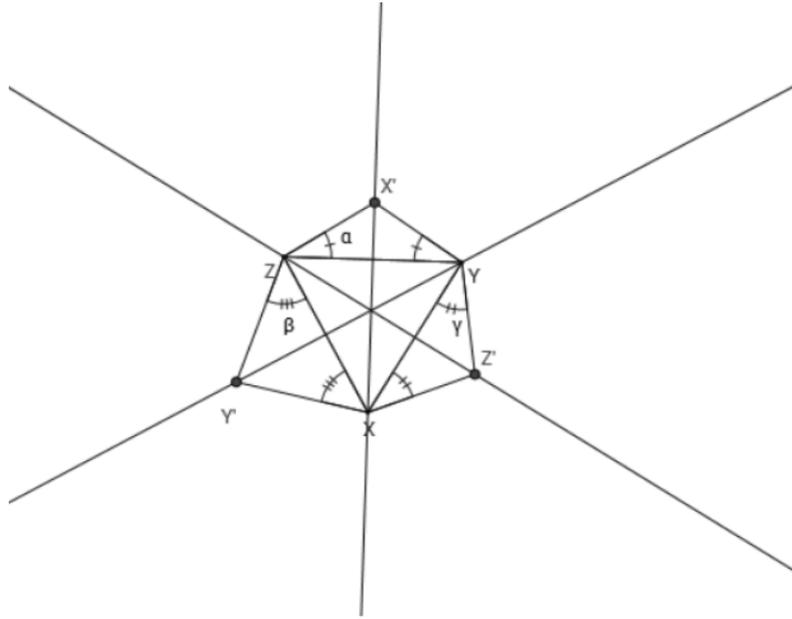


Figura 4.5: Construção de triângulos isósceles

Seja X' o ponto do lado oposto ao lado \overline{ZY} e a X e, a medida

$$m(\angle Y\hat{Z}X') = m(\angle Z\hat{Y}X') = \alpha.$$

Seja Y' o ponto do lado oposto ao lado \overline{XZ} e a Y e, a medida

$$m(\angle X\hat{Z}Y') = m(\angle Z\hat{X}Y') = \beta.$$

Seja Z' o ponto do lado oposto ao lado \overline{XY} e a Z e, a medida

$$m(\angle X\hat{Y}Z') = m(\angle Y\hat{X}Z') = \gamma.$$

iv) Agora, vamos considerar os ângulos $\angle Z'\hat{Y}Z$ e $\angle Y'\hat{Z}Y$. Note que:

$$m(\angle Z'\hat{Y}Z) = \gamma + 60^\circ$$

e

$$m(\angle Y'\hat{Z}Y) = \beta + 60^\circ$$

e assim,

$$\begin{aligned}
m(\angle Z'\hat{Y}Z) + m(\angle Y'\hat{Z}Y) &= 120^\circ + \beta + \gamma \\
&= 120^\circ + (120^\circ - \alpha - \gamma) + (120^\circ - \beta - \alpha) \\
&= 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha \\
&= 360^\circ - 120^\circ - \alpha \\
&= 240^\circ - \alpha \\
&= 240^\circ - \left(60^\circ - \frac{m(\angle A)}{3}\right) \\
&= 180^\circ + \frac{m(\angle A)}{3}
\end{aligned}$$

Portanto

$$m(\angle Z'\hat{Y}Z) + m(\angle Y'\hat{Z}Y) > 180^\circ$$

Pelo V Postulado de Euclides as retas suportes dos segmentos $\overline{Z'Y}$ e $\overline{Y'Z}$ se interceptam no ponto D , que se encontra no mesmo lado de X' e oposto a \overline{YZ} .

De maneira análoga $\overline{X'Z}$ e $\overline{Z'X}$ se interceptam em E e $\overline{Y'X}$ e $\overline{X'Y}$ se interceptam em F .

Seja o $\triangle DEF$.

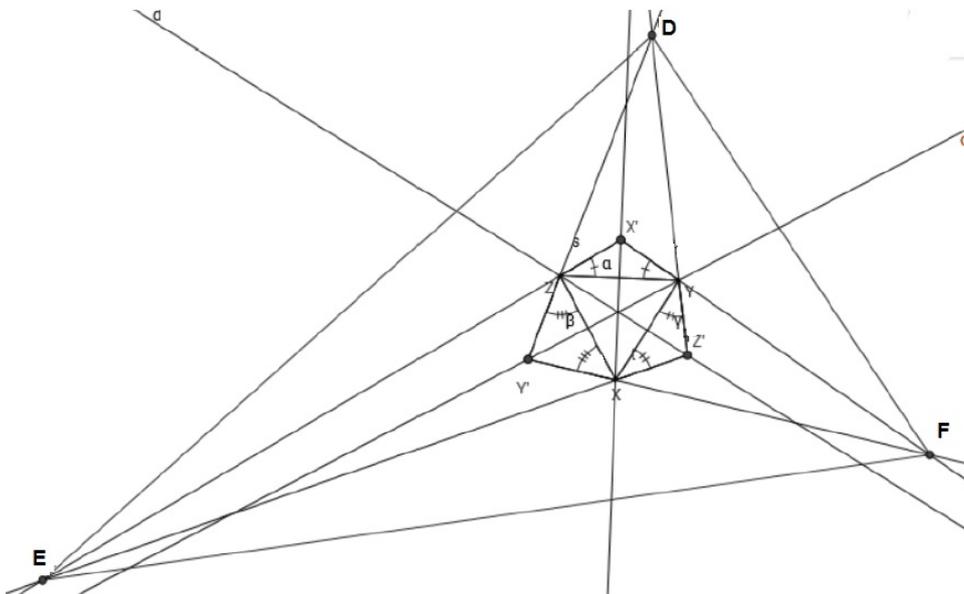


Figura 4.6: Triângulo DEF

v) Afirmação: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Tem-se que:

$$m(\angle E\hat{X}Y') = 180^\circ - \gamma - 60^\circ - \beta = 120^\circ - \gamma - \beta = \alpha$$

$$m(\angle D\hat{Z}X') = 180^\circ - \alpha - 60^\circ - \beta = 120^\circ - \beta - \alpha = \gamma$$

$$m(\angle D\hat{Y}X') = 180^\circ - 60^\circ - \alpha - \gamma = 120^\circ - \alpha - \gamma = \beta$$

Ainda,

$$m(\angle E\hat{Z}Y') = m(\angle D\hat{Z}X') = \gamma$$

(o.p.v)

$$m(\angle D\hat{Y}X') = m(\angle F\hat{Y}Z') = \beta$$

(o.p.v)

$$m(\angle F\hat{X}Z') = m(\angle E\hat{X}Y') = \alpha$$

(o.p.v)

Pode-se, ainda, calcular/determinar a medida dos seguintes ângulos $\angle Y\hat{D}Z$, $\angle X\hat{F}Y$ e $\angle Z\hat{E}X$.

$$m(\angle Y\hat{D}Z) = 180^\circ - 2\alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - \alpha - \alpha - \beta - \gamma$$

$$= 180^\circ - \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ - \alpha - 120^\circ$$

$$= 60^\circ - \alpha$$

$$m(\angle X\hat{F}Y) = 180^\circ - 2\gamma - \beta - \alpha = 180^\circ - \gamma - \gamma - \beta - \alpha$$

$$= 180^\circ - \gamma - (\gamma + \beta + \alpha)$$

$$= 180^\circ - \gamma - 120^\circ$$

$$= 60^\circ - \gamma$$

$$\begin{aligned}
m(\angle Z\hat{E}X) &= 180^\circ - 2\beta - \alpha - \gamma = 180^\circ - \beta - \beta - \alpha - \gamma \\
&= 180^\circ - \beta - (\beta + \alpha + \gamma) \\
&= 180^\circ - \beta - 120^\circ \\
&= 60^\circ - \beta
\end{aligned}$$

Sabe-se ainda que $\overline{X'Z} \cong \overline{X'Y}$, pela recíproca do Pons Asinorum e $\overline{ZX} \cong \overline{YX}$ por construção.

Dessa forma os triângulos $\triangle XZX'$ e $\triangle YX'$ são congruentes por *LLL*. Portanto, $\overline{X'X}$ bissecta o ângulo $\angle Z\hat{X}'Y$.

Observamos também que, o $\angle E\hat{X}'F \cong \angle Z\hat{X}'Y$; $m(\angle E\hat{X}'F) = 180^\circ - 2\alpha$ (*).

Além disso,

$$\begin{aligned}
m(\angle E\hat{X}F) &= 180^\circ - \alpha \\
&= 90^\circ + 90^\circ - \alpha \\
&= 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) \\
&= 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle E\hat{X}'F) \\
\Rightarrow m(\angle E\hat{X}F) &= 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle E\hat{X}'F)
\end{aligned}$$

Dessa forma, X é o incentro do $\triangle EX'F$, de modo que $\angle X'\hat{E}X \cong \angle F\hat{E}X$.

De modo análogo Z é o incentro de $\triangle DZ'E$ e, dessa forma, \overline{EZ} (que está contida em $\overline{EX'}$) e \overline{EZ} são trissetrizes do $\angle D\hat{E}F$.

Y é o incentro do $\triangle DY'F$ e dessa forma, \overline{FY} (que está contida em $\overline{FY'}$) e \overline{FY} são trissetrizes.

vi) Vamos agora calcular a

$$\begin{aligned}
m(\angle D\hat{E}F) &= 3m(\angle Z\hat{E}X) = 3 \underbrace{(60^\circ - \beta)} \\
m(\angle D\hat{E}F) &= 3 \left[60^\circ - \left(60^\circ - \frac{1}{3}m(\angle B) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$m(\angle D\hat{E}F) = 3 \left(60^\circ - 60^\circ + \frac{1}{3}m(\angle B) \right)$$

$$m(\angle D\hat{E}F) = 3 \cdot \frac{1}{3}m(\angle B) = m(\angle B)$$

De forma análoga:

$$m(\angle E\hat{F}D) = m(\angle C)$$

$$m(\angle F\hat{D}E) = m(\angle A)$$

Assim: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ (pelo caso AAA).

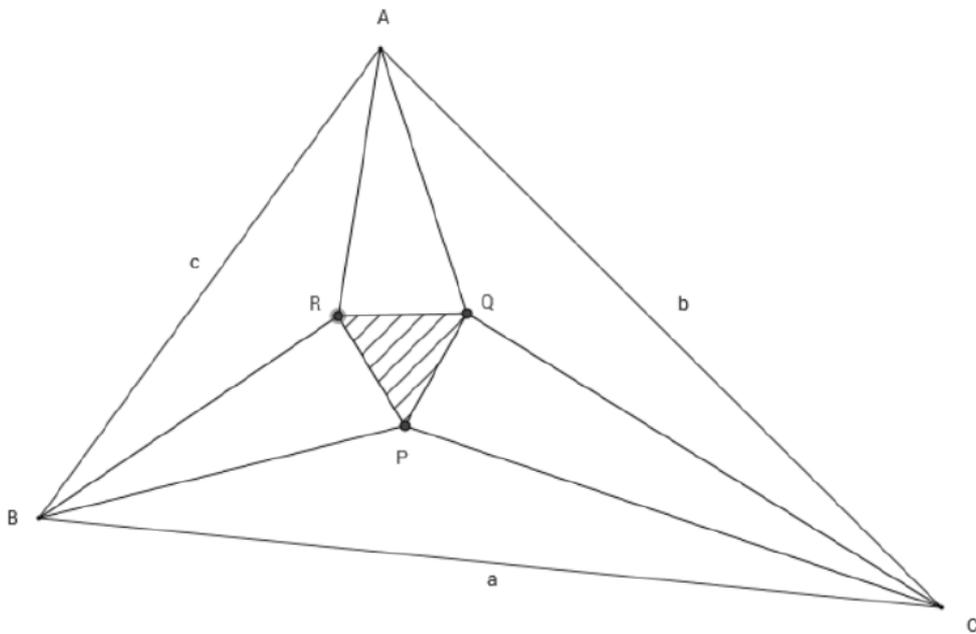


Figura 4.7: Teorema de Morley

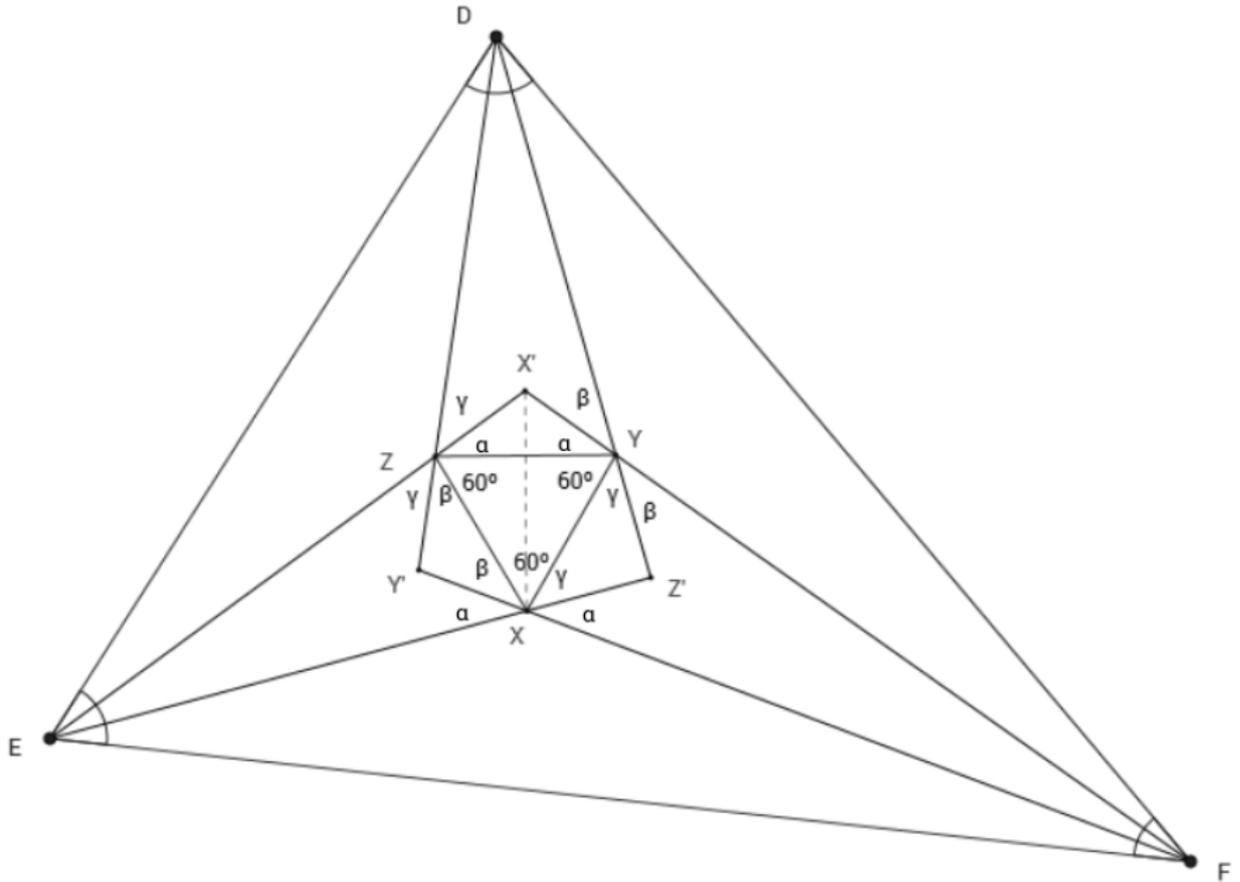


Figura 4.8: Razão de semelhança entre os lados do triângulo

Temos também:

$$\triangle DEZ \sim \triangle ABR$$

$$\triangle EFX \sim \triangle BCP$$

$$\triangle FDY \sim \triangle CAQ$$

E dessa forma, como em triângulos semelhantes a razão entre os lados dos triângulos é constante, temos:

$$\frac{PB}{XE} = \frac{CB}{FE} = \frac{AB}{DE} = \frac{RB}{ZE} = k$$

Então $\triangle XEZ$ é semelhante ao $\triangle PBR$ por *LAL*.

De forma análoga, $\triangle ZDY \sim \triangle RAQ$ e $\triangle YFX \sim \triangle QCP$.

Temos então:

$$\frac{PQ}{XY} = \frac{PC}{XF} = \frac{PB}{XE} = \frac{RB}{ZE} = \frac{RP}{ZX} = \frac{RP}{XY}.$$

Então $PQ = RP$. Analogamente, $RP = QR$. Portanto, o $\triangle PQR$ é equilátero. ■

4.1.1 A trigonometria e o Teorema de Morley

A demonstração do Teorema de Morley que apresentaremos a seguir, envolve dois Teoremas ou Leis fundamentais da Trigonometria: a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos e utiliza também algumas identidades trigonométricas. É uma demonstração que pode ser trabalhada no ensino médio.

Nos triângulos $\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$ e $\triangle ACB'$ e nos triângulos $\triangle A'B'C$, $\triangle B'C'A$ e $\triangle A'C'B$ utilizaremos a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, identificando a medida dos ângulos internos e dos lados dos referidos triângulos e da combinação desses resultados chegaremos às medidas dos lados do triângulo $\triangle A'B'C'$ e, assim, concluiremos a demonstração do Teorema de Morley.

Teorema 4.2. *Seja o $\triangle ABC$. O triângulo $\triangle A'B'C'$ cujos vértices são os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes do triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.*

Demonstração: Seja

$$m(\angle A\hat{B}C) = b$$

$$m(\angle B\hat{A}C) = a$$

$$m(\angle A\hat{C}B) = c$$

temos:

$$a + b + c = 180^\circ$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{180^\circ}{3} \Rightarrow \frac{a + b + c}{3} = \frac{180^\circ}{3}$$

1º *Passo:* Vamos iniciar nossa demonstração com o $\triangle BA'C$.

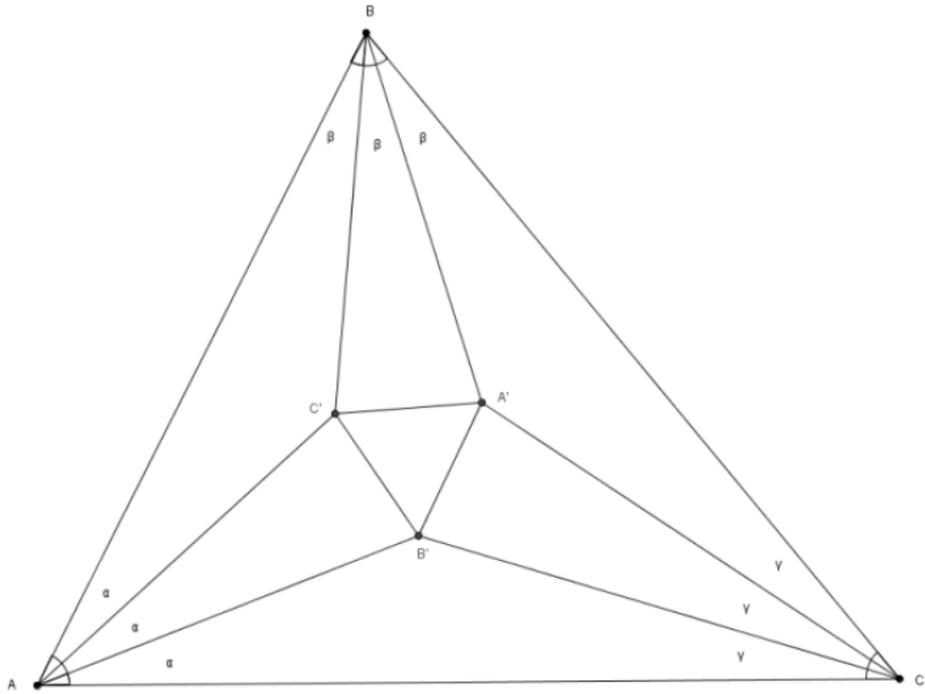


Figura 4.9: Teorema de Morley, trigonometria e os sete triângulos

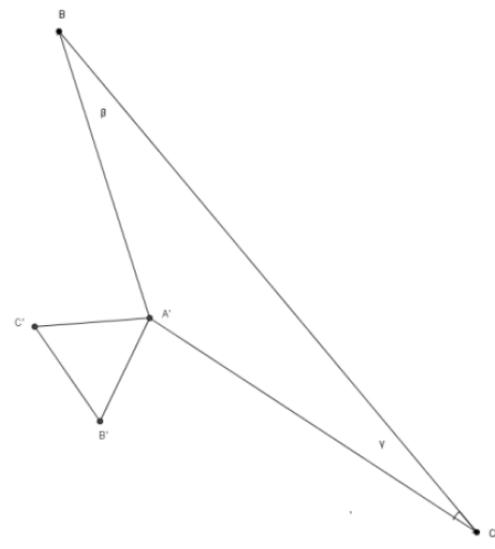


Figura 4.10: Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 1

Sabe-se que: $m(\angle A'BC) = \frac{b}{3}$ e $m(\angle A'CB) = \frac{c}{3}$.

Então,

$$m(\angle B\hat{A}'C) = 180^\circ - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = 180^\circ - \frac{(b+c)}{3}$$

Como $\frac{180^\circ}{3} - \frac{b+c}{3} = \frac{a}{3}$

Então,

$$\begin{aligned} m(\angle B\hat{A}'C) &= \frac{3 \cdot 180^\circ}{3} - \frac{(b+c)}{3} \\ &= \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} + \frac{1 \cdot 180^\circ}{3} - \frac{(b+c)}{3} \\ &= \frac{360^\circ}{3} + \frac{a}{3} \\ &= \frac{a}{3} + 120^\circ \end{aligned}$$

Vamos agora precisar de alguns resultados auxiliares:

Observamos que $\sin \theta = \sin \frac{3\theta}{3} = \sin \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\theta}{3} \right) (*)$.

Seja $a = \frac{2\theta}{3}$ e $b = \frac{\theta}{3}$.

Aplicando em (*), tem-se que $\sin \theta = \sin \frac{2\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\theta}{3} \cos \frac{2\theta}{3}$

Desenvolvendo encontra-se:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \left(2 \sin \frac{\theta}{3} \cdot \cos \frac{\theta}{3} \right) \cdot \cos \frac{\theta}{3} + \sin \frac{\theta}{3} \left(\cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3} \sin \frac{\theta}{3} - \sin^3 \frac{\theta}{3} \\ &= \sin \frac{\theta}{3} \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3} - \sin^2 \frac{\theta}{3} \right) \\ &= \sin \frac{\theta}{3} \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3} - 1 \right) \\ &= \sin \frac{\theta}{3} \left(4 \cos^2 \frac{\theta}{3} - 1 \right) \end{aligned}$$

Como $\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \sin \frac{\theta}{3} \left[4 \left(\frac{\cos \frac{2\theta}{3} + 1}{2} \right) - 1 \right] \\
&= \sin \frac{\theta}{3} \left[2 \left(\cos \frac{2\theta}{3} + 1 \right) - 1 \right] \\
&= \sin \frac{\theta}{3} \left(2 \cos \frac{2\theta}{3} + 2 - 1 \right) \\
&= \sin \frac{\theta}{3} \left(2 \cos \frac{2\theta}{3} + 1 \right)
\end{aligned}$$

Observamos que $1 = -2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -2 \cos(120^\circ) = -2 \cos \left(\frac{360^\circ}{3} \right)$

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \sin \frac{\theta}{3} \left[2 \cos \frac{2\theta}{3} - 2 \cos \frac{360^\circ}{3} \right] \\
&= 2 \sin \frac{\theta}{3} \left(\cos \frac{2\theta}{3} - \cos \frac{360^\circ}{3} \right) (\Xi)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo (Ξ) temos: $2 \sin \frac{\theta}{3} \left[2 \sin \left(\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{360^\circ}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \sin \left(\left(-\frac{2\theta}{3} + \frac{360^\circ}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) \right]$

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{3} \cdot 2 \left[\sin \left(\frac{\theta}{3} + \frac{180^\circ}{3} \right) \cdot \sin \left(-\frac{\theta}{3} + \frac{180^\circ}{3} \right) \right] \\
&= 4 \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) \cdot \sin \left(\frac{\theta + 180^\circ}{3} \right) \cdot \sin \left(\frac{180^\circ - \theta}{3} \right)
\end{aligned}$$

Observamos também que: $\sin \left(\frac{180^\circ - \theta}{3} \right) = \sin \left[180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \theta}{3} \right) \right] = \sin \left(\frac{360^\circ + \theta}{3} \right)$

$$\Rightarrow \sin \theta = 4 \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) \cdot \sin \left(\frac{\theta + 180^\circ}{3} \right) \cdot \sin \left(\frac{360^\circ + \theta}{3} \right)$$

2º Passo: Considerando-se o triângulo $\triangle ABC$ inscrito em uma circunferência de raio

R , pela Lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{BC}{\sin a} = \frac{AC}{\sin b} = \frac{AB}{\sin c} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin a} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin a$$

$$\frac{AC}{\sin b} = 2R \Rightarrow AC = 2R \sin b$$

$$\frac{AB}{\sin c} = 2R \Rightarrow AB = 2R \sin c$$

Temos:

$$\sin a = 4 \sin \frac{a}{3} \sin\left(\frac{a+180^\circ}{3}\right) \sin\left(\frac{a+360^\circ}{3}\right)$$

Então

$$BC = 8R \sin \frac{a}{3} \sin\left(\frac{a+180^\circ}{3}\right) \sin\left(\frac{a+360^\circ}{3}\right)$$

$$AC = 8R \sin \frac{b}{3} \sin\left(\frac{b+180^\circ}{3}\right) \sin\left(\frac{b+360^\circ}{3}\right)$$

$$AB = 8R \sin \frac{c}{3} \sin\left(\frac{c+180^\circ}{3}\right) \sin\left(\frac{c+360^\circ}{3}\right)$$

Agora, vamos aplicar a Lei dos senos no triângulo $\triangle BA'C$

$$\frac{A'C}{\sin \frac{b}{3}} = \frac{BC}{\sin\left(\frac{a+360^\circ}{3}\right)}$$

Assim,

$$A'C = \frac{8R \sin\left(\frac{a}{3}\right) \sin\left(\frac{a+180^\circ}{3}\right) \sin\left(\frac{a+360^\circ}{3}\right) \sin \frac{b}{3}}{\sin\left(\frac{a+360^\circ}{3}\right)}$$

$$A'C = 8R \sin \frac{a}{3} \cdot \sin\left(\frac{a+180^\circ}{3}\right) \cdot \sin \frac{b}{3}$$

$$A'C = 8R \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{b}{3} \cdot \sin\left(\frac{a+180^\circ}{3}\right)$$

De forma análoga, tem-se que:

$$A'B = 8R \sin \frac{c}{3} \cdot \sin \frac{a}{3} \cdot \sin\left(\frac{a+180^\circ}{3}\right)$$

$$B'C = 8R \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{b}{3} \cdot \sin\left(\frac{b+180^\circ}{3}\right)$$

$$B'A = 8R \sin \frac{c}{3} \cdot \sin \frac{b}{3} \cdot \sin\left(\frac{b+180^\circ}{3}\right)$$

$$C'A = 8R \sin \frac{b}{3} \cdot \sin \frac{c}{3} \cdot \sin\left(\frac{c+180^\circ}{3}\right)$$

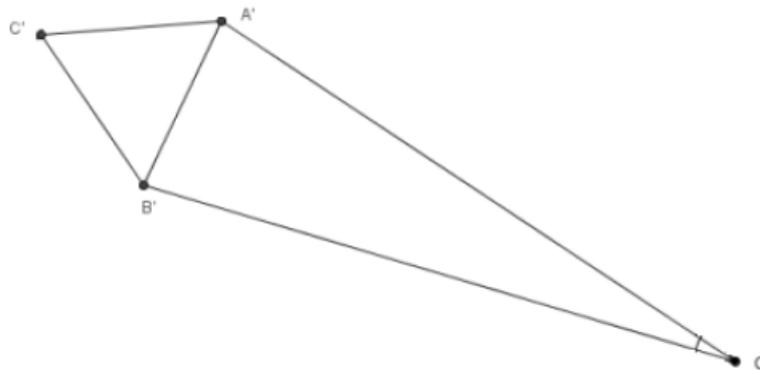
$$C'B = 8R \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{c}{3} \cdot \sin\left(\frac{c+180^\circ}{3}\right)$$

Sejam os triângulos $\triangle A'B'C$, $\triangle B'C'A$, $\triangle A'C'B$, pela Lei dos cossenos, tem-se que:

i) $\triangle A'B'C$

$$A'B'^2 = A'C^2 + B'C^2 - 2A'C \cdot B'C \cdot \cos \frac{c}{3}$$

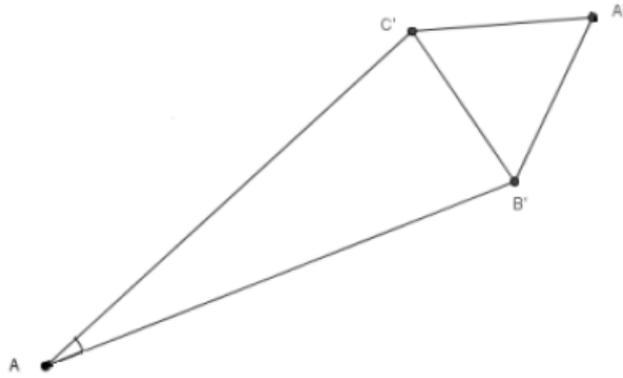
Figura 4.11: Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 2



ii) $\triangle B'C'A$

$$B'C'^2 = B'A^2 + C'A^2 - 2B'A \cdot C'A \cdot \cos \frac{a}{3}$$

Figura 4.12: Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 3



iii) $\triangle A'C'B$

$$C'A'^2 = A'B^2 + C'B^2 - 2A'B \cdot C'B \cdot \cos \frac{b}{3}$$

Figura 4.13: Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 4

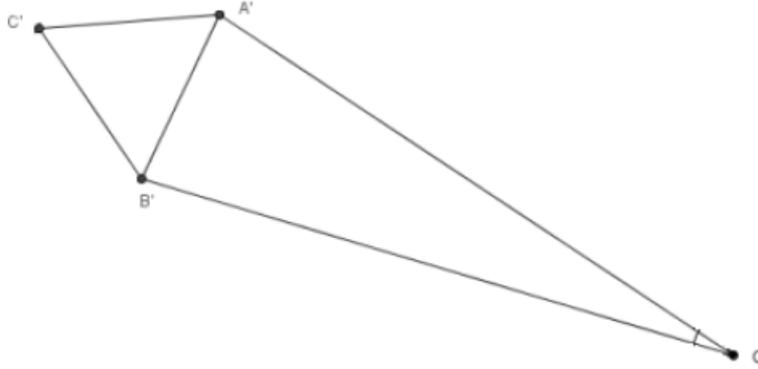


Temos então:

$$\begin{aligned}
 A'B'^2 &= \left[8R \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{b}{3} \cdot \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \right]^2 + \left[8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \right]^2 \\
 &\quad - 2 \left[8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \right] \left[8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \right] \cos \frac{c}{3} \\
 A'B'^2 &= 64R^2 \sin^2 \frac{a}{3} \sin^2 \frac{b}{3} \left[\sin^2 \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) + \sin^2 \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \cos \left(\frac{c}{3} \right) \right] (*)
 \end{aligned}$$

No triângulo $\triangle CA'B'$ temos $m(\angle A'\hat{B}'C) = \frac{a}{3} + 60^\circ$ e $m(\angle B'\hat{A}'C) = \frac{b}{3} + 60^\circ$.

Figura 4.14: Teorema de Morley, trigonometria e triângulo 5



Aplicando-se a Lei dos senos ao $\triangle CA'B'$ tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \frac{A'C}{\sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right)} &= \frac{B'C}{\sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right)} = \frac{A'B'}{\sin \frac{c}{3}} = 2R' \\
 \frac{A'C}{\sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right)} &= 2R' \Rightarrow A'C = 2R' \cdot \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \\
 \frac{B'C}{\sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right)} &= 2R' \Rightarrow B'C = 2R' \cdot \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \\
 \frac{A'B'}{\sin \frac{c}{3}} &= 2R' \Rightarrow A'B' = 2R' \cdot \sin \frac{c}{3}
 \end{aligned}$$

Pela Lei dos cossenos:

$$A'B'^2 = \left[2R' \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \right]^2 + \left[2R' \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \right]^2$$

$$- 2 \left[2R' \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \right] \left[2R' \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \right] \cos \frac{c}{3}$$

$$A'B'^2 = 4R'^2 \sin^2 \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) + 4R'^2 \sin^2 \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) -$$

$$- 8R'^2 \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \cos \frac{c}{3}$$

$$\Rightarrow 4R'^2 \sin^2 \frac{c}{3} = 4R'^2 \sin^2 \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) + 4R'^2 \sin^2 \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) -$$

$$- 4R'^2 \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \cos \frac{c}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{c}{3} = \sin^2 \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) + \sin^2 \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) - 2 \sin \left(\frac{a}{3} + 60^\circ \right) \sin \left(\frac{b}{3} + 60^\circ \right) \cos \frac{c}{3} (**)$$

de (*) e (**) tem-se que:

$$A'B'^2 = 64R^2 \sin^2 \frac{a}{3} \sin^2 \frac{b}{3} \sin^2 \frac{c}{3}$$

$$A'B' = \sqrt{64R^2 \sin^2 \frac{a}{3} \sin^2 \frac{b}{3} \sin^2 \frac{c}{3}}$$

$$A'B' = 8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \frac{c}{3}$$

Analogamente, tem-se que para os $\triangle B'C'A$ e $\triangle A'C'B$:

$$B'C' = 8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \frac{c}{3}$$

$$A'C' = 8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \frac{c}{3}$$

Portanto,

$$A'B' = B'C' = A'C' = 8R \sin \frac{a}{3} \sin \frac{b}{3} \sin \frac{c}{3}$$

e, dessa forma, o $\triangle A'B'C'$ é equilátero.

■

4.1.2 Uma demonstração usando vetores e trigonometria

A prova que iremos apresentar é desenvolvida por meio da utilização de produto escalar e trigonometria, bem como de conceitos elementares de Geometria.

Eis a beleza da Matemática, é possível entrelaçar diferentes conteúdos para resolver um problema ou para provar um teorema.

Queremos provar que em qualquer triângulo, os três pontos de interseção das trissez-trizes adjacentes são vértices de um triângulo equilátero.

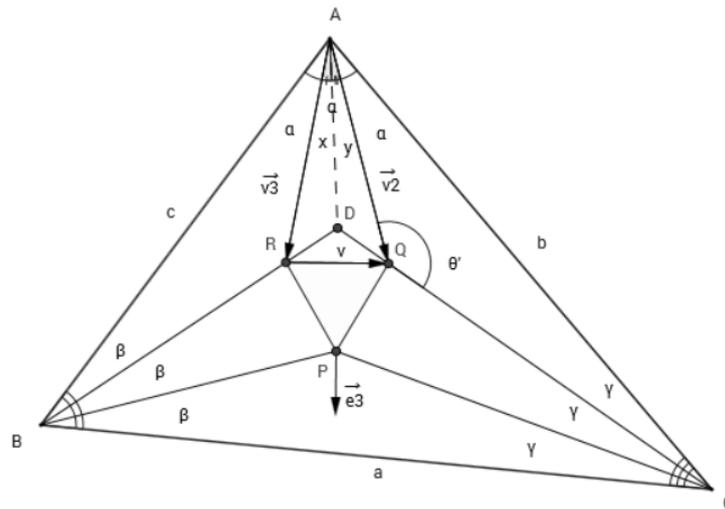


Figura 4.15: Triângulo de Morley e vetores

Sejam os ângulos do triângulo $\triangle ABC$ de amplitudes 3α , 3β e 3γ , de forma que $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

A reta suporte do segmento \overline{BR} se intercepta com a reta suporte do segmento \overline{CQ} em D .

No triângulo $\triangle BDC$ a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{D}C$ é concorrente com as bissetrizes dos ângulos $\angle D\hat{B}C$ e $\angle D\hat{C}B$ em P . Então, por definição, P é o incentro do triângulo $\triangle BDC$.

Iniciaremos a prova do Teorema de Morley a partir do seguinte Lema:

Lema 4.1. *A reta suporte do segmento \overline{DP} é perpendicular à reta suporte do segmento \overline{RQ}*

A prova desse Lema será feita utilizando-se vetores e trigonometria.

Demonstração:

i) Sabe-se que

$$\begin{aligned} m(\angle C\hat{B}A) &= 3\beta \\ m(\angle B\hat{C}A) &= 3\gamma \\ m(\angle B\hat{A}C) &= 3\alpha \\ \Rightarrow 3\alpha + 3\beta + 3\gamma &= 180^\circ \end{aligned}$$

então,

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

Seja o triângulo $\triangle ARQ$. Vamos utilizar produto escalar. Sejam:

$$\begin{aligned} \vec{AR} &= \vec{v}_3; & \vec{AQ} &= \vec{v}_2 \\ \Rightarrow \vec{v}_3 + \vec{RQ} &= \vec{v}_2 & \text{ou} & \vec{v}_2 + \vec{QR} = \vec{v}_3 \end{aligned}$$

então

$$\vec{QR} = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$$

e seja $\vec{e} = \frac{\vec{DP}}{\|\vec{DP}\|}$.

Basta mostrar então que

$$(\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} = 0.$$

Temos que

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 120^\circ$$

$$2\beta + 2\gamma = 120^\circ - 2\alpha.$$

Do triângulo $\triangle BDC$, tem-se que:

$$2\beta + 2\gamma + m(\angle B\hat{D}C) = 180^\circ$$

$$120^\circ - 2\alpha + m(\angle B\hat{D}C) = 180^\circ$$

$$m(\angle B\hat{D}C) = 180^\circ - 120^\circ + 2\alpha$$

$$m(\angle B\hat{D}C) = 60^\circ + 2\alpha.$$

ii) Como P é o incentro do triângulo $\triangle BDC$, então \overline{DP} está contido na bissetriz do ângulo $\angle B\hat{D}C$. Portanto,

$$m(\angle Q\hat{D}P) = m(\angle R\hat{D}P) = \frac{1}{2}m(\angle B\hat{D}C) = \alpha + 30^\circ.$$

iii) Pelo Teorema do ângulo externo, temos:

$$m(\angle A\hat{Q}D) = \alpha + \gamma$$

$$m(\angle A\hat{R}D) = \alpha + \beta.$$

iv) Vamos calcular o ângulo entre \vec{v}_3 e \vec{e} , denotado por \hat{x} :

Temos:

$$\hat{x} + m(\angle A\hat{R}D) = m(\angle R\hat{D}P)$$

$$\hat{x} = m(\angle R\hat{D}P) - m(\angle A\hat{R}D)$$

$$\hat{x} = \alpha + 30^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\hat{x} = 30^\circ - \beta$$

v) De forma análoga, tem-se que, \hat{y} o ângulo entre \vec{v}_2 e \vec{e} é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{y} + m(\angle A\hat{Q}D) &= m(\angle Q\hat{D}P) \\ \hat{y} &= m(\angle Q\hat{D}P) - m(\angle A\hat{Q}D) \\ \hat{y} &= \alpha + 30^\circ - (\alpha + \gamma) \\ \hat{y} &= \alpha + 30^\circ - \alpha - \gamma = 30^\circ - \gamma.\end{aligned}$$

Calculemos o produto escalar entre os vetores $\vec{v}_3 - \vec{v}_2$ e \vec{e} :

$$\begin{aligned}(\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} &= \vec{v}_3 \cdot \vec{e} - \vec{v}_2 \cdot \vec{e} \\ (\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} &= \|\vec{v}_3\| \cdot \cos(30^\circ - \beta) - \|\vec{v}_2\| \cdot \cos(30^\circ - \gamma) \\ (\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} &= \|\vec{v}_3\| \cdot \sin(60^\circ + \beta) - \|\vec{v}_2\| \cdot \sin(60^\circ + \gamma).\end{aligned}$$

Precisamos calcular $\|\vec{v}_3\|$ e $\|\vec{v}_2\|$.

Do triângulo $\triangle ARB$, temos: $m(\angle B\hat{A}R) = \alpha$; $m(\angle A\hat{B}R) = \beta$ e seja $m(\angle A\hat{R}B) = \theta$. Então

$$\begin{aligned}\theta + \beta + \alpha &= 180^\circ \\ \theta &= 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ \sin \theta &= \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ \sin \theta &= \sin 180^\circ \cdot \cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos 180^\circ \\ \sin \theta &= \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Seja $c = AB$. Aplicando a Lei dos senos ao $\triangle ARB$, temos:

$$\frac{\|\vec{v}_3\|}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Daí, tem-se que

$$\|\vec{v}_3\| = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c \sin \beta}{\sin(60^\circ - \gamma)}$$

pois

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 60^\circ \\ \alpha + \beta &= 60^\circ - \gamma.\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular $\|\vec{v}_2\|$.

Observando-se o triângulo $\triangle AQR$, seja $m(\angle Q\hat{A}C) = \alpha$; $m(\angle Q\hat{C}A) = \gamma$ e seja $m(\angle A\hat{Q}C) = \theta'$.

Temos: $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 60^\circ - \beta$ e

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma + \theta' &= 180^\circ \\ \Rightarrow \theta' &= 180^\circ - (\alpha + \gamma).\end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos senos ao $\triangle AQC$, onde $b = AC$. Temos:

$$\frac{\|\vec{v}_2\|}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \theta'}$$

Então,

$$\|\vec{v}_2\| = \frac{b \sin \gamma}{\sin \theta'} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}\sin \theta' &= \sin(180^\circ - (\alpha + \gamma)) \\ \sin \theta' &= \sin 180^\circ \cdot \cos(\alpha + \gamma) - \sin(\alpha + \gamma) \cdot \cos 180^\circ \\ \sin \theta' &= \sin(\alpha + \gamma)\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin(60^\circ - \beta),$$

pois $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

Portanto:

$$\Rightarrow \|\vec{v}_2\| = \frac{b \sin \gamma}{\sin \theta'} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}.$$

Substituindo em $\vec{v}_3 \cdot \vec{e} - \vec{v}_2 \cdot \vec{e}$ tem-se que:

$$\begin{aligned}(\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} &= \|\vec{v}_3\| \sin(60^\circ + \beta) - \|\vec{v}_2\| \sin(60^\circ + \gamma) \\ \Rightarrow (\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} &= \frac{c \sin \beta \cdot \sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ - \gamma)} - \frac{b \sin \gamma \cdot \sin(60^\circ + \gamma)}{\sin(60^\circ - \beta)} \\ &= \frac{c \sin \beta \cdot \sin(60^\circ + \beta) \cdot \sin(60^\circ - \beta) - b \sin \gamma \cdot \sin(60^\circ + \gamma) \cdot \sin(60^\circ - \gamma)}{\sin(60^\circ - \gamma) \cdot \sin(60^\circ - \beta)}.\end{aligned}$$

Como

$$\sin x \cdot \sin(60^\circ + x) \cdot \sin(60^\circ - x) = \frac{1}{4} \sin 3x.$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} = \frac{1}{4} \left[\frac{c \sin 3\beta - b \sin 3\gamma}{\sin(60^\circ - \gamma) \cdot \sin(60^\circ - \beta)} \right].$$

Agora, aplicando-se a Lei dos senos ao triângulo $\triangle ABC$, tem-se que

$$\frac{c}{\sin 3\gamma} = \frac{b}{\sin 3\beta} \Leftrightarrow c \sin 3\beta = b \sin 3\gamma$$

Portanto, $(\vec{v}_3 - \vec{v}_2) \cdot \vec{e} = 0$ e, dessa forma, \overline{DP} é perpendicular a \overline{RQ} . ($\overline{DP} \perp \overline{RQ}$). ■

A prova do Teorema de Morley é decorrência do Lema. De fato:

Como \overline{DP} é perpendicular a \overline{RQ} (\overline{DP} é bissetriz do ângulo $\angle BDC$). Então $DQ = DR$.

De maneira análoga, mostramos que $RD = RQ$ e portanto, por transitividade $DQ = DR = RQ$ e o triângulo $\triangle PQR$ é equilátero. ■

4.1.3 A área do triângulo de Morley

Nós já demonstramos que os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero, também chamado de triângulo de Morley.

Seja o triângulo $\triangle ABC$, cujos ângulos internos são dados por:

$$m(\angle \hat{A}BC) = \hat{b} = 3\beta$$

$$m(\angle \hat{A}CB) = \hat{c} = 3\gamma$$

$$m(\angle \hat{B}AC) = \hat{a} = 3\alpha$$

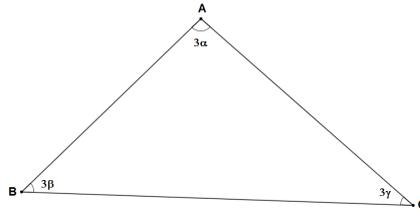


Figura 4.16: Área do Triângulo de Morley

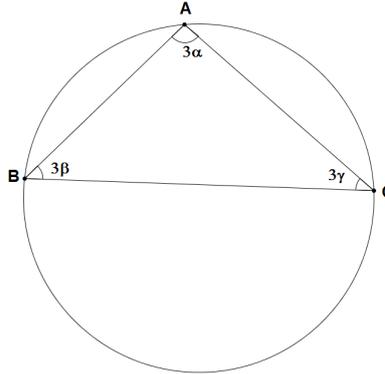


Figura 4.17: Círculo circunscrito

Considerando o mesmo triângulo $\triangle ABC$ e consideramos o círculo circunscrito de raio R .

Pela Lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{AB}{\sin \hat{c}} = \frac{AC}{\sin \hat{b}} = \frac{BC}{\sin \hat{a}} = 2R$$

; onde R é o raio do círculo circunscrito e, dessa forma:

$$AC = 2R \sin \hat{b}; \quad AB = 2R \sin \hat{c}; \quad \text{e} \quad BC = 2R \sin \hat{a}$$

Para calcular a área do triângulo $\triangle ABC$ vamos considerar h como sendo a altura relativa ao lado \overline{BC} .

Considerando-se \overline{BC} como a base do triângulo $\triangle ABC$, tem-se que

$$\sin \hat{b} = \frac{h}{2R \sin \hat{c}}, \quad \text{então} \quad h = 2R \sin \hat{b} \sin \hat{c}.$$

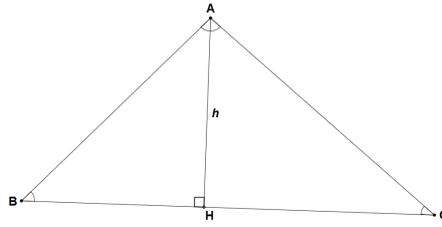


Figura 4.18: Altura relativa ao lado BC

Assim, a área do triângulo $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin \hat{a} \cdot 2R \cdot \sin \hat{b} \cdot \sin \hat{c}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cdot \sin \hat{a} \cdot \sin \hat{b} \cdot \sin \hat{c}$$

$$S = 2R^2 \cdot \sin \hat{a} \cdot \sin \hat{b} \cdot \sin \hat{c}$$

Seja o triângulo de Morley $\triangle A'B'C'$ formado pelos pontos de interseção das trissezantes adjacentes do triângulo $\triangle ABC$.

Sabe-se que o triângulo $\triangle A'B'C'$ é equilátero, isto é $A'B' \cong A'C' \cong B'C'$.

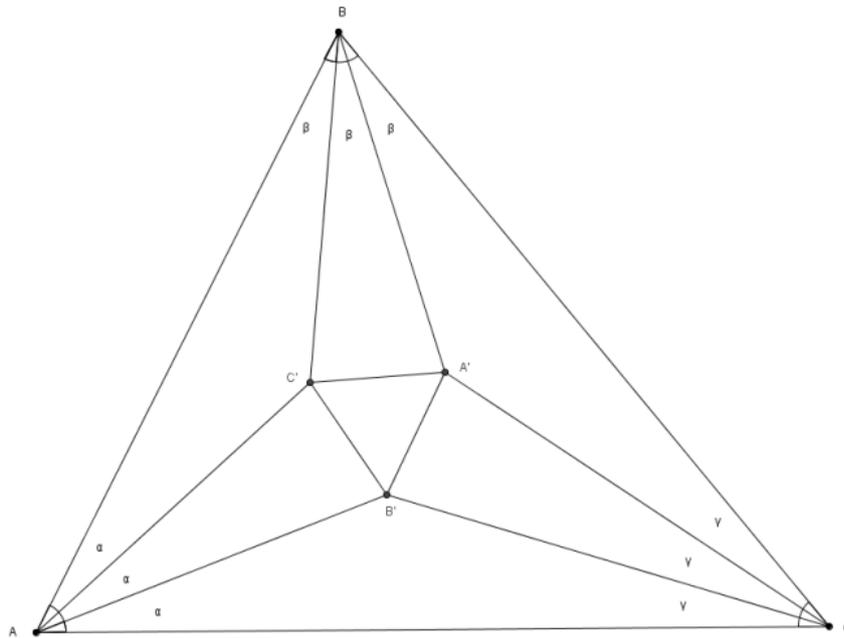


Figura 4.19: Razão entre as áreas dos triângulos

Temos, então:

$$A'B' = 8R \sin\left(\frac{a}{3}\right) \sin\left(\frac{b}{3}\right) \sin\left(\frac{c}{3}\right)$$

Então, a área do triângulo $\triangle A'B'C'$ é dada por:

$$S' = \left(8R \sin\left(\frac{a}{3}\right) \sin\left(\frac{b}{3}\right) \sin\left(\frac{c}{3}\right)\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S' = 16 \cdot \sqrt{3} R^2 \sin^2\left(\frac{a}{3}\right) \sin^2\left(\frac{b}{3}\right) \sin^2\left(\frac{c}{3}\right)$$

Observamos também que a razão entre S' e S é dada por:

$$k = \frac{S'}{S} = \frac{16 \cdot \sqrt{3} R^2 \sin^2\left(\frac{a}{3}\right) \sin^2\left(\frac{b}{3}\right) \sin^2\left(\frac{c}{3}\right)}{2R^2 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}$$

$$k = \frac{S'}{S} = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \sin^2\left(\frac{a}{3}\right) \sin^2\left(\frac{b}{3}\right) \sin^2\left(\frac{c}{3}\right)^2}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}$$

$$k = \frac{S'}{S} = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \sin^2(\gamma)}{\sin 3\alpha \cdot \sin 3\beta \cdot \sin 3\gamma}$$

4.2 Construção do Triângulo de Morley utilizando o Geogebra

As atividades a seguir propostas têm como objetivo propor uma prática que possa propiciar aos educandos construir o Triângulo de Morley.

Foram desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra. A ideia é valorizar a prática e ao mesmo tempo trabalhar o conteúdo de forma sistematizada. Contudo, a prática deve estar aliada a teoria, pois para ensinarmos de forma mais eficiente é necessário valorizar a prática sem deixar de trabalhar o conhecimento sistematizado, qual seja, construção do homem desde os primórdios da humanidade, passando pela industrialização e a época contemporânea.

Atividade 1 A proposta é desenvolver uma atividade, na qual serão aplicados os conceitos e os teoremas apresentados no trabalho, para construir o triângulo de Morley.

Vamos aos passos do trabalho:

1º passo: construir um triângulo $\triangle ABC$.

- (i) Inicie o software GeoGebra e inicie a fase de reconhecimento do programa.
- (ii) Ative a ferramenta polígono e construa um triângulo qualquer $\triangle ABC$. A ideia é na caixa de ferramentas selecionar o ícone Polígono e construir um triângulo qualquer $\triangle ABC$.

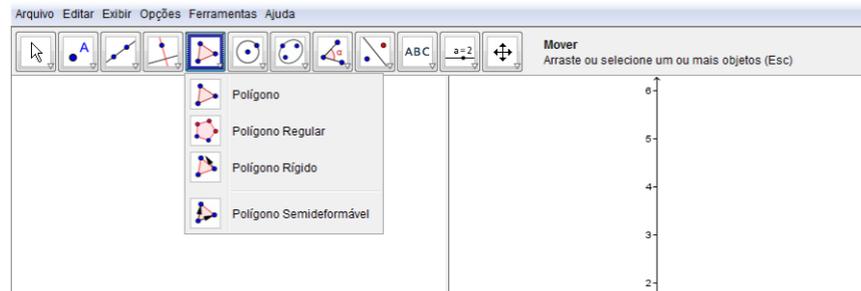


Figura 4.20: Geogebra atividade 1 passo 1

Dica: o ideal é construir um triângulo pequeno que fique localizado no canto de cima à direita.

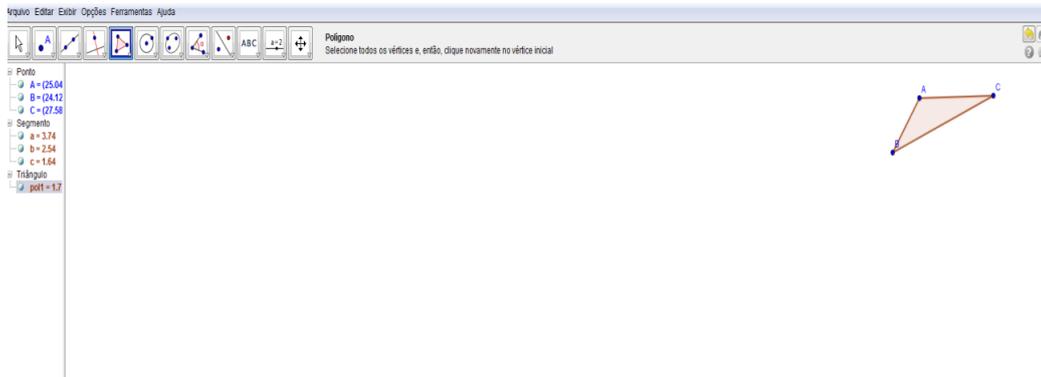


Figura 4.21: Geogebra atividade 1 passo 2

(iii) Ative a ferramenta a ferramenta ângulo e marque os ângulos do $\triangle ABC$;



Figura 4.22: Geogebra atividade 1 passo 3

Marque os ângulos, na seguinte sequência

1. $\angle \hat{BCA} (\alpha)$;
2. $\angle \hat{CBA} (\beta)$
3. $\angle \hat{ABC} (\gamma)$



Figura 4.23: Geogebra atividade 1 passo 4

- (iv) Ative a ferramenta polígono e construa um triângulo equilátero $\triangle DEF$. A ideia é na caixa de ferramentas selecionar o ícone Polígono Regular e construir um triângulo equilátero.



Figura 4.24: Geogebra atividade 1 passo 5

Dica: procure construir um triângulo pequeno que fique localizado no centro da tela.

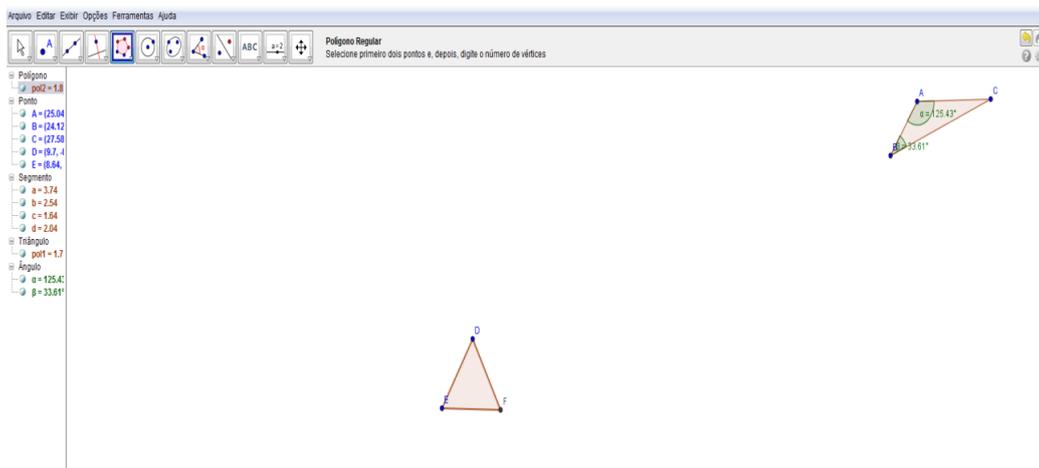


Figura 4.25: Geogebra atividade 1 passo 6

(v) A próxima etapa é traçar as mediatrizes relativas aos lados DE , EF e FD . Para isso vamos acessar na barra de ferramentas o ícone mediatriz e clicar sobre os respectivos lados.

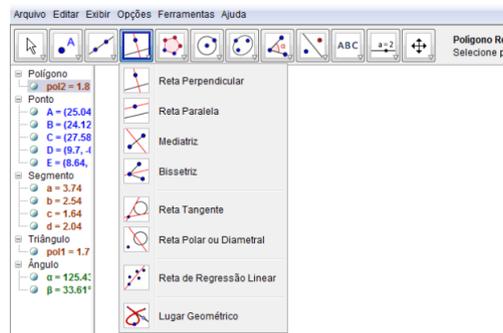


Figura 4.26: Geogebra atividade 1 passo 7

Dica: Numa próxima etapa, nós vamos ocultar as referidas mediatrizes, de forma que o desenho não fique muito poluído e para facilitar a visualização do triângulo de Morley. A proposta é a de que obtenhamos a seguinte figura:

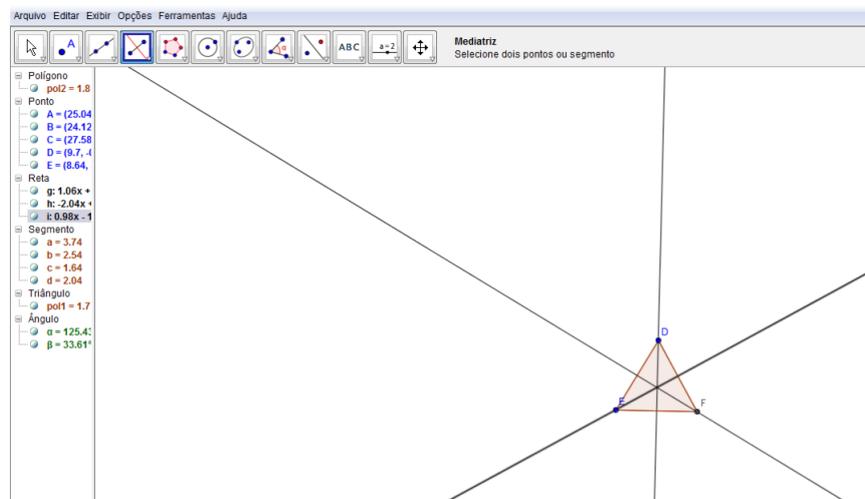


Figura 4.27: Geogebra atividade 1 passo 8

item[(vi)] Agora vamos construir triângulos isósceles $\triangle DEG$, $\triangle EFH$ e $\triangle FDI$ sobre os lados DE , EF e FD , respectivamente, observando as seguintes condições.

- $m(\angle E\hat{D}G) \equiv m(\angle D\hat{E}G) = (60 - \frac{\alpha}{3})$;
- $m(\angle F\hat{E}H) \equiv m(\angle E\hat{F}H) = (60 - \frac{\beta}{3})$;

- $m(\angle D\hat{F}I) \equiv m(\angle F\hat{D}I) = (60 - \frac{\gamma}{3});$

Dica: Fique atento, no sentido do ângulo (horário ou anti-horário)

Ative a ferramenta ângulo com amplitude fixa e marque os ângulos conforme as amplitudes recomendadas.

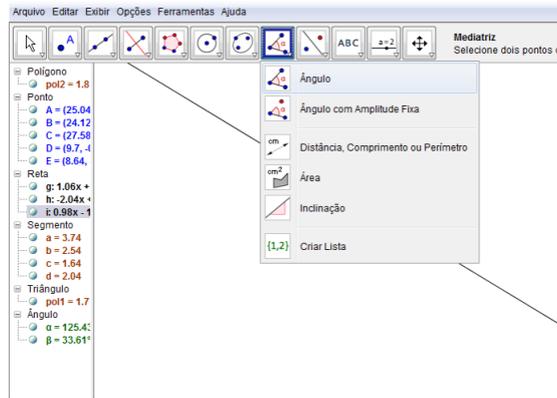


Figura 4.28: Geogebra atividade 1 passo 9

Após a marcação do ângulo, trace o triângulo isósceles utilizando o ícone segmento entre dois pontos e ponto.

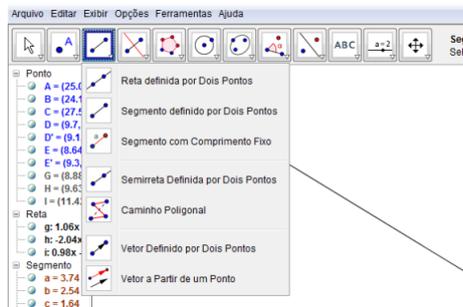


Figura 4.29: Geogebra atividade 1 passo 10

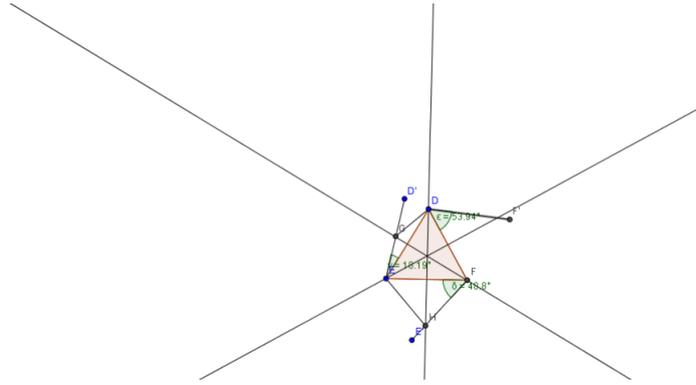


Figura 4.30: Geogebra atividade 1 passo 11

(vii) Clique com o botão à direita do mouse e selecione o ícone ocultar e clique sobre as mediatrizes.

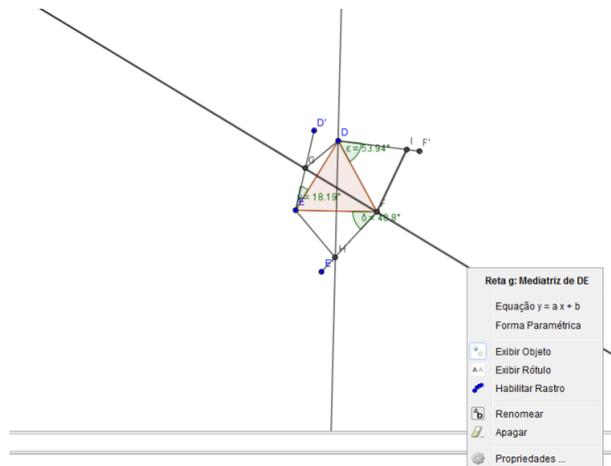


Figura 4.31: Geogebra atividade 1 passo 12

(viii) Estamos quase na finalização do nosso trabalho. Agora vamos selecionar o ícone semirreta definida por dois pontos e traçar as semirretas relativas aos pontos:

1. GE e IF ;
2. FD e HE ;
3. GD e HF ;

Na sequência marque os pontos de encontro das semirretas, para isso utilize o ícone *ponto*, interseção entre dois objetos.



Figura 4.32: Geogebra atividade 1 passo 13

A ideia é obter uma figura semelhante a essa:

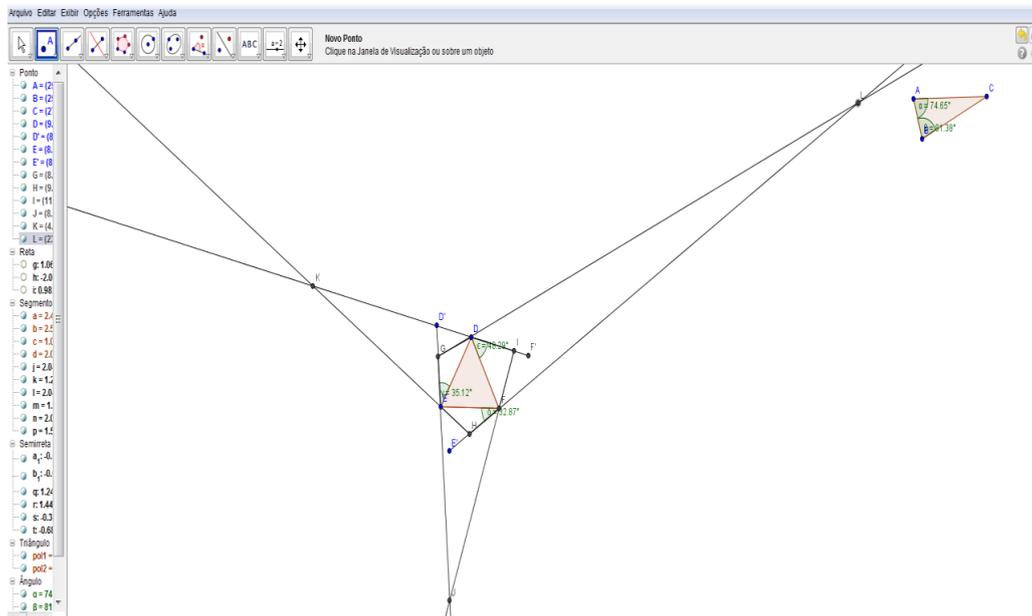


Figura 4.33: Geogebra atividade 1 passo 14

- (ix) Agora, utilizando o ícone segmento definido por dois pontos, vamos determinar o triângulo $\triangle JKL$ e com o ícone ângulo, vamos marcar os ângulos $\angle J\hat{K}L, \angle K\hat{L}J$ e $\angle L\hat{J}K$ respectivamente.

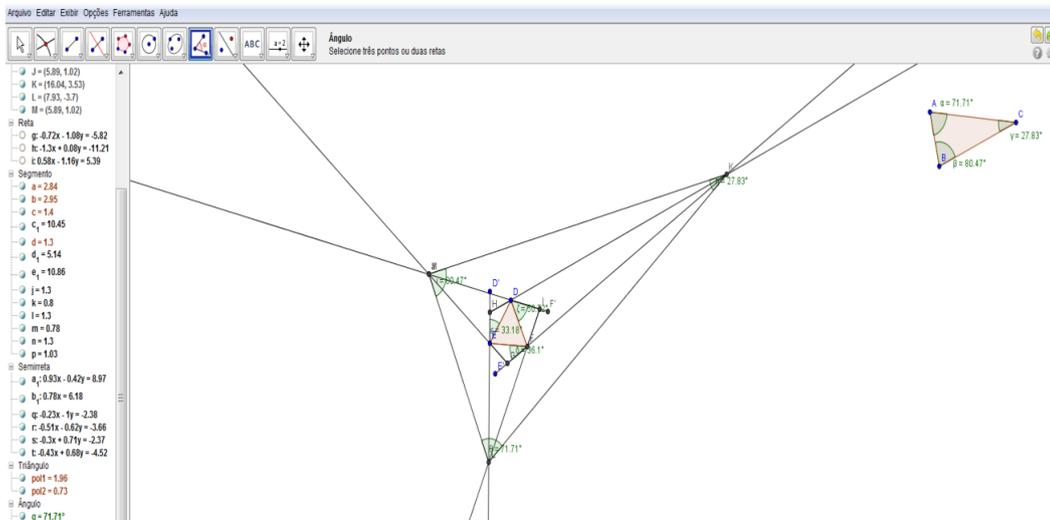


Figura 4.34: Geogebra atividade 1 passo 15

Note que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle JKL$ são semelhantes.

- (x) O próximo passo é marcar os ângulos para confirmar que o triângulo $\triangle DEF$ é formado pelo ponto de encontro das trissetrizes do triângulo $\triangle JKL$.

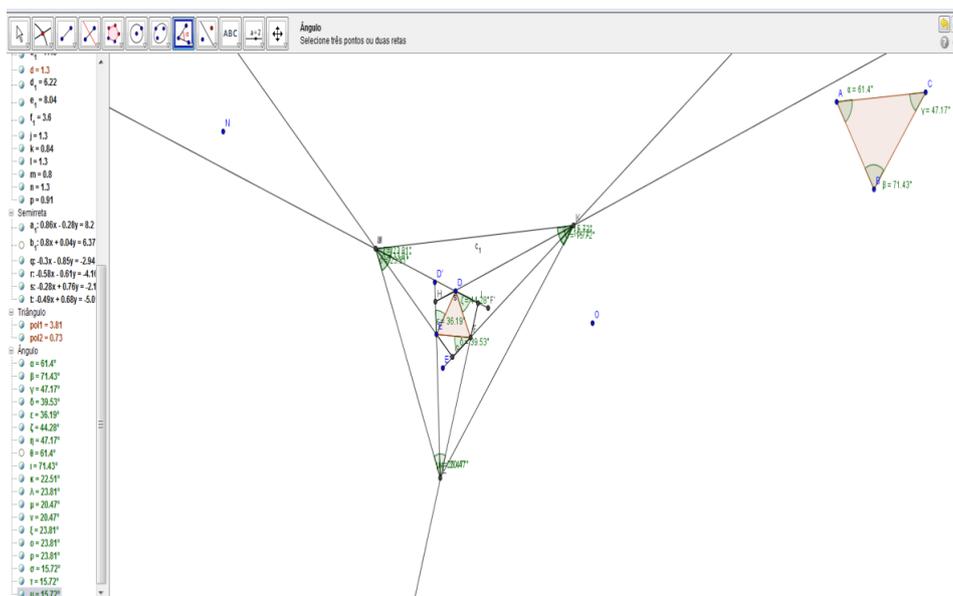


Figura 4.35: Geogebra atividade 1 passo 16

(xi) Selecione a tecla mover e brinque com os triângulos. Você verá que a forma dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle JKL$ se altera, mas o triângulo $\triangle DEF$ continuará ser de triângulo equilátero.

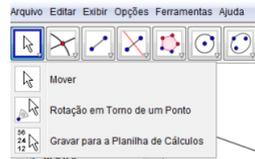


Figura 4.36: Geogebra atividade 1 passo 17

Ao final da sua atividade, você poderá acessar o menu exibir e emitir o protocolo de construção que aparecerá à direita de sua tela e conterá os principais passos da sua construção.

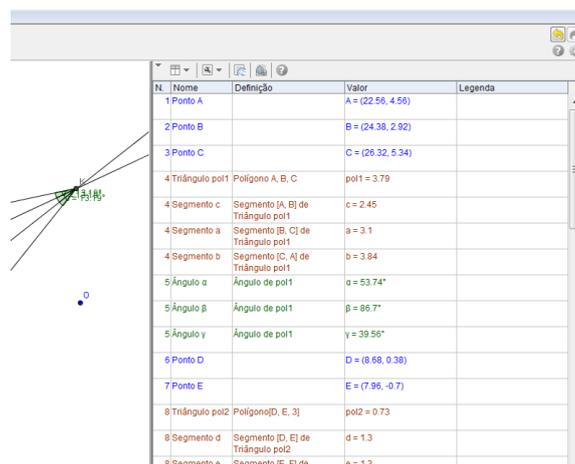


Figura 4.37: Geogebra atividade 1 passo 18

O triângulo $\triangle DEF$ é denominado de Triângulo de Morley que é formado pelo ponto de interseção entre as trissetrizes adjacentes de um triângulo $\triangle ABC$. Eis, pois, o Teorema de Morley.

Atividade 2 A proposta é desenvolver uma atividade, na qual serão aplicados os conceitos e os teoremas apresentados no trabalho, para construir o triângulo de Morley.

Vamos aos passos do trabalho:

1º passo: construir um triângulo $\triangle ABC$.

- (i) Inicie o software GeoGebra e inicie a fase de reconhecimento do programa.
- (ii) Ative a ferramenta polígono e construa um triângulo qualquer $\triangle ABC$. A ideia é na caixa de ferramentas selecionar o ícone Polígono e construir um triângulo qualquer $\triangle ABC$.

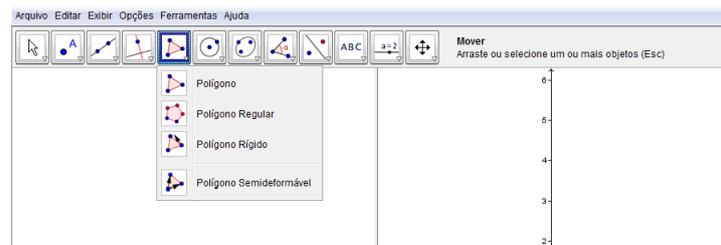


Figura 4.38: Geogebra atividade 2 passo 1

Dica: o ideal é construir um triângulo que fique localizado no centro da tela, para facilitar a visualização dos demais elementos do trabalho.

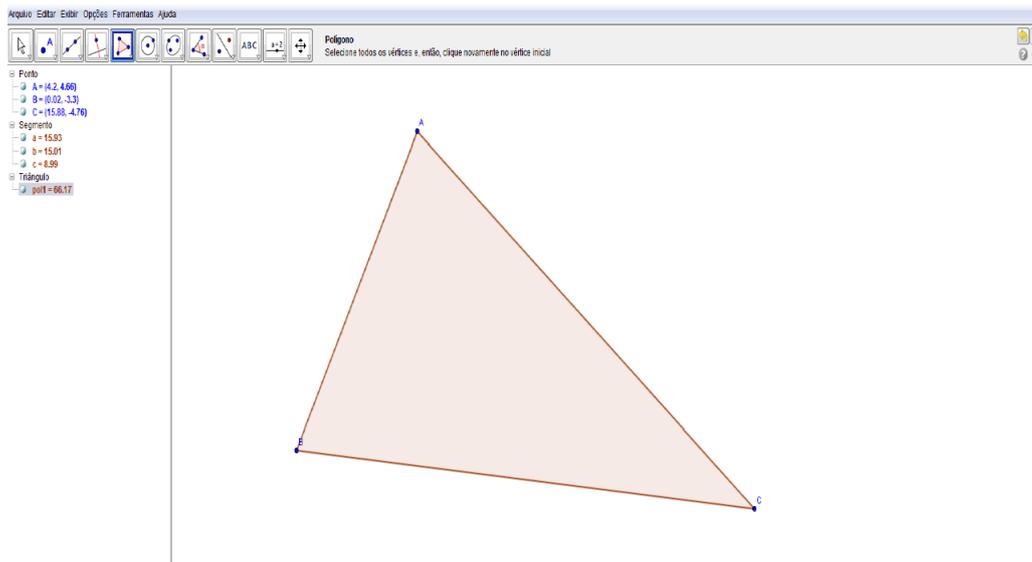


Figura 4.39: Geogebra atividade 2 passo 2

(iii) Ative a ferramenta a ferramenta ângulo e marque os ângulos do triângulo $\triangle ABC$;



Figura 4.40: Geogebra atividade 2 passo 3

Marque os ângulos, na seguinte sequência

1. $\angle B\hat{C}A(\alpha)$;
2. $\angle C\hat{B}A(\beta)$;
3. $\angle A\hat{B}C(\gamma)$;

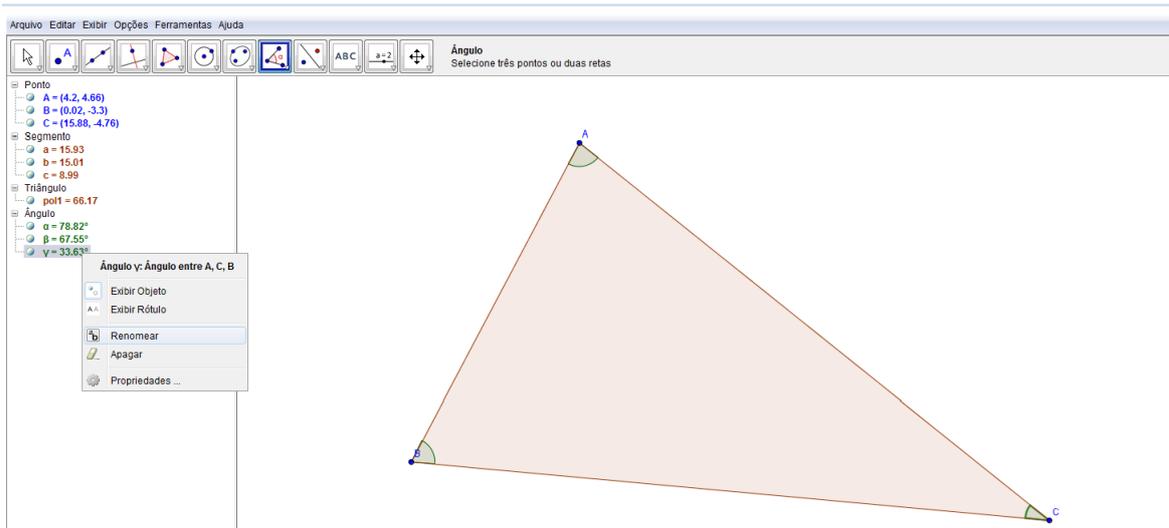


Figura 4.41: Geogebra atividade 2 passo 4

Dica: na parte esquerda da tela, clique com a tecla direita do mouse sobre o ícone exibir rótulo e a medida do ângulo ficará oculta na figura. Para visualizar novamente, basta fazer a mesma operação e exibir o rótulo.

- (iv) Iniciaremos o procedimento para trissectar os ângulos do triângulo $\triangle ABC$.; Inicialmente clique sobre o ícone ângulo com amplitude fixa e clicando sobre os pontos B e A construa um ângulo de medida $\frac{\alpha}{3}$ e na sequência clique sobre o ícone semirreta definida por dois pontos e clique sobre os pontos A e B' .

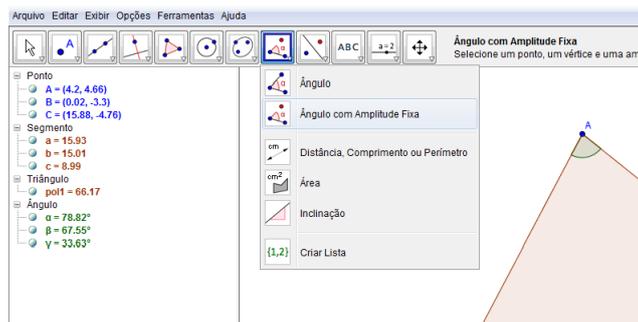


Figura 4.42: Geogebra atividade 2 passo 5

Você obterá a seguinte figura:

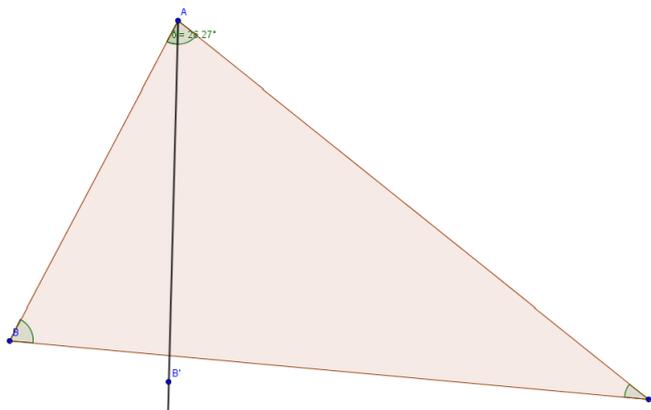


Figura 4.43: Geogebra atividade 2 passo 6

(v) A próxima etapa é traçar a mediatrizes relativa ao ângulo $\angle B\hat{A}'C$

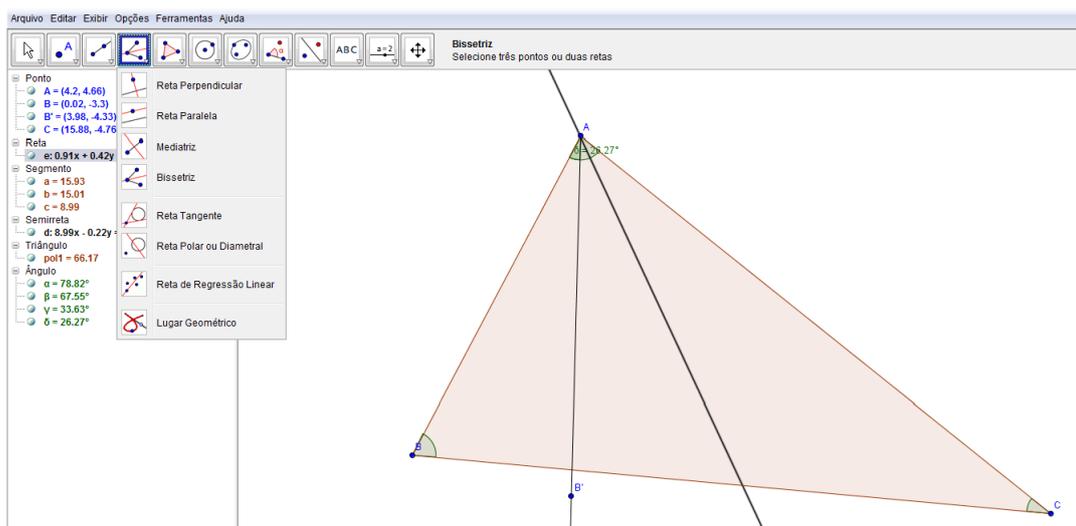


Figura 4.44: Geogebra atividade 2 passo 7

Repita o procedimento para os ângulos $\angle A\hat{B}C$ e $\angle C\hat{A}B$. Você obterá uma figura semelhante a essa:

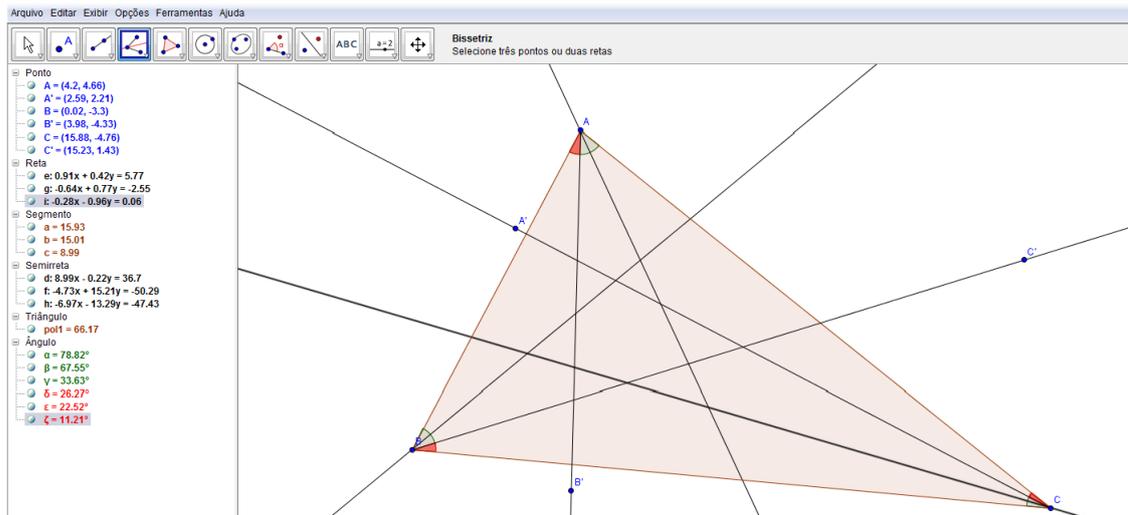


Figura 4.45: Geogebra atividade 2 passo 8

Dica: Para destacar os ângulos $\angle B' \hat{A} C$, $\angle C' \hat{B} C$ e $\angle A' \hat{C} A$ clique com a tecla direita do mouse e selecione a ferramenta propriedades



Figura 4.46: Geogebra atividade 2 passo 9

As trissetrizes do triângulo $\triangle ABC$. foram construídas. Agora com o auxílio da ferramenta interseção entre dois objetos, marque os pontos relativos à interseção das trissetrizes adjacentes.

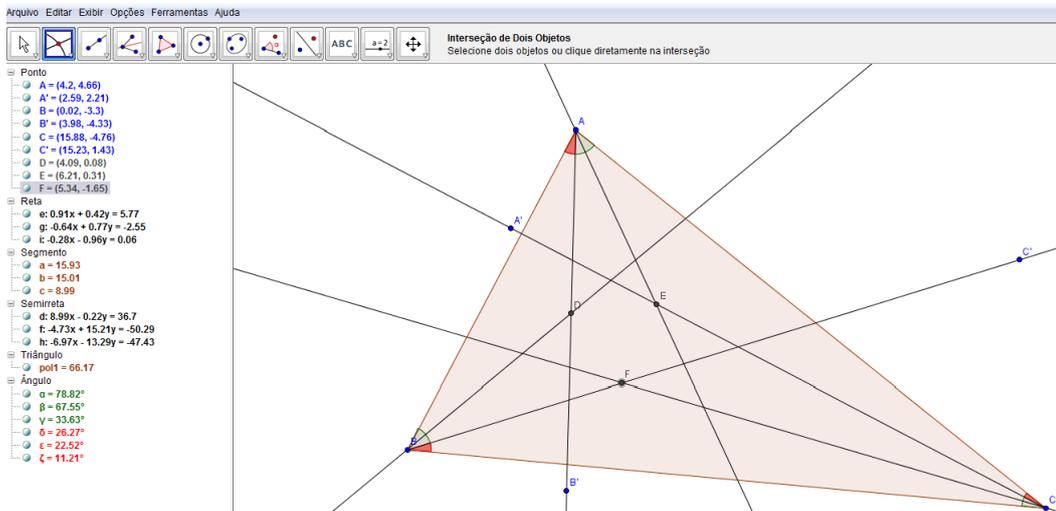


Figura 4.47: Geogebra atividade 2 passo 10

(vi) Agora vamos construir o triângulo formado pelos pontos DEF e marcar seus ângulos internos.

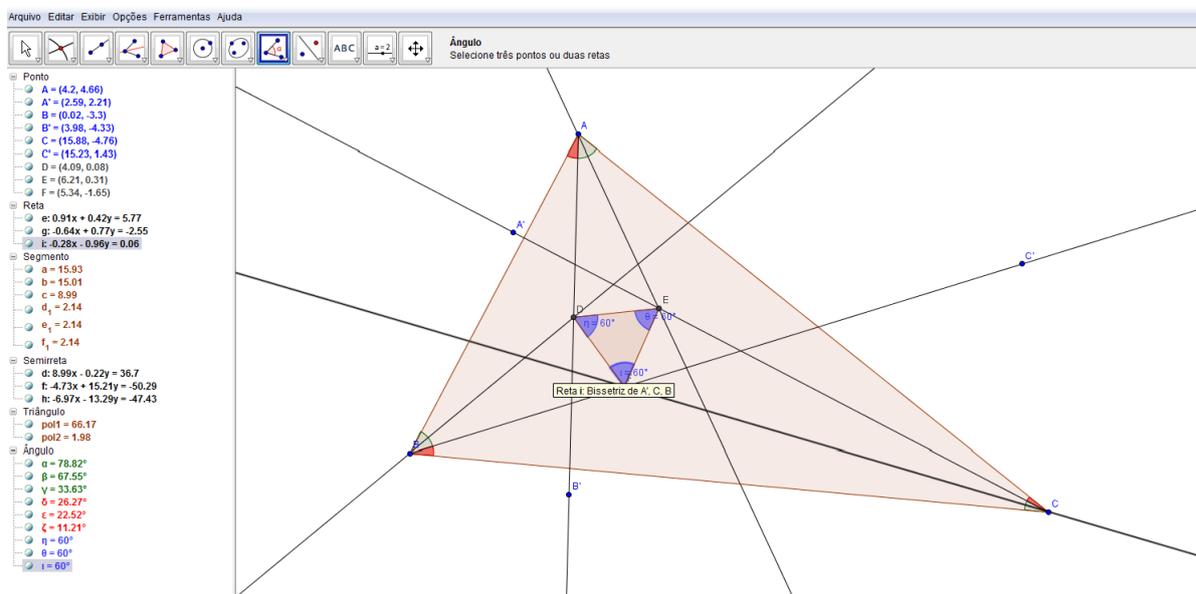


Figura 4.48: Geogebra atividade 2 passo 11

(vii) Selecione a tecla mover e brinque com os triângulos. Você verá que a forma dos

triângulos $\triangle ABC$ se altera, mas o triângulo $\triangle DEF$ continuará ser de triângulo equilátero.

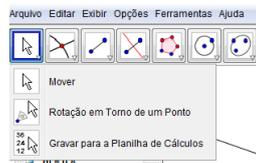


Figura 4.49: Geogebra atividade 2 passo 12

Ao final da sua atividade, você poderá acessar o menu exibir e emitir o protocolo de construção que aparecerá à direita de sua tela e conterà os principais passos da sua construção.

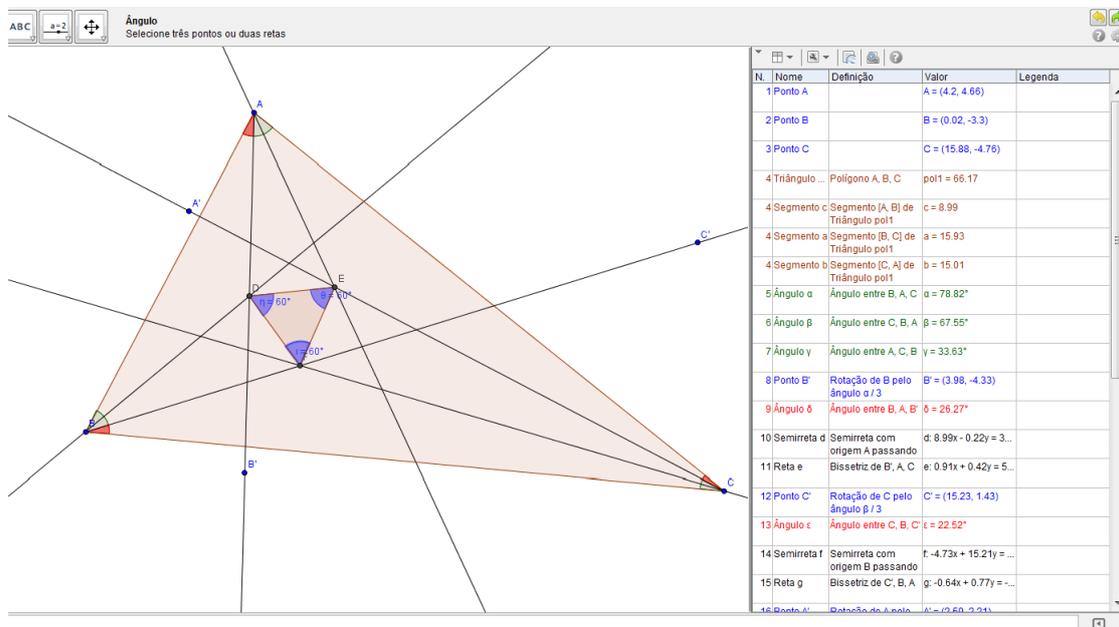


Figura 4.50: Geogebra atividade 2 passo 13

O triângulo $\triangle DEF$ é denominado de Triângulo de Morley que é formado pelo ponto de interseção entre as trissetrizes adjacentes de um triângulo $\triangle ABC$. Eis, pois, o Teorema de Morley.

(viii) Podemos explorar mais a nossa construção e verificar outras relações no triângulo, como por exemplo o incentro e medidas de ângulos.

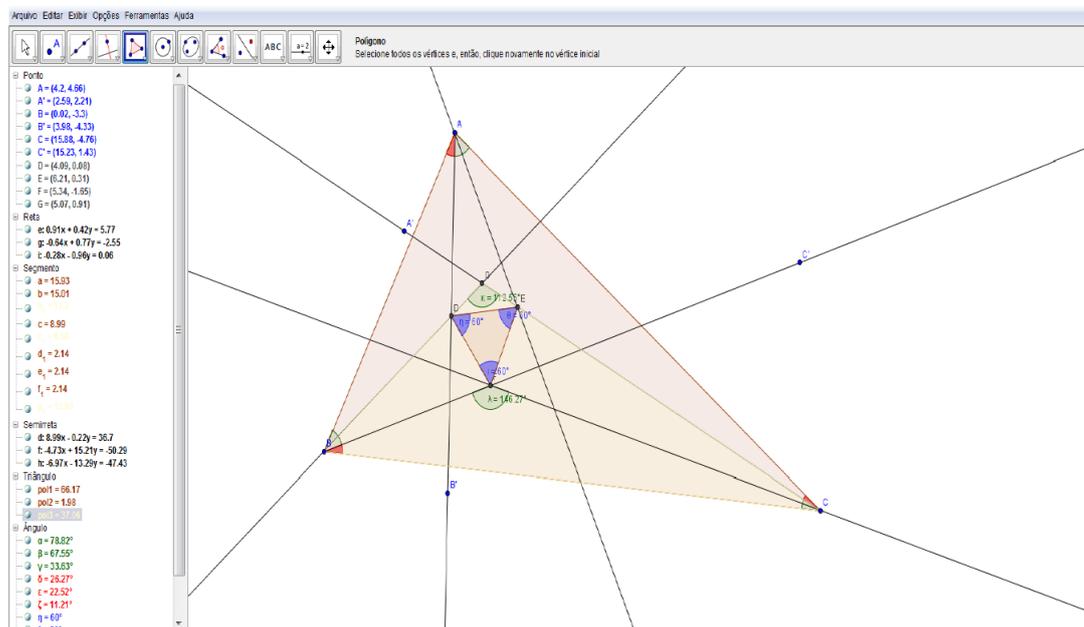


Figura 4.51: Geogebra atividade 2 passo 14

Capítulo 5

Conclusão

Durante todo o PROFMAT deparamos com diversas indagações e dúvidas, a saber: de que forma é possível desenvolver um trabalho prático e reflexivo durante as aulas de Matemática? Essa opção de ensino exige mudanças na atual forma de ensinar e ou no currículo escolar? Em que conteúdos podemos desenvolver o ensino prático reflexivo? Quais tendências de educação matemática são adequadas para esse tipo de trabalho? Como desenvolver um ensino no qual a prática será valorizada? Qual(is) o(s) conteúdo(s) fundamental(is) e qual a sequência de conteúdos é mais adequada? Qual o tipo de educador é necessário para essa mudança de atitude? O ensino de Geometria pode contribuir para uma aprendizagem matemática mais significativa?

Pensamos que sim. O ensino de Geometria pode contribuir para uma aprendizagem matemática mais significativa, pois além de nos ajudar na compreensão do mundo em que vivemos, seja ele microscópico ou macroscópico, é uma excelente ferramenta para trabalhar matemática de forma prática e reflexiva.

Medir, examinar e comparar formas, tamanhos, posições, estabelecer relações matemáticas, compreender o desenvolvimento histórico de alguns conceitos e teoremas são algumas das ferramentas para auxiliar o aluno a utilizar a Matemática como um instrumento de aprendizagem como meio para interpretar a realidade.

Em geral o ensino de Geometria costuma ser deixado de lado, ou para o final do ano letivo, caso haja tempo, e nesse caso, muitos professores não se dispõem a trabalhar

com Geometria, em razão de ela estar associada com provas e demonstrações em um caráter mais formal. Felizmente o ensino de Geometria vem ganhando espaço e tem sido encarado com mais seriedade e como um excelente meio de ensinar os nossos alunos.

Para que possamos ensinar de forma mais efetiva e, ainda, possibilitar ao educando meios de aprender com mais facilidade e de interagir no processo de ensino e aprendizagem, é necessário utilizar diferentes tecnologias e, entre elas, os programas matemáticos voltados ao ensino de Geometria.

Existem vários programas que comandam o funcionamento de um computador (software), que nada mais são do que uma sequência de instruções escritas para serem interpretadas pelo equipamento com o objetivo de executar tarefas específicas, e alguns deles que podem ser utilizados para trabalhar com o ensino de Geometria, a exemplo do Geogebra, que é livre e de fácil acesso. A utilização do Geogebra, assim como toda tecnologia voltada para o ensino de Matemática, requer a elaboração de um roteiro e de um encaminhamento metodológico, e sua utilização deve procurar aliar a prática à teoria, de forma que seja possível a visualização dos conceitos e propriedades, e assim apresentamos duas atividades que são desenvolvidas com o auxílio do Geogebra para a construção do Triângulo de Morley.

No processo de elaboração do trabalho de conclusão do PROFMAT, observou-se que o Teorema de Morley pode ser trabalhado e explorado nas aulas de Matemática, ensino de Geometria, durante o ensino Médio, em diversos momentos e de diversas formas. Outro ponto que merece destaque é a possibilidade de utilizar a Trigonometria para demonstrar o Teorema de Morley. É uma excelente forma de aplicar as Leis dos senos e dos cossenos, adição de arcos e transformação em produto, no Ensino Médio. Observa-se que softwares de geometria também podem ser explorados e utilizados para mostrar o Teorema de Morley, auxiliando no processo de ensino e aprendizagem de Geometria.

Bibliografia

- [1] BARBOSA, J.L.M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM
- [2] BOULOS, P.; CAMARGO, I., *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo.
- [3] CASTRUCCHI, B., *Fundamentos da Geometria: estudo axiomático do plano euclidiano*, LTC; 1978.
- [4] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. *Geometry Revisited.: The Mathematical Association of America*, 1967.
- [5] CONDE, J. M. *Teorema de Morley*. Disponível em <http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero14/TeoremadeMorley1.pdf>.
- [6] EUCLIDES, *Elementos de Geometria*. Frederico Commandino. São Paulo: Edições Cultura, 1944.
- [7] GARBI, G.G., *CQD - COMO QUERÍAMOS DEMONSTRAR*, livraria da Física, 2010.
- [8] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*, Projeto Euclides.
- [9] MOISE, E. E., *Geometria Moderna*. Tradutores: Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. Edgard Blucher Ltda.
- [10] MILLMAN, R. S.; PARKER, G. D. *Geometry: a metric approach with models*. Springer-Verlag Inc. New York, U.S.A, 1945.
- [11] NIVEN, I. M. *Números racionais e irracionais*. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

- [12] RAMOS,C.S.M. A. C.O *Teorema de Morley*. Disponível em <https://ubithesis.ubi.pt/bitstream/10400.../Teorema%20de%20Morley.pdf>
- [13] GeoGebra, *programa* Disponível em <https://www.geogebra.org/>.
- [14] Il teorema di Morley. Disponível em <http://www.lorenzoroi.net/geometria/Morley.html>
- [15] Associação Atractor. Atractor. [Online]. www.atractor.pt
- [16] www.cut-the-knot.org/.../Morley/VectorProof.shtml