



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Modelagem matemática da população teresinense e sua frota de carros

Patrícia Maia Veras Freitas

Orientador
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Modelagem matemática da população teresinense e sua frota de carros

Patrícia Maia Veras Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

2015

F866m Maia Veras Freitas, Patrícia

Modelagem matemática da população teresinense e sua frota de carros/ Patrícia Maia Veras Freitas- Teresina: [s.n.], 2015.

69 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Pós Graduação em Matemática.

Orientador: Jefferson Cruz dos Santos Leite

1. Modelagem Matemática. 2. Método De Ford-Walford. 3. Modelo logístico discreto. 4. Modelo logístico contínuo. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Patrícia Maia Veras Freitas

MODELAGEM MATEMÁTICA DA POPULAÇÃO TERESINENSE E SUA
FROTA DE CARROS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite
Orientador

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Teresina, 05 de março de 2015

*Aos meus pais, minhas irmãs,
meu esposo e meus sobrinhos,
que são meus pontos de equilíbrio.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me guiar mais uma vez em busca de conhecimentos, sem Ele não teria chegado até aqui.

Agradeço a minha mãe, Gleice, por ser minha fonte de inspiração, por todo apoio durante esta caminhada.

Ao meu pai, Antônio Carlos, pela sua imensa disposição para me ajudar quando eu preciso.

A minhas irmãs, Cecília e Priscila, por sempre estarem do meu lado, torcendo por mim.

Ao meu esposo, Rafael, por todo amor, confiança e companheirismo.

Aos meus amados e queridos sobrinhos, João Vitor e Arthur, que são minhas fontes de alegria e amor.

A todos meus amigos, que sempre me incentivaram e compreenderam minha ausência.

Ao meu orientador, Professor Jefferson, por acreditar em mim, por todo auxílio, paciência e lições de sabedoria.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, pela união e força em todos os momentos.

A todos os professores do PROFMAT, pelo conhecimento compartilhado.

Aos meus colegas, amigos e alunos do IFMA - Campus Açailândia, pela compreensão quando eu estava ausente no campus, pela força e apoio.

A Capes, pelo apoio financeiro concedido.

A todos que contribuíram e torceram para eu concluir esta etapa, muito obrigada!

*A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.*

Albert Einstein

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta de utilização de Modelagem Matemática para estudar o crescimento populacional. Foram adotados como tema a população de Teresina-PI e sua frota de carros, buscando um modelo que represente os mesmos. Para tanto, foi necessário primeiramente definir Modelagem Matemática, suas características e alguns modelos. Os modelos utilizados neste trabalho foram os de Malthus e o exponencial assintótico, assim como os logísticos discreto e contínuo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Método De Ford-Walford, Modelo logístico discreto, Modelo logístico contínuo.

Abstract

This thesis aims to present a mathematical modeling using proposal to study the population growth. Were adopted as the theme Teresina's population, and its fleet of cars, seeking a model that represents them. Therefore, it was first necessary to define Mathematical Modeling, characteristics and models. The models used in this study were those of Malthus and the asymptotic exponential, as well as discrete and continuous logistics.

Keywords: Mathematical modeling, Ford-Walford method, Discrete logistic model, Continuous logistic model.

Lista de Figuras

2.1	Curva de tendência da população teresinense	34
2.2	Relação entre os valores e suas variações	34
2.3	Relação entre os valores anteriores e posteriores	35
2.4	Modelo logístico discreto da população teresinense	37
2.5	Curva de tendência da frota de automóveis de Teresina	37
2.6	Relação entre os valores e sua variação	39
2.7	Relação entre os valores anteriores e posteriores	39
2.8	Modelo logístico discreto da frota de automóveis de Teresina	40
2.9	Modelo Malthusiano da população teresinense	42
2.10	Comparação do modelo malthusiano da população teresinense com a realidade	42
2.11	Modelo Malthusiano da frota de automóveis de Teresina	42
2.12	Comparação do modelo malthusiano da frota de automóveis de Teresina com a realidade	43
3.1	Cálculo de y^* com todos os dados	46
3.2	Cálculo de y^* a partir de 1960	46
3.3	Curva auxiliar do primeiro y^*	47
3.4	Modelo exponencial assintótico e assíntota	47
3.5	Modelo exponencial x Dados reais	47
3.6	Cálculo de y^* a partir de 1970	48
3.7	Curva auxiliar do segundo y^*	49
3.8	Modelo exponencial assintótico e assíntota	49
3.9	Modelo exponencial x Dados reais	49
3.10	Cálculo de y^* a partir de 1980	49
3.11	Curva auxiliar do terceiro y^*	50
3.12	Modelo exponencial assintótico e assíntota	51
3.13	Modelo exponencial x Dados reais	51
3.14	Comparação dos modelos exponenciais	51
3.15	Cálculo de f^* a partir de 2008	51
3.16	Curva auxiliar de f^*	53
3.17	Modelo exponencial assintótico e assíntota	53

3.18	Modelo exponencial x Dados reais	53
3.19	Curva auxiliar do primeiro modelo logístico da população	54
3.20	Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais	55
3.21	Algumas projeções do primeiro modelo logístico	56
3.22	Curva auxiliar do segundo modelo logístico da população	56
3.23	Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais	58
3.24	Algumas projeções do segundo modelo logístico	58
3.25	Curva auxiliar do terceiro modelo logístico da população	59
3.26	Comparação do terceiro modelo logístico com os dados reais	60
3.27	Algumas projeções do terceiro modelo logístico	60
3.28	Comparação dos três modelos logísticos	61
3.29	Curva auxiliar do modelo logístico da frota de automóveis	62
3.30	Comparação do modelo logístico com os dados reais	63
3.31	Algumas projeções do modelo logístico	63
3.32	Razão entre a frota de automóveis e a população	64

Lista de Tabelas

2.1	População teresinense - Fonte: IBGE	33
2.2	População teresinense dividida por 1000	34
2.3	Variação simples da população teresinense	35
2.4	Modelo logístico discreto da população teresinense	36
2.5	Frota de automóveis de Teresina - Fonte: DENATRAN	37
2.6	Frota de automóveis de Teresina dividida por 1000	38
2.7	Variação simples da frota de automóveis de Teresina	38
2.8	Modelo logístico discreto da frota de automóveis de Teresina	40
2.9	Modelo Malthusiano da população teresinense	41
2.10	Modelo Malthusiano da frota de automóveis de Teresina	43
3.1	Relação entre a população e seu valor posterior	45
3.2	Dados para o cálculo da curva auxiliar do primeiro y^*	47
3.3	Dados para o cálculo da curva auxiliar do segundo y^*	48
3.4	Dados para o cálculo da curva auxiliar para o terceiro y^*	50
3.5	Relação entre a frota de carro e seu valor posterior	52
3.6	Dados para o cálculo da curva auxiliar de f^*	52
3.7	Cálculo do valor de $\frac{y(n)}{y^*-y(n)}$ do primeiro modelo logístico da população .	54
3.8	Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais	55
3.9	Algumas projeções do primeiro modelo logístico	56
3.10	Cálculo do valor de $\frac{y(n)}{y^*-y(n)}$ do segundo modelo logístico da população .	57
3.11	Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais	57
3.12	Algumas projeções do segundo modelo logístico	58
3.13	Cálculo do valor de $\frac{y(n)}{y^*-y(n)}$ do terceiro modelo logístico da população .	59
3.14	Comparação do terceiro modelo logístico com os dados reais	60
3.15	Algumas projeções do terceiro modelo logístico	61
3.16	Cálculo do valor de $\frac{f(n)}{f^*-f(n)}$ do modelo logístico da frota de automóveis .	62
3.17	Comparação do modelo logístico com os dados reais	63
3.18	Algumas projeções do modelo logístico	64
3.19	Razão entre a frota de automóveis e a população	65

Sumário

Introdução	19
1 Modelagem Matemática	21
1.1 Contexto histórico	21
1.2 Precursores Brasileiros	22
1.2.1 Aristides C. Barreto	22
1.2.2 Ubiratan D' Ambrosio	22
1.2.3 Rodney Carlos Bassanezi	23
1.3 Alguns Modelos Matemáticos	24
1.3.1 Modelo Malthusiano	24
1.3.2 Modelo exponencial assintótico - Método de Ford-Walford	26
1.3.3 Modelo logístico contínuo (Verhurst)	26
1.3.4 Modelo de Montroll	29
1.3.5 Modelo de Gompertz	29
2 Modelagem discreta	33
2.1 Modelo logístico discreto	33
2.1.1 População teresinense	33
2.1.2 Frota de carros de Teresina	36
2.2 Modelo Malthusiano	41
2.2.1 População teresinense	41
2.2.2 Frota de carros de Teresina	41
3 Modelagem contínua	45
3.1 Modelo exponencial assintótico - Método de Ford-Walford	45
3.1.1 População teresinense	45
3.1.2 Frota de carros de Teresina	50
3.2 Modelo logístico contínuo	53
3.2.1 População teresinense	53
3.2.2 Frota de carros de Teresina	61
3.3 Crescimento populacional x Frota de carros	63
4 Conclusão	67

Introdução

Atualmente, vivemos uma época em que a tecnologia avança rapidamente. Aparelhos que hoje consideramos modernos, em pouco tempo se tornam antigos. Temos que considerar que a sociedade está passando por profundas mudanças.

A Matemática é usada em uma série de atividades sociais, políticas e econômicas. Entretanto, no contexto escolar, percebemos que a maioria dos alunos não tem domínio e nem afinidade com esta área do saber. Este é um paradoxo: a matemática é exigida e valorizada na sociedade e, portanto é esperado um maior domínio pelos indivíduos, mas, na realidade, o que encontramos, muitas vezes, é uma aversão a este conteúdo.

Existem muitas dificuldades por parte dos alunos e professores no processo ensino-aprendizagem da matemática. O aluno não consegue entender a matemática que a escola ensina, sendo muitas vezes reprovado nesta disciplina ou, então, mesmo que aprovado, sente dificuldades em utilizar o conhecimento repassado. Em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância. O professor, por outro lado, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos e tendo dificuldades de, por si só, repensar satisfatoriamente seu fazer pedagógico, procura novos elementos que, acredita, possam melhorar esse quadro. Uma evidência disso é, positivamente, a participação cada vez mais crescente de professores em encontros, conferências ou cursos.

Considerando esses aspectos, percebemos que há necessidade de inovação em relação às metodologias de ensino da matemática. Sobre isso, nos deparamos com a Modelagem Matemática que, em nosso entendimento, pode ser uma metodologia que corresponda aos interesses das crianças e adolescentes, pois possibilita um aprendizado além do uso de apostilas e livros didáticos, podendo oferecer aos alunos uma forma mais dinâmica e lúdica de aprender os conhecimentos matemáticos, além de ser um modelo com uma aproximação do real.

Utilizamos a cidade de Teresina, estado do Piauí, para aplicação desta pesquisa por ser uma capital de grande porte. Para desenvolvermos este trabalho, consideraremos como veículos somente automóveis.

No capítulo 1 deste trabalho, definimos modelagem matemática, sua importância, suas características, alguns precursores brasileiros e alguns modelos.

No capítulo 2, apresentamos a modelagem discreta, fizemos um estudo sobre este modelo logístico e em seguida procuramos um modelo discreto que melhor representava

a população teresinense e a frota de carros da cidade.

No capítulo 3, apresentamos a modelagem contínua, também foi feito um estudo sobre este modelo logístico para em seguida procurarmos um modelo contínuo para representar a população teresinense e sua frota de carros.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar que utilizando estratégias matemáticas, podemos torná-la mais atraente e interessante para nossos alunos.

1 Modelagem Matemática

1.1 Contexto histórico

Se pesquisarmos no dicionário da língua portuguesa o que significa modelagem encontraremos que é um "molde", portanto, podemos dizer que modelagem matemática significa moldar alguma situação que está inserida em outro contexto, a fim de explicar matematicamente situações que ocorrem no nosso cotidiano. Logo é um método alternativo que pode ser representado por meio de imagem, gráfico, projeto, lei matemática.

Começou-se a discutir sobre modelagem e aplicações na educação matemática internacionalmente por volta da década de 1960 através de um movimento conhecido como "utilitarista", que é uma aplicação prática de conhecimentos matemáticos para a ciência e matemática, formando grupo de pesquisadores sobre o tema.

Com estes movimentos educacionais, a modelagem matemática chega ao Brasil, com a colaboração de professores que se interessavam pela área e acabaram virando representantes brasileiros na comunidade internacional da educação matemática. Algumas referências da modelagem matemática no Brasil, que foram fundamentais para o impulso e consolidação da modelagem matemática, são: Aristide C. Barreto, Ubiratan D' Ambrósio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani. Estes deram início a um movimento pela modelagem no final dos anos 70 e início dos anos 80, conquistando adeptos por todo Brasil. Assim, problemas do tipo "como se faz um modelo matemático" e "como se ensina matemática" permitiram emergir a linha de pesquisa *modelagem matemática no ensino brasileiro*.

Na educação brasileira, a Modelagem Matemática teve início com os cursos de especialização para professores, em 1983, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava - FAFIG, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO. A modelagem começou a ganhar adeptos, pois a preocupação da maioria dos professores era buscar novas práticas para o ensino de Matemática, metodologias que partissem de situações vivenciadas pelo aluno do ensino fundamental e médio, no seu dia-a-dia. No entanto, os primeiros trabalhos enfocando a modelagem como uma alternativa para o ensino de Matemática só começaram a ser elaborados sob forma de dissertações e artigos a partir de 1987.

1.2 Precursores Brasileiros

Pela dificuldade de detalhar os feitos de todos os precursores brasileiros da modelagem matemática bem como as aplicações de modelos em suas práticas de sala de aula, iremos apresentar uma breve síntese de três deles: Aristides C. Barreto, pelo motivo de ter sido o pioneiro na realização de experiências de modelagem matemática e por representar o Brasil em congressos internacionais relacionados ao tema; Ubiratan D' Ambrosio, pois foi um representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática, nas décadas de 1970 e 1980 promoveu cursos e coordenou projetos na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP que impulsionaram a formação de grupos em matemática aplicada, biomatemática e em modelagem; e Rodney C. Bassanezi, que além de atuar nesses cursos e projetos da UNICAMP, tornou-se o principal disseminador da modelagem matemática.

1.2.1 Aristides C. Barreto

Aristides C. Barreto teve seu primeiro contato com a modelagem matemática na década de 60, quando cursou Engenharia. Na década de 70, surgiu a ideia de usar a modelagem em Educação Matemática, quando começou a atuar como professor na PUC-RIO. Ele procurava sempre fazer uso de modelos como estratégia de ensino nas disciplinas de Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral. Em 1976, realizou a primeira experiência pedagógica com 212 alunos de um Curso de Engenharia. Juntamente com os alunos, elaborou vários modelos em áreas específicas como Linguística, Ecologia, Biologia, dentre outras. Assim, ele começou a perceber que a modelagem no ensino despertava nos estudantes curiosidade e interesse no assunto, descartando a constante pergunta "para que serve isto?". Diante das teorias, ele estimulava a criatividade e o espírito crítico. A partir de 1989, Barreto passou a interpretar e produzir textos literários em prosa e verso, com ênfase em letras de música. Alguns trabalhos ele divulgou por meio de artigos e de eventos. Nesse ínterim, a convite do professor D' Ambrosio, faz palestra na UNICAMP, momento em que Bassanezi teve o primeiro contato com o tema e o termo modelagem matemática.

1.2.2 Ubiratan D' Ambrosio

Ubiratan D' Ambrósio, na década de 60, era professor e pesquisador na Brown University, em Providence, Rhode Island; na University of Rhode Island, em Kingston-Rhode Island e na State University of New York, em Búfalo-New York. Foi nesta época que D' Ambrosio teve conhecimento do movimento que vinha acontecendo nos EUA em relação ao ensino e aprendizagem da matemática. Assim sendo, nesta mesma época formou-se Undergraduate Mathematics Application Program - UMAP, que tinha como objetivo preparar módulos de aprendizagem de matemática por temas, ou seja, elegia-

se um tema matemático e, então, procurava-se preparar um material de apoio didático com aplicações desse tema nas mais diversas áreas do conhecimento, com o intuito de melhorar a aprendizagem matemática de alunos da Educação Superior.

Em 1972, D' Ambrosio volta ao Brasil para trabalhar na UNICAMP. Assim, D' Ambrosio teve a oportunidade de implantar propostas de educação matemática no Brasil semelhantes as que ocorriam em alguns países da Europa e Estados Unidos. Entre as propostas inseridas nesse período, duas se destacavam: a produção de materiais de apoio didático na forma de módulos e a criação do 1º Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática na UNICAMP. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos, todos voltados ao ensino fundamental. O modelo adotado nesse mestrado deu origem a trabalhos em modelagem e etnomatemática.

1.2.3 Rodney Carlos Bassanezi

Rodney Carlos Bassanezi já conhecia modelagem através da Matemática Aplicada, ao coordenar um Curso para 30 professores de Cálculo Diferencial Integral, na década de 80, de diversas Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil, com duração de uma semana, onde encontra uma oportunidade de inserir a proposta de Barreto. Assim, em primeiro momento, propôs a eles que se reunissem por 2h e apresentassem um problema que envolvesse cálculo diferencial integral. Bassanezi propôs a modelagem matemática na resolução de problemas de biologia aplicados ao cálculo diferencial integral - bio-matemática.

Foi organizado, em 1982, um curso de pós-graduação na Universidade Estadual de Guarapuava- PR, onde são convidados professores do IMECC-UNICAMP e Bassanezi era o coordenador. Logo depois, promoveu-se o primeiro Curso de pós-graduação em modelagem que impulsionou a realização de muitos outros, sob a coordenação de Bassanezi, nas mais diversas instituições de Educação Superior. Atualmente, ele coleciona diversos cursos de pós-graduação e de formação continuada e palestras, em várias cidades de todas as regiões brasileiras.

Bassanezi defende que a modelagem é uma estratégia de ensino de matemática. Nos cursos que ministrou para professores sobre o tema, propunha levar os estudantes a se inteirarem de problemas advindos da região em que pertenciam, e a partir deste contato com a realidade, levantassem problemas para que fossem investigados.

Bassanezi colaborou com o Programa de Mestrado em Educação Matemática na UNESP - Rio Claro-SP, criado em 1983, como professor e orientador de mestrandos na elaboração de dissertação de mestrado.

1.3 Alguns Modelos Matemáticos

De acordo com Bassanezi *"modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente, poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica."* (2012, p.12)

Em relação a forma de utilização de um modelo matemático, Biembengut e Hein (2009) afirmam quem *"um modelo matemático só é um modelo se servir de referência ou se permitir ser reproduzido para a resolução de problemas semelhantes que originaram o modelo, além de ser mola propulsora para o desenvolvimento de outros conhecimentos."*

Assim, entendemos por modelo a representação de algo que foi compreendido e expresso de alguma maneira que se possa fazer relações com o mundo ao redor, através de predições, explicações, manipulações, formulações.

1.3.1 Modelo Malthusiano

Thomas Robert Malthus foi um britânico estudioso, de grande influência na economia política e demografia, acabou sendo muito conhecido por suas teorias sobre a população. Uma delas que a população crescia de forma geométrica e os alimentos de forma aritmética.

Considere P o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Logo, o número P depende do tempo, assim podemos escrever:

$$\frac{dP}{dt} = P(t)$$

Como P só assume valores inteiros, então $P(t)$ é uma função discreta de t . Mas, quando o número de indivíduos é suficientemente grande, podemos ter $P(t)$ se aproximando de uma função contínua, variando continuamente no tempo.

Seja n a taxa de fertilidade e m a taxa de mortalidade. Assim, temos que $\alpha = n - m$ é a taxa de crescimento específico da população $P(t)$. Logo,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha$$

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$$

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t)$$

$$P(t+1) = (\alpha + 1)P(t)$$

Considerando a população inicial $P(0) = P_0$, obtemos a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (\alpha + 1)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Daí, temos o seguinte:

$$P_{t+1} = \alpha P_t + P_t$$

Resolvendo a recorrência, temos:

$$P_{t+1} - P_t = \alpha P_t$$

$$P_{t+2} - P_{t+1} = \alpha P_{t+1}$$

$$P_{t+3} - P_{t+2} = \alpha P_{t+2}$$

.....

$$P_{t+n} - P_{t+n-1} = \alpha P_{t+n-1}$$

Somando membro a membro:

$$P_{t+n} - P_t = \alpha[P_t + P_{t+1} + P_{t+2} + \dots + P_{t+n-1}]$$

$$P_{t+n} - P_t = \alpha P_t [1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}]$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha [1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}]$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{(1 + \alpha) - 1}$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{\alpha}$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = (1 + \alpha)^n - 1$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} + 1 = (1 + \alpha)^n$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t + P_t}{P_t} = \frac{P_{t+n}}{P_t} = (1 + \alpha)^n$$

$$1 + \alpha = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}}$$

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1$$

Seja $t = 0$, logo:

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} = \alpha + 1$$

$$\frac{P_n}{P_0} = (\alpha + 1)^n$$

$$P_n = P_0(\alpha + 1)^n$$

$$P_n = P_0 \cdot e^{\ln(1+\alpha)n}$$

1.3.2 Modelo exponencial assintótico - Método de Ford-Walford

Se uma população tem a tendência de se estabilizar, então a curva solução tem um comportamento assintótico. A curva para ajuste é dada pelo modelo exponencial assintótico:

$$y = y^* - ae^{bx}$$

com $y^* > 0$ e $b < 0$

O cálculo do valor de equilíbrio y^* pode ser realizada pelo método de Ford-Walford, que, inicialmente, determina uma função g que ajusta os pares (y_n, y_{n+1}) , ou seja, a curva ajustada é da forma $y_{n+1} = g(y_n)$.

Temos, então, que encontrar seu ponto fixo:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_n = y^*$$

Logo, a sequência de pontos (y_n, y_{n+1}) converge para o ponto (y^*, y^*) se y^* é um ponto fixo da função $g(y)$.

Agora, faremos o ajuste linear da função $g(y) = ay + b$. Como $g(y^*) = y^*$, então:

$$g(y^*) = ay^* + b = y^*$$

$$y^* - ay^* = b$$

$$y^*(1 - a) = b$$

$$y^* = \frac{b}{1 - a}$$

Desse modo, poderemos calcular o valor de estabilidade y^* e determinar o modelo exponencial assintótico.

1.3.3 Modelo logístico contínuo (Verhurst)

Em 1837, o matemático belga Pierre F. Verhurst propôs um modelo que supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite sustentável, ou seja, uma população tende a estabilizar-se.

O modelo de Verhurst é o modelo de Malthus modificado, pois ele considera que a taxa de crescimento é proporcional a população em cada instante, ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P$$

onde $\alpha = r \frac{P^* - P}{P^*}$, $r > 0$ sendo a taxa de crescimento, P^* a capacidade suporte da população e $P_0 = P(0)$ o valor inicial.

Assim, temos o modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{P^*}) \\ P(0) = P_0, r > 0 \end{cases}$$

Observe que $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv P^*$ são soluções desta equação diferencial.

Resolvendo esta equação através da técnica das frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(1 - \frac{P}{P^*})} &= \int r dt = rt + C \\ \frac{1}{P(1 - \frac{P}{P^*})} &= \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{P^*}} = \frac{A(1 - \frac{P}{P^*}) + BP}{P(1 - \frac{P}{P^*})} \\ 1 &= A(1 - \frac{P}{P^*}) + BP \\ 1 &= A - \frac{AP}{P^*} + BP \end{aligned}$$

Assim, sendo $A = 1$, então:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{P}{P^*} + BP &= 1 \\ BP &= \frac{P}{P^*} \\ B &= \frac{1}{P^*} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(1 - \frac{P}{P^*})} &= \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P^*}}{1 - \frac{P}{P^*}} \\ \int \frac{1}{P(1 - \frac{P}{P^*})} dP &= \int (\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P^*}}{1 - \frac{P}{P^*}}) dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{P^*}}{1 - \frac{P}{P^*}} dP \\ &= \ln |P| - \ln |1 - \frac{P}{P^*}| = rt + C \\ &= \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}} \right| = rt + C \end{aligned}$$

Temos que $P(0) = 0$, dada na equação diferencial, assim:

$$\ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P^*}} \right| = \ln \left| \frac{P^* P_0}{P^* - P_0} \right| = C$$

Então:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}} \right| &= rt + \ln \left| \frac{P^* P_0}{P^* - P_0} \right| \\ \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}} \right| - \ln \left| \frac{P^* P_0}{P^* - P_0} \right| &= rt \\ \ln \left| \frac{\frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}}}{\frac{P^* P_0}{P^* - P_0}} \right| &= rt \\ \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}} \cdot \frac{P^* - P_0}{P^* P_0} \right| &= \ln \left| \frac{P(P^* - P_0)}{P^* P_0 - P P_0} \right| = \ln \left| \frac{P(P^* - P_0)}{P_0(P^* - P)} \right| = rt \\ \frac{P(P^* - P_0)}{P_0(P^* - P)} &= e^{rt} \\ P &= \frac{P_0(P^* - P)}{P^* - P_0} e^{rt} = \frac{P_0 P^* - P_0 P}{P^* - P_0} e^{rt} \\ P &= \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0} e^{rt} - \frac{P_0 P}{P^* - P_0} e^{rt} \\ P + \frac{P_0 P}{P^* - P_0} e^{rt} &= \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0} e^{rt} \\ P \left(1 + \frac{P_0}{P^* - P_0} e^{rt} \right) &= P \left(\frac{P^* - P_0 + P_0 e^{rt}}{P^* - P_0} \right) = \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0} e^{rt} \\ P(P^* - P_0 + P_0 e^{rt}) &= P_0 P^* e^{rt} \\ P &= \frac{P_0 P^* e^{rt}}{P^* - P_0 + P_0 e^{rt}} = \frac{P_0 P^*}{(P^* - P_0 + P_0 e^{rt}) e^{-rt}} \\ P &= \frac{P_0 P^*}{(P^* - P_0) e^{-rt} + P_0} \\ P &= \frac{P^*}{\left(\frac{P^*}{P_0} - 1 \right) e^{-rt} + 1} \end{aligned}$$

Daí, podemos observar as seguintes características:

- Os pontos de equilíbrio são:

$$P = 0 \Rightarrow \frac{P^* \cdot 0}{(P^* - 0) e^{-rt} + 0} = 0$$

$$P = P^* \Rightarrow \frac{P^* P^*}{(P^* - P^*) e^{-rt} + P^*} = \frac{P^* P^*}{P^*} = P^*$$

- Se $P_0 < P^*$, então $P_0 < P(t) < P^*$ e $P(t)$ tende a P^* , crescendo, pois $\frac{dP}{dt} > 0$.
- Se $P_0 > P^*$, então $P(t)$ tende a P^* , decrescendo, pois $\frac{dP}{dt} < 0$.

1.3.4 Modelo de Montroll

Sendo P^* a capacidade suporte de uma população $P = P(t)$, λ a taxa de crescimento relativa quando P é "pequeno" e α o indicador da posição do ponto de inflexão da curva. O modelo de Montroll é dada pela equação diferencial a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right], \lambda > 0, \alpha > 0$$

Se $\alpha = 1$, a equação é o próprio modelo de Verhurst.

Para determinar o ponto de crescimento máximo, basta considerarmos a equação $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$. Vejamos:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right] - \alpha \lambda \frac{P}{P^*} \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \frac{P}{P^*} \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} \right] = 0$$

$$1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \frac{P}{P^*} \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} = 0$$

$$1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha = 0$$

$$\left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha (1 + \alpha) = 1$$

$$\left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$\frac{P}{P^*} = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$P = P^* \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

O principal objetivo do modelo de Montroll é sugerir possíveis formas de decréscimo das taxas de variação.

1.3.5 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz é mais adequado para estudos de crescimento celulares, considerando que inicialmente todas as células são meristemáticas, perdendo esta propriedade num intervalo pequeno de tempo. Este modelo utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável, ou seja, inicialmente a taxa de crescimento é grande, mudando rapidamente para um crescimento mais lento.

A equação diferencial com condição inicial que representa este modelo é:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - b \ln x) \\ x(0) = x_0, a > 0, b > 0 \end{cases}$$

Sendo $r(x) = a - b \ln x$ a taxa de crescimento. Assim, $r(x)$ decresce com x e o valor de estabilidade de x é obtido quando $r(x) = 0$, ou seja:

$$r(x) = a - b \ln x = 0$$

$$\ln x = \frac{a}{b}$$

$$x^* = e^{\frac{a}{b}}, x > 0$$

Observe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty$$

Ou seja, quando x é muito pequeno, $r(x)$ é muito grande.

Se $a - b \ln x^* = 0$, então $a = b \ln x^*$. Logo:

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x^* - bx \ln x = bx \ln\left(\frac{x^*}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x^*}{x}\right)^b$$

Assim, $r(x) = \ln\left(\frac{x^*}{x}\right)^b$

A solução da equação diferencial do modelo de Gompertz é obtida fazendo uma mudança de variável $z = \ln x$. Vejamos:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxz, z = \ln x$$

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bz) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - bz \Rightarrow \frac{dz}{a - bz} = dt$$

Aplicando integral em ambos os membros, temos:

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt$$

$$\frac{-1}{b} \ln |a - bz| = t + C$$

Se $t = 0$, então:

$$c = \frac{-1}{b} \ln |a - bz| = \frac{-1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$$

Logo,

$$\frac{-1}{b} \ln |a - bz| = t - \frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$$

$$-\ln |a - bz| = tb - \ln |a - b \ln x_0|$$

$$\ln |a - bz| = -tb + \ln |a - b \ln x_0|$$

$$a - bz = (a - b \ln x_0)e^{-tb}$$

$$z = \frac{-a + (a - b \ln x_0)e^{-tb}}{-b} = \frac{a - (a - b \ln x_0)e^{-tb}}{b}$$

Como $x = e^z$, então:

$$x = e^{\frac{a}{b} - \frac{(a-b \ln x_0)e^{-tb}}{b}} = e^{\frac{a}{b}} \cdot e^{-\frac{(a-b \ln x_0)e^{-tb}}{b}}$$

$$x = e^{\frac{a}{b}} \cdot e^{(\frac{-a}{b} + \ln x_0)e^{-tb}}$$

Como $x^* = e^{\frac{a}{b}}$, temos:

$$x = x^* \cdot \left(\frac{e^{\ln x_0}}{e^{\frac{a}{b}}}\right)e^{-tb} = x^* \cdot \left(\frac{x_0}{x^*}\right)e^{-tb}$$

Observe que $x(t)$ tem ponto de inflexão quando $t = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a}{b} - \ln x_0\right)$, então:

$$x(t) = \frac{1}{e} x^* = \frac{1}{e} e^{\frac{a}{b}} = e^{\frac{a}{b} - 1}$$

$$x(t) = e^{\frac{a-b}{b}}$$

Outros modelos equivalentes são:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x e^{-\alpha t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \gamma x \\ \frac{d\gamma}{dt} = -\alpha \gamma \end{array} \right.$$

2 Modelagem discreta

2.1 Modelo logístico discreto

2.1.1 População teresinense

Para darmos início a modelagem da população de Teresina, formamos a tabela 2.1 com dados extraídos do IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

<i>Ano</i>	<i>População</i>
1872	21692
1890	31523
1900	45316
1920	57500
1940	67641
1950	90723
1960	144799
1970	230168
1980	388922
1991	598411
2000	714583
2010	814230

Tabela 2.1: População teresinense - Fonte: IBGE

Para facilitar os cálculos, dividimos toda a população por 1000, sem perda qualitativa dos dados. Assim, chegamos na tabela 2.2.

Em seguida, fizemos um gráfico para verificarmos o comportamento dos dados, encontrando a figura 2.1.

Para começarmos, de fato, a modelagem da população teresinense, fizemos ajustes quadráticos das variações discretas. Para isto, montamos a tabela 2.3 para nos auxiliar no esboço do gráfico.

Sendo $y(n)$ a população teresinense no tempo n .

<i>Ano</i>	<i>Tempo</i>	<i>População</i>
1872	0	21,7
1890	18	31,5
1900	28	45,3
1920	48	57,5
1940	68	67,6
1950	78	90,7
1960	88	144,8
1970	98	230,1
1980	108	388,9
1991	119	598,4
2000	128	714,6
2010	138	814,2

Tabela 2.2: População teresinense dividida por 1000

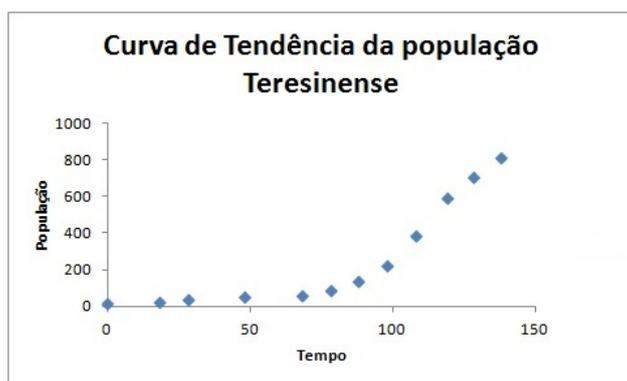


Figura 2.1: Curva de tendência da população teresinense

Plotando o gráfico de $y(n)$ x *variação*, obtemos a parábola $y = -0,0012x^2 + 1,0419x - 28,91$, figura 2.2.

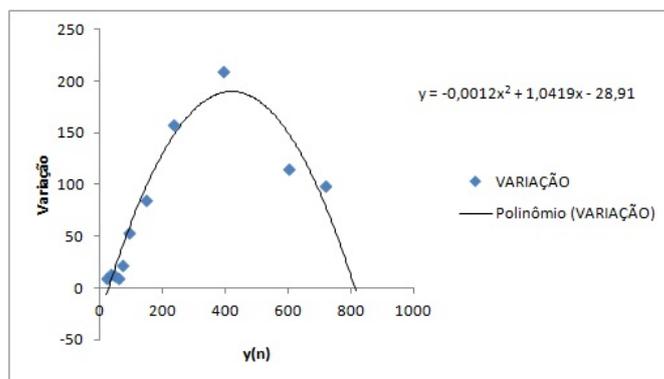


Figura 2.2: Relação entre os valores e suas variações

Tempo	$y(n)$	$y(n+1)$	Variação
0	21,7	31,5	9,8
18	31,5	45,3	13,8
28	45,3	57,5	12,2
48	57,5	67,6	10,1
68	67,6	90,7	23,1
78	90,7	144,8	54,1
88	144,8	230,1	85,3
98	230,1	388,9	158,8
108	388,9	598,4	209,5
119	598,4	714,6	116,2
128	714,6	814,2	99,6
138	814,2		

Tabela 2.3: Variação simples da população teresinense

Seja $y = y(n+1) - y(n)$ e $x = y(n)$, então:

$$y(n+1) - y(n) = -0,0012y(n)^2 + 1,0419y(n) - 28,91$$

$$y(n+1) = -0,0012y(n)^2 + 2,0419y(n) - 28,91$$

Observando agora a relação entre os valores anteriores e posteriores através da figura 2.3, obtemos a parábola $y(n+1) = -0,0012y(n)^2 + 2,0419y(n) - 28,91$.

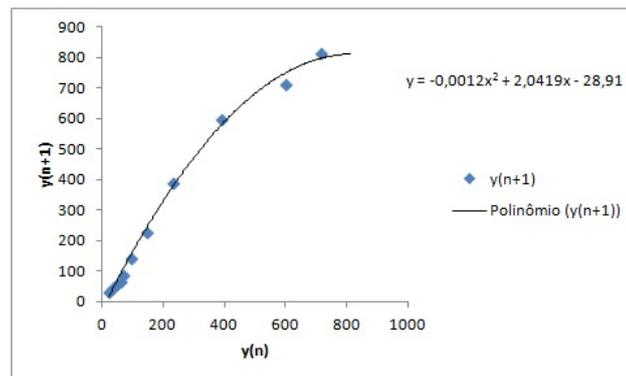


Figura 2.3: Relação entre os valores anteriores e posteriores

Como uma das raízes da parábola é bem próxima de zero, vamos considerar apenas uma equação logística discreta. Vejamos:

$$y(n+1) - y(n) = ay(n)^2 + by(n)$$

$$y(n+1) = ay(n)^2 + (b+1)y(n)$$

$$y(n+1) = -0,0012y(n)^2 + 2,0419y(n)$$

Seja $y(0) = 21,7$. Obtemos, então, a tabela 2.4.

<i>Tempo</i>	$y(n)$	$y(n+1)$	<i>Variação</i>	<i>Modelo</i>
0	21,7	31,5	9,8	21,7
18	31,5	45,3	13,8	43,74
28	45,3	57,5	12,2	87,02
48	57,5	67,6	10,1	168,61
68	67,6	90,7	23,1	310,17
78	90,7	144,8	54,1	517,89
88	144,8	230,1	85,3	735,62
98	230,1	388,9	158,8	852,70
108	388,9	598,4	209,5	868,21
119	598,4	714,6	116,2	868,23
128	714,6	814,2	99,6	868,25
138	814,2			868,25

Tabela 2.4: Modelo logístico discreto da população teresinense

Da fórmula de recorrência $y(n+1) = -0,0012y(n)^2 + 2,0419y(n)$, temos que os pontos de equilíbrio do modelo são obtidos quando não ocorre variação do estágio n para o estágio $n+1$, ou seja:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= y(n) = y^* \\ y^* &= -0,0012y^{*2} + 2,0419y^* \\ -0,0012y^{*2} + 1,0419y^* &= 0 \\ y^*(-0,0012y^* + 1,0419) &= 0 \\ y^* &= 0 \\ y^* &= 868,25 \end{aligned}$$

Assim, formamos o gráfico do modelo na figura 2.4.

2.1.2 Frota de carros de Teresina

Assim como fizemos no modelo discreto da população de Teresina, montamos a tabela 2.5 com os dados obtidos no site do DENATRAN - Departamento Nacional de Trânsito.

Também fizemos a divisão por 1000, sem perda qualitativa, para facilitar nossos cálculos, obtendo a tabela 2.6.

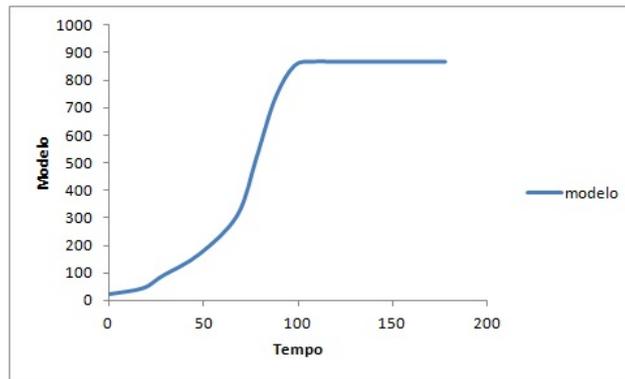


Figura 2.4: Modelo logístico discreto da população teresinense

Ano	Frota de automóvel
2002	69389
2003	73852
2004	77812
2005	82302
2006	88660
2007	97563
2008	107266
2009	118604
2010	131674
2011	142968
2012	155055
2013	166131
2014	174693

Tabela 2.5: Frota de automóveis de Teresina - Fonte: DENATRAN

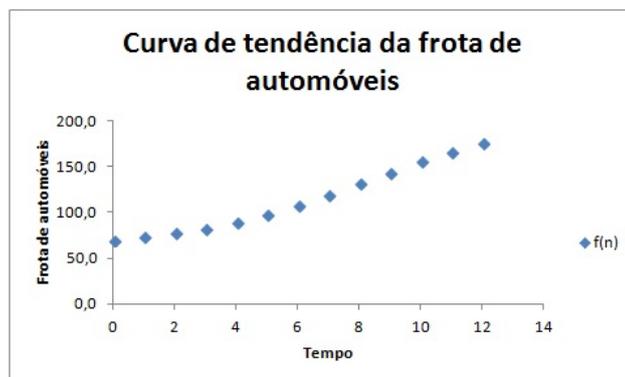


Figura 2.5: Curva de tendência da frota de automóveis de Teresina

Fazendo o gráfico para verificarmos o comportamento dos dados, chegamos na figura 2.5.

<i>Ano</i>	<i>Tempo</i>	<i>Frota de automóvel</i>
2002	0	69,4
2003	1	73,8
2004	2	77,8
2005	3	82,3
2006	4	88,7
2007	5	97,6
2008	6	107,3
2009	7	118,6
2010	8	131,7
2011	9	143
2012	10	155,1
2013	11	166,1
2014	12	174,7

Tabela 2.6: Frota de automóveis de Teresina dividida por 1000

Em seguida, fizemos os ajustes quadrados das variações discretas com o auxílio da tabela 2.7.

<i>Tempo</i>	$f(n)$	$f(n + 1)$	<i>Variação</i>
0	69,4	73,8	4,5
1	73,8	77,8	3,9
2	77,8	82,3	4,5
3	82,3	88,7	6,4
4	88,7	97,6	8,9
5	97,6	107,3	9,7
6	107,3	118,6	11,3
7	118,6	131,7	13,1
8	131,7	143	11,3
9	143	155,1	12,1
10	155,1	166,1	11
11	166,1	174,7	8,6
12	174,7		

Tabela 2.7: Variação simples da frota de automóveis de Teresina

Logo após, plotamos o gráfico $f(n)$ x *Variação*, obtendo a figura 2.6 e a parábola $y = -0,0026x^2 + 0,6712x - 30,835$.

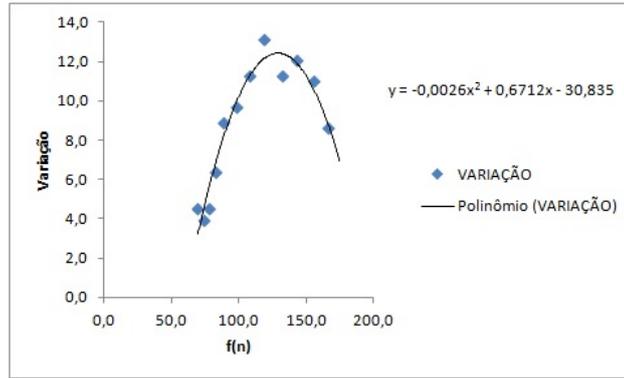


Figura 2.6: Relação entre os valores e sua variação

Temos que $f = f(n + 1) - f(n)$ e $x = f(n)$, então:

$$f(n + 1) - f(n) = -0,0026f(n)^2 + 0,6712f(n) - 30,835$$

$$f(n + 1) = -0,0026f(n)^2 + 1,6712f(n) - 30,835$$

Observe que obtemos esta parábola ao plotarmos o gráfico da relação entre os valores anteriores e posteriore, como da figura 2.7.

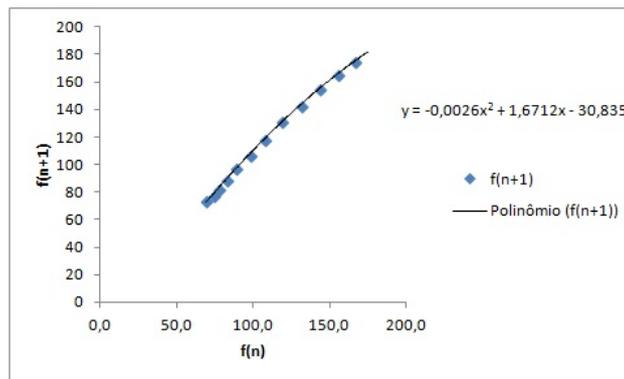


Figura 2.7: Relação entre os valores anteriores e posteriores

Uma das raízes desta equação é bem próxima de zero, logo consideraremos apenas uma equação logística discreta:

$$f(n + 1) - f(n) = af(n)^2 + bf(n)$$

$$f(n + 1) = -0,0026f(n)^2 + 1,6712f(n)$$

Com $x_0 = 69,4$. Assim, obtemos a tabela 2.8.

Pela fórmula de recorrência $f(n + 1) = -0,0026f(n)^2 + 1,6712f(n)$, os pontos de equilíbrio são obtidos quando não ocorre variação de n para $n + 1$, ou seja:

$$f(n) = f(n + 1) = f^*$$

<i>Tempo</i>	$f(n)$	$f(n + 1)$	<i>Variação</i>	<i>Modelo</i>
0	69,4	73,8	4,5	69,4
1	73,8	77,8	3,9	103,45
2	77,8	82,3	4,5	145,07
3	82,3	88,7	6,4	187,72
4	88,7	97,6	8,9	222,09
5	97,6	107,3	9,7	242,92
6	107,3	118,6	11,3	252,54
7	118,6	131,7	13,1	256,22
8	131,7	143	11,3	257,51
9	143	155,1	12,1	257,94
10	155,1	166,1	11	258,08
11	166,1	174,7	8,6	258,13
12	174,7			258,15

Tabela 2.8: Modelo logístico discreto da frota de automóveis de Teresina

$$f^* = -0,0026f^{*2} + 1,6712f^*$$

$$-0,0026f^{*2} + 0,6712f^* = 0$$

$$f^*(-0,0026f^* + 0,6712) = 0$$

$$f^* = 0$$

$$f^* = 258,15$$

Chegamos, enfim, no gráfico do modelo na figura 2.8.

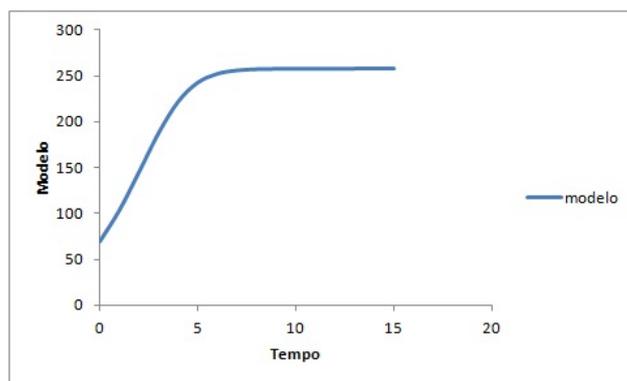


Figura 2.8: Modelo logístico discreto da frota de automóveis de Teresina

2.2 Modelo Malthusiano

2.2.1 População teresinense

Como já visto anteriormente, temos que $\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1$. Seja $t = 0$ e $n = 138$, logo:

$$\alpha = \sqrt[138]{\frac{814,2}{21,7}} - 1$$

$$\alpha = 0,026615373$$

Como o modelo malthusiano é da forma $P(t) = P(0) \cdot e^{\ln(1+\alpha)t}$, então:

$$P(t) = 21,7e^{0,02627t}$$

Assim, obtemos a tabela 2.9.

<i>Tempo</i>	<i>y(n)</i>	<i>ModeloMalthusiano</i>
0	21,7	21,7
18	31,5	34,8
28	45,3	45,3
48	57,5	76,5
68	67,6	129,4
78	90,7	168,3
88	144,8	218,9
98	230,1	284,7
108	388,9	370,2
119	598,4	494,2
128	714,6	626,1
138	814,2	814,2

Tabela 2.9: Modelo Malthusiano da população teresinense

Plotando os gráficos, encontramos as figuras 2.9, que representa o modelo Malthusiano, e a figura 2.10, que é a comparação do modelo malthusiano com a realidade.

2.2.2 Frota de carros de Teresina

Primeiramente calculamos o valor de α , que já foi visto anteriormente. Seja $t = 0$ e $n = 12$, temos:

$$\alpha = \sqrt[12]{\frac{174,7}{69,4}} - 1$$

$$\alpha = 0,079968577$$

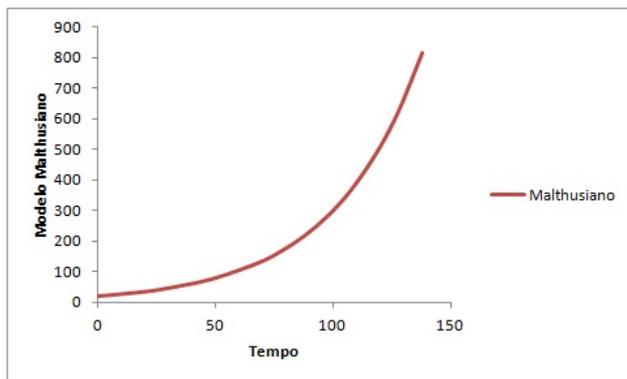


Figura 2.9: Modelo Malthusiano da população teresinense

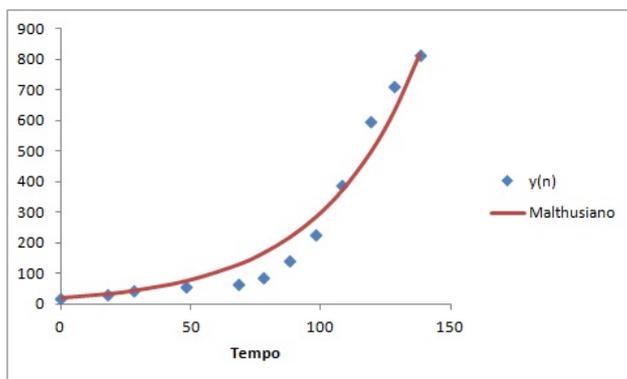


Figura 2.10: Comparação do modelo malthusiano da população teresinense com a realidade

Concluimos então o modelo malthusiano da frota de carros de Teresina:

$$P(t) = 69,4e^{0,07693t}$$

E obtemos a tabela 2.10.

Em seguida, plotamos o gráfico do modelo malthusiano e o que o compara com a realidade nas figuras 2.11 e 2.12, respectivamente.

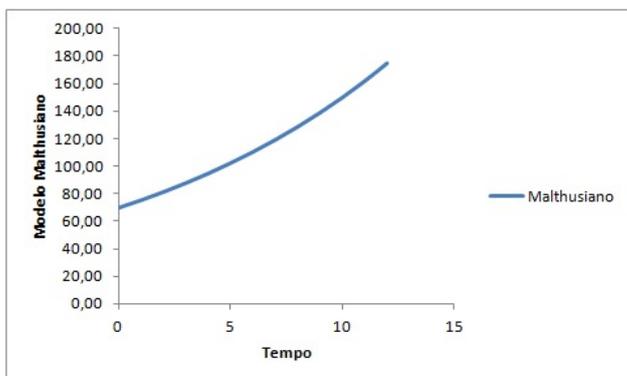


Figura 2.11: Modelo Malthusiano da frota de automóveis de Teresina

<i>Tempo</i>	<i>f(n)</i>	<i>ModeloMalthusiano</i>
0	69,4	69,4
1	73,9	74,95
2	77,8	80,94
3	82,3	87,42
4	88,7	94,41
5	97,6	101,96
6	107,3	110,11
7	118,6	118,91
8	131,7	128,42
9	143	138,69
10	155,1	149,78
11	166,1	161,76
12	174,7	174,7

Tabela 2.10: Modelo Malthusiano da frota de automóveis de Teresina

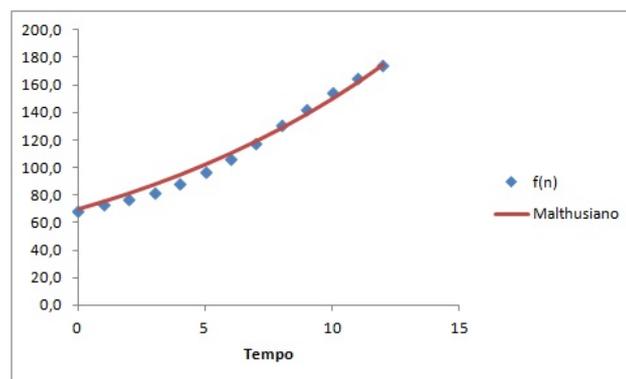


Figura 2.12: Comparação do modelo malthusiano da frota de automóveis de Teresina com a realidade

3 Modelagem contínua

3.1 Modelo exponencial assintótico - Método de Ford-Walford

3.1.1 População teresinense

Com o auxílio da tabela 3.1 começamos a tentar calcular o valor de y^* , assíntota do modelo exponencial, utilizando o método de Ford-Walford.

<i>Tempo</i>	$y(n)$	$y(n + 1)$
0	21,7	31,5
18	31,5	45,3
28	45,3	57,5
48	57,5	67,6
68	67,6	90,7
78	90,7	144,8
88	144,8	230,1
98	230,1	388,9
108	388,9	598,4
119	598,4	714,6
128	714,6	814,2
138	814,2	

Tabela 3.1: Relação entre a população e seu valor posterior

Plotando o gráfico de $y(n)$ x $y(n + 1)$, temos a figura 3.1.

Observe que, ao fazermos o ajuste linear, obtemos $y = 1,1803x + 32,852$. Assim, o valor da assíntota seria negativo, pois $a > 1$.

Portanto, fizemos três tentativas para o cálculo de y^* .

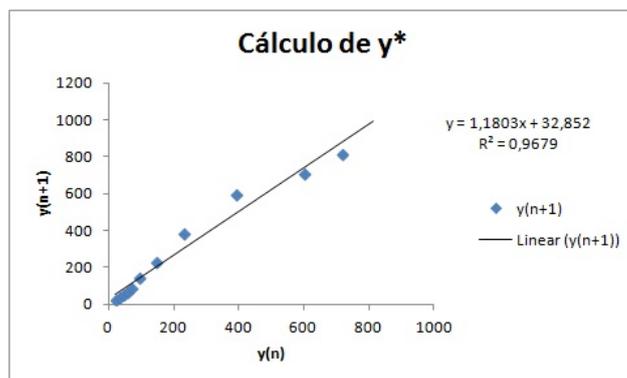


Figura 3.1: Cálculo de y^* com todos os dados

Primeira tentativa para o cálculo de y^*

Para o cálculo do primeiro valor de y^* , começamos a modelar a partir do ano 1960, ou seja, a partir de $t = 88$. Obtemos o gráfico da figura 3.2.

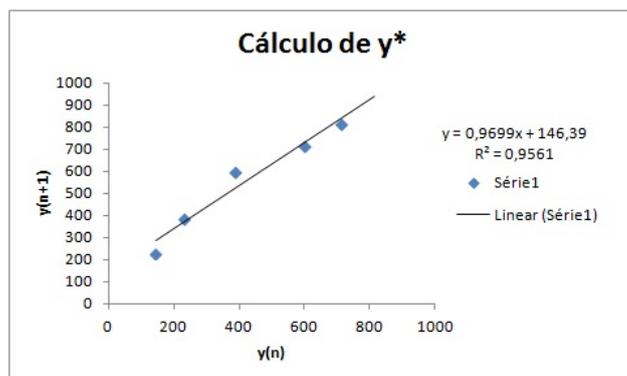


Figura 3.2: Cálculo de y^* a partir de 1960

Logo, o ajuste linear é da forma $y = 0,9699x + 146,39$. Deste modo, podemos calcular o valor de $y^* = \frac{b}{1-a}$. Então $y^* = \frac{146,39}{1-0,9699} = 4863,45$. Portanto, já temos a assíntota para o primeiro modelo exponencial assintótico.

Precisamos, agora, de uma curva exponencial assintótica. Para isto, precisamos dos valores $y^* - y(n)$, portanto, montamos a tabela 3.2 para nos auxiliar.

Obtemos a curva auxiliar $y = 6329,2e^{-0,003x}$, figura 3.3. Agora, podemos chegar no nosso primeiro modelo exponencial assintótico. Como o modelo é da forma $y = y^* - ae^{bx}$, então:

$$y = 4863,45 - 6329,2e^{-0,003x}$$

com $y =$ população e $x =$ tempo.

Concluimos, assim, nosso primeiro modelo exponencial, observados nas figuras 3.4 e 3.5.

Tempo	$y(n)$	$y^* - y(n)$
0	21,7	4841,75
18	31,5	4831,95
28	45,3	4818,15
48	57,5	4805,95
68	67,6	4795,85
78	90,7	4772,75
88	144,8	4718,65
98	230,1	4633,35
108	388,9	4474,55
119	598,4	4265,05
128	714,6	4148,85
138	814,2	4049,25

Tabela 3.2: Dados para o cálculo da curva auxiliar do primeiro y^*

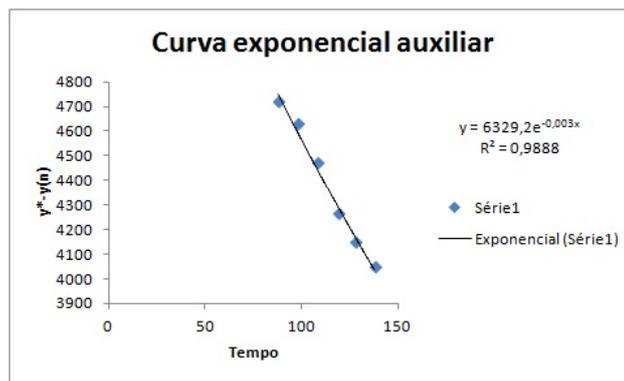


Figura 3.3: Curva auxiliar do primeiro y^*

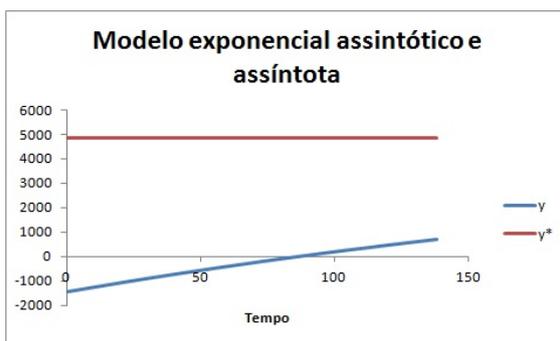


Figura 3.4: Modelo exponencial assintótico e assíntota

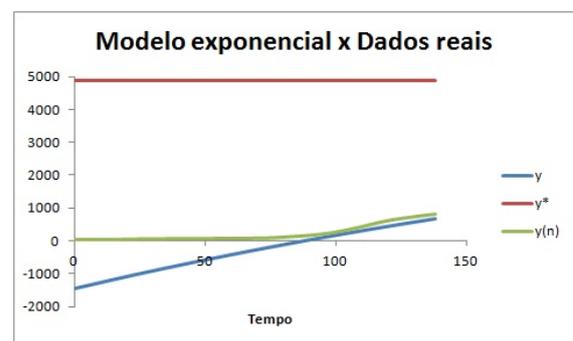


Figura 3.5: Modelo exponencial x Dados reais

Segunda tentativa para o cálculo de y^*

Agora, começaremos a modelar a partir de 1970, ou seja, $t = 98$. Obtemos o gráfico da figura 3.6.

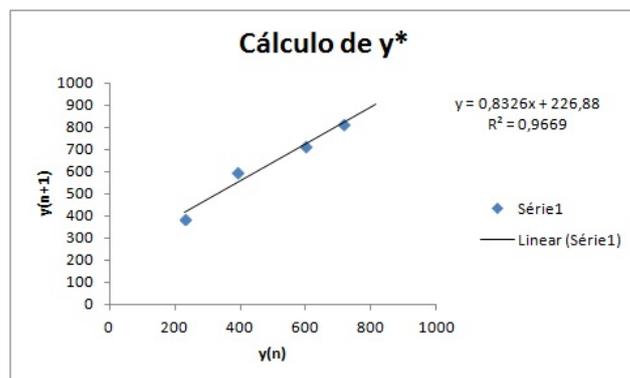


Figura 3.6: Cálculo de y^* a partir de 1970

O ajuste linear que obtemos é da forma $y = 0,8326x + 226,88$. Assim, calculamos o valor da assíntota $y^* = \frac{226,88}{1-0,8326} = 1355,32$.

Construiremos, a seguir, a curva exponencial assintótica. Para isto, montamos a tabela 3.3.

<i>Tempo</i>	$y(n)$	$y^* - y(n)$
0	21,7	1333,62
18	31,5	1323,82
28	45,3	1310,02
48	57,5	1297,82
68	67,6	1287,72
78	90,7	1264,62
88	144,8	1210,52
98	230,1	1125,22
108	388,9	966,42
119	598,4	756,92
128	714,6	640,72
138	814,2	541,12

Tabela 3.3: Dados para o cálculo da curva auxiliar do segundo y^*

Da figura 3.7, temos a curva auxiliar $y = 7150,5e^{-0,019x}$. Chegamos, então, ao nosso segundo modelo exponencial, que é da forma:

$$y = 1355,32 - 7150,5e^{-0,019x}$$

com y = população e x = tempo.

O modelo exponencial assintótico e a comparação com os dados reais encontram-se, respectivamente, nas figuras 3.8 e 3.9.

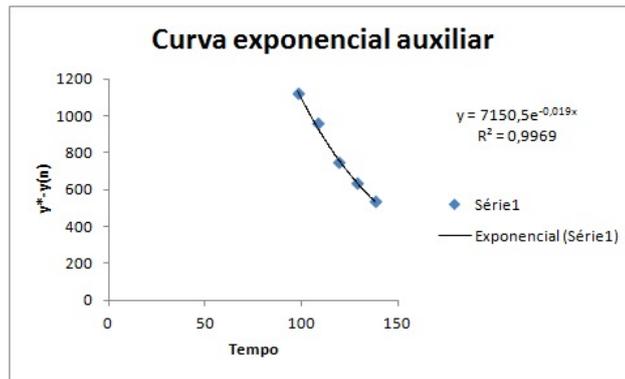


Figura 3.7: Curva auxiliar do segundo y^*

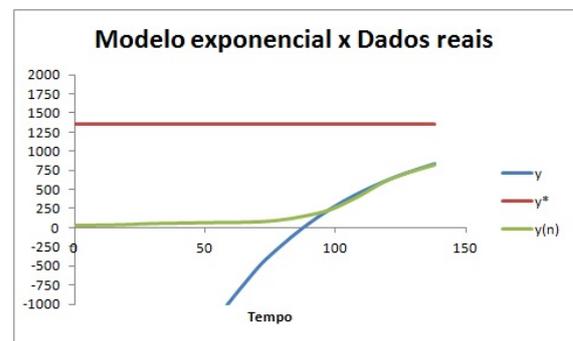
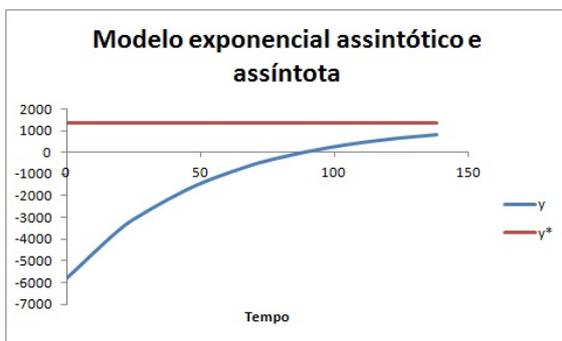


Figura 3.8: Modelo exponencial assintótico e assíntota

Figura 3.9: Modelo exponencial x Dados reais

Terceira tentativa para o cálculo de y^*

Para o nosso terceiro modelo exponencial, utilizamos os dados a partir de 1980, ou seja, $t = 108$. Assim como nos outros dois modelos, começamos plotando o gráfico para determinarmos o ajuste linear, figura 3.10.

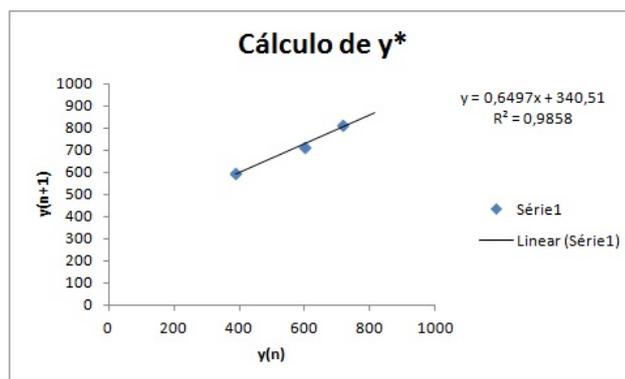
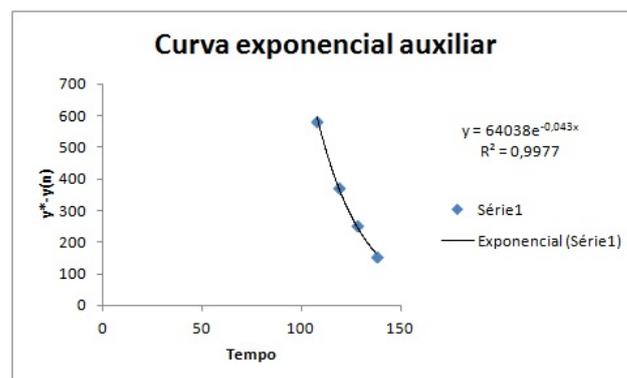


Figura 3.10: Cálculo de y^* a partir de 1980

Portanto, o ajuste linear é da forma $y = 0,6497x + 340,51$. Assim, o valor da assíntota é $y = \frac{340,51}{1-0,6497} = 972,05$.

Podemos construir a curva auxiliar utilizando a tabela 3.4.

Tempo	$y(n)$	$y^* - y(n)$
0	21,7	950,35
18	31,5	940,55
28	45,3	926,75
48	57,5	914,55
68	67,6	904,45
78	90,7	881,35
88	144,8	827,25
98	230,1	741,95
108	388,9	583,15
119	598,4	373,65
128	714,6	257,45
138	814,2	157,85

Tabela 3.4: Dados para o cálculo da curva auxiliar para o terceiro y^* Figura 3.11: Curva auxiliar do terceiro y^*

Temos a curva auxiliar $y = 64038e^{-0,043x}$ obtida na figura 3.11. Concluímos nosso terceiro modelo exponencial:

$$y = 972,05 - 64038e^{-0,043x}$$

com y = população e x = tempo.

Pode-se observar o modelo exponencial assintótico e a comparação com os dados reais nas figuras 3.12 e 3.13, respectivamente.

Comparando os três modelos exponenciais que encontramos, temos a figura 3.14.

3.1.2 Frota de carros de Teresina

Assim como fizemos para encontrarmos a assíntota do modelo exponencial da população teresinense, fizemos para o da frota de carros. Calculamos três para determi-

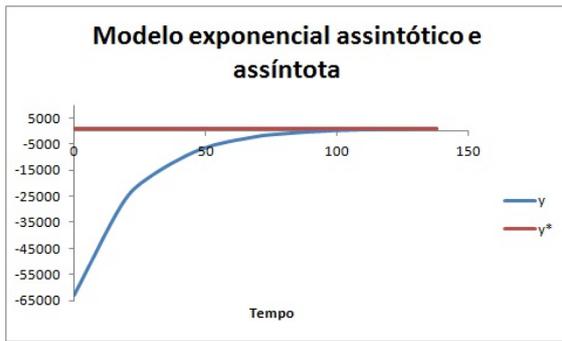


Figura 3.12: Modelo exponencial assintótico e assíntota

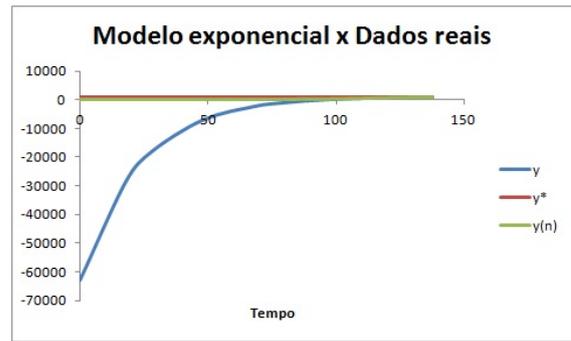


Figura 3.13: Modelo exponencial x Dados reais

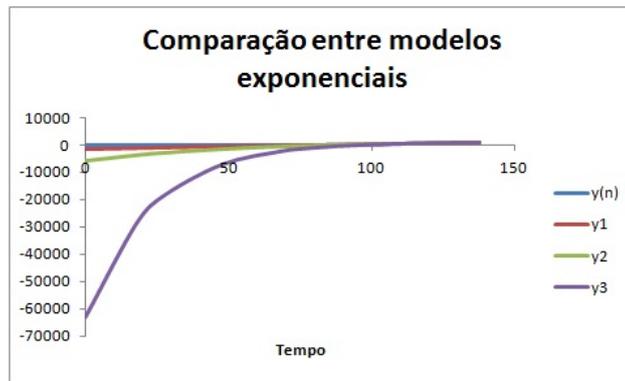


Figura 3.14: Comparação dos modelos exponenciais

armos a que mais se aproximava. Portanto, mostraremos somente o que encontramos que mais se aproximou da realidade.

Para isto, utilizamos os dados da tabela 3.5 a partir de 2008, ou seja, $t = 6$.

Observe o gráfico da figura 3.15.

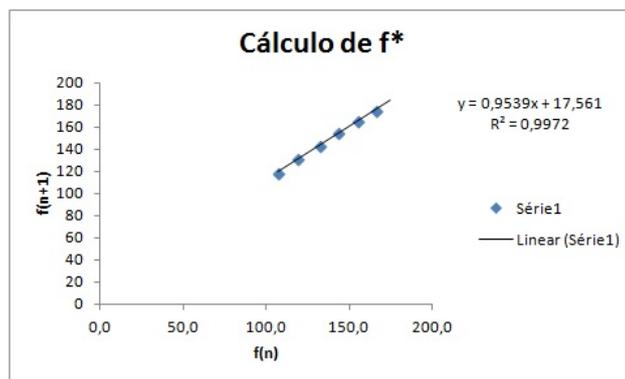


Figura 3.15: Cálculo de f^* a partir de 2008

Portanto, o ajuste linear é da forma $f = 0,9539x + 17,561$. Daí, o valor de $f^* = \frac{17,561}{1-0,9539} = 380,93$. Encontramos, então, a assíntota do nosso modelo exponencial.

Agora, encontramos a curva exponencial assintótica com o auxílio da tabela 3.6.

<i>Tempo</i>	$f(n)$	$f(n + 1)$
0	69,4	73,9
1	73,9	77,8
2	77,8	82,3
3	82,3	88,7
4	88,7	97,6
5	97,6	107,3
6	107,3	118,6
7	118,6	131,7
8	131,7	143
9	143	155,1
10	155,1	166,1
11	166,1	174,7
12	174,7	

Tabela 3.5: Relação entre a frota de carro e seu valor posterior

<i>Tempo</i>	$f(n)$	$f^* - f(n)$
0	69,4	311,5
1	73,9	307,0
2	77,8	303,1
3	82,3	298,6
4	88,7	292,2
5	97,6	283,3
6	107,3	273,6
7	118,6	262,3
8	131,7	249,2
9	143	237,9
10	155,1	225,8
11	166,1	214,8
12	174,7	206,2

Tabela 3.6: Dados para o cálculo da curva auxiliar de f^*

Observe, pelo o gráfico da figura 3.16, que a curva exponencial auxiliar encontrada é $f = 366,08e^{-0,048x}$. Então, podemos concluir nosso modelo exponencial para a frota de carros.

O modelo é da forma:

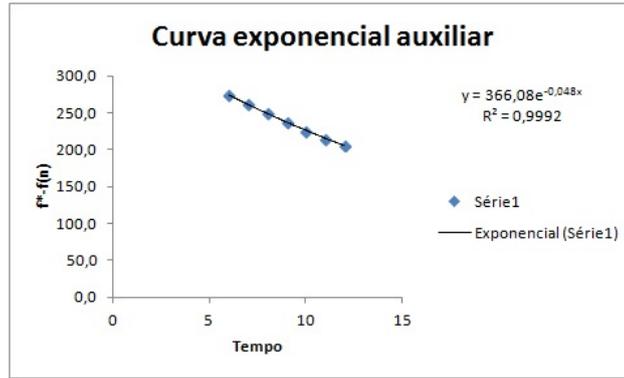


Figura 3.16: Curva auxiliar de f^*

$$f = 380,93 - 366,08e^{-0,048x}$$

Observe o modelo exponencial assintótico e a comparação com os dados reais nas figuras 3.17 e 3.18, respectivamente.

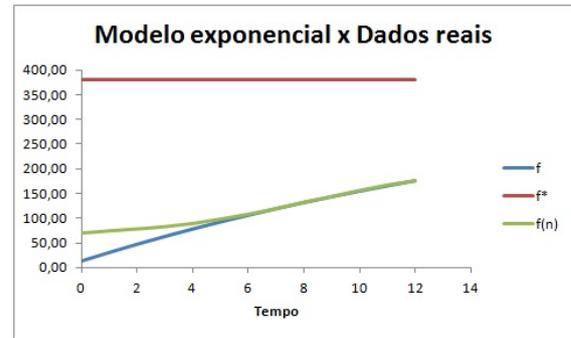
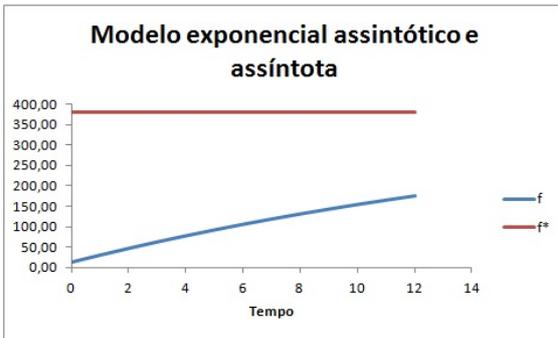


Figura 3.17: Modelo exponencial assintótico e assíntota

Figura 3.18: Modelo exponencial x Dados reais

3.2 Modelo logístico contínuo

3.2.1 População teresinense

Assim como no modelo exponencial assintótico, calculamos três modelos logísticos para a população, utilizando as assíntotas encontradas.

Primeiro modelo logístico

Utilizando a primeira assíntota $y^* = 4863,45$, calcularemos o valor de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$. Para isto, utilizamos a tabela 3.7.

Ao plotarmos a curva auxiliar de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$ obtemos uma função do tipo:

$$\frac{y(n)}{y^* - y(n)} = ae^{bt}$$

Tempo	$y(n)$	y^*	$y^* - y(n)$	$\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$
0	21,7	4863,45	4841,75	0,0044818
18	31,5	4863,45	4831,95	0,0065191
28	45,3	4863,45	4818,15	0,0094019
48	57,5	4863,45	4805,95	0,0119643
68	67,6	4863,45	4795,85	0,0140955
78	90,7	4863,45	4772,75	0,0190037
88	144,8	4863,45	4718,65	0,0306867
98	230,1	4863,45	4633,35	0,0496616
108	388,9	4863,45	4474,55	0,0869137
119	598,4	4863,45	4265,05	0,1403031
128	714,6	4863,45	4148,85	0,1722405
138	814,2	4863,45	4049,25	0,2010742

Tabela 3.7: Cálculo do valor de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$ do primeiro modelo logístico da população

$$y = y^* a e^{bt} - y a e^{bt}$$

$$y + y a e^{bt} = y^* a e^{bt}$$

$$y(1 + a e^{bt}) = y^* a e^{bt}$$

$$y = \frac{y^* a e^{bt}}{1 + a e^{bt}}$$

$$y = \frac{y^*}{\frac{1}{a e^{bt}} + 1}$$

$$y = \frac{y^*}{\frac{1}{a} e^{-bt} + 1}$$

Plotando o gráfico obtemos a curva auxiliar da figura 3.19.

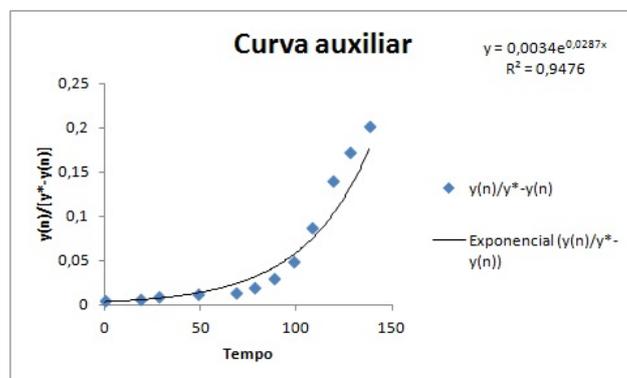


Figura 3.19: Curva auxiliar do primeiro modelo logístico da população

Temos que $y = 0,0034e^{0,0287x}$, ou seja, $a = 0,0034$ e $b = 0,0287$, logo $\frac{1}{a} = 294,11$.

Concluimos, então, o nosso primeiro modelo logístico:

$$y(t) = \frac{4863,45}{294,11e^{-0,0287t} + 1}$$

Fazendo a comparação do primeiro modelo logístico da população com os dados reais, temos a tabela 3.8 e a figura 3.20.

Tempo	$y(n)$	Modelo	$ \frac{y(n)-modelo}{y(n)} $
0	21,7	16,48013	0,2405472
18	31,5	27,56277	0,1249913
28	45,3	36,65625	0,1908113
48	57,5	64,69973	0,1252126
68	67,6	113,6922	0,6818377
78	90,7	150,3182	0,6573115
88	144,8	198,2506	0,3691341
98	230,1	260,6223	0,132648
108	388,9	341,1817	0,1227007
119	598,4	455,9607	0,2380336
128	714,6	574,4713	0,1960939
138	814,2	736,5193	0,0954074

Tabela 3.8: Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais

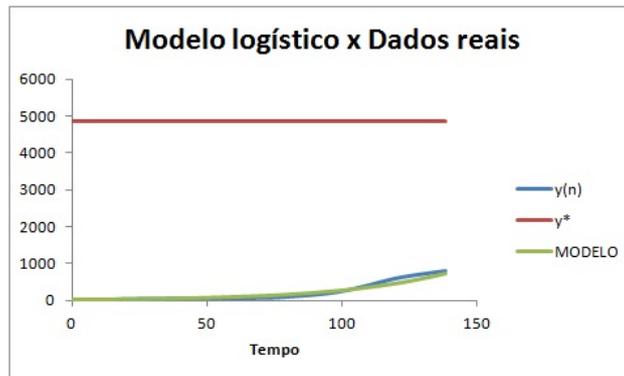


Figura 3.20: Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais

Fazendo o cálculo para algumas projeções, temos a tabela 3.9 e a figura 3.21.

Levando em consideração este modelo, temos que a população de Teresina se estabiliza perto do ano 2300, com aproximadamente 4856 mil habitantes.

Segundo modelo logístico

Com a assíntota $y^* = 1355,32$ calculamos o valor de $\frac{y(n)}{y^*-y(n)}$ e formamos a tabela 3.10.

Ano	Tempo	Modelo
2020	148	934,3204
2030	158	1170,181
2040	168	1443,704
2050	178	1750,854
2060	188	2083,536
2070	198	2430,079
2080	208	2776,689
2090	218	3109,561
2100	228	3416,995
2150	278	4418,117
2200	328	4749,457
2300	428	4856,841

Tabela 3.9: Algumas projeções do primeiro modelo logístico

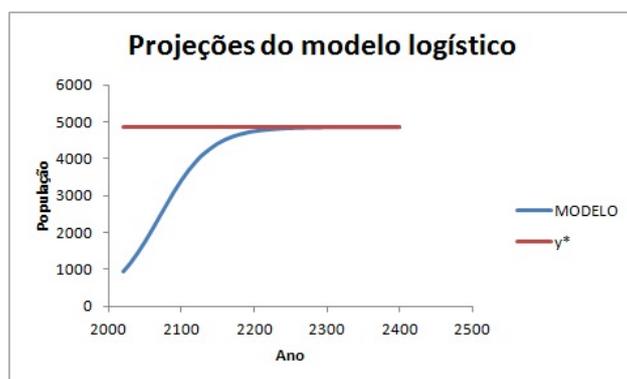


Figura 3.21: Algumas projeções do primeiro modelo logístico

Plotando o gráfico de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$, temos a figura 3.22.

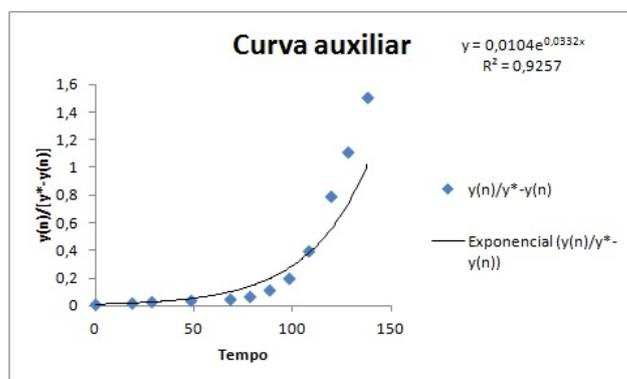


Figura 3.22: Curva auxiliar do segundo modelo logístico da população

Observe que $y = 0,0104e^{0,0332x}$, ou seja, $a = 0,0104$ e $b = 0,0332$, logo $\frac{1}{a} = 96,15$.

<i>Tempo</i>	$y(n)$	y^*	$y^* - y(n)$	$\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$
0	21,7	1355,32	1333,62	0,0162715
18	31,5	1355,32	1323,82	0,0237947
28	45,3	1355,32	1310,02	0,0345796
48	57,5	1355,32	1297,82	0,0443050
68	67,6	1355,32	1287,72	0,0524958
78	90,7	1355,32	1264,62	0,0717211
88	144,8	1355,32	1210,52	0,1196180
98	230,1	1355,32	1125,22	0,2044933
108	388,9	1355,32	966,42	0,402413
119	598,4	1355,32	756,92	0,7905723
128	714,6	1355,32	640,72	1,1153077
138	814,2	1355,32	541,12	1,504657

Tabela 3.10: Cálculo do valor de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$ do segundo modelo logístico da população

Concluimos nosso segundo modelo logístico:

$$y(t) = \frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332t} + 1}$$

Comparando o segundo modelo logístico com os dados reais, temos a tabela 3.11 e a figura 3.23.

<i>Tempo</i>	$y(n)$	<i>Modelo</i>	$ \frac{y(n) - modelo}{y(n)} $
0	21,7	13,9508	0,3571061
18	31,5	25,1474	0,2016698
28	45,3	34,7950	0,2318973
48	57,5	65,9941	0,1477235
68	67,6	122,5712	0,8131838
78	90,7	164,9598	0,8187408
88	144,8	219,3986	0,5151834
98	230,1	287,4642	0,2493014
108	388,9	369,7725	0,0491837
119	598,4	475,5744	0,2052567
128	714,6	571,3696	0,2004344
138	814,2	682,9763	0,1611689

Tabela 3.11: Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais

Efetando os cálculos para dados futuros, temos a tabela 3.12 e a figura 3.24.

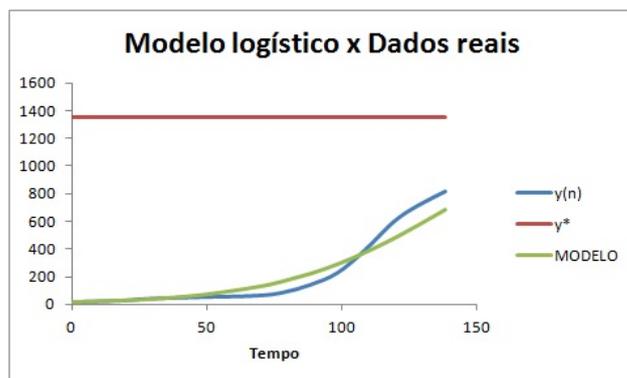


Figura 3.23: Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais

Ano	Tempo	Modelo
2020	148	794,2954
2030	158	899,4847
2040	168	993,9251
2050	178	1074,899
2060	188	1141,631
2070	198	1194,853
2080	208	1236,203
2090	218	1267,679
2100	228	1291,268
2150	278	1342,657

Tabela 3.12: Algumas projeções do segundo modelo logístico

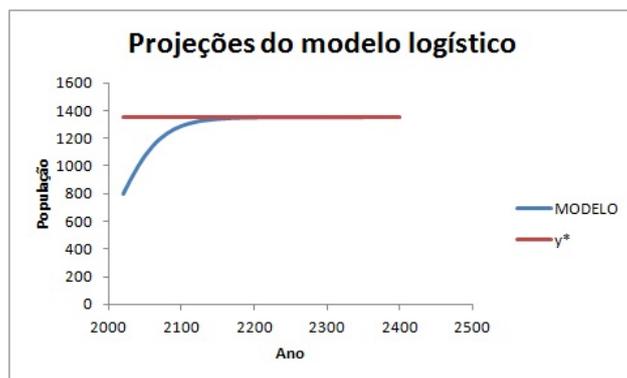


Figura 3.24: Algumas projeções do segundo modelo logístico

Através deste modelo, concluímos que a população Teresinense se estabilizará por volta de 2150, com uma população de aproximadamente 1350,0 mil habitantes.

Terceiro modelo logístico

Utilizando a terceira assíntota $y^* = 972,05$, calculamos $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$ formando a tabela 3.13.

Tempo	$y(n)$	y^*	$y^* - y(n)$	$\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$
0	21,7	972,05	950,35	0,0228336
18	31,5	972,05	940,55	0,0334910
28	45,3	972,05	926,75	0,0488804
48	57,5	972,05	914,55	0,0628724
68	67,6	972,05	904,45	0,0747415
78	90,7	972,05	881,35	0,1029103
88	144,8	972,05	827,25	0,1750377
98	230,1	972,05	741,95	0,3101287
108	388,9	972,05	583,15	0,6668953
119	598,4	972,05	373,65	1,6014987
128	714,6	972,05	257,45	2,7756845
138	814,2	972,05	157,85	5,1580614

Tabela 3.13: Cálculo do valor de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$ do terceiro modelo logístico da população

Plotando o gráfico de $\frac{y(n)}{y^* - y(n)}$, temos a figura 3.25.

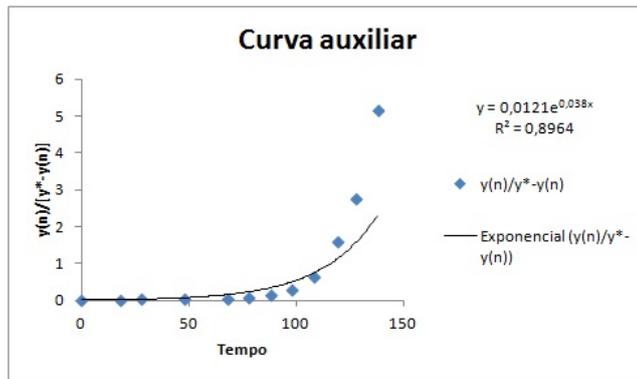


Figura 3.25: Curva auxiliar do terceiro modelo logístico da população

Temos que $a = 0,0121$ e $b = 0,038$, então $\frac{1}{a} = 82,64$.

Concluimos assim o terceiro modelo logístico:

$$y(t) = \frac{972,05}{82,64e^{-0,038t} + 1}$$

Fazendo a comparação do terceiro modelo logístico da população com os dados reais, temos a tabela 3.14 e a figura 3.26.

Calculando algumas projeções para o futuro, temos a tabela 3.15 e a figura 3.27.

Tempo	$y(n)$	Modelo	$ \frac{y(n)-modelo}{y(n)} $
0	21,7	11,62183	0,4644317
18	31,5	22,7648	0,277308
28	45,3	32,93208	0,2730225
48	57,5	67,80314	0,1791851
68	67,6	134,3173	0,9869429
78	90,7	184,6172	1,0354703
88	144,8	248,1733	0,713904
98	230,1	324,5901	0,4106479
108	388,9	411,1715	0,057268
119	598,4	512,1252	0,1441758
128	714,6	593,4577	0,1695246
138	814,2	676,7903	0,1687665

Tabela 3.14: Comparação do terceiro modelo logístico com os dados reais

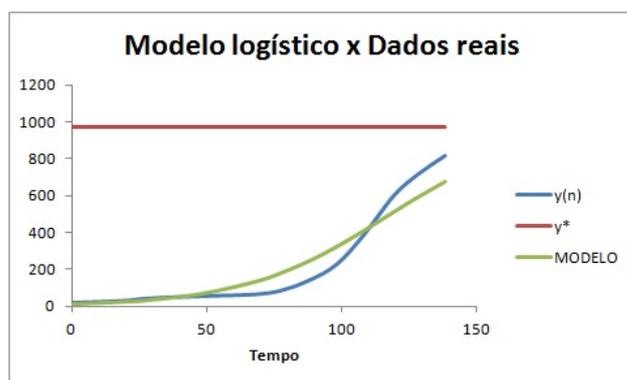


Figura 3.26: Comparação do terceiro modelo logístico com os dados reais

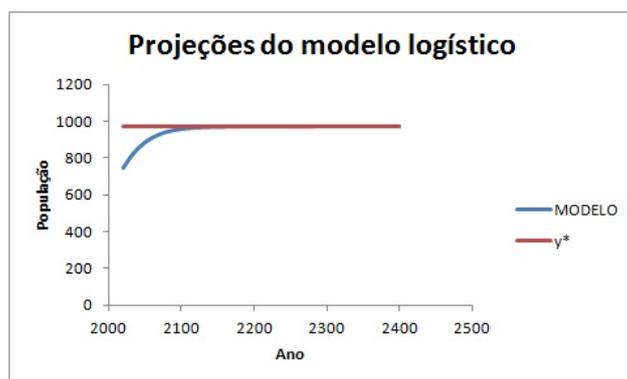


Figura 3.27: Algumas projeções do terceiro modelo logístico

A partir deste modelo concluímos que a população Teresinense se estabilizará por volta de 2150, com uma população de aproximadamente 970 mil habitantes.

Ano	Tempo	Modelo
2020	148	748,6841
2030	158	807,3328
2040	168	853,0303
2050	178	887,3796
2060	188	912,5075
2070	198	930,5271
2080	208	943,2654
2090	218	952,1793
2100	228	958,3728
2150	278	969,9795

Tabela 3.15: Algumas projeções do terceiro modelo logístico

Comparando os três modelos logísticos temos a figura 3.28.

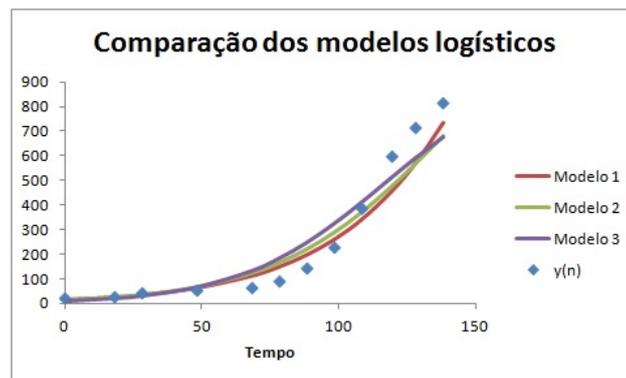


Figura 3.28: Comparação dos três modelos logísticos

Concluimos, por fim, os modelos da população de Teresina e o que mais se aproximou da realidade foi:

$$y(t) = \frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332t} + 1}$$

3.2.2 Frota de carros de Teresina

Assim como no modelo exponencial assintótico, fizemos três modelos e mostraremos o que mais se aproximou da realidade.

Com a assíntota $f^* = 380,93$ encontrada, calculamos o valor de $\frac{f(n)}{f^* - f(n)}$ e montamos a tabela 3.16.

Plotando o gráfico de $\frac{f(n)}{f^* - f(n)}$, encontramos a figura 3.29, que nos fornece que $a = 0,2031$ e $b = 0,1182$.

Daí, temos que $\frac{1}{a} = 4,92$. Portanto, o modelo logístico para a frota de carros de Teresina é:

Tempo	$f(n)$	f^*	$f^* - f(n)$	$\frac{f(n)}{f^* - f(n)}$
0	69,4	380,93	311,5	0,2227714
1	73,9	380,93	307,0	0,240693
2	77,8	380,93	303,1	0,2566555
3	82,3	380,93	298,6	0,2755918
4	88,7	380,93	292,2	0,303528
5	97,6	380,93	283,3	0,3444746
6	107,3	380,93	273,6	0,3921353
7	118,6	380,93	262,3	0,4521023
8	131,7	380,93	249,2	0,5284275
9	143	380,93	237,9	0,6010171
10	155,1	380,93	225,8	0,6867998
11	166,1	380,93	214,8	0,7731694
12	174,7	380,93	206,2	0,8471124

Tabela 3.16: Cálculo do valor de $\frac{f(n)}{f^* - f(n)}$ do modelo logístico da frota de automóveis

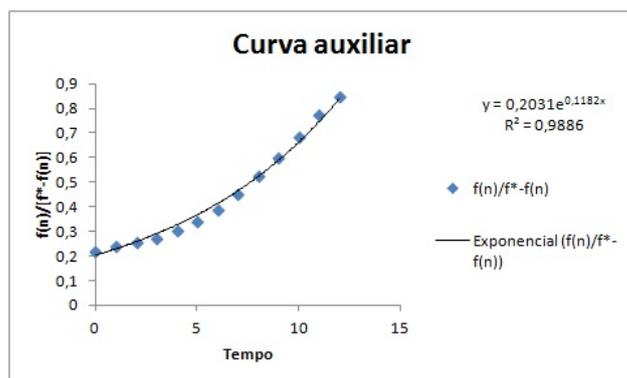


Figura 3.29: Curva auxiliar do modelo logístico da frota de automóveis

$$f(t) = \frac{380,93}{4,92e^{-0,1182t} + 1}$$

Comparando este modelo logístico com os dados reais temos a tabela 3.17 e a figura 3.30.

Fazendo os cálculos para dados futuros, chegamos a tabela 3.18 e a figura 3.31:

Através do modelo encontrado, temos que a frota de carros de Teresina começa a se estabilizar por volta do ano 2080, com aproximadamente 380 mil carros.

Assim, concluímos a modelagem da população de Teresina e de sua frota de carros.

Tempo	$f(n)$	Modelo	$ \frac{f(n)-modelo}{f(n)} $
0	69,4	64,3461	0,0728201
1	73,9	70,9167	0,0403689
2	77,8	77,9928	0,0024785
3	82,3	85,5801	0,039855
4	88,7	93,6771	0,0561122
5	97,6	102,275	0,0479001
6	107,3	111,3562	0,0378021
7	118,6	120,8938	0,0193405
8	131,7	130,8518	0,0064406
9	143	141,1847	0,0126946
10	155,1	151,8381	0,021031
11	166,1	162,7497	0,0201705
12	174,7	173,8504	0,0048634

Tabela 3.17: Comparação do modelo logístico com os dados reais

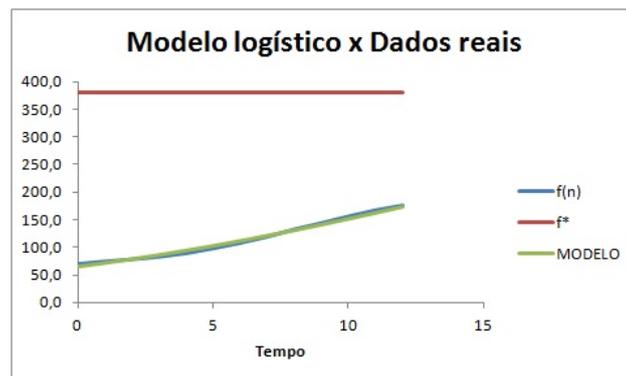


Figura 3.30: Comparação do modelo logístico com os dados reais

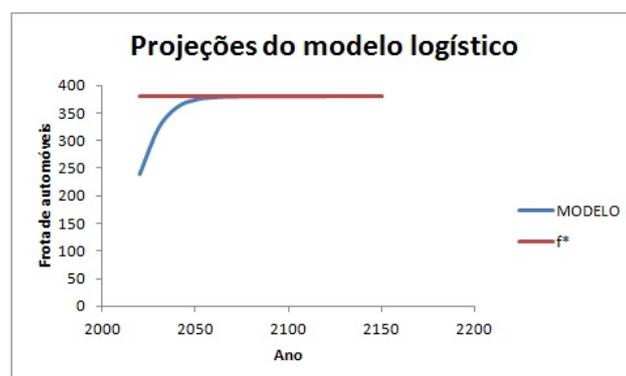


Figura 3.31: Algumas projeções do modelo logístico

3.3 Crescimento populacional x Frota de carros

De acordo com nossos cálculos, o modelo da população é:

$$y(t) = \frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332(130+t)} + 1}$$

Ano	Tempo	Modelo
2020	18	240,1701
2030	28	322,8955
2040	38	361,0309
2050	48	374,5983
2060	58	378,9657
2070	68	380,3254
2080	78	380,7444
2090	88	380,8731
2100	98	380,9125
2150	148	380,93

Tabela 3.18: Algumas projeções do modelo logístico

E o da frota de carros é:

$$f(t) = \frac{380,93}{4,92e^{-0,1182t} + 1}$$

Observe que no modelo da população tivemos que fazer um ajuste na variável tempo (t), pois os dados utilizados nas modelagens ocorreram em épocas diferentes.

Fazendo a razão da frota de carros pela população, temos:

$$\frac{f(t)}{y(t)} = \frac{\frac{380,93}{4,92e^{-0,1182t} + 1}}{\frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332(130+t)} + 1}}$$

Através da tabela 3.19 podemos verificar o valor da razão em determinados tempos.

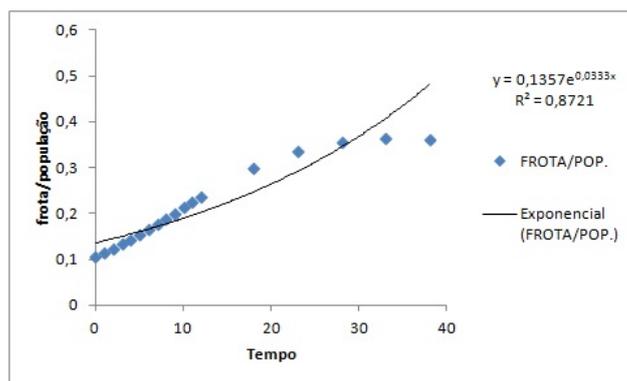


Figura 3.32: Razão entre a frota de automóveis e a população

Observando a tabela 3.19 e a figura 3.32 podemos perceber que a frota de carros está crescendo. Veja que em 2002 a proporção de carros pra população era de cerca de 0,10, ou seja, um carro para 10 pessoas. Já em 2014 esta mesma proporção passou para 0,23, ou seja, aproximadamente 1 carro para 4 pessoas. Neste período verificamos

<i>Ano</i>	<i>Tempo</i>	<i>Frota</i>	<i>População</i>	<i>Frota/População</i>
2002	0	64,3462	593,4211	0,108433
2003	1	70,9167	604,5184	0,117311
2004	2	77,9928	615,6554	0,126683
2005	3	85,5801	626,8263	0,136529
2006	4	93,6771	638,0251	0,146824
2007	5	102,275	649,2456	0,157529
2008	6	111,3562	660,4818	0,168598
2009	7	120,8938	671,7274	0,179974
2010	8	130,8518	682,9763	0,191591
2011	9	141,1847	694,2223	0,203371
2012	10	151,8381	705,4591	0,215233
2013	11	162,7497	716,6807	0,227088
2014	12	173,8504	727,8808	0,238845
2020	18	240,1701	794,2954	0,302369
2025	23	287,5903	847,9847	0,339146
2030	28	322,8955	899,4847	0,358978
2035	33	346,4479	948,2664	0,365349
2040	38	361,0309	993,9251	0,363238

Tabela 3.19: Razão entre a frota de automóveis e a população

que a frota de carros aumentou bastante. Com o decorrer do tempo, a frota de carros continua crescendo, a ponto de, por volta de 2040, chegar a ter 2 carros para 5 pessoas. Teremos sérios problemas de trânsito até lá, pois será muito carro para pouco espaço.

Se observarmos, de 2035 para 2040 a proporção de frota/população diminuiu. Isto ocorre devido nosso modelo ser um modelo logístico contínuo e trabalharmos com um limite de crescimento.

4 Conclusão

A modelagem matemática é uma das novas tendências de estudar matemática e torná-la mais atrativa para professores e educandos. Um dos grandes motivos para que isto aconteça é o fato de que ela transforma problemas da realidade em problemas matemáticos, possibilitando resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

De acordo com nosso trabalho, percebemos que a população teresinense continua crescendo, tendo como ponto de estabilidade o valor 1355,32 mil habitantes. Este valor que encontramos condiz com a realidade, pois Teresina é uma cidade que está crescendo bastante e possui uma grande área para expansão.

A frota de carros está aumentando a cada ano, seguindo um crescimento mais acelerado que a população. Observe que a 12 anos atrás tínhamos 1 carro para 10 habitantes, hoje, 1 carro para 4 habitantes. A tendência é aumentar, chegando ao ponto estabilizar-se, pois não teremos mais para onde crescer.

Com o desenvolvimento do trabalho, percebe-se que a modelagem discreta pode ser aplicada a alunos do ensino básico, pois os mesmos já possuem os pré-requisitos necessários. Para tanto, exige-se deles uma leitura matemática para poder compreender e representar o problema proposto.

A modelagem matemática possui um enorme leque de aprendizagem, tem recorrência, funções, equações, etc.. Além disso, ela pode ser aplicada em diversas áreas, sem se prender somente a problemas matemáticos, como na informática, biologia e geografia.

A utilização da modelagem para resolução e compreensão de problemas, quando utilizada como um método de ensino, tem diversas vantagens, como a utilização de novas tecnologias; utilização de problemas reais dos alunos, despertando a curiosidade e o interesse dos mesmos; os alunos se sentem mais familiarizados com a matemática e passa a enxergá-la com outros olhos.

Sendo assim, utilizar a modelagem em sala de aula com nossos alunos é, de certa forma, uma maneira de despertar o interesse deles, mostrando que a matemática é uma ciência interessante e de grande utilidade.

Referências Bibliográficas

1. BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.
2. BASSANEZI, R. C. *Equações Diferenciais Ordinárias - Um curso introdutório*, São Paulo: Universidade Federal do ABC, 2012.
3. BASSANEZI, R. C. *Temas e Modelos*, Santo André: Universidade Federal do ABC, 2012.
4. BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.
5. CENTRO DE REFERÊNCIA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO. *História da Modelagem Matemática e seus precursores*. Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm/portugues/index.php>>. Acesso em novembro de 2014.
6. DEPARTAMENTO NACIONAL DE TRÂNSITO (DENATRAN). *Dados da frota de automóveis brasileira*. Disponível em: <<http://www.denatran.gov.br/frota.htm>>. Acesso em dezembro de 2014.
7. INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Censos da população teresinense*. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/>>. Acesso em: outubro de 2014.
8. MARQUES, Sérgio Paulo Ataíde. *População brasileira e frota de carros*, 2013, Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC.