UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RUI MARTINS PEREIRA

Heurística Aplicada a Resolução de Problemas de Matemática do Enem

Uberaba – MG
2015

RUI MARTINS PEREIRA

Heurística Aplicada a Resolução de Problemas de Matemática do Enem

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro-UFTM, Departamento de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Cruvinel Lemes

Uberaba

2015

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Pereira, Rui Martins
P495h	Heurística aplicada a resolução de problemas de matemática do ENEM / Rui Martins Pereira. -- 2015.
	106f. : il., fig., graf., tab.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2015
	Orientador: Prof. Dr. Leandro Cruvinel Lemes
	1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Heurística. I. Lemes, Leandro Cruvinel. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.
	CDU 51

RUI MARTINS PEREIRA

HEURÍSTICA APLICADA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DO ENEM

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

24 de fevereiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Leandro Cruvinel Lemes

Prof. Dr. Leandro Cruvinel Lemes
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Hector Flores Callisaya
Universidade Federal do Mato Grosso

Prof. Dr. Osmar Aléssio
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dedicatória

Dedico esse trabalho à três pessoas de importância ímpar para mim, que Deus, por algum bom motivo para Ele, resolveu levá-los para o céu durante essa minha jornada. São eles: meu pai, minha mãe e o meu amigo Eder Barra, colega de graduação, pós-graduação e mestrado.

Agradecimentos

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Leandro Cruvinel Lemes, pela paciência, competência, persistência nas orientaões e permanente incentivo.

À minha esposa Vanusa, meu filho Thalles e minha filha Maria Eduarda, pelo apoio irrestrito e infinita compreensão.

Ao meu amigo e companheiro de estrada Belchior Silva Vitorim.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuiram de alguma forma para o êxito deste trabalho.

Abstract

This work is an attempt to justify the urgent need to include the heuristic theme (problem-solving methods), in the curriculum of primary and secondary education, in order to improve the performance of students in mathematics, internal evaluations and also in external evaluations, with an emphasis on Enem.

Keywords:
Heuristics, Enem, Polya

Resumo

Este trabalho, é uma tentativa de justificar a urgente necessidade da inclusão do tema heurística (métodos de resolução de problemas), nos currículos do ensino fundamental e médio, com o objetivo de melhorar o desempenho dos alunos em matemática, nas avaliações internas e externas, com ênfase no Enem.

Palavras-chave:
heurísticas, Enem, Pólya

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Esse trabalho será baseado no livro “A arte de resolver problemas”de George Pólya [13]. Outras referências serão citadas à parte quando necessárias.

Sejam $V_1 = \mathbb{R}^4$ o espaço vetorial real de 4-uplas ordenadas, $V_2 = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado por todos os polinômios de grau no máximo 3 e $V_3 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado por todas as matrizes 2×2 com entradas reais. Considere os conjuntos:

$$W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = y\},$$
$$W_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 = a_1\}$$

e

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); a_{11} = a_{12} \right\}.$$

Mostre que W_i é subspaço vetorial real de V_i para $i = 1, 2, 3$.

Uma maneira de resolver esses 3 problemas é seguir os passos:

(1) Mostrar que $W_i \neq \varnothing$ verificando se o elemento neutro da adição em V_i pertence à W_i;

(2) Mostrar que W_i é fechado para a operação de soma, isto é, mostrar que dados dois elementos $u, v \in W_i$, temos que $u + v \in W_i$;

(3) Mostrar que W_i é fechado para a operação de multiplicação por escalar, isto é, mostrar que dados $u \in W_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda u \in W_i$;

Os três passos formam uma estratégia de resolução comum aos três problemas de mostrar que W_1, W_2 e W_3 são, respectivamente, subspaços vetoriais reais de V_1, V_2 e V_3. Apesar dos problemas serem diferentes, estes possuem uma mesma estratégia de resolução. Estratégias gerais de resolução de problemas são chamadas de heurísticas.

Os três problemas acima são representações, a menos de isomorfismo de espaços vetoriais, do mesmo problema. Ao dominar o conteúdo da álgebra linear o solucionador, via isomorfismos, pode mover-se de uma representação (ou estrutura) do problema para outra sem perder a essência ou a generalidade da questão. No entanto, mover-se de uma representação para outra nem sempre é fácil, principalmente quando se trata de solucionadores menos experientes e, por isso, como ensinar a representatividade de problemas para crianças é objeto de estudo em diversas pesquisas (Case e Okamoto, 1996 e Demetriou et al. 2002).

Exemplos de heurísticas que resolvem problemas mais gerais são (Hardin, 2003):

- Tentativa e erro;
- Indução finita (na matemática);
- Exaustão (em casos que o conjunto formado pelas possíveis respostas é finito e é possível checar cada uma, o solucionador checa todas para resolver o problema);
- Heurística de julgamento;
- Heurística de disponibilidade;
- Heurística de avaliabilidade.

A heurística, da forma como apresentada por Pólya, é bem geral no sentido em que, se tratando de resolução de problemas, esta é uma "receita de bolo"para resolver problemas dos mais diversos tipos. Na sua heurística, Pólya divide a resolução do problema em quatro etapas, que são: compreensão do problema, planejamento, execução e retrospecto.

Na etapa de compreensão do problema, o solucionador deve identificar de forma inequívoca todas as informações alí contidas, especialmente aquelas diretamente ligadas à sua resolução, tais como: dados conhecidos, dados desconhecidos, incógnita(s) e condicionate(s). É esperado também, que o solucionador esteja em condições de identificar as partes principais do problema, que saiba separar corretamente dados de incógnita e de condicionante.

Na etapa do planejamento, o solucionador busca por estratégias para solucionar o problema. Nesta etapa, procura-se por problemas análogos e estuda-se casos particulares do problema em busca de uma estratégia adequada. Estabelece-se relações entre os dados e a incógnita, levando em conta as exigência da condicionante. Neste trabalho, nos restringimos apenas à um tipo de planejamento, a saber procuramos relacionar os dados conhecidos e os dados desconhecidos, entre os quais está a incógnita, através de equações algébricas/aritméticas.

A etapa de execução é a parte da resolução do problema na qual o solucionador vai executar as estratégias estudadas na fase de planejamento. Como neste trabalho, na fase de planejamento obtém-se equações algébricas e/ou aritméticas, a etapa de execução se dá através de operações algébricas/numéricas e/ou lógicas utilizando estas equações. No fim da etapa de execução o solucionador deve ter determinado todas as incógnitas que levam a solução do problema.

Na etapa do retrospecto sugerida por Pólya, o solucionador vai refazer todo o caminho feito nas etapas anteriores, procurando possíveis erros ou descuidos nas anotações, especialmente se o argumento for extenso e trabalhoso. O solucionador, deve sempre ter em mente que o erro ou falha pode estar em qualquer uma das três etapas anteriores. Fazendo o retrospecto, além de poder detectar possíveis erros ou falhas, o solucionador tem a oportunidade de consolidar o seu conhecimento e também aumentar a sua capacidade de resolver problemas.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado em 1998, com o objetivo de diagnosticar a qualidade do ensino médio no país. O resultado do Enem é utilizado também, como critério de acesso do participante à vários programas governamentais, tais como: Proune, fies, Sisu, Ciências sem Fronteiras e atualmente, o Pronatec.

A justificativa para a elaboração deste trabalho, está intrinsicamente relacionada com as informações oficiais sobre o desempenho dos alunos no conteúdo de matemática nos ensino fundamental e médio. Vejamos alguns exemplos: a média em matemática caiu em 7,3 % em relação ao Enem-2013 e Enem-2014 (MEC); o Brasil ocupa a 58º posição no Pisa, entre 65 países (INEP); apenas 17 % dos alunos terminam o ensino fundamental, com conhecimentos matemáticos exigidos nessa fase, de acordo com a avaliação do IDEB (INEP).

Neste trabalho procura-se justificar a importância e a urgência, de se incorporar heurísticas aos currículos dos alunos dos ensinos fundamental e médio. Esta questão é estudada por Cai e Lester [1], de forma qualitativa. Também é feita uma análise quantitativa da aplicação do método heurístico de Polya nas questõe do Enem-2013.

No Capítulo 2 iremos descrever sucintamente uma forma particular de heurística que será aplicada às questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) de 2013. No Capítulo 3, o Enem de 2013, sendo o principal instrumento de avaliação nacional de estudantes de ensino médio, é resolvido em grande parte utilizando-se a heurística descrita no Capítulo 2. No Capítulo 4 são contabilizadas as questões que podem ser resolvidas através do método proposto neste trabalho e, então, observações são feitas sobre os resultados obtidos. No Capítulo 5, concluí-se o trabalho e apresenta-se pesrpectivas futuras de pesquisa.

Capítulo 2

Métodos

No Capítulo 3 é aplicado o método heurístico apresentado por Pólya em [13] com o intuito de avaliar sua eficiência como ferramenta de resolução de questões do Enem de 2013. As análises dos resultados obtidos no Capítulo 3 são apresentadas no Capítulo 4. Estas análises são utilizadas para quantitatificar o quão importante é o ensino de heurísticas no ensino médio.

O método heurístico apresentado por Pólya é dividido nas seguintes etapas: compreensão do problema, planejamento, execução e retrospecto. No entanto, esse método é bem geral e, portanto, iremos fazer algumas restrições ao aplicá-lo nas resoluções de questões do Enem.

Neste capítulo é descrito detalhadamente cada uma dessas etapas com suas respectivas restrições.

2.1 Compreensão do problema

A compreensão é uma etapa da resolução que consiste em colher dados, explorar, entender, relacionar, conjecturar e analisar o problema. A não realização dessa etapa de maneira significativa, está diretamente relacionada às dificuldades que aparecem nas fases de resolução subsequentes (Larson, 1983).

Complicações na etapa de compreensão do problema estão ligadas com os seguintes:

- Analfabetismo, deficiência ou inabilidade cognitiva;
- Transformação entre informação visual-espacial e numérica (Geary, 2005);

- Conhecimentos de conceitos relacionados ao problema na memória atual do solucionador e como esses conceitos estão organizados (Hardin, 2002).

O uso de figuras na compreensão de problemas e outras representações visuais são técnicas heurísticas eficientes (DeWindt-King e Goldin, 2003; Diezmann e English, 2001). Pesquisas também apontam a importância no uso de múltiplas representações do problema como ferramenta de compreensão (Duval, 2002).

Um problema é dividido em, pelo menos, três partes: dados, objetivos e operações (Newell e Simon, 1972). Os dados são quaisquer informações fornecidas para construir o problema. Estes podem ser irrelevantes, no sentido em que são desnecessários para se alcançar algum objetivo, ou relevantes, isto é, não há como se atingir um determinado objetivo do problema sem utilizá-los. Dizemos que um dado é desconhecido, se este não é fornecido diretamente pelo problema, mas pode ser obtido através de operações lógicas e/ou aritméticas envolvendo os dados diretamente fornecidos no problema (conhecidos). Os dados desconhecidos geralmente aparecem na pergunta do problema, porém existem aqueles que são criados como variável auxiliar para se solucionar o problema.

Manter um padão entre as unidades de medida usadas para quantificar os dados, pode facilitar a resolução do problema (ver questões 137, 156, 164 e 176).

A coleta de dados é um tipo de heurística utilizada na etapa de compreensão. Esta consiste em identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados e a condicionante. Neste trabalho, é avaliada apenas a coleta de dados (conhecidos e desconhecidos) como ferramenta heurística de compreensão aplicada a resolução de questões do Enem.

2.2 Planejamento

Os resultados no Enem revelam grande dificuldade dos alunos em matemática (ver Capítulo 1). Na Seção 2.1, destacam-se vários aspectos que dificultam a compreensão do problema. Nesta seção são apresentados outros aspectos, agora, relacionados à etapa de planejamento. Ao final desta seção é apresentado qual a estratégia abordada e avaliada neste trabalho para resolução de problemas do Enem.

A dificuldade em elaborar estratégias de resolução do problema se deve, em parte, à maneira como a matéria é passada para a grande maioria dos alunos nas redes de ensino público no Brasil. Se o aluno está vendo um tópico X, ele resolverá problemas relacionados ao tópico X. No ensino básico, destina-se grande parte do tempo ao aprendizado das operações elementares (soma, subtração, multiplicação e divisão). Logo a busca por conceitos ou ferramentas matemáticas que se relacionem com os dados de problemas diversos não é tão simples, uma vez que tal prática não é incentivada. Uma maneira de resolver este problema é misturar os tópicos abordados (Costa, 2013). Outros autores apontam que a *axiomática euclidiana* como modelo de ensino de matemática adotado, tem distanciado o aluno do "saber sábio", isto é, o saber originalmente produzido pelo cientista (Leivas e Cury, 2009).

Uma estratégia de resolução de problemas sugerida por Pólya (somente esta será avaliada neste trabalho) é relacionar os dados desconhecidos com os dados conhecidos definindo aqueles em função destes através de equações aritméticas/algébricas. Assumiremos que o solucionador é capaz de relacionar o problema com o conteúdo necessário a fim de definir tais equações.

2.3 Execução

A etapa de execução, como já definida no Capítulo 1, é o momento em que o solucionador coloca o planejamento em prática. Como neste trabalho, os dados conhecidos e desconhecidos estão relacionados através de equações, a etapa de execução se dá através de operações algébricas/numéricas e/ou lógicas com o objetivo de determinar as incógnitas que levam à solução do problema.

2.4 Retrospecto

Neste trabalho o retrospecto é dividido em três subetapas: conclusão, análise do resultado e conhecimentos necessários.

Na *conclusão*, é registrado o resultado da resolução do problema com a respectiva alternativa. Note que em caso de questões fechadas, isto é, questões para as quais são fornecidas finitas alternativas que solucionam o problema, pode ser feita aqui uma análise do resultado. Essa análise é omitida por ser de fácil checagem.

Na *análise do resultado*, é verificado se a resposta faz sentido tanto no contexto do problema como no conteúdo tratado no problema. A tabela abaixo relaciona a incógnita procurada para solucionar o problema e o espaço de possíveis soluções:

Porcentagens	Reais $\mathbb{R}$
Probabilidade	Intervalo real $[0, 1]$
Quantidade de objetos	Naturais $\mathbb{N}$
Razões e proporções entre inteiros ou racionais	Racionais $\mathbb{Q}$
Razões e proporções entre reais	Reais $\mathbb{R}$
Medidas	Reais $\mathbb{R}$

Na subetapa *conhecimentos necessários* é determinado os tópicos tratados no problema. Neste trabalho dividimos os tópicos em 5 categorias de acordo com o edital de 2013 do Enem:

- **Conhecimentos numéricos:** operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

- **Conhecimentos geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

- **Conhecimentos de estatística e probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

- **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

- **Conhecimentos algébricos/geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Capítulo 3

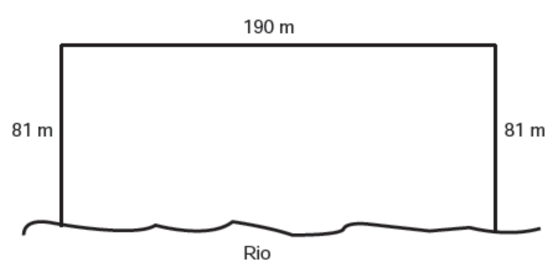
Aplicações

Neste capítulo são resolvidas todas as questões de matemática do Enem de 2013 aplicando a heurística descrita do Capítulo 2.

Questões de matemática: $2^{\underline{o}}$ Dia - Caderno rosa - Enem 2013

Questão 136

Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é:

(a) 6 $\quad (b)$ 7 $\quad (c)$ 8 $\quad (d)$ 11 $\quad (e)$ 12

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $LE = 81\ m$, comprimento, em metros, da lateral esquerda do terreno;
- $LD = 81\ m$, comprimento, em metros, da lateral direita do terreno;
- $LH = 190\ m$, comprimento, em metros, do lado do terreno oposto à margem;
- $R = 48\ m$, quantidade total de tela em um rolo, em metros.

Dados desconhecidos:

- T, é a quantidade de tela, em metros, necessária para se cercar o terreno;
- N, é o número mínino de rolos de telas necessários para cercar o terreno.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $T = LE + LD + LH$, em metros;
- N, é o menor inteiro maior ou igual à $\frac{T}{R}$.

(III) Execução

Primeiro vamos calcular T:

$$T = LE + LD + LH = 81 + 81 + 190 = 352\ m$$

.

Vamos escrever $\frac{T}{R}$ de uma forma que fique fácil encontrar N:

$$\frac{T}{R} = \frac{352}{48} = \frac{22}{3} = \frac{21}{3} + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3}$$

.

Como N é o menor inteiro maior ou igual a $7 + \frac{1}{3}$. Segue que $N = 8$.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O número mínimo necessário de rolos para se cercar o terreno é de 8 rolos. Portanto alternativa (c).

Análise do resultado:

- O resultado é um número natural.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 137

Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

(a) 300 (b) 360 (c) 400 (d) 480 (e) 600

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- T_1 = 1500 telhas, é a carga máxima de telhas do caminhão;
- T_2 = 1200 tijolos, é a carga máxima de tijolos do caminhão;
- T_3 = 900 telhas, é a carga atual de telhas do caminhão.

Dados desconhecidos:

- X_e, é a quantidade de telhas que faltam para completar a carga máxima de telhas do caminhão, e que deve ser convertida em quatidade de tijolos;
- X_i, é a quantidade de tijolos obtida da conversão de X_e telhas, em tijolos.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $X_e = T_1 - T_3$;
- $\frac{X_i}{X_e} = \frac{T_2}{T_1}$.

(III) Execução

Primeiro vamos determinar X_e:

$$X_e = T_1 - T_3 = 1500 - 900 = 600 \ telhas.$$

Agora vamos determinar X_i:

$$\frac{X_i}{X_e} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow X_i = \frac{600 \times 1200}{1500} = 480 \ tijolos.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O número máximo de tijolos que, somados ao número atual de telhas no caminhão, não ultrapasse a carga máxima é de 480 tijolos. Portanto alternativa (d).

Análise do resultado:

- O resultado é um número natural.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 138

As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro abaixo apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período.

De acordo com essa projeção, a quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 à 2021 será de:

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

(a) 497, 25 (b) 500, 85 (c) 502, 87 (d) 558, 75 (e) 563, 25

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

Neste caso temos vários dados conhecidos e, por se tratar de uma tabela cujos valores apontam para um crescimento cosntante, convém então indexá-los. Denotaremos por X_i a produção de arroz, em toneladas, no ano $2011 + i$, com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ou seja $X_1 = 50, 25$, corresponde à produção de arroz no ano de 2012, $X_2 = 51, 50$, corresponde à produção de arroz no ano de 2013, e assim por diante, até o ano de 2021.

Dados desconhecidos:

- C, é a constante positiva de crescimento dos termos da progressão aritmética representada pela sequência de valores da tabela;
- X_{10}, é a produção de arroz correspondente ao ano de 2021, em toneladas;
- S_{10}, é a quantidade de arroz produzida no período de 2012 à 2021 em toneladas, ou seja, a soma dos dez primeiros termos da progressão aritmética sugerida pela tabela.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $X_1 = 50, 25$, é o valor do primeiro termo da sequência, em toneladas;
- $C = X_2 - X_1$, é a constante de crescimento da sequência, em toneladas;

- $X_{10} = X_1 + (10 - 1)C$, é o valor do décimo termo da sequência, em toneladas;
- $S_{10} = \frac{(X_1+X_{10})\times 10}{2}$, é a soma dos dez primeiros termos da sequência, em toneladas.

(III) Execução

Primeiro vamos calcular a constante C:

$$C = X_2 - X_1 = 51,50 - 50,25 = 1,25 \ toneladas.$$

Agora vamos calcular o valor de X_{10}:

$$X_{10} = X_1 + (10 - 1)C = 50,25 + 9 \times 1,25 = 50,25 + 11,25 = 61,50 \ toneladas.$$

Finalmente vamos calcular o valor de S_{10}:

$$S_{10} = \frac{(X_1 + X_{10}) \times 10}{2} = \frac{(50,25 + 61,50) \times 10}{2} = \frac{1117,50}{2} = 558,75 \ toneladas.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A produção total de arroz entre os períodos de 2012 à 2021 é de $558,75$ toneladas. Portanto alternativa (d).

Análise do resultado:

- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numérico.

Questão 139

Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

$$(a)\ \frac{1}{2} \qquad (b)\ \frac{5}{8} \qquad (c)\ \frac{1}{4} \qquad (d)\ \frac{5}{6} \qquad (e)\ \frac{5}{14}$$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- A, é o conjunto de todos os alunos da escola;
- $\#A = 1200$, é o número de elementos do conjunto A;
- F_i, é o conjunto dos alunos que falam inglês;
- $\#F_i = 600$, é o número de elementos do conjunto F_i;
- F_e, é o conjunto dos alunos que falam espanhol;
- $\#F_e = 500$, é o número de elementos do conjunto F_e;
- N, é o conjunto dos alunos que não falam nem inglês e nem espanhol;
- $\#N = 300$, é o número de elementos do conjunto N.

Dados desconhecidos:

- F_1, é o conjunto dos alunos que falam inglês ou espanhol;
- F_2, é o conjunto dos alunos que falam inglês e espanhol;
- S_e, é o conjunto dos alunos que falam somente espanhol;
- P, é a probabilidade de, escolhido ao acaso um aluno dessa escola, ele falar espanhol, sabendo-se que ele não fala inglês.

(II) Planejamento

- $\#F_1 = \#A - \#N$;
- $\#F_2 = \#F_i + \#F_e - \#F_1$;

- $\#S_e = \#F_e - \#F_2$;
- $P = \frac{\#S_e}{\#A - \#F_i}$, P real e $0 \leq P \leq 1$.

(III) Execução
Vamos calcular $\#F_1$:

$$\#F_1 = 1200 - 300 = 900$$

Agora vamos calcular $\#F_2$:

$$\#F_2 = 600 + 500 - 900 = 200$$

Vamos calcular agora $\#S_e$:

$$\#F_e = 500 - 200 = 300$$

Finalmente, vamos calcular P:

$$P = \frac{300}{1200 - 600} = \frac{1}{2}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A probabilidade do aluno escolhido falar espanhol, sabendo-se que ele não fala inglês é de $\frac{1}{2}$. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

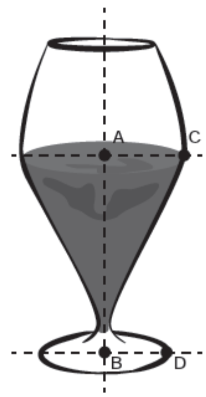
- O resultado é um número real entre [0,1].

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos, estatística e probabilidade.

Questão 140

Um restaurante utiliza, para servir bebidas, bandejas com bases quadradas. Todos os copos desse restaurante têm o formato representado na figura abaixo.



Considere que $\overline{AC} = \frac{7}{5}\overline{BD}$ e que L é a medida de um dos lados da base da bandeja. Qual deve ser o menor valor da razão $\frac{L}{\overline{BD}}$ para que uma bandeja tenha capacidade de portar exatamente quatro copos de uma só vez?

$$(a)\ 2 \qquad (b)\ \frac{14}{5} \qquad (c)\ 4 \qquad (d)\ \frac{24}{5} \qquad (e)\ \frac{28}{5}$$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $\overline{AC} = \frac{7\overline{BD}}{5}$, é a medida do raio da maior circunferência da taça;
- $\overline{BD}$, é a medida do raio da base da taça.

Dados desconhecidos:

- L, é a medida do lado da bandeja quadrada;
- $\frac{L}{\overline{BD}}$, é o menor valor da razão entre o lado L da bandeja e o raio $\overline{BD}$ da base da taça.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- colocando uma taça encostada na outra, e assumindo que os pontos das duas bases mais ditantes um do outro têm distância L, podemos então definir $L = 2\overline{AC} + 2\overline{BD}$.

- $\frac{L}{\overline{BD}} = \frac{2\overline{AC}+2\overline{BD}}{\overline{BD}}$

(III) Execução

Vamos determinar a razão pedida:

$$\frac{L}{\overline{BD}} = \frac{2\overline{BD}+2\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{14\overline{BD}}{5} + 2\overline{BD} = \frac{24}{5}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O menor valor da razão entre o lado da bandeja e o raio da base da taça é $\frac{24}{5}$. Portanto alternativa (d).

Análise do resultado:

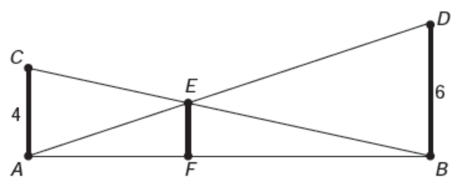
- O resultado é um número racional.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos geométricos.

Questão 141

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao plano do solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

(a) 1 m (b) 2 m (c) $2,4$ m (d) 3 m (e) $2\sqrt{6}$ m

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $\overline{AC} = 4$ m, comprimento do poste menor, em metros;
- $\overline{BD} = 6$ m, comprimento do poste maior, em metros;
- a figura, é composta de dois pares de triângulos semelhantes, $(ABC) \sim (FBE)$ e $(ABD) \sim (AFE)$.

Dados desconhecidos:

- $x = \overline{EF}\ m$;
- $y = \overline{AF}\ m$;
- $z = \overline{FB}\ m$;
- $w = y + z = \overline{AB}\ m$.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- De $(ABC) \sim (FBR)$ temos que

$$\frac{w}{4} = \frac{z}{x}. \tag{3.1}$$

- De $(ABD) \sim (AFE)$, temos que

$$\frac{w}{6} = \frac{y}{x}. \tag{3.2}$$

(III) Execução

Somando as Equações (3.1) e (3.2) termo a termo, obtemos

$$\frac{w}{6} + \frac{w}{4} = \frac{y+z}{x}$$

e, substituindo $y + z$ por w segue que

$$\frac{w}{6} + \frac{w}{4} = \frac{w}{x}.$$

Logo

$$\frac{w}{6} + \frac{w}{4} = \frac{w}{x} \Rightarrow \frac{5w}{12} = \frac{w}{x} \Rightarrow x = 2,4\ m.$$

Obs.: Chamando de a, b e c as respectivas medidas dos dois postes e da haste, este problema pode ser generalizado pela seguinte expressão:

$$c = \frac{ab}{a+b}$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O tamanho da haste é $2,4$ m. Portanto alternativa (c).

Análise do resultado:

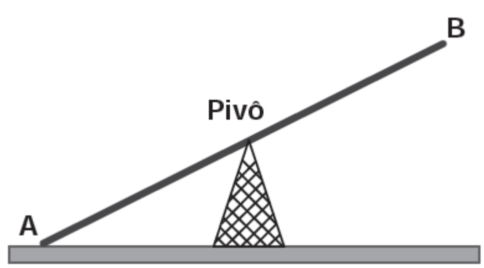
- O resultado é um número racional.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos e conhecimentos geométricos.

Questão 142

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:

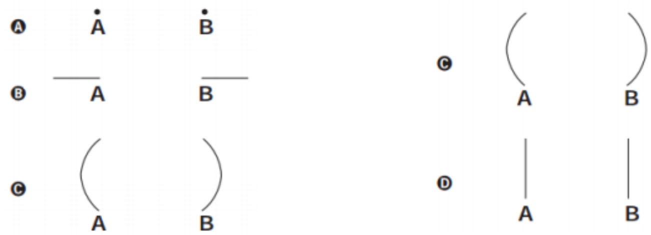


A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

Figura 3.1: Alternativas da questão 142



- Os dois braços da gangorra são iguais.

Dados desconhecidos:

- a forma e a posição da projeção ortogonal das extremidades A e B da gangora durante o seu movimento.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- quando a gangorra se encontra na posição dada pela figura do problema, as projeções ortogonais dos pontos A e B, estão mais próximas da base do pivô da gangorra, porém à medida que os braços da gangorra se movem para se posicionarem na horizontal, as projeções dos pontos A e B vão se afastando do pé do pivô, atingindo a maior distância quando os braços ficam na horizontal.

(III) Execução

Como o ponto (A) e também o ponto (B), fazem movimentos na forma de segmentos de círculo, suas projeções ortogonais sobre o solo são segmentos de retas com extremidades mais próximas do Pivô, quando a gangorra está na sua posição inclinada máxima e mais afastadas, quando na horizontal.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- As projeções ortogonais dos pontos (A) e (B) são segmentos de retas como os descritos na alternativa (b).

Análise do resultado:

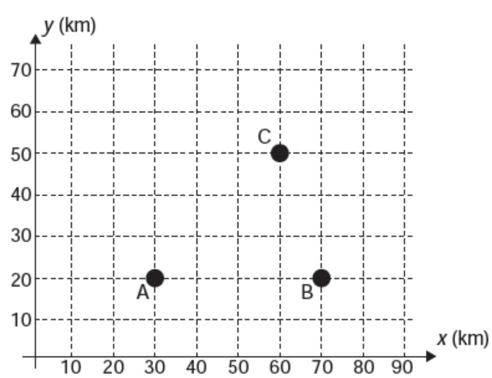
- O resultado das projeções ortogonais dos pontos (A) e (B) são segmentos de reta sobre o solo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos algébricos/geométricos.

Questão 143

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano abaixo.



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

(a) $(65; 35)$ (b) $(53; 30)$ (c) $(45; 35)$ (d) $(50; 20)$ (e) $(50; 30)$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- as coordenadas dos pontos $A(30;20)$, $B(70;20)$ e $C(60;50)$.

Dados desconhecidos:

- as coordenadas do ponto T(x;y) do gráfico equidistante dos pontos A, B e C;

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $T(x;y)$, é o ponto equidistante aos pontos A(30;20), B(70;20) e C(60;50) e seja d, essa distância;
- $(x-30)^2+(y-30)^2 = d^2$, $(x-70)^2+(x-20)^2 = d^2$ e $(x-60)^2+(y-50)^2 = d^2$;

(III) Execução

Desenvolvendo as equações definidas acima, obtemos:

- (I) $(x-30)^2 + (y-20)^2 = d^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 60x - 40y + 1300 = d^2$;
- (II) $(x-70)^2 + (y-20)^2 = d^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 140x - 40y + 5300 = d^2$;
- (III) $(x-60)^2 + (y-50)^2 = d^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 120x - 100y + 6100 = d^2$;

Igualando (I) e (II), temos:

$$x^2 + y^2 - 60x - 40y + 1300 = x^2 + y^2 - 140x - 40y + 5300 \Rightarrow x = 50.$$

Agora, igualando (I) e (III), segue que:

$$x^2 + y^2 - 60x - 40y + 1300 = x^2 + y^2 - 120x - 100y + 6100 \Rightarrow x + y = 80.$$

Ou seja:

$$50 + y = 80 \Rightarrow y = 30.$$

Obs.: Sabemos que, em qualquer movimento do cavalo em um mesmo tabuleiro de xadrez, ele percorre a mesma distância. Veja que, com base neste princípio, a resposta deste problema pode ser determinada por três movimentos adequados de um cavalo sobre um tabuleiro.(ver figura acima)

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A torre deve ser construída no ponto $T(50;30)$, alternativa (e).

Análise do resultado

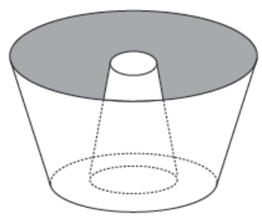
- O resultado é o ponto de coordenadas $T(50;30)$.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos algébricos/geométricos.

Questão 144

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

(a) um tronco de cone e um cilindro

(b) um cone e um cilindro

(c) um tronco de pirâmide e um cilindro

(d) dois troncos de cone

(e) dois cilindros

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- sólido com a forma de uma forma tradicional de bolo ou pudim.

Dados desconhecidos:

- as figuras geométricas tridimensionais que compõem a forma.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- se seccionarmos um cone reto por dois planos paralelos à base desse cone, vamos poder compor a figura com os dois troncos de cones obtidos;
- cone reto tem base circular e vértice, tronco de cone reto têm duas base circulares com medidas diferentes, pirâmide reta ou tronco de pirâmides reta têm bases poligonais, cilindro reto tem bases circulares de mesma medida. Temos ainda que só existe dois tipos de troncos na geomertia: tronco de cone e tronco de pirâmide.

(III) Execução
De acordo com as definições dos dados desconhecidos, se trata de dois troncos de cones.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A forma da figura é constituída de dois troncos de cones. Portanto alternativa (d).

Análise do resultado

- O resultado é dois sólidos geométricos.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos geométricos.

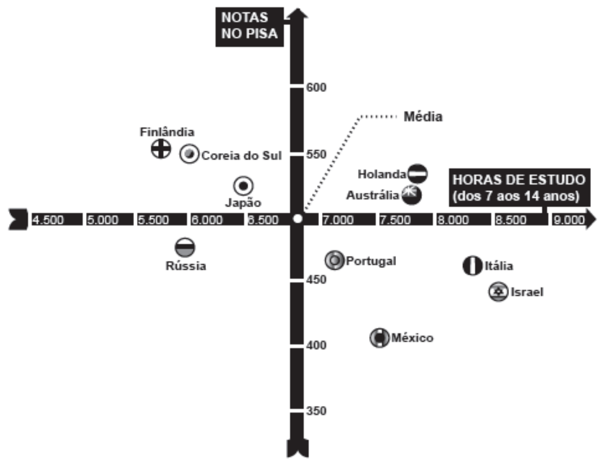
Questão 145

Uma falsa relação

O cruzamento da quantidade de horas estudadas com o desempenho no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) mostra que mais tempo na escola não é garantia de nota acima da média.

Dos países com notas abaixo da média nesse exame, aquele que apresenta maior quantidade de horas de estudo é:

NOTAS NO PISA E CARGA HORÁRIA (PAÍSES SELECIONADOS)*



* Considerando as médias de cada país no exame de matemática.

Nova Escola, São Paulo, dez. 2010 (adaptado).

(a) Finlândia

(b) Holanda

(c) Israel

(d) México

(e) Rússia

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- o gráfico que relaciona o desempeho escolar, representado no eixo vertical, com a quantidade de horas de estudo dos alunos de sete aos quatorze anos, representado no eixo horizontal.

Dados desconhecidos:

- o país com desempenho abaixo da média e com maior número de horas de estudo.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- O país com as características mencionadas, deve estar abaixo do eixo horizontal e o mais à direita possível do eixo vertical.

(III) Execução

Em conformidade com a definição do dado desconhecido, o país que se enquadra nas condições apresentadas é Israel.

(IV) Retrospecto.

Conclusão

- O país com a nota abaixo da média e com maior número de horas de estudos é Israel. Portanto alternativa (c).

Análise do resultado

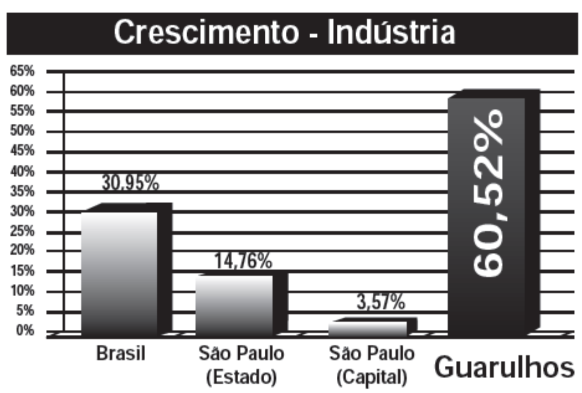
- O resultado é a imagem de um ponto no plano cartesiano.

Conhecimentos necessários:

- Conhecimentos geométricos e estatístico.

Questão 146

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

(a) 75, 28 (b) 64, 09 (c) 56, 95 (d) 45, 76 (e) 30, 07

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- o gráfico representativo dos percentuais de crescimento industrial de alguns centros econômicos, tais como Brasil, São Paulo (estado), São Paulo (capital) e Guarulhos;
- $P_1 = 3,57$ %, é o menor crescimento apresentado no gráfico;
- $P_2 = 60,52$ %, é o maior crescimento apresentado no gráfico.

Dados desconhecidos:

- D_p, é a diferença percentual entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- $D_p = P_2 - P_1$ %

(III) Execução

Vamos então determinar D_p:

$$D_p = 60,52 - 3,57 = 56,9$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A diferença entre o maior e o menor percentual de crescimento é de 56, 95 %. Portanto alternativa (c).

Análise do resultado:

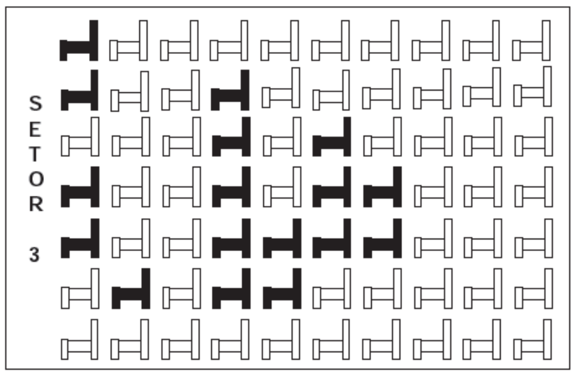
- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos e conhecimentos estatísticos.

Questão 147

Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

$$(a)\ \frac{17}{70} \quad (b)\ \frac{17}{53} \quad (c)\ \frac{53}{70} \quad (d)\ \frac{53}{17} \quad (e)\ \frac{70}{17}$$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $N_t = 70$ é o número total de cadeiras do setor três do teatro;
- $N_r = 17$, é o número total de cadeiras reservadas do setor três do teatro;

Dados desconhecidos:

- R, é a razão entre o número de cadeiras reservadas e o número total de cadeiras do setor 3 do teatro.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- $R = \frac{N_r}{N_t}$.

(III) Execução

É só determinar R:

$$R = \frac{N_r}{N_t} = \frac{17}{70}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A razão entre o número de cadeiras reservadas e o número total de cadeiras do setor 3 do teatro é $\frac{17}{70}$. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

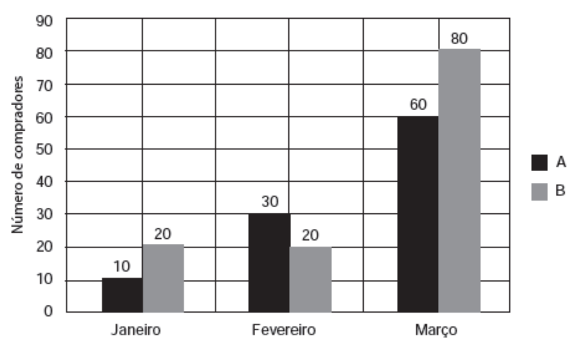
- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos e conhecimentos estatísticos.

Questão 148

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve o gráfico abaixo.



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$$(a)\ \frac{1}{20} \quad (b)\ \frac{3}{242} \quad (c)\ \frac{5}{22} \quad (d)\ \frac{6}{25} \quad (e)\ \frac{7}{15}$$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $N_a = 100$ pessoas, é o número de pessoas que compraram o produto A;
- $N_b = 120$ pessoas, é o número de pessoas que compraram o produto B;
- $A_f = 30$ pessoas, é o número de pessoas que compraram o produto A em Fevereiro;
- $B_f = 20$ pessoas, é o númerao de pessoas que compraram o produto B em Fevereiro;

Dados desconhecidos:

- P_1, é a probabilidade do comprador do produto A sorteado, ter feito sua compra em Fevereiro;
- P_2, é a probabilidade do comprador do produto B sorteado, ter feito sua compra em Fevereiro;
- P_3, é a probabilidade dos dois sorteados, terem feito suas compras em Fevereiro.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $P_1 = \frac{A_f}{T_a}$, tal que $0 \leq P_1 \leq 1$;
- $P_2 = \frac{B_f}{T_b}$, tal que $0 \leq P_2 \leq 1$;
- $P_3 = P_1 \times P_2$, tal que $0 \leq P_3 \leq 1$.

(III) Execução

Vamos então determinar P_1, P_2 e finalmente P_3

$$P_1 = \frac{A_f}{T_a} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10};$$
$$P_2 = \frac{B_f}{T_b} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6};$$
$$P_3 = P_1 \times P_2 = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A probabilidade dos dois compradores sorteados terem feito suas compras em fevereiro é $\frac{1}{20}$. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real entre [0,1].

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos estatíscos e de probabilidade.

Questão 149

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

O empresário decidiu comprar a empresa

(a) F. (b) G. (c) H. (d) M. (e) P.

(I) Compreensão.

Dados conhecidos:

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

- L_f = 24 milhões, lucro da empresa F;
- L_g = 24 milhões, lucro da empresa G;
- L_h = 25 milhões, lucro da empresa H;
- L_m = 15 milhões, lucro da empresa M;
- L_p = 9 milhões, lucro da empresa P;
- $T_f = 3,0$ anos, tempo de existência da empresa F;
- $T_g = 2,0$ anos, tempo de existência da empresa G;
- $T_h = 2,5$ anos, tempo de existência da empresa H;
- $T_m = 1,5$ anos, tempo de existência da empresa M;
- $T_p = 1,5$ anos, tempo de existência da empresa P.

Dados desconhecidos:

- M_f, é o lucro médio da empresa F;
- M_g, é o lucro médio da empresa G;
- M_h, é o lucro médio da empresa H;
- M_m, é o lucro médio da empresa M;
- M_p, é o lucro médio da empresa P;
- M_l, é o maior lucro médio entre as empresas.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $M_f = \frac{L_f}{T_f}$ em milhões por ano;
- $M_g = \frac{L_g}{T_g}$ em milhões por ano;;
- $M_h = \frac{L_h}{T_h}$ em milhões por ano;;
- $M_m = \frac{L-m}{T_m}$ em milhões por ano;;
- $M_p = \frac{L_p}{T_t}$ em milhões por ano.

(III) Execução

Vanos determinar M_f, M_g, M_h, M_m e M_p:

$M_f = \frac{L_f}{T_f} = \frac{24}{3} = 8$ milhões por ano; $M_g = \frac{L_g}{T_g} = \frac{24}{2} = 12$ milhões por ano; $M_h = \frac{L_h}{T_h} = \frac{25}{2{,}5} = 10$ milhões por ano; $M_m = \frac{L_m}{T_m} = \frac{15}{1{,}5} = 10$ milhões por ano; $M_p = \frac{L_p}{T_t} = \frac{9}{1{,}5} = 6$ milhões por ano.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A Empresa que será comprada será a G, com um lucro médio de 12 milhões de reais por ano. Portanto alternadiva (b).

Análise do resultado:

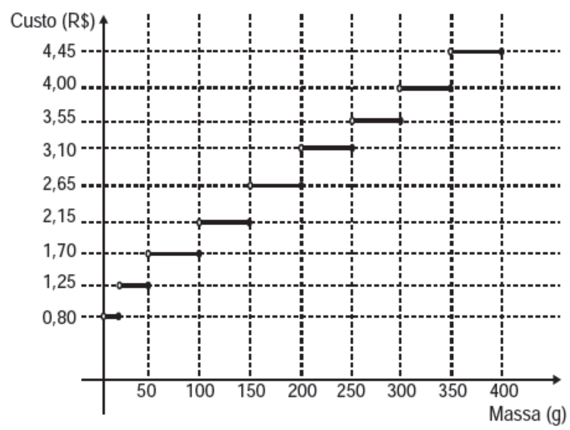
- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos e estatístico.

Questão 150

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de $100g$, três de $200g$ e uma de $350g$. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

(a) $8,35$ (b) $12,50$ (c) $14,40$ (d) $15,35$ (e) $18,05$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- número de cartas enviadas: duas cartas de 100 gramas, três cartas de 200, e uma carta de 350 gramas;
- custo de cada tipo de carta enviada: cartas de 100 gramas, $1,70$ reais, cartas de 200 gramas, $2,65$ reais e cartas de 350 gramas, $4,00$ reais.

Dados desconhecidos:

- C_t, é o custo total para enviar três cartas de 100 gramas, duas de 200 gramas e uma de 350 gramas.

(II) Planejamento

definição do dado desconhecido:

- o custo total será dado pela soma dos produtos das quantidades de cada tipo de cartas pelos seus respectivos custos.

(III) Execução

Vamos determinar C_t):

$$C_t = 3 \times 1,70 + 2 \times 2,65 + 1 \times 4,00 = 5,10 + 5,30 + 4,00 = 14,40.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O custo total para enviar as seis cartas é de 14,40 reais. Portanto alternativa (c).

Análise do resultado:

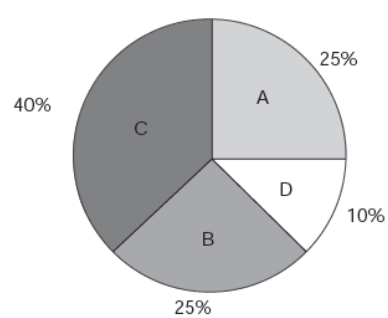
- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos e estatísticos.

Quesão 151

Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: $A = 200,00$ reais; $B = 300,00$ reais; $C = 400,00$ reais e $D = 600,00$ reais. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é

(a) $300,00$ (b) $340,00$ (c) $350,00$ (d) $375,00$ (e) $400,00$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $N = 200$ é o número total dos hotéis pesquisados;
- $N_1 = 50$ hoteis, é o número de hotéis cuja diária do quarto padrão custa $300,00$ reais e são 25 por cento de 200 hotéis;
- $N_2 = 80$ hoteis, é o número de hotéis cuja diária do quarto padrão custa $400,00$ reais e são 40 por cento de 200 hotéis, ou seja, 80 hotéis;
- N_3, é o número de hotéis cuja diária do quarto padrão custa $600,00$ reais e são 10 por cento de 200 hotéis, ou seja, 20 hotéis;

Dados desconhecidos:

- C_m, é o custo mediano da diária, de um quarto padrão nos hotéis pesquisados, em reais.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- o valor mediano, para dados em rol, com número par de termos, é obtido pela média aritmética dos valores do termo médio e do termo imediatmente subsequente, no caso o centésimo termo de valor $300,00$ reais e o centésimo primeiro termo de valor $400,00$ reais;
- $C_m = \frac{T_{100}+T_{101}}{2}$.

(III) Execução

Vamos então detarminar C_m:

$$C_m = \frac{T_{100} + T_{101}}{2} = \frac{300,00 + 400,00}{2} = frac700,002 = 350,00\ reais.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O valor mediano dos hotéis da pesquisa é de $350,00$ Reais. Portanto alternadiva (c).

Análise do resultado:

- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos estatísticos.

Questão 152

Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20 por cento abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10 por cento sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava $50,00$ reais antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

(a) $15,00$ (b) $14,00$ (c) $10,00$ (d) $5,00$ (e) $4,00$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $C_d = 50,00$, é custo do produto sem desconto, em reais;
- D_1, é o valor do desconto para todos os clientes, e é de 20 por cento sobre o preço original dos produtos;
- D_a, é o valor do desconto adicional, sobre o preço já descontado do desconto de 20 por cento, e é de 10 por cento.

Dados desconhecidos:

- V_1, é o valor já descontado do primeiro desconto, em reais;
- V_a, é o valor do desconto adicional, em reais.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $V_1 = C - C \times D_1$;
- $V_a = V_1 \times D_a$.

(III) Execução

Vamos determinar, então V_1 e V_a:

$$V_1 = C - C \times D_1 = 50,00 - 50,00 \times 0,20 = 50,00 - 10,00 = 40,00 \ Reais.$$

$$V_a = V_1 \times D_a = 40,00 \times 0,10 = 4,00 \ Reais.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O valor do desconto adicional é de $4,00$ reais. Portanto alternadiva (e).

Análise do resultado:

- O resultado é um racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 153

Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100 da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90 de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

(a) A, A, A, A (b) A, B, A, B (c) B, B, B, A (d) B, A, A, B (e) B, B, B, B

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $A_a = 2,00$ reais, arroz do tipo A;
- $A_b = 1,70$ reais, arroz do tipo B;
- $F_a = 4,50$ reais, feijão do tipo A;
- $F_b = 4,10$ reais, feijão do tipo B;
- $S_a = 3,80$ reais, soja do tipo A;
- $S_b = 3,50$ reais, soja do tipo B;
- $M_a = 6,00$ reais, milho do tipo A;
- $M_b = 5,30$ reais, milho do tipo B.
- Se, 90 por cento do preço de um produto do tipo A, for menor do que o preço total do produto B correspondente, o produto A será comprado, o contrário, compra-se o produto B.

Dados desconhecidos:

- C_a, é o valor de noventa por cento do preço do arroz tipo A;
- C_f, é o valor de noventa por cento do preço do feijão tipo A;
- C_s, é o valor de onoventa por cento do preço da soja tipo A;

- C_mz, é o valor de noventa por cento do preço do milho tipo A.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $C_a = 0,9A_a$;
- $C_f = 0,9F_a$;
- $C_s = 0,9S_a$;
- $C_m = 0,9M_a$.

(III) Execução

Vamos determinar os custos C_a, C_f, C_s e C_m, já comparando esses custos, com os custos de seus respectivos similares do tipo B:

$C_a = 0,9 \times 2,00 = 1,80 > A_b = 1,70$, compra-se o arroz tipo B. $C_f = 0,9 \times 4,50 = 4,05 < F_b = 4,10$, compra-se o feijão tipo A. $C_s = 0,9 \times 3,80 = 3,42 < S_b = 3,50$, compra-se a soja tipo A. $C_m = 0,9 \times 6,00 = 5,40 > M_b = 5,30$, compra-se o milho tipo B.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

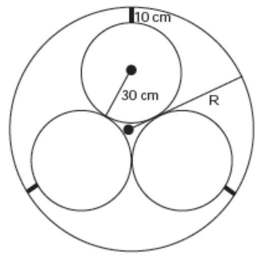
- Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que serão comprados são respectivamente: B, A, A e B. Portanto alternativa (d).

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 154

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize $1,7$ como aproximação para $\sqrt[2]{3}$. O valor de R, em centímetros, é igual a

(a) $65,0$ (b) $65,5$ (c) $74,0$ (d) $81,0$ (e) $91,0$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $r = 30,0$ cm, é a medida de um dos raios, de um dos três canos iguais;
- $d = 10,0$ cm, é a medida da distância mínima entre os canos soldados e o cano de maior Raio.

Dados desconhecidos:

- R, é a medida do raio do cano de maior raio;
- L, é a medida do lado do triângulo equilátero com vértices nos centros dos tubos de menor raios;
- H, é a medida da altura do triângulo equilátero, com vértices nos centros dos canos soldados.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $L = 2 \times r = 2 \times 30,0 = 60,0$ cm;
- $H = L \times \frac{\sqrt[2]{3}}{2}$ cm;
- $R = H \times \frac{2}{3} + r + d$ cm.

(III) Execução

Vamos determinar H:

$$H = 60,0 \times \frac{\sqrt[2]{3}}{2} = 30,0 \times 1,7 = 51,0\ cm.$$

Agora determinamos R:

$$R = 51,0 \times \frac{2}{3} + 30,0 + 10,0 = 34,0 + 40,0 = 74,0\ cm.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A medida do raio maior é $74,0$ cm. Portanto alternadiva (c).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos geométricos.

Questão 155

O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice. A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas: Dados relativos à produção das vacas

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a

$(a)\ Malhada \quad (b)\ Mamona \quad (c)\ Maravilha \quad (d)\ Mateira \quad (e)\ Mimosa$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

Dados relativos à produção das vacas

Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

- T_1 = 360 dias, é o tempo de lactação da vaca Malhada;
- P_1 = 12, 0 Kg, é a produção diária da vaca Malhada;
- I_1 = 15 meses, é o intevalo entre partos da vaca Malhada;
- T_2 = 310 dias, é o tempo de lactação da vaca Mamona;
- P_2 = 11, 0 Kg, é a produção diária davaca Mamona;
- I_2 = 12 meses é o intervalo entre partos da vaca Mamona;
- T_3 = 260 dias, é o tempo de lactação da vaca Maravilha;
- P_3 = 14, 0 Kg, é a produção diária da vaca Maravilha;
- I_3 = 12 meses, é o intervalo entre partos da vaca Maravilha;
- T_4 = 310 dias, é o tempo de lactação da vaca Mateira;
- P_4 = 13, 0 Kg, é a produção diária da vaca Mateira;
- I_4 = 13 meses, é o intervalo entre parto da vaca Mateira;
- T_5 = 270 dias, é o tempo de lactação da vaca Mimosa;
- P_5 = 12 Kg, é a produção diária da vaca Mimosa;
- I_5 = 11 meses, é o intervalo entre partos da vaca Mimosa.
- a eficiência E da vaca, é obtida multiplicando-se o tempo de lactação em dias, pela produção diária de leite em Kg, dividido pelo intervalo entre partos, em meses;

- a vaca com o maior E, será a mais eficiente.

Dados desconhecidos:

- E_1, é a eficiência da vaca Malhada;
- E_2, é a eficiência da vaca Mamona;
- E_3, é a eficiência da vaca Maravilha;
- E_4, é a eficiência da vaca Mateira;
- E_5, é a eficiência da vaca Mimosa.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $E_1 = \frac{T_1 \times P_1}{I_1}$;
- $E_2 = \frac{T_2 \times P_2}{I_2}$;
- $E_3 = \frac{T_3 \times P_3}{I_3}$;
- $E_4 = \frac{T_4 \times P_4}{I_4}$;
- $E_5 = \frac{T_5 \times P_5}{I_5}$.

(III) Execução

Vamos então determinar E_i:

$$E_1 = \frac{360 \times 12,0}{15} = 288,0;$$
$$E_2 = \frac{310 \times 11,0}{12} = 284,2;$$
$$E_3 = \frac{260 \times 14,0}{12} = 303,3;$$
$$E_4 = \frac{310 \times 13,0}{13} = 310,0;$$
$$E_5 = \frac{270 \times 12,0}{11} = 294,5.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão

- A vaca mais eficiênte é a Mateira. Portanto alternativa (d).

Análise do resultado

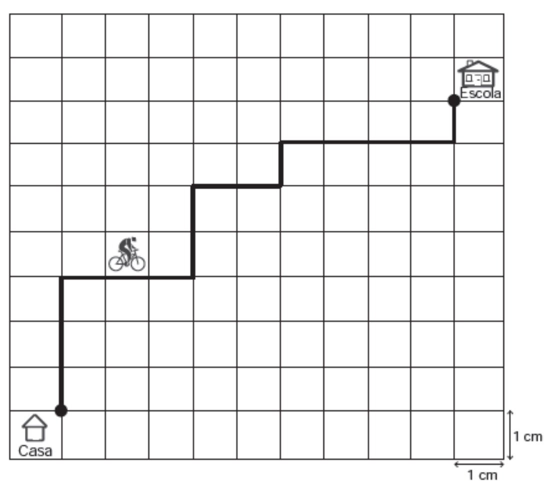
- O resultado é o nome da vaca de maior eficiência, que é a imagem de um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos e estatísticos.

Questão 156

A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala $1 : 25000$, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 20 (e) 40

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $E = \frac{1}{25000}$, é a escala do mapa que representa o trajeto feito pelo aluno;
- $N = 10$, é o número total entre idas e vindas no percurso;
- $C = 16$ cm, é o comprimento de cada percurso no mapa.

Dados desconhecidos:

- Q_c, é a quantidade de cm percorridos pelo aluno na fase de implantação do programa, no mapa;
- Q_k, é a quantidade de Km percorridos pelo aluno na fase de implantação do programa, no trajeto real.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $Q_c = NC$, em centímetros;
- $Q_k = Q_c \times 0,25$, em quilômetros.

(III) Execução

Vamos determinar Q_c e Q_k respectivamente:

$$Q_c = 10 \times 16 = 160\ cm.$$

$$Q_k = 160 \times 0,25 = 40\ Km.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A quantidade de quilômetros percorridos pelo aluno é 40. Portanto alternativa (e).

Análise do resultado

- O resultado é um real positivo.

Conhecimento necessário

- Conhecimentos numéricos e estatísticos.

Questão 157

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x,y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, $I, II, III, IVeV$, como se segue:

- (I), é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;
- (II), é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de $-1a1$;
- (III), é o quadrado formado pelos vértices $(-2,1), (-1,1), (-1,2)$ e $(-2,2)$;
- (IV), é o quadrado formado pelos vértices $(1,1), (2,1), (2,2)$ e $(1,2)$;
- (V), é o ponto $(0,0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada, obtendo uma figura. Qual das alternativas dadas na Figura 3.2 foi desenhada pelo professor?

(I) Compreensão

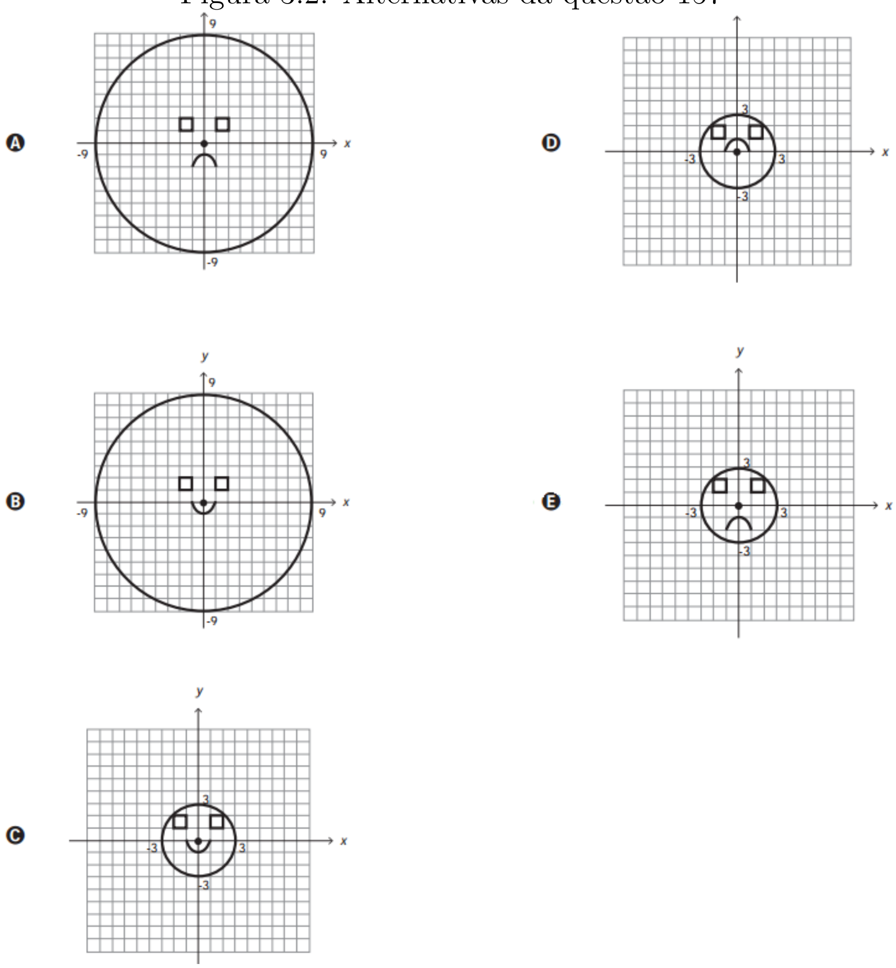
Dados conhecidos:

- (I), é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;
- (II), é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;
- (III), é o quadrado formado pelos vértices $(-2,1), (-1,1), (-1,2)$ e $(-2,2)$;
- (IV), é o quadrado formado pelos vértices $(1,1), (2,1), (2,2)$ e $(1,2)$;
- (V), é o ponto $(0,0)$.

Dados desconhecidos:

- a figura desenhada pelo professor.

Figura 3.2: Alternativas da questão 157



(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos

- I, é uma circunferência de centro no ponto $V(0,0)$ e raio 3 e de equação reduzida $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$;
- II, é um segmento de parábola, com a concavidade para baixo e abaixo do ponto $V(0,0)$, pois a equação quadrática da parábola tem discriminante negativo;
- os olhos de todas as carinhas são idênticos, logo não inteferem na análise das figuras.

(III) Execução
Com as informações cosntantes do planejamento, já é suficiente para concluir que se trata do desenho da alternativa (e).

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O desenho feito pelo professor, é a carinha da alternativa (e).

Análise do resultado:

- O resultado é uma figura geométrica.

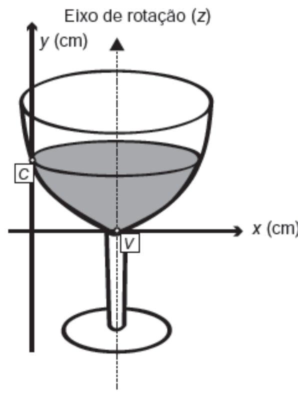
Conhecimento necessário

- Conhecimentos algébricos.

Questão 158

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

A função real que expressa a parábola, no plano
cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6x + C$
onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é



(a) 1 $\quad$ (b) 2 $\quad$ (c) 4 $\quad$ (d) 5 $\quad$ (e) 6

Compreensão

Dados conhecidos:

- X_v, é o x do vértíce da parábola;
- Y_v, é o y do vértice da parábola;
- C, é a medida da altura do líquido contido na taça e também é o termo independente de x, na função quadrática do problema;
- A, é o coeficiênte do termo em x^2 na função e vale $\frac{2}{3}$ ou $1,5$.

Dados desconhecidos:

- o valor da constante C.

Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $X_v = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-6)}{\frac{3}{2}\times 2} = 2$;
- $Y_v = 0 \Rightarrow F(x_v) = 0$.

(III) Execução

Vamos obter o valor de C, fazendo $F(x_v) = 0$:

$$\frac{2}{3}\, times 2^2 - 6 \times 2 + C = 0 \Rightarrow C = 6.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O valor da constante C é 6. Portanto alternativa (e).

Análize do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos algébricos.

Questão 159

Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M´´.

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado)

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

$(a)\, S = KM \quad (b)\, S = KM^{\frac{1}{3}} \quad (c)\, S = K^{\frac{1}{3}}M^{\frac{1}{3}} \quad (d)\, S = K^{\frac{1}{3}}M^{\frac{2}{3}} \quad (e)\, S = K^f rac13M^2$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- S, é a área da superfície de um mamífero;
- M, é a massa do mamífero;

- K, é a constante de proporcionalidade, $K > 0$;
- "O cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M´´.

Dados desconhecidos:

- a equação de S em função de K e M.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- $S^3 = KM^2$.

(III) Execução

Vamos determinar S:

$$S^3 = KM^2 -> S = \sqrt[3]{KM^2} -> S = K^{\frac{1}{3}}M^{\frac{2}{3}}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A expressão que relaciona a superfície S do corpo do animal com a sua massa M é $S = K^{\frac{1}{3}}M^{\frac{2}{3}}$. Portanto alternativa (d).

Conhecimentos necessários:

- Conhecimentos algébricos.

Questão 160

A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

$$F = G\frac{m_1 \times m_2}{d^2}.$$

onde m_1 e m_2 correspondem às massas dos corpos, d à distância entre eles, G à constante universal da gravitação e F à força que um corpo exerce sobre o outro.

Figura 3.3: Trajetória dos satélites A, B, C, D e E

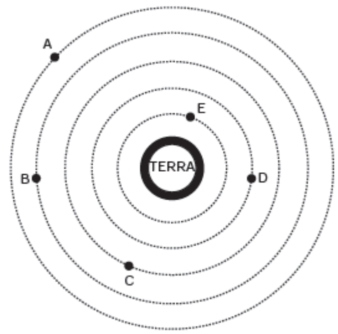
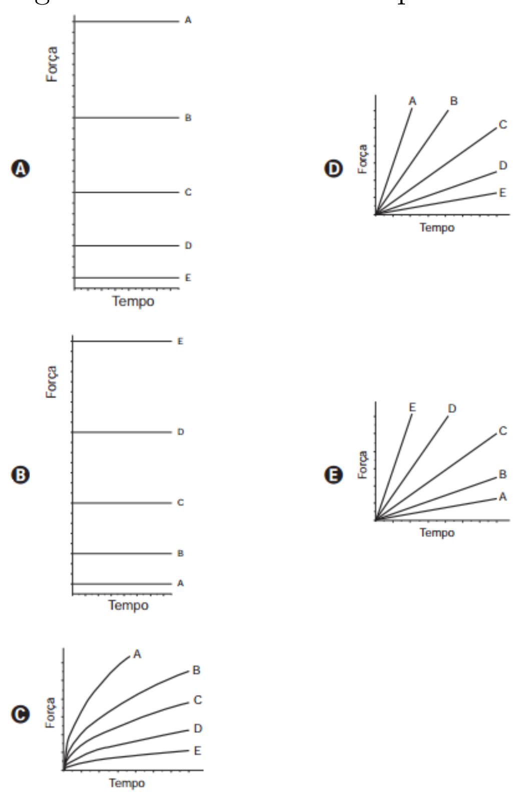


Figura 3.4: Alternativas da questão 160



O esquema da figura 3.3 representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.

Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $F = G\frac{m_1 \times m_2}{d^2}$, ou seja, a força é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas;
- As cinco órbitas circulares dos cinco satélites que estão afastados da terra na ordem crescente de suas distâncias, E, D, C, B, e A;
- A distância de cada satélite até à terra no decorrer do tempo é constante e as massas dos satélites são iguais.

Dados desconhecidos:

- o gráfico que expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- a intensidade da força sobre cada satélite é cosntante no decorrer do tempo, diminuindo de um satélite para outro, à medida em que ele esteja mais afastado da terra.

(III) Execução

A ordem crescente das forças, têm a ordem contrária das respectivas distâncias de cada satélite até a terra.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A ordem crescente das forças é: A, B, C, D e E. Portanto alternativa (b).

Conhecimento necessário

- Conhecimentos algébricos.

Questão 161

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15 com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando $0,26$ como valor aproximado para a tangente de 15 e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

$(a)\, menorque 100\, m^2$ $(b)\, entre 100\, m^2 e 300\, m^2$ $(c)\, entre 300\, m^2 e 500 m^2$ $(d)\, entre 500\, m^2 e 700 m^2$ $(e)\, m$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- H = 114 m, altura do prédio, em metros;

- Considerar tangente de 15 igual a $0,26$.

Dados desconhecidos:

- L, é a medida de um dos lados do quadrado da base do prédio, em m;

- A, é a área da base de um dos prédios em m^2.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- a altura H do prédio, forma com um dos lados L do quadrado de sua base, um triâgulo retângulo do qual, H é o cateto adjascente e L, o cateto oposto do ângulo de 15 desse triângulo, logo $\tan(15) = \frac{L}{H}$;

- $A = L^2\ m^2$.

(III) Execução

Primeiro vamos determinar o valor de L:

$$\tan(15) = \frac{L}{H} \Rightarrow 0,26 = \frac{L}{114} \Rightarrow L = 0,26 \times 114 \Rightarrow L = 29,64\ m.$$

Agora podemos determinar A:

$$A = L^2 = 29,64^2 = 878,53 \Rightarrow 700\ m^2.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

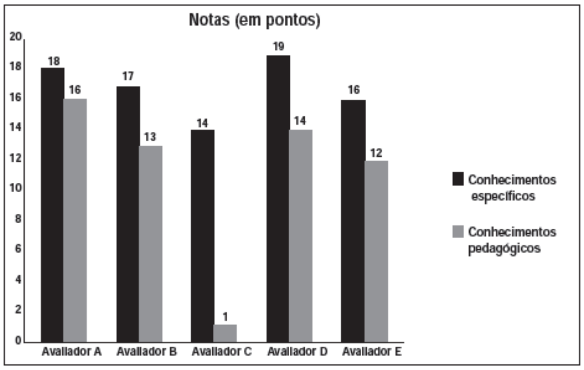
- A área ocupada por uma das bases de um dos prédios é de $878,53\ m^2$, que é maior do que $700\ m^2$. Portanto alternativa (e)

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos algébricos/gemétricos.



Questão 162

As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.

Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

$(a)\ 0,25\, pontomaior\ \ (b)\ 1,00\, pontomaior\ \ (c)\ 1,00\, pontomenor\ \ (d)\ 1,25\, pontomaior\ \ (e)\ 2,00\, pont$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $N = 10$, é o número de notas atribuídas pelos professores;
- $18, 16, 17, 13, 14, 1, 19, 14, 16, 12$, são todas as notas;
- 19 e 1 a maior e a menor nota respectimente;
- $N_1 = 8$, é o número de notas, descontadas a maior e a menor delas.

Dados desconhecidos:

- S_1, é a soma das dez notas;

- S_2, é a soma das dez notas, subtraídas da maior e da menor nota;
- M_1, é a média aritmética das dez notas;
- M_2, é a média aritmética das oito notas restantes;
- a relação entre as duas médias.

Planejamento.

Definição dos dados desconhecidos:

- $S_1 = 18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 1 + 19 + 14 + 16 + 12 = 140$ pontos;
- $S_2 = 18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 14 + 16 + 12 = 120$ pontos;
- $M_1 = \frac{S_1}{N}$ pontos;
- $M_2 = \frac{S_2}{N_1}$ pontos.

(III) Execução

Vamos então, determinar as médias M_1 e M_2:

$$M_1 = \frac{140}{10} = 14\ pontos.$$

$$M_2 = \frac{120}{8} = 15\ pontos.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A nova média é $1,00$ ponto maior que a primeira. Portanto alternativa (b).

Análise do resultado

- O resltado é um número racional positivo.

Conhecimentos necessários:

- Conhecimentos estatísticos.

Questão 163

Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

$$(a)\ \frac{62^2}{10^6} \quad (b)\ \frac{62!}{10!} \quad (c)\ \frac{62!4!}{10!56!} \quad (d)\ 62! - 10! \quad (e)\ 62^2 - 10^6$$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $P = 6$, é o número de dígitos de cada uma das duas senhas;
- $N_1 = 10$, é o número de dígitos distintos no primeiro sistema que são: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$;
- $N_2 = 62$, é o número de dígitos distintos no segundo sistema, 10 algarismos, 26 letras maiúsculas e 26 letras minúsculas.

Dados desconhecidos:

- S_1, é o total de senhas do primeiro sistema;
- S_2, é o total de senhas do segundo sistema;
- $C = \frac{S_2}{S_1}$, é o coeficiente de melhora do novo sistema.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $S_1 = N_1 \times N_1 \times N_1 \times N_1 \times N_1 \times N_1 = (N_1)^P$, com $P = 6$ e $N_1 = 10$;

- $S_2 = N_2 \times N_2 \times N_2 \times N_2 \times N_2 \times N_2 = (N_2)^P$, com $P = 6$ e $N_2 = 62$;
- $C = \frac{S_2}{S_1}$.

Execução

Vamos então determinar S_1, S_2 e C:

$$S_1 = 10^6.$$

$$S_2 = 62^6.$$

$$C = \frac{62^6}{10^6}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão

- O coeficiente de melhora do novo sistema é de $\frac{(62)^6}{(10)^6}$. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado

- O resultado é uma expressão que representa um número racional positivo.

Conhecimento necessário

- Conhecimentos numéricos.

Questão 164

Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota de água tem volume de $0,2$ mL. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

(a) $0,2$ (b) $1,2$ (c) $1,4$ (d) $1,29$ (e) $64,8$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $V_g = 0,2$ mL, é o volume de uma gota de água, em mililitros;
- $T_g = 3$ s, é o itervalo de tempo entre gotas, em segundos;
- $T_t = 6$ h, é o tempo total de gotejamento, em horas.

Dados desconhecidos:

- D, é o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $V_g = \frac{0.2}{1000} = 0.0002$ L;
- $T_t = 6 \times 3600 = 21600$ s;
- $\frac{D}{T_t} = \frac{V_g}{T_g}$.

(III) Execução

Vamos então determinar D:

$$\frac{D}{21600} = \frac{0,0002}{3} \Rightarrow D = \frac{0,0002 \times 21600}{3} = 1,44\ L.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O desperdício de água no período de 6 horas, é de aproximadamente 1,4 L. Portanto alternativa (C).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 165

Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 8 (e) 9

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $V_1 = 900\ m^3$, é o volume do primeiro resrvatório;
- $V_2 = 500\ m^3$, é o volume do novo resrvatório;
- $R_1 = 6$ ralos, é o número de ralos do primeiro reservatório;
- $T_1 = 6$ horas, é o Tempo de escoamento do primeiro reservatório;
- $T_2 = 4$ horas, é o Tempo de escoamento do segundo reservatório.

Dados desconhecidos:

- R_2, é a quantidade de ralos idênticos aos do primeiro resevatório, que deverá ter o segundo reservatório.

(II) Planejamento Definição dos dados desconhecidos:

- as grandezas volume e tempo são respectivamente diretamente e inversamente proporcionais à grandeza ralo, o que leva à proporção:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{V_1}{V_2} \times \frac{T_2}{T_1}.$$

(III) Execução

Vamos então determinar R_2:

$$\frac{6}{R_2} = \frac{900}{500} \times \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{6}{R_2} = \frac{6}{5} \Rightarrow R_2 = 5\ ralos.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O número de ralos necessários são em número de 5 ralos. Portanto alternativa (c).

Análise do resultado:

- O resultado é um número natural.

Conhecimentos necessários:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 166

Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada. A quantidade X, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

$$(a)\ \frac{N}{9} \qquad (b)\ \frac{N}{6} \qquad (c)\ \frac{N}{3} \qquad (d)\ 3N \qquad (e)\ 9N$$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- y é a medida de cada um dos lados das placas quadradas da primeira remessa;

- N é o número de placas de área $y^2\ m^2$ em cada caixa;

- S área na caixa para alocação de N placas de tamanho $y^2\ m^2$

Dados desconhecidos:

- X é o número de placas de área $(3y)^2$ em cada caixa.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- $X = \frac{S}{(3y)^2}$

(III) Execução

- $X = \frac{y^2 N}{(3y)^2} = \frac{N}{9}$

(IV) Retrospecto

Conclusão

- O número X de placas de área $9y^2$ é $\frac{N}{9}$. Portanto alternativa (a).

Conhecimento necessário

- Conhecimentos numéricos e conhecimentos geométricos.

Questão 167

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.

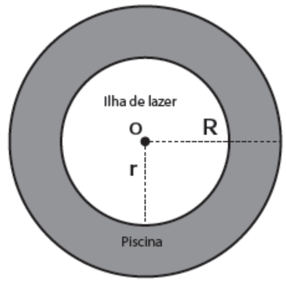
Considere 3 como valor aproximado para (pi).

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de

$(a)\ 1,6 \qquad (b)\ 1,7 \qquad (c)\ 2,0 \qquad (d)\ 3,0 \qquad (e)\ 3,8$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:



- figura de dois cilindros circulares com mesmo eixo, mesma altura, com bases em um mesmo plano e com raios da base diferentes.
- $V_o = 12\ m^3$ é o volume da piscina original;
- $V_n = 4\ m^3$ é o volume da piscina nova;
- $H = 1$ m é a profundidade da piscina;

Dados desconhecidos:

- R_m é a medida do raio máximo da ilha, para que o volume mínimo da nova piscina seja 4 m^3;
- V_i é o volume da ilha.

(II) Planejamento.

Definição dos dados desconhecidos:

- $V_i = H\pi R_m^2$
- $V_o - V_i = V_n$.

(III) Execução

Utilizando uma aproximação de 3 para π obtemos:

$$1 - 3R_m^2 \times 1 = 4,$$

ou seja,

$$3R_m^2 = 8,$$

portanto $r \approx 1,63$.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O valor encontrado de $1,63$ está mais próxima de $1,60$. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento exigido:

- Conhecimentos numéricos e conhecimentos geométricos.

Questão 168

O contribuinte que vende mais de 20 mil Reais de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em Quinze por cento do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por 34 mil Reais um lote de ações que custou 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

(a) $900,00$ Reais (b) $1200,00$ Reais (c) $2100,00$ Reais
(d) $3900,00$ Reais (e) $5100,00$ Reais

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $P_c = 26$ mil é o preço de compra;
- $P_v = 34$ mil é o preço de venda venda;
- $i = 15\ \%$ é o percentual do imposto sobre o lucro, $i = 0,15$, (na forma unitária).
- Restrição: O imposto é cobrado se $P_v > 20,000$.

Dados desconhecidos:

- X é o valor do imposto pago pelo contribuinte;
- L é o lucro obtido com a venda de ações.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos

- $L = P_v - P_c$
- Como $P_c > 20,000$, então o imposto será cobrado. Logo

$$X = iL.$$

(III) Execução

Vamos então determinar os valores de L e de I: $L = 34 - 26 = 8$ mil Reais. $I = 0.15 \times 8000 = 1200,00$ Reais.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O imposto pago pelo contribuinte foi de $1200,00$ reais. Portanto alternativa (b).

Análise do resultado:

- O resultado é um racional positivo.

Conhecimento exigido:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 169

Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

(a) $1,75$ (b) $2,00$ (c) $2,33$ (d) $4,00$ (e) $8,0$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- proporções $c = 1$ de cimento, $a = 4$ de areia e $b = 2$ de brita na constituição do concreto;
- $V = 14\ m^3$ é o volume de concreto no caminhão

Dados desconhecidos:

- A quantidade de cimento X em $14\ m^3$ de concreto, se a proporção é a mesma.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- Como a $a+b+c = 7$, c representa $1/7$ do volume total de concreto. Logo $X = \frac{1}{7}V$

(III) Execução

Vamos finalmente determinar o valor da variável X:

$$X = \frac{1}{7}14 \Rightarrow X = 2,00.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A quantidade de cimento em $14.00\ m^3$ de concreto é de $2.00\ m^3$. Portanto alternativa (b).

Análise do resultado:

- O resultado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

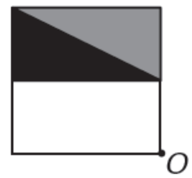


Figura original

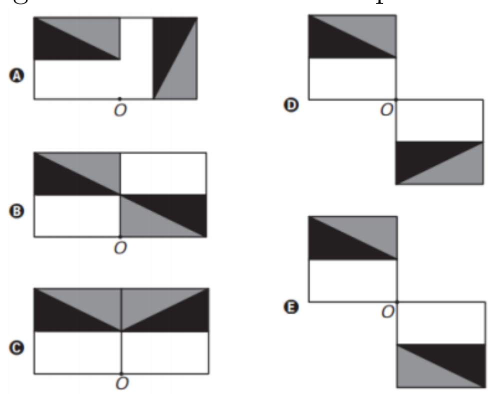
- Operações Conhecimentos numéricos.

Questão 170

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

A imagem que representa a nova figura é:

Figura 3.5: Alternativas da questão 170



(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- figura retangular com um vértice O, formada por um retângulo branco e dois triângulos retângulos, sendo um preto e o outro cinza, conforme figura.

Dados desconhecidos:

- a figura simétrica da figura original, em relação ao ponto O.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- vamos considerar o ponto O, origem do plano cartesiano, a figura original estaria no segundo quadrante, apoiada no eixo dos x, logo a figura simétrica em relação ao ponto O estará no quarto quadrante, com o mesmo lado encostado no eixo dos x.

(III) Execução

vamos girar a figura original de 180° em torno do eixo y, seguido de um giro de 180° em torno do eixo x, obtendo a figura simétrica da original, em relação ao ponto O. Obs.: se o primeiro giro fosse em relação ao eixo x e o segundo, em relação ao eixo y, o resultado seria o mesmo.

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A figura obtida após os dois giros citados no item execução, leva à figura da alternativa (e).

Análise do resultado

- O resultado é uma figura geométrica localizada no quarto quadrante do plano cartesiano.

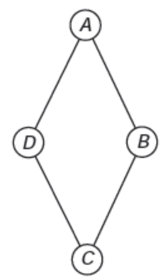
Conhecimentos exigidos

- Conhecimentos geométricos.

Questão 171

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

(a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24 (e) 36

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- figura de um losango não quadrado;
- posições A, B, C e D de um losango não quadrado;
- r = "joia vermelha", g = "joia verde"e b = "joia azul" são possíveis joias;
- Denotando por xM a cor da joia na posição $M \in \{A, B, C, D\}$, temos as seguintes restrições: $xA \neq xB$, $xB \neq xC$, $xC \neq xD$ e $xD \neq xA$.

Dados desconhecidos:

- o número N de joias produzidas nesse formato, pelo artesão.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- Só pode-se produzir dois tipos de jóias, as com $xA = xC$, e as com $xB = xD$, em quantidades iguais. Essa condição nos leva a considerar apenas três vértices para cada tipo de jóia, ou seja, o número de cada tipo de jóias será 3!, mas como são dois tipos diferentes, o total de jóias $2 \times 3!$, ou seja, $N = 2 \times 3!$.

(III) Execução

Vamos então obter o valo de N:

$$N = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O artesão pode obter nas condições do problema, apenas 12 jóias. Portanto alternativa (b).

Análise do resultado:

- O resultado é um número natural.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 172

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A * (2.7)^k t$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere $0,3$ como aproximação para $\log 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a dez por cento da quantidade inicial?

(a) 27 (b) 36 (c) 50 (d) 54 (e) 100

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- a meia vida do césio-137 é de 30 anos, tempo necessário para que uma amostra deste material se reduza à metade;

- considerar o logaritmo de 2 na base 10 igual a $0,3$;
- na expressão $M(t) = A \times (2,7)^k t$, M(t) é a massa restante, A é a massa inicial, K uma constante negativa e t, o tempo de decaimento em anos.

Dados desconhecidos:

- o tempo necessário para uma amostra de césio-137, reduzir à 10 por cento, de sua massa inicial.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- vamos utilizar a expressão $M(t) = A \times (2,7)^k t$ com a metade da massa inicial e o tempo de 30 anos para obter o valor de $\log(2,7)^k$, aplicando log na base dez nos dois membros da igualdade.
- vamos utilizar novamente a expressão com 10 por cento da massa inicial, $0,1 \times A$ substituindo o valor de $\log(2,7)^k$ obtido no item anterior.

(III) Execução

Vamos primeiro obter o valor da expressão $\log(2,7)^k$:

$$\log(0,5) = \log(2,7)^(30k) \Rightarrow -0,3 = 30\log(2,7)^k \Rightarrow \log(2,7)^k = -0,01$$

agora vamos determinar finalmente o valor de T:

$$\log(0,1) = t\log(2,7)^k \Rightarrow -1 = -0,01t \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,01} \Rightarrow t = 100\ anos.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O tempo necessário para que a massa de Césio se reduza à dez por cento é de 100 anos. Portanto alternativa (e).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos algébricos.

Questão 173

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até vinte por cento nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em:3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em vinte por cento.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

(a) 4 (b) 20 (c) 36 (d) 64 (e) 96

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- C_i = 30 cm, é o comprimento inicial da cerâmica;
- L_i = 15 cm, é a largura inicial da cerâmica;
- redução de vinte por cento nas dimensões da cerâmica.

Dados desconhecidos:

- C_o, é a medida do comprimento reduzido de 20 por cento;
- L_o, é a medida da largura reduzida de 20 por cento;
- A_i, é a medida da área inicial da cerâmica;

- A_o, é a medida da área final da cerâmica;
- X, é o percentual de redução na área da cerâmica.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $A_i = C_i \times L_i$;
- $C_o = C_i - 0,2C_i$;
- $L_o = L_i - 0,2L_i$;
- $A_o = C_oL_o$;
- $X = \frac{A_i - A_o}{A_i} \times 100$.

(III) Execução

Primeirmente vamos determinar as variáveis desconhecidas, importantes para a resolução do problema principal.

$A_i = 30 \times 15 = 450$ centimetros quadrados. $C_o = 30 - 0,2 \times 30 = 24$ cm. $L_o = 15 - 0,2 \times 15 = 12$ cm. $A_o = 24 \times 12 = 288$ centímetros quadrados.

Finalmente vamos determinar a incógnita principal X:

$$X = \frac{450 - 288}{450} \times 100 = 36\ \%.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A redução na área da cerâmica foi de 36 por cento. Portanto alternativa (c).

textbfAnálise do resultado

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimentos exigidos:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 174

Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como:

(a) excelente (b) bom (c) regular (d) ruím (e) péssimo

(I) Compreensão.

Dados conhecidos:

- $P_1 = \frac{54}{100}$ é a produçao da máquina I, do total de parafusos;
- $D_1 = \frac{25}{1000}$ é a quantidade de parafusos produzidos pela máquina I, que apresentam defeitos;
- $D_2 = \frac{38}{1000}$ é a quantidade de parafusos produzidos pela máquina II, que apresentam defeitos;
- N é o número total de parafusos produzidos pelas duas máquinas;
- tabela de classificacão do desempenho conjunto das duas máquinas.

Dados desconhecidos:

- P_2 é a produção total de parafusos da máquina II;
- P é a probabiladade de, escolhido ao acaso um parafuso, ele apresentar defeito;
- classificação do desempenho conjunto das duas máquinas, segundo a tabela de desempenho.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $P_1 = \frac{54}{100} \times N$;
- $D_1 = \frac{54}{100} \times N \frac{25}{1000} = \frac{1350}{100000} \times N$;
- $P_2 = 100 \times N - \frac{54}{100} \times N = \frac{46}{100} \times N$;
- $D_2 = \frac{36}{100} \times N \frac{38}{1000} = \frac{1368}{100000} \times N$;
- $P = \frac{D_1 + D_2}{N}$.

(III) Execução

Vamos determinar P:

$$P = \frac{D_1 + D_2}{N} = \frac{1350}{100000} + \frac{1748}{100000} = \frac{3098}{100000} = \frac{3,098}{100}.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O desempenho conjunto das duas máquinas é tal que, $\frac{2}{100} \leq \frac{P}{100} \leq \frac{4}{100}$, desempenho bom. Portanto alternativa (b).

Análise do resultado

- O resultado é um número real entre [0,1].

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos de estatística e probabilidade.

Questão 175

Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com $500,00$ reais para apostar, fizeram as seguintes opções: Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos; Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos; Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos; Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

(a) Caio e Eduardo (b) Arthur e Eduardo (c) Bruno e Caio

(d) Arthur e Bruno (e) Douglas e Eduardo

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- Arthur apostou com 250 cartelas com 6 números;
- Bruno apostou com 41 cartelas de 7 números e 4 cartelas de 6 números;
- Caio apostou com 12 cartelas de 8 números e 10 cartelas de 6 números;
- Douglas apostou com 4 cartelas de 9 números;
- Eduardo apostou com 2 cartelas com 10 núneros;

- Serão sorteados 6 números de um total de 60 números;
- O número total de casos, será o mesmo para todos os apostadores.

Dados desconhecidos:

- A, é o número de casos favoráveis do jogo de Arthur;
- B, é o número de casos favoráveis do jogo de Bruno;
- C, é o número de casos favoráveis do jogo de Caio;
- D, é o número de casos favoráveis do jogo de Douglas;
- E, é o número de casos favoráveis do jogo de Eduardo.
- a dupla de apostadores com maior chance de ganhar.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- $A = 250C_{6,6}$;
- $B = 41C_{7,6} + 4C_{6,6}$;
- $C = 12C_{8,6} + 10C_{6,6}$;
- $D = 4C_{9,6}$;
- $E = 2C_{10,6}$.

(III) Execução

Vamos determinar os valores de A, B, C, D e E:

$$A = 250C_{6,6} = 250 \times 1 = 250.$$

$$B = 41C_{7,6} + 4C_{6,6} = 41 \times 7 + 4 \times 1 = 291.$$

$$C = 12C_{8,6} + 10C_{6,6} = 12 \times 28 + 10 \times 1 = 346.$$

$$D = 4C_{9,6} = 4 \times 84 = 336.$$

$$E = 2C_{10,6} = 2 \times 210 = 420.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- Uma vez que o número total de casos é o mesmo para todos os apostadores, terá maior chance a dupla com os maiores números de casos favoráveis, ou seja, a dupla Caio e Eduardo tem a maior chance. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

- Os valores encontrados não representam as chances de cada opostador, porém são suficientes para determinar quais são maiores.

Conhecimento exigido:

- Conhecimentos numéricos e conhecimentos de probabilidade.

Questão 176

Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente $2,95$ centilitros (cL). Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de

(a) $0,83$ (b) $1,20$ (c) $12,03$ (d) $104,73$ (e) $120,34$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- 1 (FL oz) equivale aproximadamente à $2,95$ cL (centilitro);
- o volume de um refrigerante é de 355 mL $= 35,5$ cL.

Dados desconhecidos:

- X o volume de um refrigerante em onça fluida (FL oz).

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

- 1 (FL oz) está para $2,95$ cl, assim como x está para $35,5$ cL.

(III) Execução

Vamos agora determinar o valor de X:

$$\frac{1}{2,95} = \frac{X}{35,5} \Rightarrow X = \frac{35,5}{2,95} \Rightarrow X = 12,03\ FLoz.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão

- 355 mL $= 35,5$ cL é aproximadamente 12.03 (FL oz). Portanto alternativa (c).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 177

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo- vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

(a) $5X - 3Y + 15 = 0$ (b) $5X - 2Y + 10 = 0$ (c) $3X - 3Y + 15 = 0$
(d) $3X - 2Y + 15 = 0$ (e) $3X - 2Y + 10 = 0$

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $T_a = 5$ s, é o tempo que a luz amarela fica acesa;
- O tempo que a luz verde permanece acesa seja $\frac{2}{3}$ do tempo que a luz vermelha fica acesa.

Dados desconhecidos:

- Z é o tempo que a luz vermelha permanece acesa;
- X é o tempo que a luz verde permanece acesa;
- Y é o tempo total de um ciclo do semáforo.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos:

(1) $X = \frac{2}{3}Z$;

(2) $Y = 5 + X + Z$.

(III) Execução

Das Equações (1) e (2), obtemos

$$Z = \frac{3}{2}X \quad \text{e} \quad Y = 5 + X + \frac{3}{2}X.$$

Agora é só eliminar o denominador, igualar à zero e chegar na expressão procurada:

$$Y = 5 + X + \frac{3}{2}X \Rightarrow 2Y = 10 + 2X + 3X \Rightarrow 5X - 2Y + 10 = 0.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- A expressão que relaciona X e Y é $5X - 2Y + 10 = 0$. Portanto alternativa (b).

Análise do resultado:

- A expressão é uma equação linear nas variáveis X e Y.

Conhecimentos necessários:

- Conhecimentos algébricos.

Questão 178

A temperatura t de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão
$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos
de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 graus centígrados. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

(a) 19,0 (b) 19,8 (c) 20,0 (d) 38,0 (e) 39,0

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, é a função que fornece a temperatura do forno em função do tempo t;
- $T = 39$ °C, é a temperatura de abertura automática da porta do forno.

Dados desconhecidos:

- t_m, é o tempo mínimo para que tenhamos uma temperatura $T = 39$ °C.

(II) Planejamento

Definição do dado desconhecido:

- $-\frac{(t_m)^2}{4} + 400 = 39.$

(III) Execução

Vamos finalmente obter a incónigta procurada resolvendo a equação quadrática abaixo:

$$39 = -\frac{(t_m)^2}{4} + 400 \Rightarrow t_m = 38\ s.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O tempo mínimo para que a porta possa ser aberta é de 38 s. Portanto alternativa (d).

Análise do resultado:

- O resultado é um número real positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos algébricos.

Questão 179

O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados. Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013. No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

(a) 32 $\quad(b)$ 34 $\quad(c)$ 33 $\quad(d)$ 35 $\quad(e)$ 31

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- r = 11 anos, período de duração de cada ciclo magnético solar;
- T_0 = 1755, início do primeiro ciclo magnético solar registrado;
- T_n = 2101, ano em que ocorre o período procurado.

Dados desconhecidos:

- n =o número do ciclo magnético solar que estará em andamento no ano de 2101.

(II) Planejamento.

Definição do dado desconhecido:

- $n = \frac{T_n - T_0}{r}$, arredodado para cima.

(III) Execução

Vamos então obter n:

$$n = \frac{2101 - 1755}{11} = 31,45.$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O ano de 2101 está dentro do período de número 32 do ciclo magnético solar. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

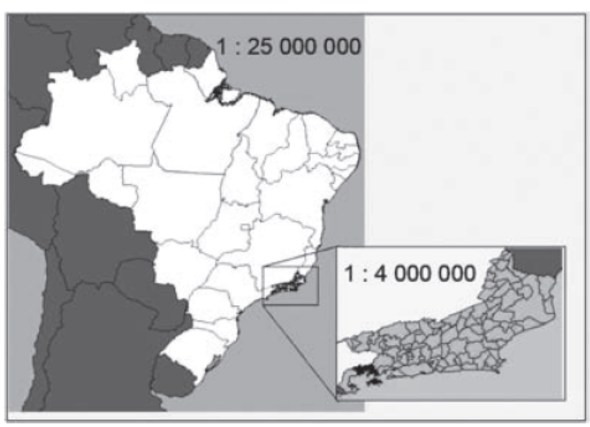
- O valor encontrado é um número racional positivo.

Conhecimento necessário:

- Conhecimentos numéricos.

Questão 180

A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil. Esse número é

(a) menor que 10

(b) maior que 10 e menor que 20

(c) maior que 20 e menor que 30

(d) maior que 30 e menor que 40

(e) maior que 40

(I) Compreensão

Dados conhecidos:

- $E_b = \frac{1}{25000000}$, é a escala do mapa do Brasil;
- $E_r = \frac{1}{4000000}$, é a escala do mapa do Rio de Janeiro.

Dados desconhecidos:

- N = número de vezes que foi ampliada a área desse estado no mapa do Brasil.

(II) Planejamento

Definição dos dados desconhecidos

- $N = \frac{E_r}{E_b}$.

(III) Execução

$$N = \frac{\frac{1}{4000000}}{\frac{1}{25000000}} = \frac{25000000}{4000000} = 6,25 < 10$$

(IV) Retrospecto

Conclusão:

- O resultado é 6,25, que é menor do que 10. Portanto alternativa (a).

Análise do resultado:

- o resultado é um número racional positivo.

Conhecimento exigido:

- Conhecimentos estatísticos.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo são feitas várias observações decorrentes das aplicações do método heurístico de Pólya nas questões de matemática do Enem do ano de 2013.

Nota-se que mais de 60 % das questões eram construídas por informações provenientes de figuras, tabelas ou gráficos.

Tabela 4.1: Número de dados conhecidos extraídos das questões de matemática do Enem do ano de 2013

Nº de dados conhecidos	Nº de questões
1	5
2	11
3	12
4	10
5	3
6	1
8	1
10	1
16	1

Analisado a tabela acima, 4.1 nota-se que apenas sete, das quarenta e cinco questões, apresentam mais de quatro dados conhecidos. Isto se deve às especificidades da prova de matemática do Enen, que tem espaço e tempo relativamente pequeno para sua resolução. As questões com número de dados conhecidos superiores a quatro, são aquelas cujos dados são apresentados em tabelas ou gráficos, de fácil acesso ao solucionador (ver questões 149, 153, 155, 157, 162, 174 e 175).

Tabela 4.2: Número de dados desconhecidos extraídos das questões de matemática do Enem do ano de 2013

Nº de dados desconhecidos	Nº de questões
1	23
2	8
3	6
4	3
5	3
6	2

Na tabela 4.2 apenas oito questões, dentre as quarenta e cinco, apresentam mais que três dados desconhecidos, e mais de 50 % das questões apresentam apenas um dado desconhecido, isto se deve também às características da prova de matemática do Enem, já relatadas no comentário sobre a tabela 4.1 dos dados conhecidos.

Tabela 4.3: Número de questões resolvidas e número de questões não resolvidas pelo método sugerido neste trabalho

Nº questões resolvidas pelo método	Nº de questões não resolvidas pelo método
40	5

Em apenas cinco questões, a saber 142, 144, 145, 160 e 170, não há como relacionar os dados conhecidos com os dados desconhecidos através de equações algébricas e/ou aritmética. Sendo assim, em quase 89 % das questões do Enem do ano de 2013 4.3 se aplicam o método heurístico sugerido neste trabalho, este sendo uma versão particular dos métodos de resolução de problema de Pólya.

Nota-se na tabela acima 4.4 que os dois tópicos com maiores número de questões, são os de conhecimentos numéricos e os de conhecimentos de estatística e probabilidade. Aqui novamente prevalece as características da prova do Enem, com questões contextualizadas, contemplando preferencialmente assuntos atuais e que de alguma forma é de interesse da população em geral, tais como eficiência, desconto, custo, produtividade, probabilidade, qualidade (ver, por exemplo, questões 138, 139, 146, 148, 149, 150, 151, 153, 155).

Tabela 4.4: Número de questões envolvendo tópicos de conhecimento exigidos no edital do Enem do ano de 2013

Tópico	Nº de questões
Conhecimentos numéricos	25
Conhecimentos geométricos	7
Conhecimentos de estatítica e probabilidade	14
Conhecimentos algébricos	7
Conhecimentos agébricos e geométricos	4

Tabela 4.5: Número de questões relacionadas aos conjuntos de possíveis soluções para análise do resultado

Conjunto	Nº de questões
$\mathbb{R}$	11
$[0,1]$	3
$\mathbb{N}$	2
$\mathbb{Q}$	18
Elementos geométricos	6
Outros	6

Na tabela acima, 4.5 verifica-se que das 45 soluções, 11 delas pertencem aos Reais e 18 delas pertencem aos Racionais. Tal fato está diretamente relacionado com as informações contidas na tabela 4.4 que relaciona as questões, com os tópicos de conhecimentos exigidos no edital do Enem 2013.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho, teve início com uma pesquisa sobre o desempenho em matemática de alunos que concluiram o ensino fundamental e o ensino médio, nas avaliações externas (Simave, Proeb, e Enem). Os dados levantados, impulsionaram este trabalho na direção da busca de ferramentas, que de alguma forma contribuíssem para melhorar o desempenho dos alunos em matemática. A ferramenta escolhida para este trabalho foi a heurística de Pólya aplicada à resolução de problemas. Como teste da eficiência de tal ferramenta, foram resolvidas neste trabalho as 45 questões de matemática da prova do Enem 2013, utilizando a heurística de Pólya. Os dados da análise quantitativa, levantados neste trabalho, foram organizados em tabelas, que mostram que a aplicabilidade desta heurística foi de mais 89 % (ver tabela 4.3). Como o Enem, é um dos instrumentos utilizado pelo governo brasileiro para avaliar o desempenho dos estudantes que concluiram o ensino médio, em vários conteúdos, inclusive o de matemática, a inserção de técnicas de heurísticas, tendo uma aplicabilidade em mais de 89 % das questões de matemática do Enem, nos currículos de matemática nas redes de ensino, pode melhorar o desempenho dos estudantes que fazem esta prova.

A elaboração deste trabalho, abriu um leque de possibilidades e perspectivas de novas pesquisas, tanto na experimentação de outros métodos de resolução de problemas nas provas do Enem, bem como na aplicação do método abordado neste trabalho em outras avaliações, como por exemplo na resolução das provas das Olimpíadas de matemática, ou ainda na aplicação do método de Pólya na resolução de problemas de outras disciplinas, como a física por exemplo. Existe ainda a possibilidade do emprego de heurísticas mais complexas e elaboradas. Uma análise criteriosa, através de grupos de estudo, é necessária para validar as técnicas heurísticas como ferramenta de melhora do desempenho de estudantes.

Referências Bibliográficas

[1] Cai, J., Lester., Why is teaching with problem solving importantto student learning? Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, April, 2010.

[2] Case, Y. Okamoto, The role of central conceptual structures in the development of children's thought. Monographs of the Society for Research in Child Development (pp.1–26), Serial No. 246, Vol. 6.

[3] Costa, Leila Pessôa da. Algumas considerações acerca da didática e da educação matemática na educação básica. Anais da I Jornada de Didática e do I Fórum de Professores de Didática do Estado do Paraná. Uel. Londrina. Paraná. 2013. Disponível em: http://www.uel.br/eventos/jornadadidatica/pages/anais-da-i-jornada-de-didatica-e-do-i-forum-de-professores-de-didatica-do-estado-do-parana.php

[4] Demetriou, A., Christou, C., Spanoudis, G., Platsidou, M. (2002). The development of mental processing: Efficiency, working memory, and thinking. Monographs of the Society of Research in Child Development, 67. Serial Number 268.

[5] DeWindt-King, Goldin, 2003. In elementary mathematics teaching and curriculum design, a representation that plays an important role in the teaching of.

[6] Diezmann, Carmel M and Watters, James J and English, Lyn D (2001) Implementing mathematical investigations with young children .

[7] Duval, Raymond. Comment analyser le fonctionnemment représentationnel des tableaux et leur diversité? In: Séminaires de

Recherche Conversion et articulation des représentations. Vol II. Éditeur Raymond Duval, IUFM Nord-Pas de Calais, 2002

[8] Geary, DC (2005). A origem da mente: Evolução do cérebro, cognição e inteligência geral . Washington, DC: American Psychological Association.

[9] Hardin, L. Problem solving concepts and theories. J. Vet. Med. Educ. 30, 2003.

[10] Larson: L. C. Larson, Problem-Solving Through Problems, Springer-Verlag, New York, NY, 1983 – in ODU Library.

[11] Leivas, José Carlos Pinto; CURY, Helena Noronha. Transposição didática: exemplos em educação matemática. Educação matemática em Revista. RS, n. 10, v. 1, p. 65–74, 2009.

[12] Newell, A., and Simon, H. A. (1972) Human problem solving Englewood Cliffs.

[13] Polya G. Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton University Press, 1954.

[14] Polya G. How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press, 1975.

[15] Polya G. A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. UFRJ, 1986.