

## GEOMETRIA ESFÉRICA E TRIGONOMETRIA ESFÉRICA APLICADAS À ASTRONOMIA DE POSIÇÃO

Shyrlene Martins de Abreu<sup>1</sup>

Jose Eloy Ottoni<sup>2</sup>

**Resumo:** Este trabalho tem por objetivo apresentar e relacionar a Geometria Esférica, a Trigonometria Esférica e a Astronomia de Posição. É um material que visa incentivar os professores da educação básica a trabalharem a Geometria Esférica em sala de aula. É importante que o aluno termine essa fase dos estudos, sem aceitar a geometria euclidiana como uma verdade inabalável. Apresentou-se como foi o surgimento da geometria esférica no séc. XIX. Os elementos da Geometria Esférica são apresentados por meio de definições e teoremas. Algumas comparações foram feitas entre a Geometria Euclidiana e a Esférica. Apresentamos a relação fundamental, também denominada relação dos quatro elementos (“Lei dos Cossenos”) da Trigonometria Esférica e a Lei dos Senos. Apresentou-se a Esfera Celeste, seus elementos, as suas coordenadas no sistema equatorial, sistema horizontal e sistema horário. Apresentou-se o triângulo de posição, que é um triângulo esférico. A partir de aplicações da lei fundamental da trigonometria esférica no triângulo de posição foi possível relacionar as coordenadas de diferentes sistemas de um astro. Também mostrou-se como se calcula a separação angular (distância) entre dois astros distintos na esfera celeste. E por fim, é proposto uma sequência didática, envolvendo a geometria esférica, a trigonometria e a esfera celeste.

**Palavras-chave:** Geometria Esférica, Triângulo Esférico, Trigonometria Esférica, Astronomia de Posição, Esfera Celeste, Triângulo de Posição.

---

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2015

Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP

E-mail: shyrlenealmeida@ig.com.br

<sup>2</sup>Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso

Departamento de Física e Matemática - Defim, UFSJ/CAP

E-mail: jeottoni@ufs.edu.br

## 1 Introdução

A forma do planeta Terra se aproxima muito de uma esfera, na realidade temos um geóide, com excentricidade muito pequena. A geometria que se dedica ao seu estudo quando a tratamos como uma esfera é a Geometria Esférica.

Alguns conceitos da geometria esférica são vistos ao longo da educação básica. Por exemplo, na geografia os alunos aprendem sobre as linhas imaginárias: equador, paralelos, meridianos, fuso horário; em matemática é trabalhado o conceito de esfera, de superfície esférica, o volume da esfera, a área da superfície esférica, a área de um fuso, o volume de uma cunha, o volume de um segmento esférico. É importante que o aluno do ensino médio, na sua formação, obtenha um pouco mais de conhecimento sobre geometria esférica. O aluno termina essa fase da escolarização consciente que a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta. Mas isso é válido para uma superfície plana. Numa superfície esférica a menor distância entre dois pontos (que podem ser consideradas duas cidades, se pensarmos no nosso planeta) não é um segmento de reta e sim um arco de circunferência máxima. A trajetória de um avião não é uma linha reta e sim, muitas vezes, o arco de uma circunferência. Essas são noções que devem ser trabalhadas na educação básica.

O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado a triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação.

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas. A geometria esférica é uma geometria não euclidiana, pois contraria o V postulado de Euclides, o postulado das paralelas.

Registros bibliográficos mostram que conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia, na Índia e, também, na Grécia [5]. Entretanto, pode-se dizer que foram através dos gregos que se difundiram tais conhecimentos geométricos para o resto do mundo, pois, foi Euclides de Alexandria (c. 325-265 a. C.) o primeiro a apresentar de maneira sistemática a Matemática como ciência dedutiva. Isso quer dizer que qualquer afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente [5]. Esta geometria permaneceu por quase dois mil anos como única e absoluta e, apenas no início do século XIX surgiram outras estruturas, denominadas geometrias não-euclidianas.

Os pesquisadores: Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann, marcaram a história da matemática, desenvolvendo novas geometrias, a partir da negação do V postulado de Euclides.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), contribuiu significativamente para o desenvolvimento das ideias que levaram a descoberta de uma geometria não-euclidiana. Mas não publicou nada a respeito.

Janos Bolyai (1802-1860) desenvolveu uma nova geometria, mudando a hipótese do V postulado de Euclides. Ele supôs que existia mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto que não pertence a reta dada, o que acarretaria uma infinidade delas. Não recebeu o status de ser o primeiro a descobrir uma nova geometria, por ter demorado a publicar suas descobertas.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) foi o primeiro a publicar um artigo sobre a geometria não-euclidiana, com as mesmas ideias de Bolyai. Os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai foram denominados Geometria Hiperbólica, por Félix Klein (1849-1925).

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), considerando o plano como a superfície de uma esfera e descartando a infinitude da reta, admitindo somente que

a reta seja ilimitada, desenvolveu uma nova geometria, que Félix Klein denominou de Geometria Elíptica (Esférica).

A astronomia é a ciência que se ocupa com a determinação da posição e com o movimento dos corpos celestes, como o sol, a lua, as estrelas, os planetas, etc. A astronomia nasceu e cresceu gradativamente para suprir necessidades sociais, econômicas, religiosas e também, obviamente, culturais.[1] Podemos citar vários exemplos de aplicação de conhecimentos astronômicos como, por exemplo, a medição da duração do dia, a contagem dos dias, a determinação das estações do ano, a navegação, as viagens espaciais, que foram possíveis devido à alta precisão dos dados astronômicos. A astronomia esférica, ou astronomia de posição, diz respeito, fundamentalmente, as direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância em relação ao observador. É conveniente expressar essas direções em termos das posições sobre a superfície de uma esfera (a esfera celeste). Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Dessa forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações. As relações trigonométricas nos triângulos esféricos são fundamentais nos cálculos destas distâncias.[10]

O objetivo deste artigo é apresentar a Geometria Esférica, a partir de alguns conceitos e teoremas e aplicar a relação fundamental da Trigonometria Esférica na Astronomia de Posição. Na segunda seção, denominada Geometria Esférica, apresentamos alguns conceitos e alguns teoremas da Geometria Esférica e apresentamos a Fórmula Fundamental e Lei dos Senos para triângulos esféricos. Na terceira seção, são definidos alguns planos e pontos esfera celeste, são apresentados três sistemas de coordenadas astronômicas, também explicamos como são os movimentos diurnos dos astros. Utilizando o triângulo de posição e aplicando a lei fundamental, foi possível relacionar as coordenadas de sistemas diferentes de um astro. Também apresentamos como calcular a separação angular entre duas estrelas. Na quarta seção, é sugerida uma sequência didática, de forma incentivar um trabalho interdisciplinar entre a Geometria e a Astronomia.

## 2 Geometria Esférica

Esta seção foi subdividida em cinco partes. Na primeira subseção apresentamos o V Postulado de Euclides, ressaltando um breve histórico sobre as tentativas de transformar este postulado em um teorema até o surgimento das Geometrias não Euclidianas. Na segunda subseção, apresentamos alguns conceitos da Geometria Esférica, a maior parte destes coincide com conceitos da Geometria Euclidiana. Na terceira subseção, apresentamos e demonstramos alguns teoremas. Na quarta subseção, apresentamos alguns exemplos de aplicação. Na quinta subseção, apresentamos e demonstramos a Fórmula Fundamental para triângulos esféricos. A penúltima subseção são exemplos de aplicação. E por fim apresentamos e demonstramos a Lei dos Senos para triângulos esféricos.

## 2.1 O V Postulado de Euclides e as Geometrias não Euclidianas

O V Postulado de Euclides diz que: Se uma reta secante a duas outras formam ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.[6]

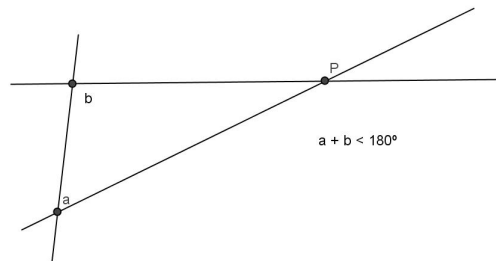


Figura 1: Ilustração do V Postulado de Euclides

Fonte: autora

Por vários séculos, diversos matemáticos tentaram transformar o V Postulado em um teorema, tentando demonstrá-lo a partir dos axiomas e postulados anteriores. Mas essas tentativas foram frustradas, sempre esbarrando-se em outras afirmativas semelhantes ao V Postulado.

Hoje o V Postulado é conhecido como o Postulado das Paralelas, tendo um enunciado equivalente, que foi apresentado por John Playfair, em 1795. Por um ponto  $P$  exterior a uma reta  $r$ , passa uma única reta paralela à reta dada.

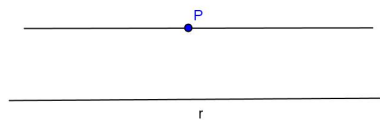


Figura 2: V Postulado formulado por Playfair

Fonte: autora

No século XIX, os matemáticos Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai, Nicolai Ivanovich Lobachevski e Georg Bernhard Riemann suspeitaram que o Postulado das Paralelas era independente dos demais. Consideraram três situações distintas: por um ponto exterior a uma reta dada passa mais de uma, apenas uma ou nenhuma reta paralela a reta dada.

As duas negações do postulado das paralelas desdobraram-se em duas novas geometrias: a Geometria Hipérbolica e a Geometria Elíptica (Esférica).

A Geometria Hiperbólica, parte do pressuposto que por um ponto exterior a uma reta dada, passam infinitas retas paralelas a reta dada.

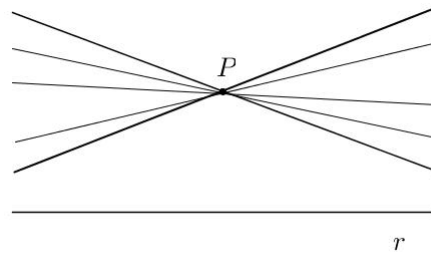


Figura 3: Retas paralelas na Geometria Hiperbólica

Fonte: autora

Com a nova suposição e as proposições da geometria euclidiana que não dependem do quinto postulado, os matemáticos citados acima, demonstraram vários teoremas dessa nova geometria. Um deles é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^{\circ}$ , no espaço hiperbólico.

Para demonstrar a consistência dessa nova geometria e para poder visualizá-la, foi desenvolvido modelos para expô-la. Um modelo de geometria é um ambiente no qual seus conceitos, postulados e teoremas são interpretados e suas afirmações aceitas como verdade.

Eugênio Beltrami (1835 -1900) apresentou a pseudo-esfera, que é uma superfície de curvatura negativa constante. Neste ambiente, as retas são geodésicas, curvas que minimizam o comprimento entre dois pontos próximos de um superfície.

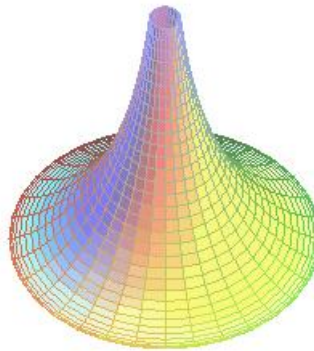


Figura 4: Pseudo-esfera

Félix Klein (1849 -1945) apresenta um modelo no qual o plano euclidiano é transformado num disco, tendo no círculo que o circunda os pontos que representam o infinito no plano original. Neste modelo, as retas são cordas do disco, excluindo suas extremidades.

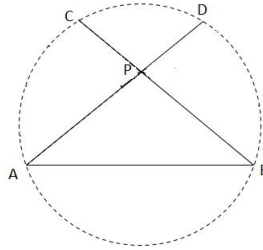


Figura 5: Disco de Klein

Fonte: autora

Henri Poincaré (1864 -1912) desenvolveu dois modelos para a Geometria Hiperbólica: o modelo do disco e o modelo do semi-plano. No primeiro caso o plano hiperbólico é um disco limitado e as retas são todos os diâmetros do círculo (excluindo as extremidades) e todos os arcos de círculos ortogonais.

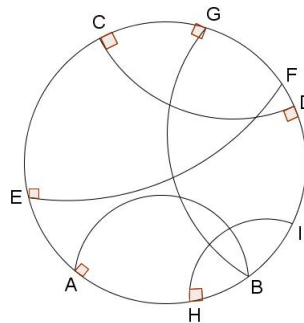


Figura 6: Disco de Poincaré

O responsável pelo desenvolvimento da Geometria Esférica foi o alemão Georg Bernhard Riemann. A partir da negação do V postulado de Euclides, ele estabelece que não existem paralelas a uma reta dada, considera o plano como a superfície esférica e as retas sendo círculos máximos da esfera, desenvolvendo desta forma uma nova geometria.



Figura 7: Georg Bernhard Riemann

Para obter um cargo de professor assistente na Universidade de Göttingen, Riemann teve que apresentar um palestra, como teste, para filósofos e historiadores. Entre os temas escolhidos, um deles era sobre fundamentos da geometria. Gauss escolheu este tema, pois queria ver como o jovem se sairia, por tratar de um tema tão difícil. O resultado o celebrou, deixando Gauss muito entusiasmado.[8]

Alguns pontos importantes da geometria esférica que diferem da geometria euclidiana são:

- Uma superfície pode ser finita, mas ilimitada;
- A reta (círculo máximo) tem comprimento finito, mas é ilimitada; pois percorrendo uma circunferência máxima retornamos ao ponto de partida, mas podemos percorrê-la indefinidamente;
- Não existe semelhança de triângulos, só congruência;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos;
- A área é proporcional ao excesso da soma dos ângulos internos.

## 2.2 Definições

Nesta subseção explicitamos conceitos básicos sobre a Geometria Esférica, alguns são trabalhados no ensino médio, pois são idênticos aos da geometria euclidiana.

**Definição 2.1** *Esfera:* Seja o ponto  $O$  (centro da esfera) e  $r$  um número real positivo. Chamamos de esfera o lugar geométrico dos pontos  $P$  do espaço, cujas distâncias a  $O$  são menores ou iguais a  $r$ . Ou seja, a esfera é um sólido geométrico.

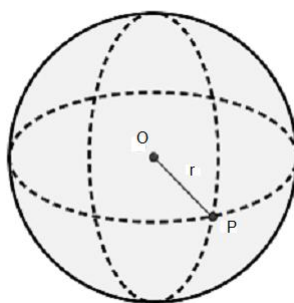


Figura 8: Esfera de centro  $O$  e raio  $r$

Fonte: autora

**Definição 2.2** *Superfície esférica* é o lugar geométrico dos pontos que distam exatamente  $r$  do centro da esfera.

**Definição 2.3** *Corda da superfície é o segmento de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica.*

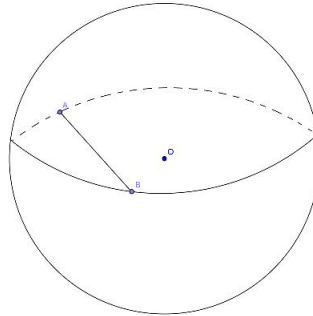


Figura 9: Corda da superfície esférica  
Fonte: autora

**Definição 2.4** *Diâmetro da superfície esférica é uma corda que contém o ponto  $O$ , centro da esfera.*

**Definição 2.5** *Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos, isto é, dado um ponto  $P$ , seu antípoda,  $P'$ , é o único ponto da superfície esférica tal que  $PP'$  é um diâmetro da superfície esférica.*

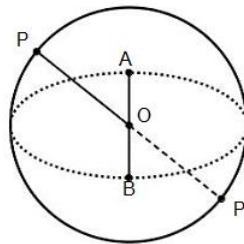


Figura 10: Pontos antípodas  
Fonte: autora

Podemos observar pela figura que o ponto A e o ponto B são pontos antípodas e o segmento AB é diâmetro da superfície esférica.

**Definição 2.6** *Circunferência máxima é uma circunferência que tem o mesmo raio da superfície esférica.*

Veremos na seção 2.2 que a interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.



**Definição 2.7** *Elementos notáveis da superfície esférica:*

- *Eixo  $e$ : qualquer reta que contém o centro  $O$ .*
- *Pólos: são os pontos de interseção do eixo  $e$  com a superfície esférica. Dessa forma temos dois pontos, denominados Pólo Norte e Pólo Sul.*
- *Equador: é uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.*
- *Paralelo: é uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo  $e$  e é paralela ao equador.*
- *Meridiano: é uma semicircunferência máxima cujo plano passa pelo eixo  $e$  e liga os pólos.*

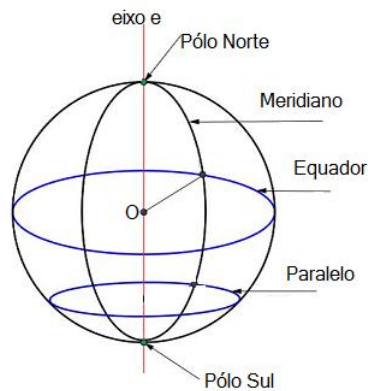


Figura 11: Elementos da esfera  
Fonte: autora

**Definição 2.8** *Calota esférica: quando a interseção de um plano com uma superfície esférica é uma circunferência, temos que essa superfície foi dividida em duas partes, cada uma destas partes é denominada calota esférica.*

Quando a interseção de um plano com uma superfície esférica é um ponto, dizemos que o plano é tangente à esfera.

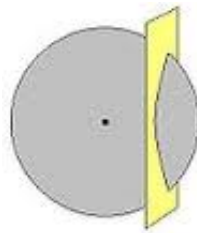


Figura 12: calota esférica

**Definição 2.9** *Zona esférica é a parte da superfície esférica delimitada por dois planos distintos paralelos não tangentes à superfície esférica, mas que a intersectam.*

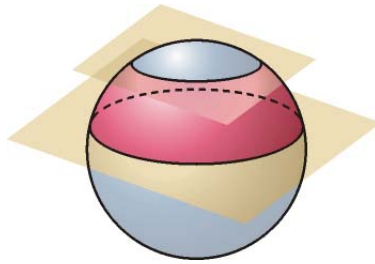


Figura 13: zona esférica

**Definição 2.10** *Ângulo esférico: é o ângulo, formado por dois arcos de circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a esses arcos.*

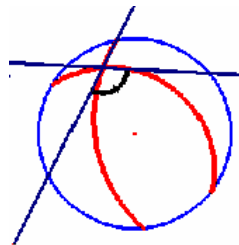


Figura 14: ângulos esféricos

**Definição 2.11** *Geodésica é a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos. Ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.*

Na geometria plana a distância entre dois pontos é o segmento de reta formado por esses dois pontos, como o plano na geometria esférica é uma superfície esférica, a distância entre dois pontos é um arco de circunferência máxima.

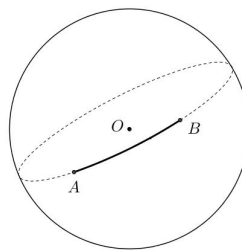


Figura 15: Geodésica  
Fonte: autora

**Definição 2.12** *Fuso esférico, também conhecido como biângulo esférico, é a região compreendida entre dois meridianos (figura 8, à esquerda).*

Duas circunferências máximas determinam um fuso completo ou duplo (figura 8, à direita).

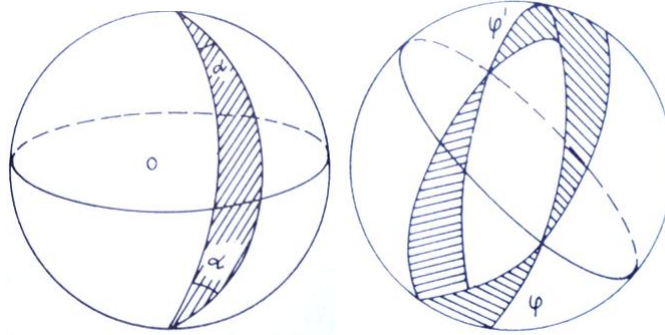


Figura 16: fuso esférico

**Definição 2.13** *Triângulo esférico: superfície limitada por três arcos circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima.*

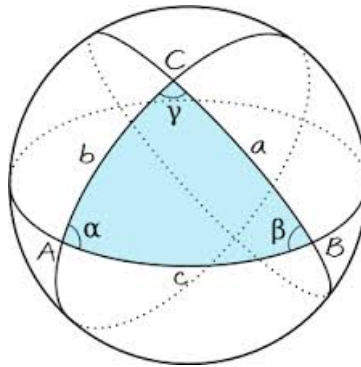


Figura 17: Triângulo esférico

Na figura 16 temos o triângulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Seus lados são as geodésicas  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Seus ângulos internos são  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

## 2.3 Teoremas

**Teorema 2.1** *A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.*

**Demonstração:** Seja  $S$  uma superfície esférica, de raio  $r$  e centro  $O$  e  $\alpha$  um plano que passa por  $O$ . Temos que a interseção entre a superfície  $S$  e o plano  $\alpha$  será o lugar geométrico dos pontos de  $\alpha$  que distam  $r$  do ponto  $O$ . Ou seja, por definição, temos que a interseção é a circunferência de raio  $r$ .  $\square$

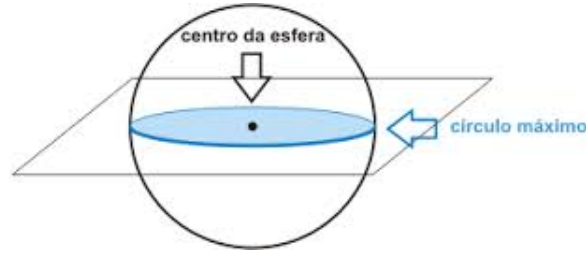


Figura 18: interseção entre esfera e plano passando pelo centro

**Teorema 2.2** O volume de uma esfera, onde o raio da esfera é  $r$  é

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

**Demonstração:** Temos que o volume  $V$  de um sólido obtido pela revolução de uma região sob o gráfico da função contínua, positiva,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  em torno do eixo  $Ox$  é

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Logo, para obtermos o volume da esfera, basta considerar  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$ , definida no intervalo  $[-r, r]$ . Então.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2}) dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2}) dx \\ &= \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.3** A área  $A$  de uma superfície esférica é igual a  $A = 4\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio da superfície esférica.

**Demonstração:** A área da superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua e positiva, diferenciável e com derivada  $f'$  contínua no intervalo  $(a, b)$ , em torno do eixo  $Ox$  é definida pela integral

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Logo, temos que a área de uma superfície esférica, pode ser gerada pela revolução do gráfico da função  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  em torno do eixo  $Ox$ .

Como,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Então,

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = \\ &= 2\pi r (x) \Big|_{-r}^r \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.1** A área  $A_c$  de uma calota esférica, onde  $r$  é o raio da superfície esférica e  $h$  é a altura da calota é igual a

$$A_c = 2\pi r h$$

,

**Demonstração:** Seja  $d$ , a diferença entre o raio  $r$  e a altura  $h$  da calota esférica. Conforme figura abaixo. Imagine a esfera da figura acima, no plano cartesiano com centro na origem.

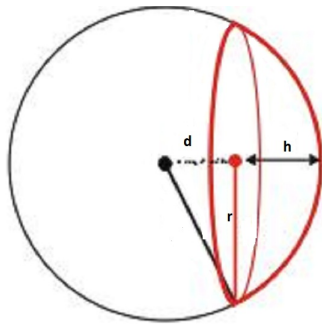


Figura 19: Calota esférica

Fonte: autora

De forma equivalente ao que foi feito na demonstração da área da esfera, temos que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_d^r f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_d^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi r \int_d^r dx \\ &= 2\pi r (x) \Big|_d^r \\ &= 2\pi r^2 - 2\pi r d = 2\pi r (r - d) = 2\pi r h \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.2** A área  $A_z$  de uma zona esférica é  $A_z = 2\pi rh$ , onde  $r$  é o raio da superfície esférica e  $h$  é a distância entre os planos paralelos.

**Demonstração:** Observe que a zona esférica, fica situada entre duas calotas esféricas. Então a área da zona esférica será a área da superfície esférica menos a área das calotas.

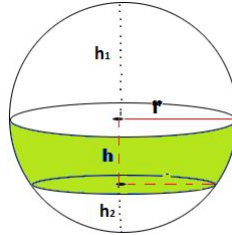


Figura 20: Área de uma zona esférica

Fonte: autora

Seja a área das calotas igual a  $2\pi.r.h_1 + 2\pi.r.h_2$ , sendo  $h_1$ , altura da calota 1 e  $h_2$ , a altura da calota 2. Então a área da zona esférica, será,

$$4\pi.r^2 - (2\pi.r.h_1 + 2\pi.r.h_2) = 2\pi.r.(2r - h_1 - h_2) = 2\pi.r.h$$

□

**Corolário 2.3** A área  $A_f$  de um fuso esférico é  $A_f = 2\alpha r^2$ , onde  $r$  é o raio da superfície esférica e  $\alpha$  é o ângulo do fuso.

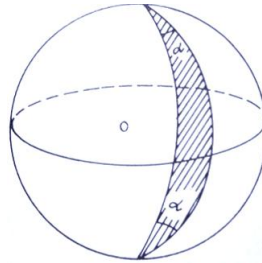


Figura 21: área do fuso esférico

**Demonstração:** A demonstração pode ser feita através de uma regra de três simples: A área do fuso esférico  $A_f$  está para a área da superfície esférica que é  $4\pi r^2$ , assim como o ângulo  $\alpha$  do fuso está para  $2\pi$ .

$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$A_f = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2$$

□

**Teorema 2.4** *Seja  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico  $ABC$ , então  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$ , onde  $a$  é a área desse triângulo esférico e  $r$  é o raio da superfície esférica.*

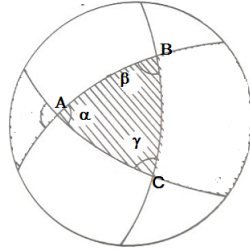


Figura 22: Área do Triângulo Esférico ABC

Fonte: autora

**Demonstração:** Prolongando os lados do triângulo esférico, construiremos três fusos completos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo.

As áreas de cada um desses fusos completos é  $4\alpha r^2$ ,  $4\beta r^2$  e  $4\gamma r^2$ . A área de um triângulo esférico  $ABC$  é igual a área do triângulo  $A'B'C'$  formado pelos pontos antípodas do triângulo esférico  $ABC$ , pois estes triângulos são congruentes, pelo caso LLL, por exemplo o lado  $AB$  e  $A'B'$  são arcos subtendidos por ângulos congruentes, caso opostos pelo vértice. Ao somarmos estas áreas teremos a área da superfície esférica acrescida de quatro vezes a área do triângulo esférico  $ABC$ , pois foi contado duas vezes a mais a área do triângulo esférico  $ABC$  e duas vezes a mais a área do triângulo esférico  $A'B'C'$ . Então

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4a$$

$$4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4r^2\left(\pi + \frac{a}{r^2}\right)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$$

□

**Teorema 2.5** *Seja  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico  $ABC$ , então  $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ , onde  $a$  é a área desse triângulo esférico e  $r$  é o raio da superfície esférica.*

**Demonstração:** A área é maior que  $\pi$ , conforme demonstração do teorema anterior. Podemos imaginar um triângulo esférico que ocupe quase todo o hemisfério que o contém. Para isso tome os três vértices equidistantes e bem próximos da circunferência máxima que separa um hemisfério do outro. Logo, se isso ocorrer a área do triângulo esférico tende à área do hemisfério  $2\pi r^2$ , então a soma tende para  $3\pi$ , entretanto, não assume este valor. □

Como podemos ver pela demonstração a soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que  $\pi$  e menor do que  $3\pi$ . Este valor não é constante, como na geometria plana. De fato, o excesso a  $\pi$  é diretamente proporcional à área do triângulo.

$$A = [\pi - (\alpha + \beta + \gamma)]r^2$$

onde  $A$  é a área do triângulo esférico e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos esféricos desse triângulo.

A desigualdade triangular é válida para triângulos esféricos.

**Teorema 2.6** *Cada lado de um triângulo esférico é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois lados.*

**Demonstração:** Observe a figura 22, o lado  $AB$  do triângulo (arco de comprimento  $c$ ) é igual ao ângulo  $\widehat{AOB}$ , em radianos. O lado  $AC$  (arco de comprimento  $b$ ) é igual ao ângulo  $\widehat{AOC}$ , em radianos. O lado  $BC$  (arco de comprimento  $a$ ) é igual ao ângulo  $\widehat{BOC}$ , em radianos.

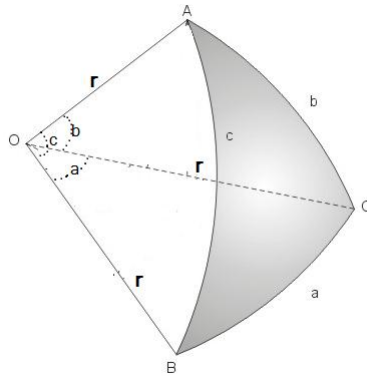


Figura 23: Triângulo esférico  
fonte: autora

Caso os lados  $a$  ( $\widehat{BOC}$ ),  $b$  ( $\widehat{AOC}$ ) e  $c$  ( $\widehat{AOB}$ ) sejam iguais, o teorema é verdadeiro. Considere o ângulo triedro  $O-ABC$ . Seja  $a$  ( $\widehat{BOC}$ ) o maior lado. Sobre  $OA$  tome um ponto  $X$  qualquer; sobre  $OB$  tome um ponto  $Y$  e sobre  $XY$  um ponto  $P$  de modo que  $\widehat{XOP} = \widehat{AOC}$ . Sobre  $OC$  tome um ponto  $Z$  de modo que  $OZ = OP$ . Unindo-se  $X$  e  $Y$  a  $Z$  obtemos o triângulo  $XYZ$  no qual  $XP = XZ$ , pois os triângulos  $XOZ$  e  $XOP$  são congruentes (caso LAL).

Pela desigualdade triangular da geometria plana, temos  $XZ + ZY > XY$ , então  $XZ + ZY > XP + PY$ , como  $XP = XZ$ , temos que  $ZY > PY$ .

Como  $ZY > PY$ , temos que  $\widehat{ZOY} > \widehat{POY}$ . Então,  $\widehat{XOZ} + \widehat{ZOY} > \widehat{XOP} + \widehat{POY} = \widehat{XOY}$ .

Ou seja,  $a < b + c$ , como queríamos demonstrar.  $\square$



## 2.4 Exemplos de aplicação:

1) (Extraído e adaptado de [2]) A forma física do Planeta Terra não é uma esfera, pois apresenta um achatamento nos pólos Norte e Sul e outras irregularidades que chamamos de relevo (superfície topográfica). Na verdade sua forma física se denomina geóide. Desprezando este fato e considerando a Terra como uma esfera, cujo raio médio é igual a 6370 km, responda: em alto mar, quantos quilômetros um navio percorre quando se move em  $1^\circ$  de circunferência máxima.

**Resolução:** Queremos determinar o comprimento de um arco de circunferência máxima sobre a superfície da Terra que está associado a um ângulo central cuja medida é igual a  $1^\circ$ . Logo, comprimento do arco está para o comprimento da circunferência máxima assim como o ângulo central ( $1^\circ$ ) que determina o arco está para o ângulo de uma volta ( $360^\circ$ ).

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{1^\circ}{360^\circ} \rightarrow l = \frac{2\pi r}{360} \rightarrow l = \pi \frac{6370}{180} \rightarrow l \approx 111km$$

2) (Extraído de [4]): As cidades de Curitiba e Goiânia estão localizadas sobre o mesmo meridiano ( $49^\circ$  W) e suas latitudes são respectivamente  $26^\circ$  S e  $17^\circ$  S. Assim, determine a distância entre elas.

**Resolução:** A latitude de Goiânia é  $17^\circ$  S, ou seja,  $\phi = -17^\circ$  A latitude de Curitiba é  $26^\circ$ S, ou seja,  $\phi = -26^\circ$   
 $\Delta\phi = 9^\circ$ .

Logo, a distância entre Curitiba e Goiânia é  $9 \cdot (111,17)km = 1000,53km \approx 1000$  km.

3)Determine a área de um triângulo esférico que está contido na superfície esférica de raio 10 cm, onde  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$  e  $\gamma = 5^\circ$ .

**Resolução:**

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{36} = \pi + \frac{a}{100}$$

$$a = 100 \cdot \left(\pi - \pi + \frac{\pi}{36}\right) \rightarrow a = 100 \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right) = 8,72cm^2$$

## 2.5 Trigonometria Esférica

Nesta subseção, apresentamos a fórmula fundamental da trigonometria esférica. Há várias outras relações trigonométricas para triângulos esféricos, mas é de fundamental importância neste trabalho a fórmula fundamental para aplicação na Astronomia de Posição. Apresentamos também a “Lei dos Senos” por acharmos interessante o fato de ser equivalente a Lei dos Senos da Trigonometria Plana.

A fórmula fundamental, também denominada fórmula dos 4 elementos para triângulos esféricos, é a mais importante para resolução de triângulos esféricos. Por meio dela é possível determinar os seis elementos de um triângulo: 3 lados e 3 ângulos internos.

O raio da esfera trigonométrica é unitário.

**Teorema 2.7** *Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e ângulos internos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Então*

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\cos(A)$$

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\cos(B)$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\cos(C)$$

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo esférico sobre uma esfera de centro  $O$  e raios

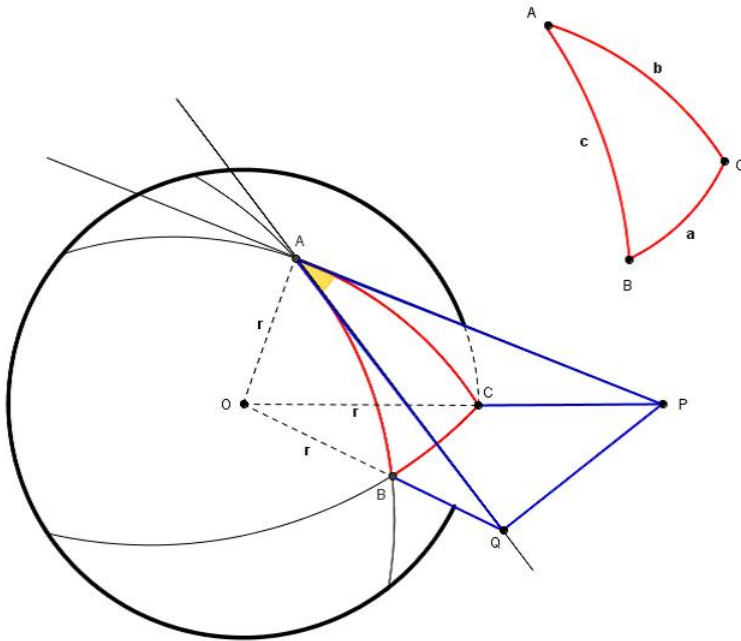


Figura 24: Triângulo esférico e suas tangentes

$OA \equiv OB \equiv OC \equiv r$ , conforme a figura 23.

O lado  $a$  equivale ao ângulo central  $\widehat{COB}$ , o lado  $b$  equivale ao ângulo central  $\widehat{AOC}$  e o lado  $c$  equivale ao ângulo central  $\widehat{AOB}$ .

O ângulo interno  $A$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  que passam por  $A$ . O ângulo  $B$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{BA}$  e  $\widehat{BC}$  passando por  $B$  e o ângulo  $C$  é o ângulo formado pela retas tangentes aos arcos  $\widehat{CA}$  e  $\widehat{CB}$  passando por  $C$ .

Os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  são opostos, respectivamente, aos ângulos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Prolongando as tangentes que passam por  $A$  e as retas  $OB$  e  $OC$ , temos que estas se encontram nos pontos  $P$  e  $Q$  conforme figura 23.

As retas  $AP$  e  $AQ$  são tangentes à superfície da esfera e, portanto as semirretas  $AO$  e  $AP$  são perpendiculares, pois uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio. O mesmo acontece com as semirretas  $AO$  e  $AQ$ .

Da geometria plana, podemos estabelecer algumas relações trigonométricas. Os triângulos  $OAP$  e  $OAQ$  são retângulos em  $A$ . Então:

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$$

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$$

$$\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$$

$$\text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2$$

Somando estas duas equações temos que:

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$$

Então,

$$2\overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2)$$

Os triângulos  $PQO$  e  $PQA$ , não são retângulos. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos A$$

Então,

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos A$$

E portanto,

$$2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cos a = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cos A$$

Então

$$\cos a = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cos A$$

Ou seja,

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AO}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cos A$$

Substituindo  $\frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} = \cos b$ ;  $\frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} = \cos c$ ;  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} = \sen b$  e  $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}} = \sen c$ , chegamos na fórmula fundamental para triângulos esféricos.

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sen b \cdot \sen c \cdot \cos A$$

De forma análoga, chegamos as outras duas combinações, completando assim o grupo das chamadas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sen a \cdot \sen c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sen a \cdot \sen b \cdot \cos C$$

□

## 2.6 Exemplo de aplicação

(Extraído de [2]) A cidade de Kingston, Jamaica, tem as seguintes coordenadas geográficas: latitude  $18^{\circ}5'N$  e longitude  $76^{\circ}58' W$ , enquanto que a cidade de Bristol, Inglaterra, tem latitude  $51^{\circ}26' N$  e longitude  $2^{\circ}35' W$ . De posse dos dados, determine a distância entre Kingston e Bristol.

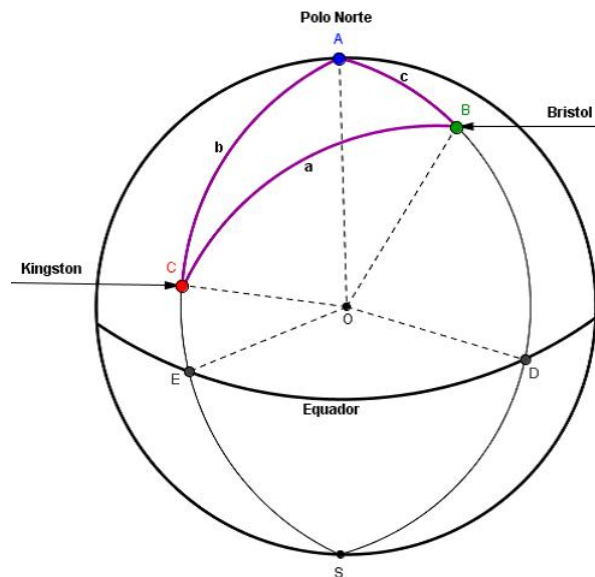


Figura 25: Triângulo esférico - Distância entre cidades

Vamos considerar o globo terrestre, onde o vértice do triângulo esférico coincide com o pólo Norte. Esta escolha justifica-se, pois, conhecendo as latitudes e longitudes dos pontos

$B$  e  $C$  nos possibilita determinar os valores de  $b$  e  $c$  e do ângulo  $A$ .

Como o arco  $AD$  tem  $90^\circ$  e o arco  $BD$  tem  $51^\circ 26'$  (latitude de Bristol), então  $c = 90^\circ - 51^\circ 26' = 38^\circ 34'$ . Analogamente, temos  $b = 71^\circ 55'$ . O ângulo  $A$  está associado ao arco  $DE$ . Então, para determiná-lo, basta fazer a diferença entre as longitudes, isto é,  
 $A = -2^\circ 35' - (-76^\circ 58') = 74^\circ 23'$ .

Agora é só aplicar os dados na fórmula fundamental

$$\cos(a) = \cos(71^\circ 55')\cos(38^\circ 34') + \sin(71^\circ 55')\sin(38^\circ 34')\cos(74^\circ 23')$$

$$\cos(a) = 0,40223$$

$$a = \arccos(0,40223)$$

$$a = 66,28^\circ$$

Como  $1^\circ$  de circunferência máxima corresponde na superfície terrestre a aproximadamente 111,12 km, temos que a distância entre Kingston e Bristol é aproximadamente  $66,28 \times 111,17$  km = 7368,35 km.

## 2.7 Lei dos Senos para triângulos esféricos

O triângulo esférico  $ABC$  da figura abaixo pertence a superfície esférica de centro em  $O$ . Considere a reta perpendicular ao plano  $BOC$  cuja interseção determina o ponto  $P$  e que tal reta passa pelo vértice  $A$ . Por  $P$  traçamos as retas perpendiculares aos segmentos  $BO$  e  $CO$  que resulta nos pontos  $Q$  e  $R$  respectivamente. Agora pelo ponto  $A$ , também traçamos as perpendiculares aos segmentos  $BO$  e  $CO$  cujas interseções são os pontos  $Q$  e  $R$ ; pois o plano formado pelos pontos  $P, Q$  e  $A$  é perpendicular ao plano formado pelos pontos  $O, B$  e  $C$  e o plano formado pelos pontos  $A, P$  e  $R$  é perpendicular ao plano formado pelos pontos  $O, B$  e  $C$ .

Observe que o ângulo  $\hat{B}$  é formado pela interseção dos planos que passam por  $BOA$  e  $COB$ . Como as retas  $AQ$  e  $QP$  são perpendiculares no ponto  $Q$ , o ângulo  $AQP$  é congruente ao ângulo  $\hat{B}$ .

O ângulo  $\hat{C}$  é formado pela interseção dos planos que passam por  $COA$  e  $BOC$ .

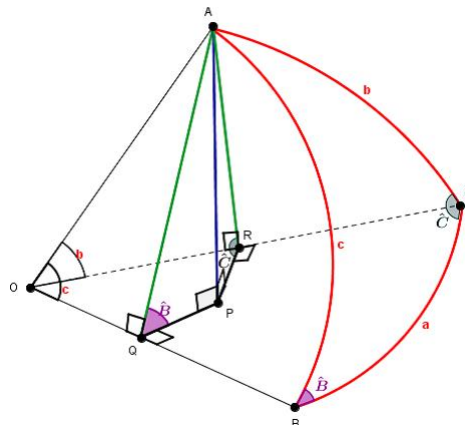


Figura 26: Triângulo esférico

Como as retas  $AR$  e  $RP$  são perpendiculares no ponto  $R$ , então o ângulo  $ARP$  é congruente

ao ângulo  $\hat{C}$ .

Então, como acabamos de ver, os triângulos  $AQP$ ,  $APQ$ ,  $AQO$  e  $ARO$  são triângulos retângulos. Dos quais podemos extrair as seguintes relações:

$$\text{sen}B = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$$

$$\text{sen}C = \frac{\overline{AP}}{\overline{AR}}$$

$$\text{senc} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AO}}$$

$$\text{sen}b = \frac{\overline{AR}}{\overline{AO}}$$

Logo, temos que:

$$\overline{AP} = \overline{AQ}\text{sen}B = \overline{AR}\text{sen}C$$

$$\overline{AR} = \overline{AO}\text{sen}b$$

$$\overline{AQ} = \overline{AO}\text{senc}$$

Então,

$$\overline{AP} = \overline{AO}\text{sen}b\text{sen}C$$

$$\overline{AP} = \overline{AO}\text{sencsen}B$$

E portanto, temos que

$$\overline{AO}\text{sen}b\text{sen}C = \overline{AO}\text{sencsen}B$$

logo podemos afirmar que,

$$\frac{\text{sen}b}{\text{sen}B} = \frac{\text{senc}}{\text{sen}C}$$

De modo análogo, considerando o vértice B ou C, teremos que

$$\frac{\text{sena}}{\text{sen}A} = \frac{\text{sen}b}{\text{sen}B}$$

E portanto,

$$\frac{\text{sena}}{\text{sen}A} = \frac{\text{sen}b}{\text{sen}B} = \frac{\text{senc}}{\text{sen}C}$$

### 3 Astronomia

Nesta seção apresentamos a esfera celeste e seus pontos e planos que são úteis para a determinação da posição dos astros no céu. Depois tem uma subseção sobre os sistemas de coordenadas astronômicas, são apresentados três sistemas. A terceira subseção é sobre o movimento dos astros e na quarta subseção apresentamos o triângulo de posição, no qual aplicamos a fórmula fundamental com intuito de relacionarmos as coordenadas astronômicas

de sistema diferentes. É possível também com aplicação da fórmula fundamental desenvolver outra fórmula para calcular de distâncias angulares entre duas estrelas.

A curiosidade do homem sobre a natureza do Universo vem desde os tempos pré-históricos, por isso a astronomia é frequentemente considerada a mais antiga das ciências. Os registros astronômicos mais antigos datam de aproximadamente 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios. Naquela época, os astros eram estudados com objetivos práticos, como medir a passagem do tempo (fazer calendários) para prever a melhor época para o plantio e a colheita, ou com objetivos mais relacionados à astrologia, como fazer previsões do futuro, já que, não tendo qualquer conhecimento das leis da natureza (física), acreditavam que os deuses do céu tinham o poder da colheita, da chuva e mesmo da vida.[10]

Ao longo da história da humanidade aprendemos muito sobre o universo como um todo. A observação do céu motivou o desenvolvimento do conhecimento, construído durante milênios graças ao trabalho, a dedicação e à criatividade de muitos pensadores, o qual provocou grandes mudanças na nossa maneira de pensar e entender o mundo.

A ideia de universo geocêntrico (Terra como centro do Universo) permaneceu durante muito tempo. Por volta de 1500 é que essa ideia foi substituída pela ideia do universo heliocêntrico (com o sol no centro e a Terra girando em torno dele). Com o passar do tempo essa ideia foi sendo aceita, pois ajudou a compreender melhor o movimento dos astros no céu. Hoje, temos a consciência de que o sol não é o centro do universo e sim o centro do nosso sistema solar.

A astronomia esférica, ou astronomia de posição, se refere às direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância a nós. Essas direções são expressas em termos das posições sobre a superfície de uma esfera (a esfera celeste). Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Dessa forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações.

Foram os gregos que deram um enorme avanço à Astronomia, devido ao conhecimento herdado de culturas mais antigas. Pois acreditavam ser possível compreender e descrever matematicamente os fenômenos do mundo natural. Surge, então os primeiros conceitos de Esfera Celeste, uma esfera rotativa de material cristalino, incrustada de estrelas, tendo a Terra no centro.

### 3.1 A esfera celeste

Como todos os astros que contemplamos estão muito longe de nós, deixamos de ter a noção de profundidade e parece-nos que todos eles estão dispostos sobre uma esfera muito grande que chamaremos de Esfera Celeste. [1]

Alguns planos e pontos na esfera celeste, que são úteis para a determinação da posição dos astros no céu, definidos desde a antiguidade pelos gregos são:

- Direção vertical: é a direção acima ou abaixo de um observador. Tem a mesma direção da aceleração gravitacional.

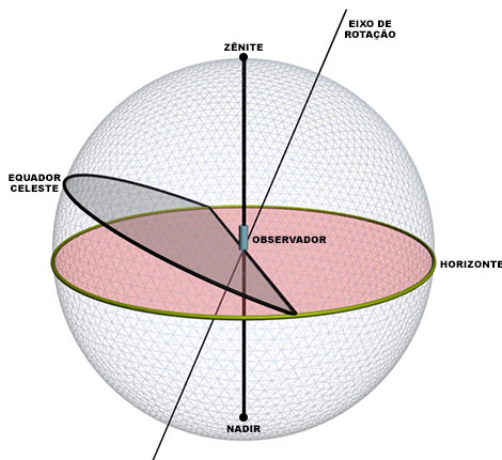


Figura 27: Esfera Celeste

- Plano horizontal: é o plano perpendicular à direção vertical de um observador, e que contém o mesmo. Como o raio da Terra é muito pequeno frente ao raio da esfera celeste, considera-se que o plano do horizonte intercepta a esfera celeste em um círculo máximo, ou seja, passa pelo centro. Este círculo máximo é chamado de horizonte.
- Zênite: é o ponto da esfera celeste, resultante do prolongamento ao infinito da direção vertical do observador no sentido contrário ao da gravidade. É o marco referencial de localização de posições de objetos celestes.
- Nadir: É o ponto diametralmente oposto ao Zênite. Zênite e Nadir são pontos antípodas.
- Equador Celeste: é um círculo máximo, dado pela interseção da expansão do plano equatorial terrestre com a esfera celeste. Sendo o plano equatorial terrestre, o plano que contém o equador terrestre.
- Pólo Celeste Norte: é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no Hemisfério Norte.
- Pólo Celeste Sul: é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no Hemisfério Sul.

Note que para um observador situado no pólo norte geográfico da Terra, o pólo celeste coincidirá com o zênite.

- Círculos verticais: de forma semelhante aos meridianos de superfície esférica, é qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que contém a vertical do lugar, começam no Zênite e terminam no Nadir.



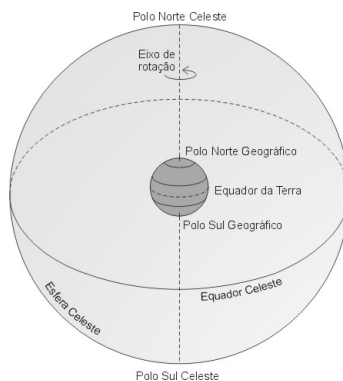


Figura 28: Esfera celeste

- Ponto Geográfico Norte (ou Ponto Cardeal Norte): é o ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo Pólo Celeste Norte intersecta o Horizonte.
- Ponto Geográfico Sul: é o ponto em que o círculo vertical que passa pelo Pólo Celeste Sul intersecta o Horizonte. A linha sobre o Horizonte que liga os pontos cardeais Norte e Sul chama-se linha Norte-Sul, ou linha meridiana. A linha Leste-Oeste é obtida traçando-se, sobre o Horizonte, a perpendicular à linha Norte-Sul.
- Círculos de altura: são círculos da esfera celeste paralelos ao Horizonte. São também chamados almucântaras, ou paralelos de altura.
- Círculos horários ou meridianos: são semicírculos da esfera celeste que contém os dois pólos celestes. São perpendiculares ao equador celeste. São também chamados meridianos. O meridiano que passa também pelo Zênite se chama Meridiano Local.
- Paralelos: são círculos da esfera celeste paralelos ao equador celeste. São também chamados círculos diurnos. O caminho de uma estrela no céu, durante um dia, devido a rotação da Terra é um círculo diurno.
- Ponto Vernal: também denominado Ponto  $\gamma$ , é o ponto da esfera celeste onde se situa o sol no equinócio de março (entre 21 e 22 de março). É um ponto sobre o equador celeste e, ao passar por ele, o sol sai do hemisfério sul celeste e entra no hemisfério norte celeste.
- Eclíptica: é o caminho aparente do sol na esfera celeste ao longo de um ano. Ela faz um ângulo de  $23,5^{\circ}$  com o equador celeste.
- Latitude ( $\Phi$ ): é igual à altura do pólo elevado. Seu valor é igual a latitude geográfica do local onde se encontra o observador.

### 3.2 Sistemas de coordenadas astronômicas

Para determinar a posição de um astro no céu, precisamos definir um sistema de coordenadas. Nesse sistema, vamos utilizar apenas coordenadas angulares, sem nos preocuparmos com as distâncias dos astros. Para definirmos uma posição sobre uma esfera precisamos definir um eixo e um plano perpendicular a este eixo. A posição do astro será determinada através de dois ângulos de posição, um medido sobre um plano fundamental, e o outro medido perpendicularmente a ele.

#### Sistema horizontal

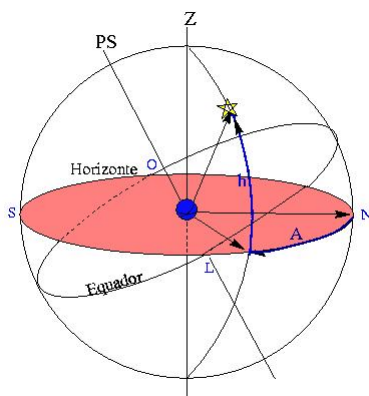


Figura 29: Sistema horizontal

Nesse sistema o plano fundamental é o Horizonte celeste e o eixo perpendicular é o círculo vertical do astro. As coordenadas horizontais são azimute e altura.

- Azimute ( $A$ ): é o ângulo contado ao longo do horizonte, desde a direção norte, no sentido para leste até a vertical do astro. O azimute varia de  $0$  a  $360^0$ .
- Altura ( $h$ ): é o ângulo contado ao longo do círculo vertical que contém o astro, do horizonte até o astro. A altura varia entre  $-90^0$  e  $+90^0$ . A altura do zênite é de  $90^0$  e do Nadir é de  $-90^0$ . Acima do horizonte a medida é positiva e abaixo é negativa.
- O complemento da altura se chama distância zenital ( $z$ ). Assim, a distância zenital é o ângulo medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no zênite e fim no astro. A distância zenital varia entre  $0$  e  $180^0$ .

Como o sistema horizontal é um sistema local, ou seja, é fixo na Terra, as coordenadas azimute, altura e distância zenital dependem do lugar e do instante da observação e não são características constantes do astro.

#### Sistema equatorial celeste

Nesse sistema o plano fundamental é o equador celeste e o eixo perpendicular é o meridiano do astro.

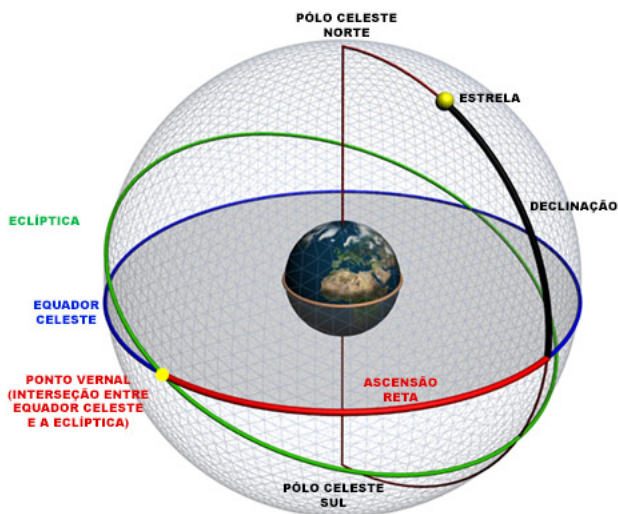


Figura 30: Sistema Equatorial Celeste

- Ascensão reta ( $\alpha$ ): é o ângulo medido sobre o equador, com origem no meridiano que passa pelo Ponto  $\gamma$  e fim no meridiano do astro. A ascensão reta varia entre 0h e 24h (ou entre 0 e  $360^0$ ), aumentando para leste.
- Declinação ( $\delta$ ): é o ângulo medido sobre o meridiano do astro, com origem no equador até o astro. Ou seja, é o arco do meridiano celeste do astro, contado a partir do equador até o astro. A declinação varia entre  $-90^0$  a  $90^0$ .
- O complemento da declinação se chama distância polar.

O sistema equatorial celeste é fixo na esfera celeste, logo, suas coordenadas não dependem do lugar e instante de observação. A ascensão reta e a declinação de um astro permanecem praticamente constantes por longos períodos de tempo.

### Sistema equatorial local ou horário

Nesse sistema o plano fundamental é o Equador celeste e o eixo perpendicular é o meridiano do astro. A coordenada medida ao longo do Equador não é mais a ascensão reta, mas sim uma coordenada não constante chamada ângulo horário. A outra coordenada continua sendo a declinação.

- Ângulo horário ( $H$ ): é o ângulo medido sobre o Equador, com origem no meridiano local e extremidade no meridiano do astro, no sentido horário quando visto da extremidade norte do eixo de rotação da esfera celeste. Varia entre -12h e +12h, ou de 0 a  $360^0$ . O sinal negativo indica que o astro está a leste do meridiano, e o sinal positivo indica que ele está a oeste do meridiano.

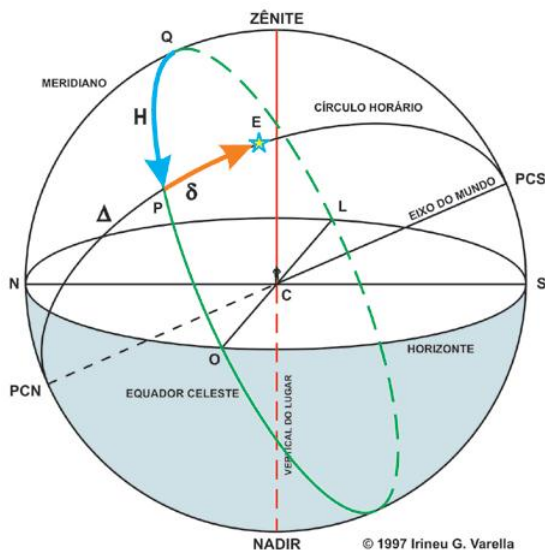


Figura 31: Sistema horário

### 3.3 Movimento diurno dos astros

Durante o dia os astros descrevem arcos paralelos ao equador, sendo que a orientação desses arcos depende da latitude do lugar.

Nos pólos,  $\Phi = \pm 90^\circ$ , as estrelas permanecem 24 horas no horizonte, descrevendo no céu, círculos paralelos ao horizonte. Desta forma não tem nem nascimento (momento em que aparece no horizonte) nem ocaso (momento em que desaparece no horizonte), e não é visível o hemisfério oposto.

No equador,  $\Phi = 0$ , as estrelas nascem e se põem, ficando 12 horas acima do horizonte e 12 horas abaixo do horizonte, desta forma são vistos nos dois hemisférios. Suas trajetórias são arcos perpendiculares ao horizonte.

Em latitudes intermediárias, algumas tem nascimento e ocaso, e outras não. A trajetória é inclinada em relação ao horizonte, sendo que esta inclinação depende da latitude do lugar.

No nascer e no ocaso de um astro, temos que a altura do astro é zero e sua distância zenital é de  $90^\circ$ .

### 3.4 Triângulo de Posição

É o triângulo esférico formado, na esfera celeste, pelo astro, pelo zênite e pelo pólo elevado. O triângulo de posição é usado para obter as coordenadas do astro, quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando conhecidas as coordenadas do astro. Também permite fazer as transformações de um sistema de coordenadas para outro.

Vejamos as medidas dos lados do triângulo de posição:

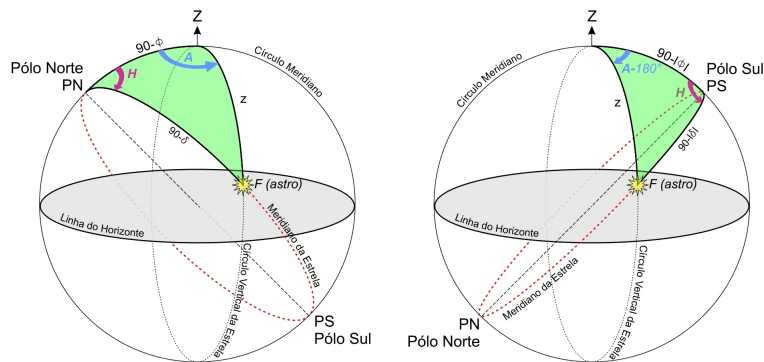


Figura 32: Triângulo de Posição

- Lado formado pelo zênite e o pólo elevado é arco de medida igual a  $90^0 - |\Phi|$ , sendo  $\Phi$  a latitude local do observador.
- Lado formado pelo zênite e o astro é o arco de medida igual à  $z$  (distância zenital) .
- Lado formado pelo astro e o pólo elevado é o arco de medida igual à  $90^0 - |\delta|$ , sendo  $\delta$  a declinação do astro.

Os ângulos internos do triângulo de posição são:

- Ângulo com vértice no zênite tem medida igual a  $A$  (azimute), quando o pólo elevado é o pólo norte e tem medida igual  $A - 180^0$ , quando o pólo elevado é o pólo sul.
- Ângulo com vértice no pólo elevado tem medida igual a  $H$  (ângulo horário).
- Ângulo com vértice no astro.

Aplicando a fórmula fundamental (fórmula dos quatro elementos) temos:

$$\cos(z) = \cos(90^0 - \Phi)\cos(90^0 - \delta) + \sen(90^0 - \Phi)\sen(90^0 - \delta)\cos H$$

Logo,

$$\cos(z) = \sen\Phi\sen\delta + \cos\Phi\cos\delta\cos H$$

Desenvolvendo um pouco mais, teremos:

$$\cos z - \sen\Phi\sen\delta = \cos\Phi\cos\delta\cos H$$

$$\cos H = \frac{\cos z}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} - \frac{\sin \Phi \cdot \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \delta}$$

$$\cos H = \cos z \cdot \sec \Phi \cdot \sec \delta - \operatorname{tg} \Phi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

Desta forma foi possível relacionar o ângulo horário ( $H$ ), a distância zenital ( $z$ ), a declinação ( $\delta$ ) e a latitude ( $\Phi$ ).

Outra relação que temos, aplicando a fórmula fundamental é:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \Phi) \cos z + \sin(90^\circ - \Phi) \operatorname{sen} z \cos A$$

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \Phi \cdot \cos z + \cos \Phi \cdot \operatorname{sen} z \cdot \cos A$$

Que desenvolvendo um pouco mais, temos:

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \Phi \cdot \operatorname{sen} z} - \frac{\operatorname{sen} \Phi \cdot \cos z}{\cos \Phi \cdot \operatorname{sen} z}$$

$$\cos A = \operatorname{sen} \delta \cdot \sec \Phi \cdot \operatorname{cosec} z - \operatorname{tg} \Phi \cdot \operatorname{cot} z$$

Assim, relacionamos o azimute ( $A$ ), a declinação ( $\delta$ ), a latitude ( $\Phi$ ) e a distância zenital ( $z$ ).

Podemos também, determinar o ângulo horário no ocaso ( $z = 90^\circ$ ) para uma estrela de declinação  $\delta$ , em um local de latitude  $\Phi$ .

Observe a figura 33:

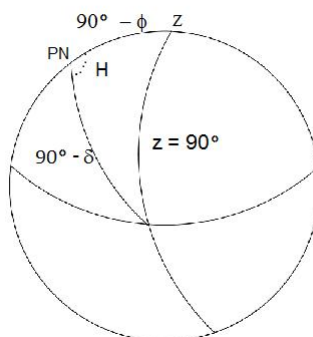


Figura 33: Latitude zero

Fonte: autora

Aplicando a fórmula

$$\cos z = \operatorname{sen} \Phi \cdot \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

temos:

$$\cos 90^0 = \text{sen}\Phi \text{sen}\delta + \cos\Phi \cos\delta \cos H$$

Então,

$$0 = \text{sen}\Phi \text{sen}\delta + \cos\Phi \cos\delta \cos H$$

O que implica,

$$\cos H = -\frac{\text{sen}\Phi \text{sen}\delta}{\cos\Phi \cos\delta}$$

Ou seja,

$$\cos H = -\text{tg}\Phi \text{tg}\delta$$

Podemos calcular, usando a fórmula acima, por exemplo, quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte em um certo local e em certa data do ano, pois o tempo de permanência acima do horizonte será duas vezes o ângulo horário desse astro no momento do nascer ou ocaso.

(Exemplo extraído de [14]) Quanto tempo permanecerá o Sol acima do horizonte em Porto Alegre, cuja latitude é  $30^0$  em um dia de Solstício de verão no hemisfério sul, em que a declinação do Sol é  $23^0 27'$ ?

**Resolução:** Aplicando a fórmula, desenvolvida acima, temos que

$$\cos H = -\text{tg}\Phi \text{tg}\delta$$

Então,

$$\cos H = -\text{tg}(30^0) \text{tg}(23^0 27')$$

logo,

$$\cos H = -0,2504$$

o que implica,  $H = 104,4^0$

Como o tempo de permanência é duas vezes o ângulo horário, temos  $2.H = 208,8^0$ .

Fazendo regra de três e passando para horas, temos:  $360^0$  está para 24 horas, assim como  $208,8^0$  está para x (tempo de permanência).

Logo,  $360.x = 208,8^0.24 \rightarrow x = 14$  horas, aproximadamente.

O azimute do astro no nascer ou no ocaso também pode ser obtido da expressão

$$\cos A = \text{sen}\delta \cdot \text{sec}\Phi \cdot \text{cossec}z - \text{tg}\Phi \cdot \text{cot}z$$

Substituindo os valores, temos:

$$\cos A = \text{sen}(-23^0 27') \text{sec}(-30^0) \text{cossec}(90^0) - \text{tg}(-30^0) \text{cot}(90^0)$$

Então,  $\cos A = -0,46$ , e portanto  $A = 117^0$

### Separação angular entre duas estrelas (ângulo entre dois astros)

A separação angular entre duas estrelas é a distância medida ao longo do círculo máximo passando pelas duas estrelas.

Considere  $A$  e  $B$ , dois astros cujas coordenadas são  $(\alpha_A, \delta_A)$  e  $(\alpha_B, \delta_B)$ . Construindo um triângulo esférico em que um dos lados seja a separação angular entre elas e os outros dois lados sejam as suas distâncias polares, ou seja, os arcos ao longo dos meridianos das estrelas desde o pólo ( $P$ ) até as estrelas, temos que o ângulo formado em  $P$  é o ângulo formado entre os dois círculos horários que passam por  $A$  e  $B$ , ângulo esse igual à diferença entre as ascensões retas dos dois astros. Aplicando a fórmula dos cossenos (a lei fundamental), temos:

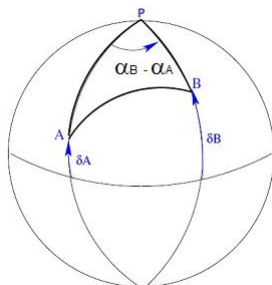


Figura 34: Separação angular

Fonte: autora

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{PA} \cos \widehat{PB} + \sin \widehat{PA} \sin \widehat{PB} \cos \widehat{APB}$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos(90 - \delta_A) \cos(90 - \delta_B) + \sin(90 - \delta_A) \sin(90 - \delta_B) \cos(\alpha_B - \alpha_A)$$

logo,

$$\cos \widehat{AB} = \sin(\delta_A) \sin(\delta_B) + \cos(\delta_A) \cos(\delta_B) \cos(\alpha_B - \alpha_A)$$

Vejamos, um exemplo (Extraído de [10]): Qual o tamanho da constelação do Cruzeiro do Sul, medido pelo eixo maior da Cruz?

O eixo maior da Cruz é formado pelas estrelas Gacrux ( $\alpha = 12^h 31^m 11^s$ ;  $\delta = -57^{\circ} 7'$ ) e Acrux ( $\alpha = 12^h 26^m 37^s$ ;  $\delta = -63^{\circ} 6'$ )

Chamando  $D$  o comprimento do eixo maior da Cruz, e aplicando a equação acima, temos:

$$\cos D = \sin \delta_{Gacrux} \sin \delta_{Acrux} + \cos \delta_{Gacrux} \cos \delta_{Acrux} \cos(\alpha_{Gacrux} - \alpha_{Acrux})$$

Observe que:

$$\delta_{Gacrux} = -57^{\circ} 7' = -57,11^{\circ}$$

$$\alpha_{Gacrux} = 12^h 31^m 11^s = 187,80^{\circ}$$



$$\delta_{Acrux} = -63^{\circ}6' = -63,10^{\circ}$$

$$\delta_{Acrux} = 12^h26^m37^s = 186,65^{\circ}$$

$$\cos D = \operatorname{sen}(-57,11^{\circ}) \cdot \operatorname{sen}(-63,10^{\circ}) + \cos(-57,11^{\circ}) \cdot \cos(-63,10^{\circ}) \cdot \cos(187,80^{\circ} - 186,65^{\circ})$$

então,  $\cos D = 0,9945$ ; o que implica que  $D \cong 6^{\circ}$ .

## 4 Sequência didática

Nesta seção apresentamos uma proposta didática, para alunos do terceiro ano do ensino médio. O intuito é que o aluno conclua a Educação Básica reconhecendo que existe outros tipos de geometrias. Nesta proposta enfatizamos a geometria esférica, pois a mesma é de fácil aplicação em Geografia e Astronomia.

A resolução de problemas é uma importante forma de ensino, pois os alunos aprendem a desenvolver estratégia de planejamento, estabelecer relações, verificar regularidades, fazer uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas, adquirem espírito de pesquisa, aprendem a consultar, a experimentar, organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções, desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança, sentido de responsabilidade e ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e argumentação. [15]

Como ponto de partida o ideal é começar com uma situação-problema, para que o assunto se torne necessário. A atividade fará os alunos refletirem sobre que tipo de superfície poderá ser real à situação abaixo. Como a geometria trabalhada com os alunos é euclidiana, os alunos pensam primeiramente no plano, e logo acham que o problema não tem solução. O professor dá um tempo para a turma pensar, se não conseguirem, o professor explica. É um bom momento para o professor introduzir a matéria sobre geometria esférica, falando inicialmente sobre as tentativas de provar o V postulado de Euclides até chegar nas geometrias não euclidianas. Estimamos o tempo de uma hora-aula (50 minutos) para desenvolvimento da Atividade 1.

### Atividade 1

Situação-Problema: Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor é o urso?

O ensino de geometria é importante para a criação do hábito de ver e compreender as formas e os contornos dos objetos, o que estimula a imaginação e a intuição e desenvolve o raciocínio e a compreensão do espaço. O aluno precisa passar por três etapas que é o espaço vivido (espaço físico), o espaço percebido (quando não precisa ser mais experimentado fisicamente) e o espaço concebido (quando consegue estabelecer relações espaciais entre elementos por meio de suas representações). As próximas Atividades 2, 3, 4, 6 e 7 são para o aluno vivenciar a superfície sobre a qual este artigo trata.

### Atividade 2

Estima-se um tempo de uma hora-aula (50 minutos) para aplicação desta atividade.

Desenvolver uma oficina com os alunos, utilizando bolinhas de isopor, fitilho (ou linha), alfinetes, canudinho e transferidor, explorando conceitos básicos da geometria esférica.

1<sup>o</sup> passo: Explicar para os alunos o que é uma reta na geometria esférica. Pedir aos alunos que façam uma reta (um círculo máximo) na superfície esférica, utilizando o fitilho. Lembrar que círculos pequenos não são considerados retas.

2<sup>o</sup> passo: Pedir para os alunos escolherem um ponto da esfera e façam retas (circunferências máximas) passando por aquele ponto. Dialogar com a turma, até que eles descubram que por aquele ponto passam infinitas retas (circunferências máximas), da mesma forma como acontece na geometria euclidiana.

3<sup>o</sup> passo: Pedir aos alunos que tracem duas retas paralelas, ou seja, duas circunferências máximas paralelas. Provavelmente os alunos irão desenhar uma circunferência máxima e outra pequena. O conceito de retas paralelas será questionado, até que percebam que não há circunferências máximas paralelas.

4<sup>o</sup> passo: Explicar o que são pontos antípodas e pedir aos alunos que identifiquem dois pontos antípodas. Na geometria plana dois pontos determinam uma única reta. E na geometria esférica?

5<sup>o</sup> passo: Ensinar como medimos ângulos formados por duas circunferências máximas. Com o fitilho fazer duas circunferências máximas, depois com os canudinhos representar as paralelas passado por aquele ponto, onde se formou o ângulo. Medir com o transferidor o ângulo formado.

6<sup>o</sup> passo: Pedir para os alunos escolherem dois pontos e pensarem qual a distância entre eles em graus. Faça primeiro para pontos antípodas. Depois marque com alfinete dois pontos que tenham distância de  $90^{\circ}$ .

7<sup>o</sup> passo: Explicar para os alunos o que é um fuso esférico, e pedir para encontrarem a área do fuso esférico formado no passo anterior. Espera-se que os alunos já saibam calcular a área de uma esfera, o intuito é que eles percebam que com uma regra de três simples possa fazer o cálculo.

### Atividade 3

Estima-se um tempo de uma hora-aula (50 minutos) para a atividade 3 e 4.

Utilizando o material da atividade anterior, escolha três pontos não alinhados (ou seja, que não pertençam todos à mesma circunferência máxima) e que estejam no mesmo hemisfério. Já sabemos que dois pontos da esfera determina pelo menos uma circunferência máxima. Com os três pontos escolhidos serão formadas três geodésicas (ou seja três arcos de circunferência). Peça aos alunos para nomear a figura formada pelos três pontos. Peça

para medirem os ângulos, anotarem os dados e fazerem a soma dos ângulos internos. Peça aos alunos para compararem o resultado com a soma dos ângulos internos de um triângulo de um superfície plana.

#### Atividade 4

Na atividade 2, os alunos viram que a área de um fuso esférico é diretamente proporcional ao ângulo esférico do fuso. Com o uso das bolinhas de isopor, vamos formar um triângulo esférico e desenvolver a demonstração da área de um triângulo esférico. Chegaremos a conclusão que a área é diretamente proporcional ao excesso da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. E em qualquer triângulo esférico a soma dos ângulos internos é maior que  $180^\circ$ , sendo esse excesso igual a área do triângulo dividida pelo quadrado do raio. Podemos mostrar aos alunos que os lados do triângulo não podem ser uma semicircunferência máxima, mas à medida que tende para este valor a soma dos ângulos internos tende a  $540^\circ$ .

#### Atividade 5

Apresentar o conceito de esfera celeste e seus elementos. Pode ser uma apresentação em power point. Esta atividade pode ser feita no mesmo dia da oficina (Atividade 6). Estima-se um tempo de 20 minutos para a apresentação e 30 minutos para o oficina (Atividade 6).

#### Atividade 6

Representar em bolas de isopor os sistemas de coordenadas: horizontal, equatorial e horário.

#### Atividade 7

Uma aula expositiva dialogada sobre trigonometria esférica. Como os alunos do terceiro ano do ensino médio já viram trigonometria plana, eles não terão dificuldades para acompanhar tais demonstrações. Estima-se um tempo de uma hora-aula (50 minutos) para esta atividade.

Na esfera abaixo temos um triângulo esférico. Traçando as tangentes passando por  $A$  e prolongando os segmentos  $OB$  e  $OC$ , formamos uma pirâmide.

Observe a figura abaixo e faça o que se pede:

1) Observe os triângulos  $AOP$  e  $AOQ$ , eles são retângulos. Aplique o teorema de pitágoras, em ambos.

2) Observe os triângulos  $APQ$  e  $OPQ$ , eles não são retângulos. Aplique a lei dos cossenos para esses triângulos, em relação ao segmento  $PQ$  que é comum aos dois triângulos.

3) Adicione as duas expressões encontradas no item 1.

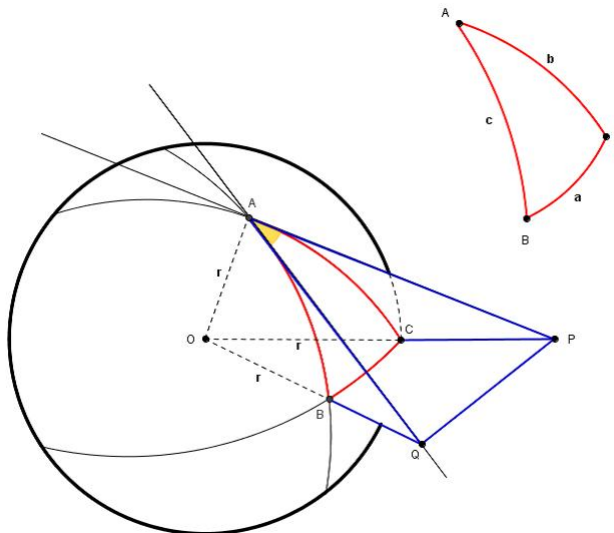


Figura 35: Triângulo esférico e tangentes

- 4) Iguale as duas expressões em 2 e substitua o resultado encontrado no item 3.
- 5) Volte nos triângulos retângulos  $AOP$  e  $AQP$ , e determine  $\cos(c)$ ,  $\sin(c)$ ,  $\cos(b)$  e  $\sin(b)$ .
- 6) Faça as substituições necessárias no item 4 e teremos a fórmula fundamental dos 4 elementos

### Atividade 8

O objetivo desta atividade é mostrar aos alunos a aplicação da trigonometria esférica na astronomia. Não esperamos que os alunos decorem tais fórmulas, mas que percebam a riqueza do conhecimento matemático e sua relação em outras áreas do conhecimento. Estimamos uma aula de 50 minutos para esta atividade, que poderá ser em grupo e o professor será um mediador, para que os alunos cheguem nas relações que queremos:

$$\cos z = \sin \Phi \cdot \sin \delta + \cos \Phi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

$$\cos H = \cos z \cdot \sec \Phi \cdot \sec \delta - \operatorname{tg} \Phi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

$$\sin \delta = \sin \Phi \cdot \cos z + \cos \Phi \cdot \sin z \cdot \cos A$$

$$\cos A = \sin \delta \cdot \sec \Phi \cdot \operatorname{cosec} z - \operatorname{tg} \Phi \cdot \operatorname{cot} z$$

1º momento: Vamos relacionar a distância zenital ( $z$ ), o azimute ( $A$ ), o ângulo horário ( $H$ ) e a declinação ( $\delta$ ).

Observe a figura abaixo, aplique a fórmula dos quatro elementos encontrada na atividade 4 e estabeleça relações entre essas coordenadas.

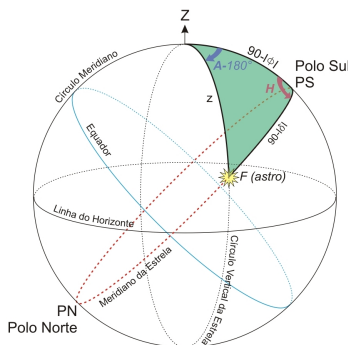


Figura 36: Triângulo de Posição

2<sup>o</sup> momento: Separação angular entre duas estrelas. Pedir aos alunos para representarem numa bola de isopor a posição de duas estrelas e formar com o pólo um triângulo esférico. Representar as coordenadas equatoriais e desenvolver uma fórmula para a separação angular.

### Atividade 9

A utilização do trabalho de campo como ferramenta de aprendizagem é de fundamental importância para que o aluno possa compreender melhor as relações existentes entre o conteúdo apresentado em sala de aula e a sua real aplicação. A última atividade sugerida é uma Visita ao Planetário e Terraço Astronômico do Espaço do Conhecimento UFMG, localizado na Praça da Liberdade - MG.

Sugerimos também uma visita à UFSJ, Campus Alto Paraopeba, onde é desenvolvido um Programa de Extensão Universitária: “Viagem ao Céu pelo olhar da Ciência

## 5 Conclusões

Este trabalho procurou mostrar o surgimento histórico das geometrias não-Euclidianas, dando ênfase a geometria esférica e a lei fundamental da trigonometria esférica, aplicando-a na astronomia de posição.

A presente proposta visa mostrar aos estudantes e professores do ensino básico que a Matemática não é algo pronto e acabado. A dúvida que os matemáticos tiveram em relação ao V postulado, levou muitos a tentarem demonstrá-lo. Foram tentativas frustradas, mas foi a dúvida que fez com que outras geometrias surgissem.

A abordagem das Geometrias não-Euclidianas, em especial a geometria esférica, na educação básica significa propiciar aos estudantes o acesso a outras ideias, ampliando seus conhecimentos e desenvolvendo o pensamento geométrico. É possível desenvolver um trabalho interdisciplinar, envolvendo as áreas de matemática, física, geografia, artes e filosofia.

A Astronomia é considerada uma das primeiras ciências que o homem dominou, porém as competências básicas para a construção do conhecimento, relativo ao eixo temático

Terra e Universo, não vêm sendo trabalhadas a contento com a maioria dos alunos que concluem o ensino médio. Os alunos estão concluindo este nível de ensino sem conhecimentos básicos na área de Astronomia, que são indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

É possível unir estes dois temas: geometria esférica e astronomia, desenvolvendo um trabalho prazeroso e interessante, contribuindo para a formação crítica do cidadão.

## 6 Fontes das figuras

Figura 4: [http://www.im.ufrj.br/~ risk/diversos/tractrix.htm](http://www.im.ufrj.br/~risk/diversos/tractrix.htm) (Acesso 10\03\15)

Figura 6 : Carvalho, Osnildo Andrade. Uma abordagem de Geometrias não-euclidianas na Educação Básica: Geometria Esférica 2014.(pág. 28)

Figura 7: <http://www.thefamouspeople.com/profiles/bernhard-riemann-biography-440.php> (Acesso 28\10\14)

Figura 12: <http://www.objetivo.br/ConteudoOnline> (Acesso 28\10\14)

Figura 13: <http://mediateca.educa.madrid.org> (Acesso 28\10\14)

Figura 16 e 21: Zanella, Idelmar André -Geometria esférica: uma proposta de atividade com aplicações. (pág. 49)

Figura 17: < <http://www.quickikiwiki.com> > (Acesso 28\10\14)

Figura 18: < [http://alfaconnection.net/pag\\_avsm/geo1301.htm](http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1301.htm) > (Acesso 28\10\14)

Figura 24 e 35: HOGBEN, Lancelot. Maravilhas da Matemática: Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1958.

Figura 25: Zanella, Idelmar André -Geometria esférica: uma proposta de atividade com aplicações. (pág. 96)

Figura 26: Zanella, Idelmar André -Geometria esférica: uma proposta de atividade com aplicações. (pág. 128)

Figura 27: <http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/sistercrds.htm> (Acesso 29\10\14)

Figura 28: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/06/como-sabemos-posicao-das-estrelas-e-dos.html> (Acesso 29\10\14)

Figura 29: <http://astro.if.ufrgs.br/coord.htm> (Acesso 12\03\15)

Figura 30: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/06/como-sabemos-posicao-das-estrelas-e-dos.html> (Acesso 29\10\14)

Figura 31: [http://www.uranometrianova.pro.br/cursos/astronomia\\_esferica01/esferica1050.htm](http://www.uranometrianova.pro.br/cursos/astronomia_esferica01/esferica1050.htm) (Acesso 29\10\14)

Figura 32: <http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/sistercrds.htm> (Acesso 29\10\14)

Figura 36: <http://www.if.ufrgs.br/fatima/fis2016/trigesf/trigesf.htm> (Acesso 29\10\14)

## Referências

- [1] BOCZKO, Roberto. Conceitos de Astronomia. São Paulo, Edgar Blucher - 1984.
- [2] ZANELLA, Idelmar André. Geometria esférica : uma proposta de atividades com aplicações. Londrina-PR, 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013.
- [3] REIS, Joana D'Arc da Silva. Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis. Rio Claro- SP, 2006
- [4] ALVES, Sérgio. A Geometria do Globo Terrestre. In: Revista do Programa de Iniciação Científica OBMEP, Rio de Janeiro: IMPA 2009.
- [5] CARMO, Manfredo Perdigão. Geometrias Não-Euclidianas. In: Revista Matemática Universitária N<sup>o</sup>6, Rio de Janeiro, 1987.
- [6] COUTINHO, Lázaro. Convite às geometrias não-euclidianas. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- [7] HOGBEN, Lancelot. Maravilhas da Matemática: Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.
- [8] PATAKI, I. Geometria esférica para formação de professores: uma proposta interdisciplinar. 2003. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [9] LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [10] FILHO, Kepler de Souza Oliveira e Saraiva, Maria de Fátima Oliveira. Astronomia e Astrofísica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul-Porto Alegre,2014.
- [11] NAHAS, Tatiana Rodrigues; SANCHES, Aparecida Kida e CAMACHO, Célia Sandr Evelyn Gorostiaga. Decifrando a natureza, 6<sup>o</sup> ano. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2009.
- [12] DIAS, Cláudio André C. M e RITA, Josué R. Santa. Inserção da astronomia como disciplina curricular no ensino médio. In: Revista Latino Americana de Educação em Astronomia- RELEA - n.6, pg 55-65, 2008.
- [13] TÁRSIA, Rodrigo Dias. Astronomia Fundamental. Editora UFMG, 1993.



- [14] COSTA, Paulo César e BATISTA, Roberto Junior. Aplicações de Trigonometria Esférica na Astronomia de Posição
- [15] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Ambiental. Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Brasília, 1998. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio, Brasília, 1999.