2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Polinômios: Raízes e utilidade para métodos numéricos

Fernanda Diniz Pessoa [1]
Gilcélia Regiane de Souza[2]

Resumo:

Encontrar as raízes de um polinômio sempre foi um dos objetos de estudo da Álgebra. As raízes são necessárias para análise e interpretação de determinadas situações e há séculos são estudados métodos para facilitar esses cálculos. Duas linhas distintas foram desenvolvidas, numa a procura das raízes exatas e na outra a busca das raízes aproximadas.

O objetivo desse trabalho é estudar alguns métodos utilizados para encontrar raízes de polinômios de vários graus. Além disso, estudamos também, de forma geral, aproximação de funções utilizando polinômios, pois essas são muito úteis e usadas em larga escala em várias áreas do conhecimento, como engenharia, física, biologia, etc .

O trabalho é finalizado com duas propostas de atividades a serem aplicadas no Ensino Médio.

Palavras-chave: Aproximação de função, Raiz de polinômio, Círculos de Gersgorin, Polinômios de Chebyshev, Método de Cardan, Método de Ferrari, Relações de Girard, Método de Newton.

1 Introdução

Um grande problema enfrentado pelos matemáticos entre 1400 e 1700 é o de encontrar as raízes de equações polinomiais em função apenas dos seus coeficientes. Para a equação de segundo grau o método era conhecido desde o início do século II. Para as equações de terceiro grau o problema era um pouco mais sério e até motivou disputas entre alguns matemáticos. Acredita-se que *Scipio Del Ferro* (1465-1526) sabia resolver equações cúbicas por métodos algébricos e que nos seus últimos dias ele confiou sua solução a um estudante, *Antônio Fior*. Fior desafiou *Nícolo Fontana* (1499-1557), conhecido por Tartaglia, para uma competição pública: as regras consistiam em que, cada um daria ao outro 30 problemas com 40 ou 50 dias para resolver e o vencedor seria aquele que resolvesse a maioria. Tartaglia resolveu todos os problemas de Fior. Acontece que Tartaglia, um pouco antes de receber os problemas, tinha achado um método geral para todos os tipos de equações cúbicas. Entretanto foi outro

[1]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
E-mail:nandadp@ig.com.br
[2]Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, UFSJ/CAP
E-mail: gilcelia@ufsj.edu.br

matemático, chamado *Jerônimo Cardan* (1501-1576), quem publicou em 1945 a fórmula para as equações cúbicas em *Ars Magna*.

Por volta de 1830, um grande matemático chamado *Evarist Galois* (1811-1832) mostrou que para polinômios completos de grau maior ou igual a cinco é impossível encontrar uma fórmula que forneça as suas raízes.

Desde muito tempo, os matemáticos desenvolvem vários métodos para que todas as equações possam ser resolvidas mas muito pouco desse estudo chega até a sala de aula.

O objetivo desse trabalho é fazer uma reflexão acessível a todos os professores do Ensino Fundamental e Médio, primeiramente sobre os números complexos, pois com o estudo das funções de variável complexa pioneiramente realizado por *Abel, Jacobi, Cauchy, Riemann e Weierstrass*, os números complexos impuseram inúmeras aplicações em quase todos os ramos da matemática e da tecnologia. Revisamos algumas propriedades desses números e mostramos os Círculos de Gersgorin que nos possibilitam encontrar a região onde temos raízes do polinômio característico obtido de uma dada matriz.

Desenvolvemos detalhadamente todas as etapas dos Métodos de Cardan e Ferrari, que são úteis para calcular as raízes de equações do terceiro e quarto grau, respectivamente. Citamos as Relações de Girard, que são importantes relações entre os coeficientes e as raízes de qualquer equação. Por fim, para as equações de grau maior que 4, escolhemos o Método de Newton, por acreditarmos ser mais simples sua explicação e seus cálculos para alunos do Ensino Médio.

Estudamos também os polinômios, e as aproximações de funções por polinômios, em especial os polinômios de Chebyshev, que nos dão uma aproximação bem otimizada dado um conjunto de pontos.

Terminamos cientes que muito mais temos para aprender sobre processos e métodos para se encontrar raízes de polinômios mas deixamos aqui alguns caminhos que podem ser explorados, lembrando que devemos estimular nossos alunos a compreender a importância desses cálculos.

2 Números Complexos

Se pensarmos em dois números cuja soma é 4 e o produto é 7, encontraremos $2 + \sqrt{-3}$ e $2 - \sqrt{-3}$. Mas, por volta de 1500, só se conheciam os números reais, logo, esses resultados geravam espanto e dúvida pois, as raízes quadradas de números negativos eram consideradas inexistentes.

O matemático renascentista *Rafael Bombelli* (Itália, 1726 - 1772), foi o que primeiro tratou esses novos números que são da forma $a + b\sqrt{-1}$, onde a e b são números reais e $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Em meados do ano de 1777, *Leonhard Euler* (Suiça, 1707-1783), denotou o número $\sqrt{-1}$ por $\boldsymbol{i}$ e determinou várias propriedades desses novos números, chamados de números complexos, por *Carl Fiedrich Gauss* (Alemanha, 1777-1855) em 1831.

Dado o número complexo $z = a + bi$, denotamos a como parte real e b como parte imaginária. Temos também o *conjugado* deste número, que será denotado por $\overline{z} = a - bi$. Além disso, o conjunto dos números complexos é representado por $\mathbb{C}$, com as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$, com a regra : $i^2 = -1$.

Lembrando que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um corpo, isto é, existe o elemento neutro da adição (a saber o 0) e da multiplicação (a saber 1), o conjunto é fechado em relação a adição e a multiplicação, além de existir o simétrico aditivo e o inverso multiplicativo e serem válidas as propriedades comutativa, associativa e distributiva da adição e multiplicação.

2.1 Forma Polar dos Números Complexos

Essa representação, devida a *Euler*, pode ser chamada também de forma trigonométrica e ela facilita as operações de potenciação e radiciação de números complexos.

Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo. Considere um ponto $P = (a, b)$ do plano, diferente da origem $O = (0, 0)$. Logo, o segmento de reta OP, de comprimento

$$r =| z |= \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0,$$

determina no eixo x um ângulo θ cuja medida em radianos está no intervalo $[0, 2\pi)$. O número real θ é chamado *argumento* de z e denotado por

$$arg(z) = \theta.$$

No plano cartesiano, observe que podemos rescrever $a = r \cos\theta$ e $b = r \operatorname{sen}\theta$, logo, temos que: (Veja Figura 1.)

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

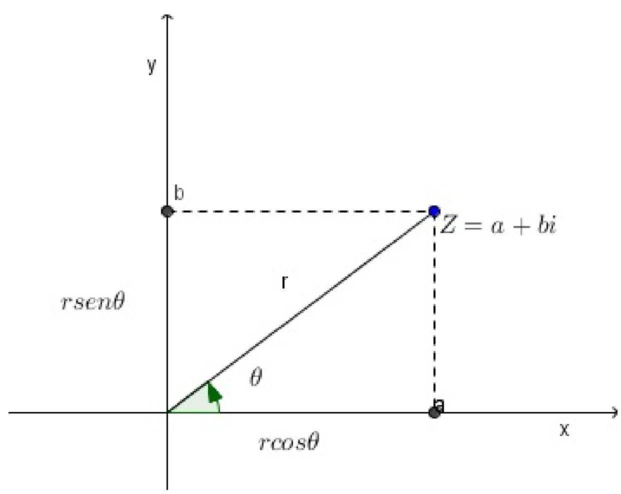


Figura 1: Representação do número complexo no plano cartesiano

Fórmula de De Moivre: Dado um número complexo não nulo na forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, então, para cada número inteiro n, tem-se que:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

A demonstração é feita por indução e pode ser encontra em [3].

Raízes complexas n-ésimas

Todo número complexo $z \neq 0$ tem exatamente n raízes complexas, para cada número natural $n \geq 1$, calculadas da seguinte forma:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big[\cos\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big) + i \operatorname{sen}\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big)\Big], \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1.$$

onde $r =| z |> 0$ e $\theta = arg(z)$.

Os cálculos para se chegar a essa igualdade utilizam a Fórmula de De Moivre e podem ser encontrados em [3].

Raízes da Unidade

As raízes n-ésimas da unidade são as raízes complexas n-ésimas de 1.

Para $z = 1$ temos $r =\mid z \mid= 1$ e $\theta = arg(1) = 0$, logo,

$$z_k = \sqrt[n]{1}\Big(\cos\frac{0+2k\pi}{n}\Big) + i\,\text{sen}\,\Big(\frac{0+2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

ou seja,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Então as raízes da unidade dividem o círculo trigonométrico em n partes iguais. A Figura 2, apresentamos o caso $n = 4$.

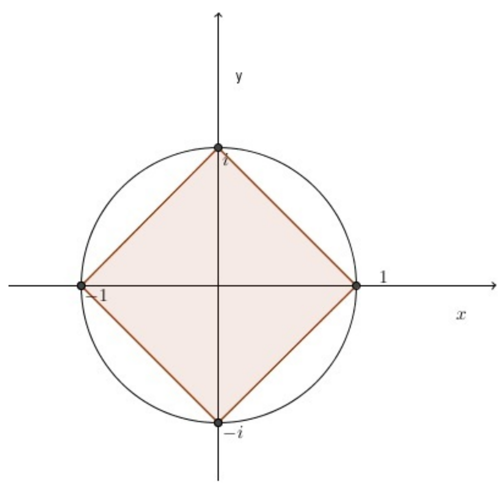


Figura 2: Caso $n = 4$.

Abaixo apresentamos os cálculos das raízes cúbicas da unidade, pois elas serão necessárias à frente.

Exemplo 2.1 *Raízes cúbicas da unidade:*

$z_0 = \cos\frac{2.0.\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2.0.\pi}{3} = cos(0) + isen(0) = 1 + 0 = 1$

$z_1 = \cos\frac{2.1.\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2.1.\pi}{3} = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2 = \cos\frac{2.2.\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2.2.\pi}{3} = cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

Um belo exemplo de como os números complexos estão presentes em quase todos os ramos da matemática é o Círculo de Gersgorin que será apresentado na seção 6.

3 Polinômios

Um polinômio $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ é uma expressão do tipo:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{1}$$

ou seja,

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, para $0 \leq j \leq n$.

Os elementos a_j são chamados coeficientes do polinômio $p(x)$, para $0 \leq j \leq n$ e cada parcela $a_j x^j$ é chamada monômio de grau j. O termo a_0 é chamado termo constante ou independente. Com soma definida pelas propriedades comutativa e associativa da adição e redução dos termos semelhantes. E o produto definido pela propriedade distributiva da multiplicação relativa à adição e soma dos termos semelhantes.

Quando $p(x) = a_0$ temos um polinômio chamado constante e se $p(x) = 0$, chamamos de polinômio nulo.

O grau de um polinômio $p(x)$ é denotado por $\text{gr}(p(x))$ e será dado pelo maior valor de n tal que $a_n \neq 0$. Neste caso, chamamos a_n de coeficiente líder de $p(x)$. O grau para o polinômio nulo não é definido.

Os polinômios de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$ são chamados de polinômios mônicos.

Sejam

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

e

$$\tilde{p}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j,$$

temos que $p(x) = \tilde{p}(x)$ se, somente se, $a_j = b_j$, para $0 \leq j \leq n$.

4 Resoluções de equações polinomiais

Resolver uma equação já era um desafio desde o início do conhecimento matemático como podemos ver nos papiros de *Moscou*(1890 a.C.), de *Rhind* (1650 a.C.) entre outros. A palavra equação já era usada por escritores medievais. *Ramus* (1515 - 1572) usou a palavra Aequatio em sua *Aritmética* (1567). A equação apareceu em inglês em 1570 em uma tradução da obra *Os Elementos* de Euclides feita por Henry Billingsley.

Teorema Fundamental da Álgebra O Teorema Fundamental da Álgebra garante que toda equação polinomial de grau n admite n raízes complexas, publicado em 1799 (em Helmstädt) na tese de doutorado de Gauss. Embora seja um dos maiores teoremas da Álgebra a demonstração apresentada em sua tese baseia-se em parte em conceitos de Análise (como a noção de continuidade). Posteriormente, Gauss dedicou-se na busca de uma prova inteiramente algébrica (tal empenho gerou mais três versões de provas publicadas). Atualmente existem mais de 100 provas a respeito do importante teorema.

Desde então contamos com o seguinte resultado:

O polinômio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ pode ser fatorado, no corpo dos complexos, como

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

sendo que $x_1, \ldots, x_n$ são suas raízes complexas, não necessariamente distintas, ou então na forma

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_k)^{m_k},$$

sendo que $x_1, \ldots, x_k$ são k raízes distintas, com multiplicidades, respectivamente, $m_1, m_2 \ldots, m_k$.

Sendo assim, o objetivo, é encontrar as raízes da equação polinomial. Por anos/séculos as atenções estavam voltadas na busca de uma expressão/fórmula para obter tais raízes por meio de radicais.

A *resolução por radicais* de uma equação polinomial $p(x) = 0$, trata da procura das raízes de um polinômio $p(x)$ de grau n de forma que as mesmas possam ser expressas em função de seus coeficientes, envolvendo somente as operações algébricas fundamentais e mais a extração de raízes quadradas, cúbicas, etc.

Na primeira metade do século XVI na Itália foram encontrados os procedimentos gerais, ou seja, as fórmulas, para a resolução das equações do 3^o e do 4^o grau.

Após grande contribuição dos italianos no século XVI, houve um enorme entusiasmo (expectativa) no sentido que seria possível obter o mesmo para qualquer grau, mas dois séculos se passaram sem que tal objetivo fosse alcançado. No decorrer dos anos, na busca incessante por atingir tal objetivo várias teorias foram desenvolvidas, por exemplo, a Teoria dos Grupos. No entanto, só em 1799 Ruffini afirmou ter demonstrado que era impossível resolver a equação geral do quinto grau através de radicais, tal afirmação só veio a ter credibilidade 25 anos mais tarde.

Diante de tal fato, dois caminhos distintos foram seguidos. Por um lado, Galois resolveu completamente a questão, descobrindo condições necessárias e suficientes para que uma equação possa ser resolvida por meio de radicais, e assim provou que não pode existir uma fórmula para equações de grau superior ao quarto. Tal caminho levou à tão importante teoria dos grupos, anéis e corpos, exibindo resultados que ultrapassaram em muito o âmbito das equações polinomiais, e resolvendo muitos problemas em outras áreas da Matemática.

Em uma outra abordagem – bem diferente da primeira – vários matemáticos, uma vez que a procura da fórmula mostrou-se em vão, passaram a dedicar-se aos chamados **métodos numéricos** para a resolução de equações polinomiais. Em geral, o processo é obter uma sequência de valores aproximados, daí ir melhorando cada vez mais os resultados, de modo que seja possível obter as raízes com qualquer grau de aproximação desejada.

4.1 Equação do segundo grau:

Se pensarmos na seguinte situação: "Uma fissura num reservatório de gasolina de uma refinaria de petróleo provocou um grande vazamento. Os técnicos responsáveis pelo conserto estimaram que, a partir do instante em que o dano ocorreu, o volume V de gasolina restante no reservatório (em quilolitro) em função do tempo t (em hora) podia ser calculado pela lei: $V(t) = -2t^2 - 8t + 120$. Qual é o tempo t para que o reservatório fique vazio?"(Matemática Paiva, volume 1, editora Moderna)

Para responder a pergunda acima, e outras tantas que envolvem funções do segundo grau, precisamos saber resolver tais equações.

A resolução da equação do segundo grau é estudada no nono ano do Ensino Fundamental e é conhecida como Fórmula de Bháskara, pois Bháskara a demonstrou algebricamente, mas ela já era conhecida centenas de anos antes.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ e a $\neq 0$. Passando o termo constante para o segundo membro, teremos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Prosseguindo, faremos com que o lado esquerdo da equação seja um quadrado perfeito e para isto somaremos o quadrado de $\frac{b}{2a}$ a ambos os membros da equação para obter:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Simplificando ambos os lados da equação, obteremos:

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz quadrada de cada membro da equação e lembrando que a raiz quadrada de todo número real não negativo é também não negativa, obteremos duas respostas para a nossa equação:

$$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{e} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Como estamos procurando duas raízes para a equação do segundo grau, devemos sempre escrever:

$$x' = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}} \quad \text{e} \quad x'' = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}},$$

onde $b^2 - 4ac$ é simbolizado por Δ (delta) e é chamado de discriminante da equação do segundo grau, ou seja, o Δ nos diz se a equação possui uma ou duas raízes distintas em $\mathbb{C}$.

Se os coeficientes a, b e c da equação forem números reais, teremos:

1) Se $\Delta > 0$, a equação possui 2 raízes reais distintas.

2) Se $\Delta = 0$, a equação possui somente uma raiz real.

3) Se $\Delta < 0$, a equação possui duas raízes complexas conjugadas.

Voltando a situação do reservatório, devemos resolver a seguinte equação:

$$-2t^2 - 8t + 120 = 0$$

para respondermos a pergunta. Assim, $t_1 = -2 + \sqrt{34}$ e $t_2 = -2 - \sqrt{34}$.

Como $-2-\sqrt{34}$ é negativo e estamos pensando no tempo decorrido, então nossa resposta é $t = -2+\sqrt{34}$. Então temos que, depois de $\sqrt{34}-2$ horas, o reservatório ficará vazio (cerca de 3 horas e 50 minutos).

4.2 Equação do terceiro grau:

Jerônimo Cardan foi um dos matemáticos de maior renome na época do Renascimento, desenvolveu vários cálculos para se chegar a fórmula resolutiva da equação do terceiro grau (2). Sem perda de generalidade, consideramos:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{2}$$

pois caso exista um termo $a_3 \neq 1$ podemos dividir todos os coeficientes por a_3. Para facilitar a resolução desta equação a ideia é fazer uma mudança de variável do tipo $x = y + d$, onde y é a nova incógnita, e d uma constante a ser determinada de modo a simplificar a equação. Deve-se anular o termo em x^2, e esta substituição transforma o lado esquerdo da equação em:

$$(y+d)^3+a_2(y+d)^2+a_1(y+d)+a_0 = y^3+(3d+a_2)x^2+(3d^2+2a_2d+a_1)x+d^3+a_2d^2+a_1d+a_0.$$

Para eliminar o coeficiente de x^2, basta tomar $d = -a_2/3$. Portanto, a mudança de variável indicada é $x = y - a_2/3$. A equação resultante terá a forma:

$$y^3 + \alpha y + \beta = 0 \tag{3}$$

sendo que $\alpha = a_1 - \frac{a_2^2}{3}$ e $\beta = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0$.

Se conseguirmos encontrar uma raiz y desta equação, então $y - a_2/3$ será uma solução da equação (2).

Para resolver a equação (3), podemos usar o processo proposto por Cardan (1545) cujo detalhamento pode ser visto no Apêndice A.

As raízes de (2) são obtidas fazendo o seguinte

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + d \\
x_2 &= \xi\sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \xi^2\sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + d \\
x_3 &= \xi^2\sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \xi\sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + d
\end{aligned}$$

onde ξ e ξ^2 são as raízes da unidade. Vejamos um exemplo ilustrativo.

Exemplo 4.1 : *Vamos resolver a seguinte equação de indeterminada x:*

$$2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0$$

Dividindo a equação acima por 2, obtemos a equação polinomial:

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2} = 0.$$

Os coeficientes são $a_2 = 1/2$, $a_1 = 3$ e $a_0 = 3/2$. E $d = \frac{-a_2}{3} = \frac{-1}{6}$.

Substituindo o x por $y + d = y - 1/6$ na equação teremos:

$$\left(y - \frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{6}\right) + \frac{3}{2} = 0,$$

ou seja,

$$y^3 + \frac{35}{12}y + \frac{109}{108} = 0.$$

Temos que $\alpha = 35/12$ e $\beta = 109/108$. Logo,

$$\frac{\alpha^3}{27} = \frac{42875}{46656} \quad e \quad \frac{\beta^2}{4} = \frac{11881}{46656} \quad \text{donde temos que} \quad \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} = \frac{54756}{46656}.$$

Portanto, os valores de x serão:

$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-109}{216} + \sqrt{\frac{54756}{46656}}} + \sqrt[3]{\frac{-109}{216} - \sqrt{\frac{54756}{46656}}} = \frac{-1}{3}$

$y_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.(\frac{5}{6}) + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.(\frac{-7}{6}) = \frac{-5+5i\sqrt{3}+7+7i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{6} + i\sqrt{3}$

$y_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.(\frac{5}{6}) + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.(\frac{-7}{6}) = \frac{1}{6} - i\sqrt{3}$

Como $x = y + d = y - \frac{1}{6}$ *vamos substituir os valores de* y *encontrados para calcularmos as raízes da equação:*

$x_1 = y_1 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = y_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + i\sqrt{3} - \frac{1}{6} = +i\sqrt{3}$

$x_3 = y_3 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - i\sqrt{3} - \frac{1}{6} = -i\sqrt{3}$

que são raízes da equação $2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0.$

4.3 Equação do quarto grau:

Para resolver equações do quarto grau usaremos o método de Ferrari.

Ludovico Ferrari (Itália, 1522- 1565) nasceu em Milão, estabeleceu-se em Bolonha e iniciou sua carreira como auxiliar de Jerônimo Cardan. Devido a sua grande facilidade no aprendizado, Cardan ensinou-lhe muito da matemática. Ferrari e Cardan trabalharam juntos nas soluções das equações quadráticas e cúbicas.

Consideremos uma equação do quarto grau:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{4}$$

Para encontrar suas raízes distribuímos os membros adequadamente e completamos os termos de forma a encontrar quadrados em ambos membros da igualdade, ou seja, ficamos com

$$x^4 + a_3x^3 + \frac{1}{4}a_3^2x^2 = -a_2x^2 - a_1x + a_0 + \frac{1}{4}a_3^2x^2$$

ou seja,

$$(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)^2 = (\frac{1}{4}a_3^2 - a_2)x^2 - a_1x + a_0.$$

Agora, somando a parcela $y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)$ nos dois lados da igualdade, com isso teremos um quadrado. Mais precisamente, na primeira etapa, ficamos com

$$\Big(y + (x^2 + \frac{1}{2}a_3x)\Big)^2 = (\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + 2y)x^2 + (a_3y - a_1)x + (y^2 - a_0), \tag{5}$$

para transformar o lado direito em um quadrado, será necessário encontrar uma raiz da equação abaixo

$$8y^3 - 4a_2y^2 + (2a_1a_3 - 8a_0)y + (4a_0a_2 - a_1^2 - a_0a_3^2) = 0, \tag{6}$$

tal equação foi obtida ao calcular o discrimante da equação de segundo grau em x (equação (5) lado direito). E assim, com o auxílio da equação (6) reescrevemos o lado direito na forma de quadrados, veja detalhes no Apêndice B. Considere y_0 uma das raízes de 6, encontrada.

Sabendo o valor de y_0, temos um quadrado no segundo membro da equação (5), logo, podemos escrever:

$$(y + (x^2 + \frac{1}{2}a_3x))^2 = (ax + b)^2, \text{ onde } a \text{ e } b \in \mathbb{C}$$

Portanto,

$$x^2 + \frac{1}{2}a_3x + y_0 = ax + b$$

e

$$x^2 + \frac{1}{2}a_3x + y_0 = -(ax + b),$$

daí teremos para cada igualdade 2 raízes, assim encontramos as 4 raízes da equação do quarto grau, sem contar as multiplicidades.

A resolução da equação (4), pelo processo proposto por Ferrari está detalhado em Apêndice B. A seguir, um exemplo.

Exemplo 4.2 *Considere a seguinte equação de grau 4 de indeterminada x:*

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

Observe que os coeficientes da equação acima são $a_3 = -2$, $a_2 = -1$, $a_1 = -2$ e $a_0 = -2$. Queremos determinar o valor de y que satisfaça a equação:

$$8y^3 - 4a_2y^2 + (2a_1a_3 - 8a_0)y + (4a_0a_2 - a_1^2 - a_0a_3^2) = 0. \tag{7}$$

Substituindo os coeficientes a_i's em (7) temos,

$$8y^3 - 4.(-1)y^2 + [2.(-2).(-2) - 8.(-2)]y + [4.(-2).(-1) - (-2)^2 - (-2).(-2)^2] = 0$$

e resolvendo ficamos com,

$$2y^3 + y^2 + 6y + 3 = 0.$$

Essa equação já foi resolvida no exemplo anterior e encontramos como raízes $-\frac{1}{2}$, $-i\sqrt{3}$ e $i\sqrt{3}$. Como necessitamos somente de um valor para y, escolhemos $y = -\frac{1}{2}$.

Utilizando $y = -\frac{1}{2}$ substituiremos na equação:

$$\left(y + \left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + 2y\right)x^2 + (a_3y - a_1)x + (y^2 - a_0). \tag{8}$$

Logo teremos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-1}{2} + x^2 + \frac{1}{2}.(-2)x\right)^2 &= \left[\frac{1}{4}.(-2)^2 - (-1) + 2.\left(\frac{-1}{2}\right)\right]x^2 + \left[-2.\left(\frac{-1}{2}\right) - (-2)\right]x + \left[\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)\right] \\
\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)^2 &= x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Então temos duas equações quadráticas para serem resolvidas:

1. $x^2 - x - \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2}$

   Que resulta em $x^2 - 2x - 2 = 0$, donde temos $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

   E a outra equação será:

2. $x^2 - x - \frac{1}{2} = -(x + \frac{3}{2})$.

   Que resulta na equação $x^2 = -1$, donde temos $x_3 = i$ e $x_4 = -i$.

Então as raízes da equação $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ *são* $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = i$ *e* $x_4 = -i$.

Vemos que para resolver uma equação do quarto grau pelo método de Ferrari precisamos saber o método de Cardan ou outro que resolva uma equação do grau três pois, essa faz parte da solução.

4.4 Relações de Girard

Com o propósito de encontrar as raízes de qualquer equação algébrica, Albert Girard (França, 1595-1632) estudou as relações existentes entre os coeficientes e suas raízes.

Se o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

tem n raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sabemos que $p(x)$ pode ser reescrito como

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Antes de apresentar o caso geral, vejamos a relação dos coeficientes e as raízes, para $n = 2$,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a\Big(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\Big).$$

Logo $b = -a(x_1 + x_2)$, isto implica que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

E $c = ax_1x_2$, isto implica que

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Para uma equação do 3^o grau, da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes, podemos reescrever $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, assim

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\Big(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3\Big),$$

e temos as seguintes relações de Girard:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a}$
$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$

Para uma equação do 4^o grau, da forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

sendo as raízes iguais a x_1 , x_2 , x_3 e x_4, obtemos as seguintes relações de Girard:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$
$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = \frac{c}{a}$

$x_1.x_2x_3 + x_1.x_2.x_4 + x_1.x_3.x_4 + x_2.x_3.x_4 = -\frac{d}{a}$
$x_1.x_2.x_3.x_4 = \frac{e}{a}$.

De modo geral, temos o seguinte,

$$\begin{aligned} a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = a_nx^n &- a_n(\underbrace{x_1+x_2+\dots+x_n}_{s_1})x^{n-1} \\ &+ a_n(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n}_{s_2})x^{n-2} \\ &- a_n(\underbrace{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n}_{s_3})x^{n-3}\dots \\ &+ (-1)^k a_n(\underbrace{x_1x_2\dots x_{n-1}+\dots+x_2x_3\dots x_n}_{s_k})x^{n-k}\dots \\ &+ (-1)^n a_n(\underbrace{x_1x_2x_3\dots x_n}_{s_n})x^n \end{aligned}$$

e por identidade de polinômios vem

$$s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad s_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

prosseguindo temos

$$s_k = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} \quad \text{até} \quad s_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

A demonstração de tal processo pode ser vista no Apêndice C. Usamos as relações de Girard nos dois exemplos abaixo.

Exemplo 4.3 *Utilizando as Relações de Girard, podemos encontrar as raízes da equação:*

$$x^3 + x^2 + 3 = 0.$$

Observe que os coeficientes da equação são :

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 3.$$

Considerando x_1, x_2 e x_3 como as raízes da equação acima e calculando

$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = (-1)^1\frac{a_2}{a_3} = -1$

$s_2 = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = (-1)^2\frac{a_1}{a_3} = 0$

$s_3 = x_1.x_2.x_3 = (-1)^3\frac{a_0}{a_3} = -3$

obtemos,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 && (9) \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 &= 0 && (10) \\ x_1.x_2.x_3 &= -3 && (11) \end{aligned}$$

Multiplicando (10) *por x_3 teremos:*

$$x_1.x_2.x_3 + x_1.x_3^2 + x_2.x_3^2 = 0$$

Substituindo (11) *na equação acima, ficamos com:*

$$-3 + x_1.x_3^2 + x_2.x_3^2 = 0.$$

Assim $x_3^2.(x_1 + x_2) = 3$. *E isolando* $x_1 + x_2$ *em* (9) *temos,* $x_1 + x_2 = -1 - x_3$. *Daí vem que*

$$x_3^2.(x_1 + x_2) = 3, \text{ ou seja, } x_3^2.(-1 - x_3) = 3, \text{ o que implica que } -x_3^3 - x_3^2 - 3 = 0.$$

Mas encontramos uma equação cúbica de indeterminada x_3 *e esta é equivalente a equação proposta, logo não conseguimos encontrar as raízes. Isto sempre ocorre para equações de grau maior ou igual a 3, não conseguimos resolver essas equações somente utilizando as Relações de Girard.*

Podemos perceber nesse exemplo que, para resolvermos uma equação utilizando as Relações de Girard, precisamos de mais algumas informações sobre suas raízes.

Exemplo 4.4 *Vamos encontrar as raízes da equação* $x^3 + 9x^2 + 6x - 56 = 0$, *usando a condição adicional* $x_2 = -2x_1$, *através das Relações de Girard:*

Temos que os coeficientes da equação são:

$$a_3 = 1, a_2 = 9, a_1 = 6, a_0 = -56$$

Considerando x_1, x_2 *e* x_3 *as raízes e calculando as somas temos:*
$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = (-1)^1 \frac{a_2}{a_3} = -9$
$s_2 = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = (-1)^2 \frac{a_1}{a_3} = 6$
$s_3 = x_1.x_2.x_3 = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3} = 56$

Então temos as equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -9 \quad (12)$$
$$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = 6 \quad (13)$$
$$x_1.x_2.x_3 = 56 \quad (14)$$

Como $x_2 = -2x_1$, *substituindo na equação* (12)*:*

$$x_1 - 2x_1 + x_3 = -9$$
$$-x_1 + x_3 = -9$$
$$x_3 = -9 + x_1$$

E agora em (13) *temos;*

$$x_1.(-2x_1) + x_1.x_3 + (-2x_1).x_3 = 6$$
$$-2x_1^2 + x_1.x_3 - 2x_1.x_3 = 6$$
$$-2x_1^2 - x_1.x_3 = 6.$$

E sabendo que $x_3 = -9 + x_1$ *temos:*
$-2x_1^2 - x_1.(-9 + x_1) = 6$
$-2x_1^2 + 9x_1 - x_1^2 = 6$

$-3x_1^2 + 9x_1 - 6 = 0$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos $x_1' = 1$ *e* $x_1'' = 2$. *Substituindo* $x_1' = 1$ *na equação* $x^3 + 9x^2 + 6x - 56 = 0$, *percebemos que 1 não é raiz, pois,* $1^3 + 9.1 + 6.1 - 56 = -40 \neq 0$. *Substituindo* $x_1'' = 2$, *temos*

$$2^3 + 9.2^2 + 6.2 - 56 = 8 + 36 + 12 - 56 = 0,$$

logo 2 é raiz da equação.

Como $x_1 = 2$, *temos que* $x_2 = -2x_1 = -2.2 = -4$. *Substituindo esses valores em* (12) *temos:*

$x_1 + x_2 + x_3 = -9$

$2 - 4 + x_3 = -9$ *logo,* $x_3 = -7$.

Então as raízes da equação são $2, -4$ *e* -7.

5 Como encontrar raízes das equações de grau maior que 4

Para as equações de grau maior ou igual a 5 é quase impossível encontrar raízes exatas. Mas, existem métodos que nos dão aproximações para esses zeros. Alguns desses métodos são: *Bissecção; Cordas; Newton; Secante; Falsa Posição; Steffensen; Brent; Critério de Hurwitz* dentre outros. Hoje em dia os métodos numéricos são muito valiosos, afinal não se pode alegar que dão muito trabalho, devido a grande expansão do uso dos computadores e calculadoras. Além disso, podemos observar o seguinte, considerando uma raiz de uma equação de grau três, obtida pelo método de Cardan, (por exemplo, $\sqrt[3]{3 + \sqrt{5}}$) geralmente na prática, utiliza-se valores aproximados para as raízes quadradas e cúbicas. Ou seja, ao trabalhar com a raiz "exata" muitas vezes, utiliza-se um valor aproximado.

A ideia central de grande parte dos métodos citados acima, é partir de uma aproximação inicial para uma raiz e ir refinando essa aproximação por processos iterativos. Processos iterativos utilizam repetições de um procedimento para uma aproximação sucessiva. São duas etapas para se chegar a uma aproximação de uma raiz:

Primeira etapa : Consiste em encontrar um intervalo fechado que contenha uma raiz. Para isso, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Seja* $f(x)$ *uma função contínua num intervalo* $[a, b]$. *Seja* $f(a).f(b) < 0$, *então existe pelo menos um ponto* $x = \xi$ *entre* a *e* b *que é zero de* $f(x)$.

Demonstração: : Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Considere $\xi \in [a, b]$. Se $f(a).f(b) < 0$ então existem duas possibilidades:

1. Podemos ter $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Ao passar de $f(a) > 0$ para $f(b) < 0$, o gráfico de $f(x)$ que é uma função contínua, cruza o eixo x (Figura 3), logo, existe ξ tal que $f(\xi) = 0$.

2. Podemos ter $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Ao passar de $f(a) < 0$ para $f(b) > 0$, o gráfico de $f(x)$ que é uma função contínua, cruza o eixo x (Figura 4), logo, existe ξ tal que $f(\xi) = 0$.

Então existe um zero da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. $\square$

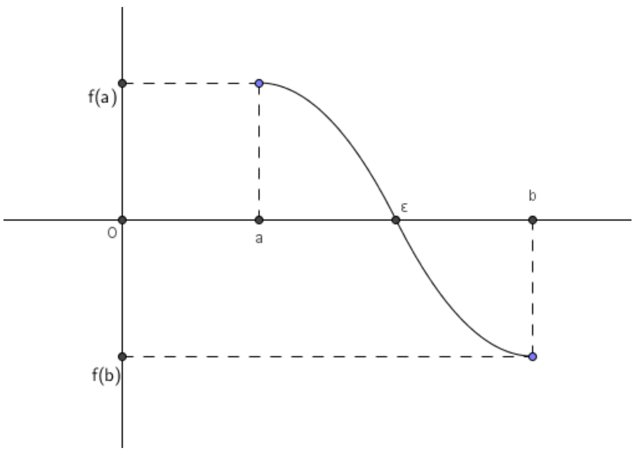


Figura 3: $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

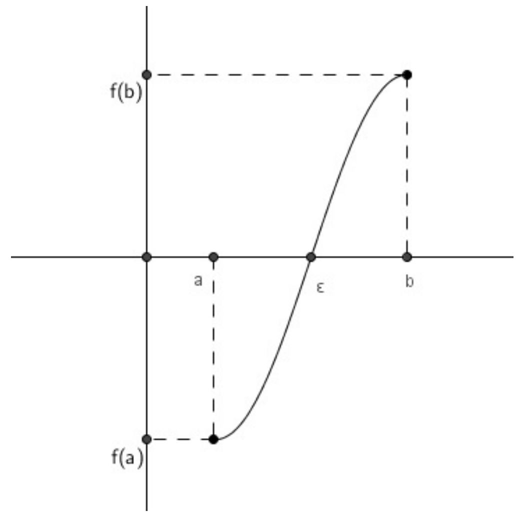


Figura 4: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Segunda etapa: É a do refinamento, ou seja, diminuir o intervalo de forma que aproximemos cada vez mais do valor exato da raiz.

Essa fase é a que diferencia os métodos iterativos. A forma com que se efetua os cálculos nessa fase muda de método para método. Veremos a seguir um desses métodos iterativos para encontrar raízes.

5.1 Método de Newton:

É usado para resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é uma função diferenciável. Neste método fazemos a construção de uma sequência de números que converge para um número ξ que satisfaz $f(\xi) = 0$.

O método consiste em começarmos com um número real x_0, denominado *condição inicial*. Devemos escolher x_0 dentro de um intervalo que tenha uma raiz, de acordo com o Teorema 5.1. Como $f'(x_0) \neq 0$, pois estamos trabalhando com funções polinomiais, então a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ é uma reta não horizontal, portanto, intercepta o eixo x num único ponto, que chamaremos de x_1.

Tomamos então x_1 no eixo horizontal, obtemos $f(x_1)$. Então repetimos o processo e obtemos uma nova iteração x_2. Isto é, x_2 é dado pela iteração da reta tangente ao gráfico de f em $(x_1, f(x_1))$ com o eixo x.

Assim, repetimos sucessivamente esse procedimento e construímos uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reais. Se para $n \geq 1$ obtivermos $f(x_n) = 0$, teremos encontrado a raiz.

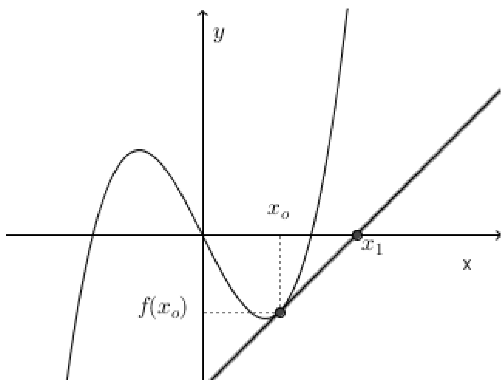


Figura 5: Encontrando x_1

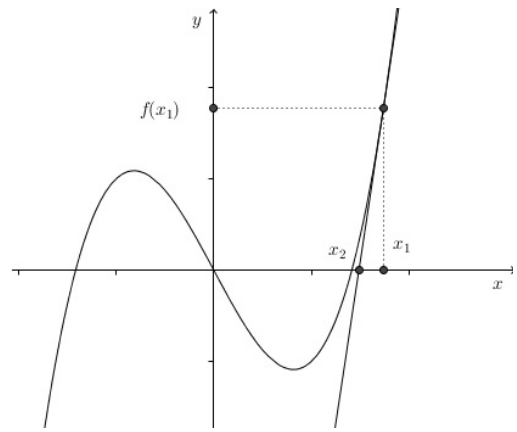


Figura 6: Encontrando x_2

A partir dessa explicação geométrica do Método de Newton, vamos obter uma fórmula, por recorrência, abaixo:

Escolhendo x_0 apropriadamente, vejamos como encontrar x_1. Primeiro achamos a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0.

Sabemos que seu coeficiente angular é dado por $f'(x_0)$, logo a equação é dada por:

$$y = f'(x_0).x + b,$$

onde $b \in \mathbb{R}$.

Para determinarmos b, usamos o fato de que a reta tangente passa por $(x_0, f(x_0))$ e, portanto, $y = f(x_0)$ e $x = x_0$ satisfazem a equação acima, logo:

$$f(x_0) = f'(x_0).x_0 + b.$$

Donde temos $b = f(x_0) - f'(x_0).x_0$. Então a equação procurada é:

$$y = f'(x_0).x + f(x_0) - f'(x_0).x_0.$$

Como x_1 é definido geometricamente pela interseção dessa reta com o eixo x, temos que, x_1 é solução da equação. Daí vem que:

$$0 = f'(x_0).x_1 + f(x_0) - f'(x_0).x_0$$

ou

$$f'(x_0).x_1 = f'(x_0).x_0 - f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Como x_2 é obtido pelo mesmo processo, substituindo x_0 por x_1 como condição inicial, podemos perceber que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

E generalizando, temos:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

que é a fórmula de recorrência utilizada no método de Newton.

Exemplo 5.1 *Vamos encontrar a aproximação para uma das raízes de*

$$f(x) = x^5 + x^2 + 2.$$

Devemos obter um intervalo onde exista uma raiz, observe que $f(-2) = -26$ e $f(-1) = 2$. Pelo Teorema 5.1, sabemos que existe pelo menos uma raiz no intervalo $[-2, -1]$. Tomando a condição inicial $x_0 = -2$ e sabendo que $f'(x) = 5x^4 + 2x$, temos $f'(-2) = 76$. Assim x_1 será dado por:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1,66.$$

No passo seguinte, tomando $x_1 = -1,66$, temos $f(-1,66) = -7,85$ e $f'(-1,66) = 34,65$, que nos leva a

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1,43.$$

Novamente, com o valor calculado $x_2 = -1,43$, temos $f(-1,43) = -1,93$ e $f'(-1,43) = 18,05$, consequentemente

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1,32.$$

Agora com $x_3 = -1,32$, temos $f(-1,32) = -0,27$ e $f'(-1,32) = 12,54$, então

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -1,30.$$

Considerando $x_4 = -1,30$, temos $f(-1,30) = -0,02$ e $f'(-1,30) = 11,69$, assim

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -1,298.$$

Finalmente calculando

$$f(-1,298) = (-1,298)^5 + (-1,298)^2 + 2 = 3,48.10^{-4} \cong 0.$$

Então uma aproximação para uma raiz da equação $f(x) = x^5 + x^2 + 2$ é $-1,298$. Da mesma forma, podemos calcular as outras raízes dessa equação. Caso, seja necessário uma raiz mais precisa (erro cada vez menor), continuamos o processo iterativo até obter o erro desejado.

Exemplo 5.2 *Uma aproximação para uma das raízes do polinômio*

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 3.$$

Pode ser obtida fazendo os seguintes passos:
Calculando a derivada temos que $f'(x) = 6x^2 + 2x + 6$. Vamos procurar um intervalo onde tenhamos uma raiz, para isso calculamos:

$$f(-1) = 2.(-1)^3 + (-1)^2 + 6.(-1) + 3 = -2 + 1 - 6 + 3 = -4$$

e

$$f(0) = 2.(0)^3 + (0)^2 + 6.0 + 3 = 0 + 0 + 0 + 3 = 3.$$

Tabela 1: Dados da iteração

i	x_i	$f(x)$	$f'(x)$	x_{i+1} gerado
0	-1	-4	10	-0,600
1	-0,600	-0,672	6,960	-0,503
2	-0,503	-0,022	6,514	-0,500
3	-0,500	0,000	6,500	-0,500

Pelo Teorema 5.1, sabemos que existe pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$. *Iniciando os cálculos com a condição inicial* $x_0 = -1$, *temos*

Como vemos na Tabela 5.2

$$f(-0,5) = 2(-0,5)^3 + (-0,5)^2 + 6.(-0,5) + 3 = 0.$$

Logo, $-0,5$ *é uma raiz de* $f(x)$.

6 Círculo de Gersgorin

O círculo de Gersgorin é um ótimo exemplo de aplicação dos números complexos. Ele apresenta a região, ou o intervalo onde encontramos as raízes do polinômio característico, ou seja, os autovalores. Muito interessante observar que através de cálculos simples podemos encontrar esse intervalo.

Seja $A_{(a_{ij})}$ uma matriz $n \times n$ e denote por R_i o círculo no plano complexo com centro a_{ii} e raio $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mid a_{ij} \mid$; ou seja,

$$R_i = \{z \in \mathbb{C}; \mid z - a_{ii} \mid \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mid a_{ij} \mid\}.$$

Os autovalores de A estão contidos em $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$. Além do mais, a união de qualquer número $k \in \mathbb{N}$, desses círculos que não intercepte os $(n-k)$ restantes, contém precisamente k autovalores (contando as multiplicidades), ou seja, em k círculos disjuntos temos exatamente k autovalores.

Demonstração: Seja λ um autovalor de $A_{(a_{ij})}$ e v um autovetor associado, isto é, $Av = \lambda v$. Seja i o índice da componente de v tal que

$$|v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |v_j|$$

.

Analisando a i-ésima componente da equação vetorial $Av = \lambda v$, temos que:

$$(\lambda - a_{ii})v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} v_j$$

tomando o módulo de ambos os membros da igualdade acima, temos:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}||v_j|}{|v_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = R_i$$

Desse modo, temos que o autovalor λ pertence ao i-ésimo círculo de Gersgorin de A. $\square$

Exemplo 6.1 *Para a matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

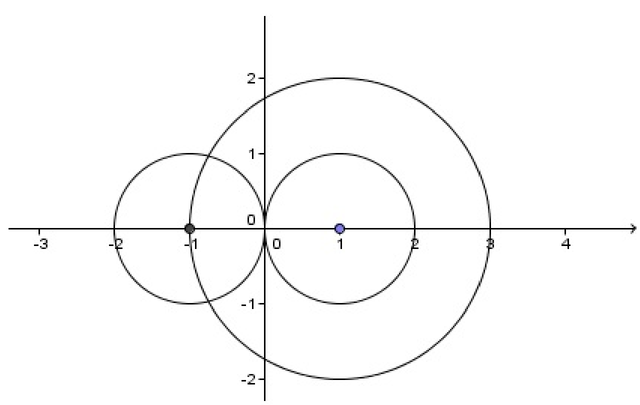
Os Círculos de Gersgorin são:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - a_{11} \mid \ \leq \ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \mid a_{1j} \mid\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - 1 \mid \ \leq \ \mid a_{12} + a_{13} \mid\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - 1 \mid \ \leq \ 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - a_{22} \mid \ \leq \ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \mid a_{2j} \mid\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - 1 \mid \ \leq \ \mid a_{21} + a_{23} \mid\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - 1 \mid \ \leq \ 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z - a_{33} \mid \ \leq \ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \mid a_{3j} \mid\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z + 1 \mid \ \leq \ \mid a_{31} + a_{32} \mid\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \mid z + 1 \mid \ \leq \ 1\} \end{aligned}$$

Observe a seguir a representação para os Círculos de Gersgorin desse caso:



Calculando os autovalores da matriz A, a saber, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ e $\lambda_3 = i$, vemos que as informações obtidas a partir dos círculos de Gersgorin são muito boas.

Nesse trabalho, os cálculos que desenvolveremos serão no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

7 Aproximação de funções por polinômios

O Teorema de aproximação de Weierstrass, provado em 1885 por *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* é um importante resultado da Matemática. Tal resultado afirma que toda função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Teorema 7.1 *(Weierstrass)Sejam* $-\infty < a < b < +\infty$, *suponha que* $f \in C[a, b]$ *(espaço das funções contínuas), isto é,* f *é uma função contínua no intervalo* $[a, b]$. *Então para cada* $\epsilon > 0$, *existe um* $n \in \mathbb{N}$ *e um polinômio* $p \in \mathbb{P}_n$ *tal que* $\|f - p\|_\infty < \epsilon$.

Veja demonstração em [2].

As funções que aproximam funções mais complexas ou um conjunto discreto de pontos, podem ser de tipos variados, tais como: polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Iremos considerar o estudo das funções aproximadoras polinomiais, uma vez que são de ampla importância e largamente utilizadas.

As funções aproximadoras são úteis pela maior facilidade na manipulação algébrica e em especial nos processos computacionais para otimizar o tempo, diminuir a memória utilizada, bem como a facilidade da implementação computacional. São utilizadas também para obter valores intermediários em tabelas, ou seja, dado um certo conjunto de pontos $(x_0, p(x_0))$, $(x_1, p(x_1)), \ldots, (x_n, p(x_n))$, podemos encontrar valores para pontos fora da lista amostrada.

Para aproximar funções por polinômios temos alguns métodos como *Aproximação por Polinômios Trigonométricos*, *Interpolação Linear, Quadrática, de Lagrange, Parabólica Progressiva, de Newton com Diferenças Divididas, de Gregory-Newton, Método dos Mínimos Quadrados, dentre outros.*

A ideia geral da interpolação é tomar um conjunto discreto de pontos como $(x_0, p(x_0))$, $(x_1, p(x_1)), \ldots, (x_n, p(x_n))$ e substituir na expressão geral do polinômio:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Então teremos um sistema com $n + 1$ equações para ser resolvido:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\ p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\ &\vdots \\ p(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

Que pode ser reescrito, na forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{bmatrix}$$

Desde que $x_0, x_1, \cdots, x_n$ sejam pontos distintos, temos que o sistema linear tem solução única e ao resolver o sistema, teremos os valores dos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, assim, encontramos o polinômio interpolador. A partir daí, podemos obter valores aproximados para pontos não amostrados, manipular a expressão facilmente, entre outros.

Observe que para 2 pontos, o polinômio interpolador terá grau 1, logo, temos a Interpolação Linear. Quando temos 3 pontos, o grau do polinômio interpolador é 2, logo temos a Interpolação Quadrática. Então, percebemos que, o grau do polinômio será sempre uma unidade a menos que o número de pontos interpolados, ou, *nós interpoladores* como são chamados. Importante ressaltar que o que difere as Interpolações são os métodos utilizados para resolver o sistema.

Logo o processo de interpolação é muito utilizado para aproximação e amplamente aplicado em várias áreas das ciências, incluindo situações em que há coleta de dados e necessitamos saber informações de um determinado dado não coletado. Os métodos de aproximação são extremamente úteis, o que ressalta a importância do estudo dos polinômios. Métodos de aproximação são encontrados em [5].

7.1 Polinômios de Chebyshev

Os polinômios são muito utilizados para aproximar uma função mais elaborada ou um conjunto discreto de pontos do plano pois, esses apresentam relativa simplicidade, e também, porque permitem representar satisfatoriamente a generalidade das funções. Nessa seção apresentamos uma classe especial de polinômios, mas antes precisamos da definição abaixo.

Definição 7.1 *Dizemos que* $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$ *é um conjunto de funções ortogonais no intervalo* $[a, b]$*, com relação à função peso* ω*, se:*

$$\int_a^b \omega(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{quando} \quad j \neq k, \\ \alpha_k > 0, & \text{quando} \quad j = k. \end{cases}$$

A função peso tem como objetivo atribuir importâncias diferentes em certas partes do intervalo. Por exemplo, a função peso:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

dá menos importância perto do centro do intervalo $(-1, 1)$ e mais importância quando $\mid x \mid$ estiver próximo de 1.

Os *polinômios ortogonais* conseguem representar as funções de maneira satisfatória, além de possuírem melhor manipulação algébrica e computacional.

Uma importante classe de polinômios ortogonais são os Polinômios de Chebyshev, (ortogonais em (-1,1) com relação a função peso apresentada acima) tais polinômios podem obter uma boa aproximação para funções com uma redução do grau, comparado a polinômios obtidos por outros métodos.

Pafnuty Lvovich Chebyshev (Rússia, 1821 - 1894) realizou memoráveis trabalhos em várias áreas, como, matemática aplicada, teoria dos números e probabilidade. Desenvolveu os Polinômios de Chebyshev para estudar aproximação e probabilidade.

Os polinômios de Chebyshev são representados por $T_n(x)$ e definido para $x \in [-1, 1]$ como:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x],$$

para cada $n \geq 0$.

Vamos encontrar uma relação de recorrência gerada por esses polinômios. Para isso, iniciamos calculando:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1$$

e

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para $n \geq 1$, considere a mudança de variável $\theta = \arccos x$, então:

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta),$$

em que $\theta \in [0, \pi]$.

Daí vem que:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos[(n+1)\theta] = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta).\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta$$

e

$$T_{n-1}(\theta) = \cos[(n-1)\theta] = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta).\cos\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Fazendo a soma $T_{n+1}(\theta)$ com $T_{n-1}(\theta)$ teremos:

$$T_{n+1}(\theta) + T_{n-1}(\theta) = 2\cos(n\theta).\cos\theta.$$

Para retornarmos a variável x lembre que $\theta = \arccos x$, logo:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\arccos x).\cos\arccos x = 2x\cos(n\arccos x).$$

Mas $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$, daí vem que:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

que é a relação de recorrência que nos permite gerar os polinômios de Chebyshev. Vejamos alguns polinômios:

Temos $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, logo

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x.x - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x.(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x.(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^3 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x.(8x^3 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^4 - 20x^3 + 5x$$

e assim sucessivamente. Podemos perceber que são polinômios de variável x, o que não parece evidente a partir da definição.

Uma curiosidade, podemos encontrar os polinômios anteriores utilizando algumas relações trigonométricas. Lembrando que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta$ e que $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, onde α e $\beta \in [0, 2\pi)$ temos:

$$T_2(\theta) = \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\begin{aligned} T_3(\theta) = \cos(3\theta) &= \cos(2\theta).\cos\theta - \operatorname{sen}(2\theta).\operatorname{sen}\theta = (2\cos^2\theta - 1).\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta.\cos\theta.\operatorname{sen}\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta.\cos\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta).\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \end{aligned}$$

seguindo esse raciocínio teremos:

$$T_4(\theta) = \cos(4\theta) = 8\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 1.$$

$$T_5(\theta) = \cos(5\theta) = 16\cos^4\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

e assim sucessivamente.

Os polinômios de Chebyshev são úteis para encontrar a melhor posição para os pontos de interpolação de Lagrange, ou seja, os que produzem menor erro de aproximação. Também auxiliam na construção de polinômios aproximadores de menor grau, sem perda da qualidade [5]. Dado um polinômio aproximador de grau (ℓ), obtido por algum método, por exemplo o polinômio de Maclaurin, podemos encontrar um polinômio de grau menor que (ℓ), com o auxílio do polinômio de Chebyshev, mantendo a indicação de erro permitido.

E as raízes dos polinômios de Chebyshev, como são? O seguinte Teorema nos ajudará a responder a essa pergunta.

Teorema 7.2 : *O polinômio de Chebyshev $T_n(x)$ de grau $n \geq 1$, tem n raízes simples em $[-1, 1]$ nos pontos:*

$$\overline{x_k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),$$

para cada $k = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Demonstração: : Substituindo $\overline{x_k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ na equação do polinômio de Chebyshev $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$, para cada $n \geq 0$. Temos que:

$$\begin{aligned} T_n(\overline{x_k}) &= \cos[n \arccos \overline{x_k}] \\ &= \cos\left[n \arccos\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right] \\ &= \cos\left[n\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi\right] \\ &= \cos\left(\frac{2k-1}{2}\right)\pi \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. Logo, $\overline{x_k}$ é uma raiz de $T_n(x)$. Como $T_n(x)$ tem grau n, todos as raízes são dessa forma. □

Logo, cada polinômio de Chebyshev possue n raízes no intervalo $[-1, 1]$ e nenhuma raiz fora dele.

Enfim, o polinômio de Chebyshev é uma ferramenta muito útil, pois ao trabalhar com aproximações é de interesse obter erros pequenos com polinômios de grau o mais baixo possível, para evitar que a curva descrita pelo polinômio aproximador apresente oscilações. Mais detalhes sobre polinômios de Chebyshev podem ser obtidos em [9].

Um último exemplo

Agora que sabemos um pouco da utilidade dos polinômios e como calcular aproximações para suas raízes, podemos resolver problema abaixo.

Exemplo 7.1 *Foram anotados os seguintes pontos:* $(0, 10)$, $(1, 5)$, $(2, -3)$, $(4, 2)$, $(6, -1)$ *e* $(7, 1)$. *Desejamos o polinômio que melhor aproxima esses pontos e aproximações para suas raízes.*

Resolução: *Estamos procurando um polinômio do tipo:*

$$p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

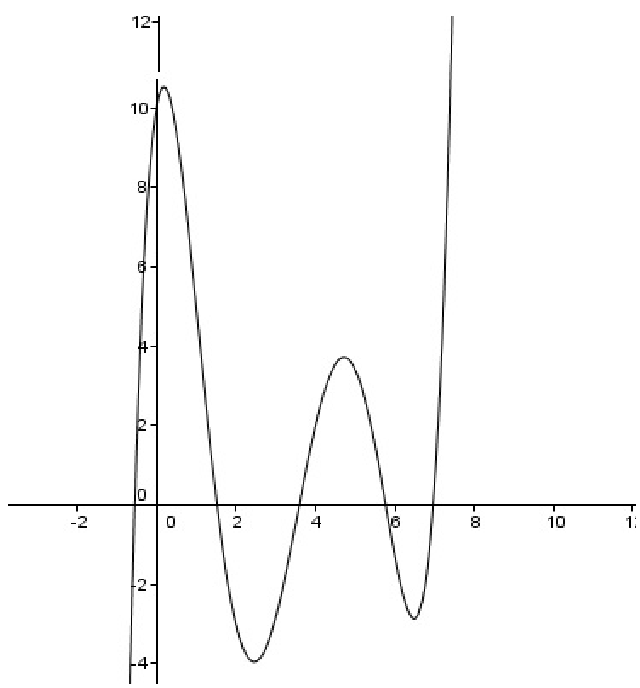
Com os 6 pares ordenados: $(0,10)$, $(1,5)$, $(2,-3)$, $(4,2)$, $(6,-1)$ *e* $(7,1)$ *encontraremos os coeficientes do polinômio interpolador resolvendo o sistema abaixo com em*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então os coeficientes serão: $a_0 = 10$, $a_1 = 5,8476$, $a_2 = -17,8968$, $a_3 = 8,4028$, $a_4 = -1,4365$ *e* $a_5 = 0,0829$, *donde vem o polinômio interpolador é*

$$p(x) = 0,0829x^5 - 1,4365x^4 + 8,4028x^3 - 17,8968x^2 + 5,8476x + 10.$$

E as raízes de $p(x)$ *são:* $6,97$*;* $5,78$*;* $3,60$*;* $1,53$ *e* $-0,55$, *observe o gráfico de* $p(x)$.



8 Conclusão

Estudamos os métodos para encontrar raízes com entusiasmo por acreditarmos serem úteis para professores da Educação Básica. Em especial, percebemos que o Método de Cardan e Ferrari são possíveis de serem utilizados em sala de aula, se forem dadas as orientações adequadas. Mas mesmo que esse não seja o objetivo atual é muito importante o professor conhecer tais técnicas e incentivar seus alunos a procurá-las, ou simplesmente falar da existência da teoria. O Método de Newton também se apresenta como uma boa ferramenta a ser desenvolvida pois sua ideia é relativamente acessível aos estudantes.

Compreendemos também como é importante a aproximação de funções por polinômios, pois essas facilitam e muito a análise do comportamento e o estudo de um conjunto de dados ou de uma função mais complexa. Além disso, aprendemos os princípios gerais da Interpolação e dos polinômios de Chebyshev, que são muito utilizados em várias áreas.

Não podemos deixar de falar dos exemplos detalhados que foram citados no decorrer desse texto, esses nos ajudam a entender cada ideia ou conceito trabalhado.

Finalmente, este trabalho foi uma ótima oportunidade de relacionar assuntos abordados nas salas de aula do Ensino Fundamental e Médio a conhecimentos teóricos mais elaborados. Conhecimentos que devem estar nas mãos de todos os professores de Matemática, para enriquecer suas aulas.

9 Propostas de atividades para aplicação

Após nosso estudo, formulamos as seguinte atividades a serem aplicadas:

9.1 Atividade 1:

UMA REFLEXÃO SOBRE RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES
Prof(a):Fernanda Diniz Pessoa
Público alvo: alunos do Ensino Médio

Orientação: atividade a ser desenvolvida com o uso da calculadora.

Resolver equações é uma parte importante do estudo da Álgebra. Há milhares de anos matemáticos dedicam-se a resolver todos os tipos de equações. Mas o que é resolver uma equação?

Desde o sétimo ano do Ensino Fundamental você aprendeu que resolver equação é encontrar sua(s) raiz ou raízes (nos casos das equações de grau maior que 1) e continuará estudando como encontrá-las...

A fórmula resolutiva da equação do segundo grau é bem conhecida, não é? Mas para as equações do terceiro e quarto grau também temos fórmulas para se chegar as raízes, você sabia?

Mas a pergunta chave é a seguinte: para que servem as raízes das equações? Vamos resolver alguns problemas e pensar nessa resposta...

1) Na queda livre de corpos (Física), isto é, sujeita apenas a ação da gravidade (sabemos que a aceleração da gravidade g é $9,81m/seg^2$), se um objeto é simplesmente deixado cair de uma certa altura, sem ser empurrado, então esse objeto obedecerá a relação $x = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}g.t^2$, onde t é o tempo de queda em segundos, x_0 é a distância inicial (nesse caso é 0), v_0 é a velocidade inicial (nesse caso é 0) e x é a distância percorrida em metros.

a) Se uma pedra cai de uma altura de $76,00$ *metros*. Qual será o tempo que ela levará para chegar ao chão?

b) Você resolveu uma equação de incógnita t, quantas raízes você encontrou? Todas são respostas possíveis?

2) Num empréstimo (Matemática Financeira), alguém que dispõe de um capital (C), empresta-o a outrem por um certo período de tempo(t) a uma taxa de juros (i, onde i será respresentado na forma decimal). Como a cada mês o capital é acrescido dos juros formando uma progressão geométrica, podemos concluir que:

Se o empréstimo for por um mês, o montante (M) a ser pago será calculado fazendo:

$$M = C.(1 + i)$$

Se o empréstimo for por dois meses, o montante será dado por:

$$M = C.(1 + i)^2$$

Se o empréstimo for por três meses, então teremos que fazer:

$$M = C.(1 + i)^3$$

E assim sucessivamente.

a)Se uma pessoa fez um empréstimo de $R\$100,00$ por 2 meses e pagou pelo mesmo $R\$125,44$. Qual foi a taxa de juros cobrada?

b)Você resolveu uma equação de incógnita i, quantas raízes você encontrou? Todas são respostas possíveis?

c)Uma outra pessoa fez um empréstimo de $R\$200,00$ durante 3 meses. Ela pagou após esse período $R\$266,20$. Qual a taxa de juros cobrada nesse empréstimo?

3)Sabendo-se que a altura de uma bola de vôlei é dada aproximadamente por $x = 2 + 22t - 5t^2$, onde x é a altura em metros e t o tempo em segundos desde que é lançada. Com base nesse problema, responda:

a)Qual o grau dessa equação?

b)Depois de quanto tempo a bola estará no chão (altura 0)?

c)Qual o significado das raízes da equação do ítem anterior, ou seja, elas representam um determinado tempo ou altura?

Agora, responda a pergunta: Para que servem as raízes das equações?

9.2 Atividade 2:

CÁLCULOS DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU
Prof(a):Fernanda Diniz Pessoa
Público alvo: professores do Ensino Fundamental e Médio.

Orientação: atividade a ser desenvolvida com o uso da calculadora.

Essa atividade será desenvolvida em duas etapas, acompanhe o problema descrito a seguir e efetue os cálculos indicados. Bom aprendizado!

Primeira etapa

"Um engenheiro projetou duas caixas-d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de paralelepípedo reto-retângulo com $6m^2$ de área da base. O volume da caixa cúbica deve ter $4m^3$ a menos que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica?"

Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica, temos a seguinte igualdade:

$$x^3 = 6x - 4$$

que é uma equação de terceiro grau que pode ser resolvida por alguns métodos, dentre eles utilizaremos dois: Fórmula de Cardan e Método de Newton. Acompanhe as etapas de cada método e encontre uma raiz dessa equação:

1) Método de Cardan:
Considere a fórmula geral da equação do terceiro grau:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Seja $d = \frac{-a_2}{3}$, $p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}$ e $q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0$
Então, uma das raízes será calculada pela seguinte relação:
$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$
Faça os cálculos:

2) Método de Newton:
Considere $f(x) = x^3 - 6x + 4$ e $f'(x) = 3x^2 - 6$. Então temos que:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Seja $x_0 = 0$, calcule $x_1, x_2, ..., x_n$ onde $f(x_n) = 0$.

Segunda etapa
A) Qual dos dois métodos você considera mais simples? E se fosse usar um computador?

B) As raízes obtidas nos dois processos são iguais?

C) O que essa raiz representa para a situação descrita anteriormente?

D) No esboço do gráfico dessa função do terceiro grau, o que representam as raízes?

Comentário e agradecimento final

Desejamos que esse estudo possa auxiliar professores e alunos do Ensino Médio a compreenderem e utilizarem os Métodos para se encontrar raízes de polinômios e com isso, sejam incentivados a utilizá los em sala de aula. Importante ressaltar que as atividades propostas devem ser desenvolvidas com calculadora.

São tantos agradecimentos, mas primeiramente gostaria de agradecer a Deus e a Mãe Divina que me possibilitaram essa caminhada. Aos meus pais, irmãos e familiares pelo apoio nos momentos difíceis e carinho em todos os momentos. Aos meus mestres pela dedicação e interesse, em especial a Mariana Garabini Cornelissen pelas suas excelentes aulas. A minha orientadora Gilcélia Regiane de Souza pela paciência, boa vontade e inteligência para ajudar. Aos meus animados colegas de curso que enfrentaram as viagens e dificuldades comigo, com bom humor e solidariedade, não deixando que nenhum de nós desanimasse. Aos meus colegas da Escola Municipal Antônio D'Assis Martins pelo incentivo e compreensão nas minhas ausências. À CAPES pelo apoio financeiro. Termino lembrando desse trecho de uma música: "nunca deixe que lhe digam que não vale a pena acreditar no sonho que se tem".

Apêndice

A Demostração Cardan

Jerônimo Cardan (Itália, 1501-1576), desenvolveu os seguintes cálculos para se chegar a fórmula resolutiva da equação do terceiro grau (2),

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Fazendo uma mudança de variável, onde $x = y + d$ e substituindo em (2) teremos:
$(y + d)^3 + a_2(y + d)^2 + a_1(y + d) + a_0 = 0$
$y^3 + 3dy^2 + 3d^2y + d^3 + a_2y^2 + 2a_2dy + a_2d^2 + a_1y + a_1d + a_0 = 0$
$y^3 + (3d + a_2)y^2 + (3d^2 + 2a_2d + a_1)y + (d^3 + a_2d^2 + a_1d + a_0) = 0$

Fazendo o termo do segundo grau na equação acima ser 0, para que tenhamos uma equação incompleta e possamos através de uma nova mudança de variável, chegarmos a um sistema de resolução conhecida, teremos:

$$3d + a_2 = 0 \to d = \frac{-a_2}{3}$$

Substituindo $d = \frac{-a_2}{3}$ em $y^3 + (3d + a_2)y^2 + (3d^2 + 2a_2d + a_1)y + (d^3 + a_2d^2 + a_1d + a_0) = 0$ temos:

$y^3 + \Big(3(\frac{-a_2}{3}) + a_2\Big)y^2 + \Big(3(\frac{-a_2}{3})^2 + 2a_2(\frac{-a_2}{3}) + a_1\Big)y + \Big((\frac{-a_2}{3})^3 + a_2(\frac{-a_2}{3})^2 + a_1(\frac{-a_2}{3}) + a_0\Big) = 0$
$y^3 + (-a_2 + a_2)y^2 + \Big(\frac{a_2^2}{3} - 2(\frac{a_2^2}{3}) + a_1\Big)y + \Big(-\frac{a_2^3}{27} + \frac{a_2^3}{9} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\Big) = 0$
$y^3 + (a_1 - \frac{a_2^2}{3})y + (\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0) = 0$

Chamando $a_1 - \frac{a_2^2}{3} = \alpha$ e $\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0 = \beta$ teremos:

$$y^3 + \alpha y + \beta = 0(3)$$

Agora, vamos resolver a equação (3), para isso, faremos uma nova mudança de variável $y = u + v$, logo teremos:

$(u + v)^3 + \alpha(u + v) + \beta = 0$
$u^3 + 3uv^2 + 3u^2v + v^3 + \alpha(u + v) + \beta = 0$
$(u^3 + v^3 + \beta) + \Big(3uv^2 + 3u^2v + \alpha(u + v)\Big) = 0$
$(u^3 + v^3 + \beta) + \Big(3uv(v + u) + \alpha(u + v)\Big) = 0$
$(u^3 + v^3 + \beta) + (u + v)(3uv + \alpha) = 0$

Para a igualdade acima, temos as seguintes soluções possíveis:
$i)(u^3 + v^3 + \beta) = -(u + v)(3uv + \alpha)$
ou
$ii)(u^3 + v^3 + \beta) = 0$ e $(u + v)(3uv + \alpha) = 0$

Tentando resolver a i), chegamos numa equação do terceiro grau e duas indeterminadas, logo, essa não nos atende.

Resolvendo a ii), temos que os valores de u e v serão calculados através do sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -\beta \\ u.v = \frac{-\alpha}{3} \end{cases}$$

Elevando ao cubo a segunda equação do sistema, teremos:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -\beta \\ u^3.v^3 = \frac{-\alpha^3}{27} \end{cases}$$

Logo, temos que a soma de u^3 e v^3 é $-\beta$ e o produto é $\frac{-\alpha^3}{27}$, então podemos escrever uma equação do segundo grau onde u^3 e v^3 serão as raízes, ou seja, temos uma equação da forma:

$$z^2 + \beta z - \frac{\alpha^3}{27} = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau de indeterminada z, temos:

$\Delta = \beta^2 - 4(\frac{-\alpha^3}{27}) = \beta^2 + 4(\frac{\alpha^3}{27})$

$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \frac{4\alpha^3}{27}}}{2}$

Como as raízes da equação $z^2 + \beta z - \frac{\alpha^3}{27} = 0$ são u^3 e v^3, fazendo a substituição, teremos:

$z_1 = u^3 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{4\alpha^3}{27}}}{2}$

$u = \sqrt[3]{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{4\alpha^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$

$z_2 = v^3 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + \frac{4\alpha^3}{27}}}{2}$

$v = \sqrt[3]{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + \frac{4\alpha^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$

Como $y = u + v$, precisamos encontrar as raízes cúbicas da unidade que satisfazem o sistema anterior. Raízes cúbicas da unidade:

$\theta = 0$ e $\mid Z \mid = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + isen\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2.$

$k = 0 : 1.(1 + i.0) = 1$

$k = 1 : 1.\left(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,(\xi)$

$k = 2 : 1.\left(cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,(\xi^2)$

Observe que:

$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-3-2i\sqrt{3}+1}{4} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

Portanto, $1, \xi$ e ξ^2 são raízes da unidade.

Logo, as soluções do sistema são da forma:

$u_1 = \sqrt[3]{Z_1} \quad e \quad v_1 = \sqrt[3]{Z_2}\,(i)$

$u_2 = \xi \sqrt[3]{Z_1} \quad e \quad v_2 = \xi^2 \sqrt[3]{Z_2}\,(ii)$

$u_3 = \xi^2 \sqrt[3]{Z_1} \quad e \quad v_3 = \xi \sqrt[3]{Z_2}\,(iii)$

Pois essas satisfazem as equações:
$u^3 + v^3 = -\beta$ e $u.v = -\frac{\alpha}{3}$

Verificando se satisfazem:
$(i) : u^3 + v^3 = \left(\sqrt[3]{Z_1}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{Z_2}\right)^3 = Z_1 + Z_2 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}} - \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}} = -\beta$

$u.v = \sqrt[3]{Z_1}.\sqrt[3]{Z_2} = \sqrt[3]{Z_1 Z_2} = \sqrt[3]{\left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}\right)\left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}\right)} =$
$\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{4} - \left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{\alpha^3}{27}} = \frac{-\alpha}{3}$

$(ii) : u.v = \xi \sqrt[3]{Z_1}.\xi^2 \sqrt[3]{Z_2} = \xi^3 \sqrt[3]{Z_1 Z_2} = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \sqrt[3]{-\frac{\alpha^3}{27}} =$

$\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^3 \sqrt[3]{-\frac{\alpha^3}{27}} = \frac{-i^3\sqrt{3}^3 - 3i^2.3 + 3.i\sqrt{3} - 1}{8}.\left(-\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}i + 9 + 3\sqrt{3}i - 1}{8}\left(-\frac{\alpha}{3}\right) = \left(-\frac{\alpha}{3}\right)$

$u^3 + v^3 = \left(\xi \sqrt[3]{Z_1}\right)^3 + \left(\xi^2 \sqrt[3]{Z_2}\right)^3 = \xi^3.Z_1 + \xi^6.Z_2 = \xi^3.Z_1 + \left(\xi^3\right)^2 Z_2 = 1.Z_1 + 1.Z_2 =$
$\left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}\right) + \left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}\right) = -\frac{2\beta}{2} = -\beta$
Para (iii) será análogo.

Então as soluções da equação $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ serão:
$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{Z_1} + \sqrt[3]{Z_2} = \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$
$y_2 = u_2 + v_2 = \xi \sqrt[3]{Z_1} + \xi^2 \sqrt[3]{Z_2} = \xi \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \xi^2 \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$
$y_3 = u_3 + v_3 = \xi^2 \sqrt[3]{Z_1} + \xi \sqrt[3]{Z_2} = \xi^2 \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \xi \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$

E como queremos a solução da equação $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ e sabemos que $x = y + d$, logo, os valores de x são:
$x_1 = y_1 + d = \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + d$
$x_2 = y_2 + d = \xi \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \xi^2 \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + d$
$x_3 = y_3 + d = \xi^2 \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \xi \sqrt[3]{\frac{-\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + d$

B Demonstração Ferrari

Vamos acompanhar o desenvolvimento do método de Ferrari para a equação (4)

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Iniciamos isolando os membros de forma a encontrar um quadrado no primeiro membro da igualdade:

$$x^4 + a_3x^3 = -a_2x^2 - a_1x + a_0$$

$$x^4 + a_3x^3 + \frac{1}{4}a_3^2x^2 = -a_2x^2 - a_1x + a_0 + \frac{1}{4}a_3^2x^2$$

Somando $\frac{1}{4}a_3^2x^2$ em ambos os membros da igualdade, teremos:

$$(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)^2 = (\frac{1}{4}a_3^2 - a_2)x^2 - a_1x + a_0$$

Já temos um quadrado no primeiro membro da igualdade, agora, precisamos fazer aparecer um quadrado no segundo membro, sem destruir o quadrado do primeiro. Para isso, somaremos nos dois membros da igualdade a expressão $y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)$, então teremos:

$(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)^2 + y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}a_3x) = (\frac{1}{4}a_3^2 - a_2)x^2 - a_1x + a_0 + y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)$

$y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}a_3x) + (x^2 + \frac{1}{2}a_3x)^2 = (\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + 2y)x^2 + (a_3y - a_1)x + (y^2 - a_0)$

$\Big(y + (x^2 + \frac{1}{2}a_3x)\Big)^2 = (\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + 2y)x^2 + (a_3y - a_1)x + (y^2 - a_0)$ (1)

Para o segundo membro da igualdade ser um quadrado perfeito precisamos que a equação de segundo grau com a indeterminada x:

$(\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + 2y)x^2 + (a_3y - a_1)x + (y^2 - a_0)$ tenha $\Delta = 0$

Vamos então calcular o Δ da equação anterior:

$\Delta = (a_3y - a_1)^2 - 4.(\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + 2y).(y^2 - a_0) = 0$

$\Delta = a_3^2y^2 - 2a_1a_3y + a_1^2 + (-a_3^2 + 4a_2 - 8y).(y^2 - a_0) = 0$

$\Delta = a_3^2y^2 - 2a_1a_3y + a_1^2 - a_3^2y^2 + a_0a_3^2 + 4a_2y^2 - 4a_0a_2 - 8y^3 + 8a_0y = 0$

$-8y^3 + 4a_2y^2 + (8a_0 - 2a_1a_3)y + (a_1^2 - 4a_0a_2 + a_0a_3^2) = 0$

Resolvendo a equação acima de indeterminada y, teremos 3 valores possíveis, logo, escolhemos somente um desses para utilizar na solução. Sabendo o valor de y, temos um quadrado no segundo membro da equação (1), logo, podemos escrever:

$(y + (x^2 + \frac{1}{2}a_3x))^2 = (ax + b)^2$, onde a e $b \in \mathbb{C}$.

Daí vem que as soluções da equação do quarto grau serão as soluções das duas equações do segundo grau a seguir:

$$x^2 + \frac{1}{2}a_3x + y = ax + b$$

e

$$x^2 + \frac{1}{2}a_3x + y = -(ax + b)$$

Então teremos 4 raízes, contando as multiplicidades.

C Relação de Girard

Acompanhe abaixo os resultados obtidos por Girard e suas demonstrações:

Considere K um corpo de indeterminadas $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$. Seja o polinômio: $\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = (x - x_1).(x - x_2)\cdots(x - x_n) \in K_{[x,x_1,x_2,\cdots,x_n]}$

Considere as seguintes somas e produtos das indeterminadas em $K_{[x_1,x_2,\cdots,x_n]}$:

$s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \sum_{i} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \sum_{i_1<i_2} x_{i_1}x_{i_2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$

$s_{3(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \sum_{i_1<i_2<i_3} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$

$$\vdots$$

$s_{n-1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-1}} = x_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3\cdots x_n$

$s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = x_1x_2\cdots x_n$

Precisamos dessas somas polinomiais para demonstrar o seguinte Lema:

Lema: Temos a seguinte relação:
$\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = x^n - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre $n \geq 2$.

1) Mostrando que vale para $n = 2$:
$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2 = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = x^2 - s_{1(x_1,x_2)}x + s_{2(x_1,x_2)}$
Pois $s_{1(x_1,x_2)} = x_1 + x_2$ e $s_{2(x_1,x_2)} = x_1.x_2$.

2) Supor que vale para n, ou seja,
$(x - x_1).(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$

3) Mostraremos que vale para n+1:
$(x - x_1).(x - x_2)\cdots(x - x_n)(x - x_{n+1}) = \Big[x^n - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1} + s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.x^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big](x - x_{n+1})$

$= x^n.x - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1}.x + s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.x^{n-2}.x - \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x - x_{n+1}x^n + x_{n+1}s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1} + s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.x^{n-2}.x_{n+1} - \cdots + x_{n+1}(-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$

Reescrevendo resolvendo as multiplicações e associando os termos de mesmo grau, teremos:
$= x^{n+1} - \Big(s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}\Big)x^n + \Big(s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}.s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big).x^{n-1} - \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.x_{n+1}$

Mas, podemos perceber as seguintes relações entre as somas e a indeterminada x_{n+1}:

1)$s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})}$

$2)s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_{n+1}x_1 + x_{n+1}x_2 + \cdots + x_{n+1}x_n = s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})}$

$3)s_{3(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n + x_{n+1}x_1x_2 + x_{n+1}x_1x_3 + \cdots + x_{n+1}x_{n-1}x_n = s_{3(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})}$

$\vdots$

$n-1)s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}s_{n-1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = x_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3\cdots x_n + x_{n+1}x_1x_2\cdots x_{n-1} + V + x_{n+1}x_2x_3\cdots x_n = s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})}$

$n)x_{n+1}s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = x_{n+1}x_1x_2\cdots x_n = s_{n+1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$

Daí vem que:

$x^{n+1} - \Big(s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}\Big)x^n + \Big(s_{2(x_1,x_2,\cdots,x_n)} + x_{n+1}.s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big).x^{n-1} - \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.x_{n+1} = x^{n+1} - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})}x^n + \cdots + (-1)^{n+1}s_{n+1(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})}$

Logo, a relação

$$(x-x_1).(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição: Considere $p_{(x)} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são raízes de $p_{(x)}$, então

$$s_{i(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

Demonstração: Considere o polinômio

$$p_{(x)} = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$$

Colocando em evidência o termo a_n temos:

$p_{(x)} = a_n\Big[x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\Big]$

E sabemos do Lema anterior que

$$p_{(x)} = x^n - s_{1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_{n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau das equações anteriores teremos:

$-s_1 = \frac{a_{n-1}}{a_n} \Longrightarrow s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$+s_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n} \Longrightarrow s_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$\vdots$

$(-1)^n s_n = \frac{a_0}{a_n} \Longrightarrow s_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Então temos que :

$$s_i = (-1)^i.\frac{a_{n-i}}{a_n}$$

Essas igualdades anteriores nos dão as relações entre os coeficientes e as raízes das equações.

Referências

[1] C. Augusto Morgado & C. Paulo Pinto Carvalho; *Matemática Discreta.*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[2] G. Hammerlin and K. H. Hoffamann, *Numerical Mathematics.* Spring-Verlag, New York, 1991.

[3] H. Abramo & T. Maria Lúcia Vilela; *Polinômios e Equações Algébricas*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[4] P. Manoel ; *Matemática Paiva volumes 2 e 3*, Moderna, São Paulo, 2013.

[5] R. L. Burden & J. D. Faires, *Análise Numérica*, Cengage Learning, São Paulo, 2008.

[6] R. Márcia A. Gomes & L. Vera Lúcia da Rocha; *Cálculo Numérico*, Pearson Education, São Paulo, 1997.

[7] S. Décio & M. João Teixeira; *Cálculo Numérico*, Pearson, São Paulo, 2006.

[8] V. Paulo Evandro; *Método de Newton*, (monografia de Especialização), UFMG, Minas Gerais, 2006.

[9] S. Raquel Tavares; *Polinômios de Chebyshev e Curvas Maximais*,(dissertação de Mestrado), UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.