Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

O estudo de Induções e Recorrências - uma abordagem para o Ensino Médio †

por

Antonio Carlos de Lima Costa

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2015
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

O estudo de Recorrências e Indução - uma abordagem para o Ensino Médio

por

Antonio Carlos de Lima Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática Discreta.

Aprovada por:

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB(Orientador)

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia - UFPB(Coorientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. José Vicente Moreira - UNIPÊ

Fevereiro/2015

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS que de maneira concreta me deu força, paciência e saúde diariamente para continuar firme a cada dia, mesmo com inúmeros obstáculos.

A minha esposa Cristiane Leão por todo companheirismo, principalmente nos momentos mais difíceis, onde nesses momentos sua força e apoio foram essenciais.

Aos meus pais, Lindinalva Costa e Antonio Costa por terem me ofertado condições de educação para minha formação, pelo amor, dedicação, carinho e compreensão a mim oferecidos.

A minha irmã, Cíntia Costa, por ser ombro amigo nos momentos difíceis.

A meus amigos que demonstraram amizade, solidariedade e alegria na troca de informações, materiais e horas de estudos, no decorrer do curso. De modo especial a Demilson Antonio, José Marcondes, João Paulo, Renato Beserra, Edjane Gomes, Josildo Fernandes e Ely Paulo.

Aos meus amigos de trabalho da EREM Professor Barros Guimarães e Escola Paroquial de Menores, escolas situadas em Glória do Goitá-PE, pelo grande incentivo e compreensão a mim oferecidos.

Um agradecimento especial ao Professor Carlos Bocker e Gilmar Otávio pela orientação, transferência de conhecimentos, ética, profissionalismo e incentivo a pesquisa.

A todos professores pelo profissionalismo, empenho, respeito, dedicação e entusiasmo que nos demonstraram ao longo de todas disciplinas.

Esses agradecimentos se estendem a todos que fizeram e fazem parte da minha vida, aos que aqui estão representados e aos muitos que não figuram nesta escrita, mas, estão presentes nas minhas lembranças.

Dedicatória

A minha filha Carla Leão, minha esposa Cristiane Leão, minha irmã Cíntia Costa e meus pais Antonio Costa e Lindinalva Costa .

Resumo

Este trabalho apresenta uma pesquisa sobre os Princípios de indução e Recorrências, sua história, conceitos matemáticos utilizados e aplicações. Foram desenvolvidas algumas demonstrações do Princípio de indução e Recorrências, utilizando-se alguns conceitos básicos de Teoria dos Números, Análise Combinatória, Teoria dos Conjuntos e Geometria que podem ser explorados no Ensino Médio. Foram apresentadas algumas atividades que podem ser aplicadas em sala de aula do Ensino Médio no desenvolvimento de conceitos matemáticos como Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Geometria, Combinação e Conjuntos Numéricos entre outros temas.

Palavras chaves: Princípio de Indução, Recorrências, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Ensino Médio.

Abstract

This work presents a research on the Induction Principles and the Recurrences, its history, mathematical concepts and applications used. Were developed some statements of Induction Principle and the Recurrences using some basic concepts from Number Theory, Combinatorics, Geometry and Set Theory that can be explored in high school. Was submitted a few activities that can be applied in the classroom of the high school in the development of mathematical concepts such as Arithmetic Progression, Geometric Progression, Geometry, Combinatorial Analysis and Numeric Sets among other topics.

Keywords: Induction Principle, Recurrences, Arithmetic Progression, Geometric Progression, High School.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este trabalho trata de uma pesquisa bibliográfica sobre Princípios de Indução e Recorrências, aplicações no Ensino Médio e o desenvolvimento de algumas construções de recorrências utilizando conceitos da Teoria dos Números, Análise combinatória, Teoria de conjuntos e Geometria.

O objetivo é produzir um material didático que possa ser utilizado por professores do Ensino Básico, principalmente do Médio, ao trabalhar com recorrências, ou até mesmo à alunos de graduação em Licenciatura em Matemática. Servindo de base para quem desejar conhecer um pouco mais sobre recorrências e indução, como também para complementar atividades na sala de aula explorando alguns conceitos matemáticos de forma diferenciada.

O raciocínio recursivo, também chamado de recursão ou recorrência, permite a resolução de inúmeros problemas estruturados em etapas, onde o procedimento a ser empregado em uma determinada etapa caracteriza-se pela repetição completa do raciocínio utilizado na etapa anterior. Um procedimento caracterizado pela recursão é dito recursivo. Consequentemente, qualquer objeto que seja resultado de um procedimento recursivo é um objeto recursivo.

Na matemática, o raciocínio recursivo permite obter objetos a partir de objetos previamente definidos, de maneira que todos os objetos formados pertençam a uma mesma classe. Por exemplo, a definição formal dos números naturais diz que 1 (um) é um número natural, e todo número natural tem um sucessor, que é também um número natural. O raciocínio recursivo também permite definir regras para formular casos complexos em termos de casos mais simples. Como exemplo, temos alguns métodos de prova, como a prova por indução finita.

Os conceitos de recorrência que serão abordados neste trabalho terão como público alvo os alunos do Ensino Médio. Será demonstrada a importância das recorrências para a resolução de inúmeros problemas, provas indutivas e busca de padrões em variados conteúdos da matemática: progressões, análise combinatória, matemática financeira, geometria, etc; além de sua importância para a construção de modelos matemáticos que visam explicar inúmeros processos dinâmicos.

O trabalho foi dividido em três capítulos, um pouco da história das recorrências e induções, características e conceitos matemáticos envolvidos, algumas relações de recorrência e as possibilidades de aplicações em sala de aula. A seguir detalhamos cada um desses capítulos.

O capítulo 1 trata do princípio de indução e seu precursores, algumas definições gerais e aplicações em diversas áreas. É a partir dele que podemos perceber o quanto o estudo do princípio de indução é fascinante. Ainda neste capítulo é possível encontrar os Axiomas de Peano, mostrando suas propriedades e importância no estudo das induções. E, por fim, apresentamos algumas demonstrações envolvendo problemas interessantes como o "*paradoxo dos cavalos*", que foi inventado pelo matemático húngaro *George Pólya*.

O capítulo 2 detalha características e classificações Relações de Recorrência. Também é nesse capítulo que o leitor poderá encontrar os cálculos e teoremas, além de alguns conceitos envolvidos com as recorrências. São mostrados alguns exemplos de relações de recorrência e suas demonstrações intrigantes, algumas aplicações relacionadas às áreas da Teoria dos Números. A abordagem utilizada pode facilmente ser adaptada aos conhecimentos matemáticos trabalhados no Ensino Básico.

O capítulo 3 mostra as aplicações do Princípio de Indução e das Recorrências. Mostra também algumas atividades relacionadas com o Ensino Médio que esperamos fascinar o aluno no desenvolvimento do conhecimento matemático e estimular sua criatividade, como por exemplo, "*A Torre de Hanói*", quebra cabeça, criado pelo matemático *Édouard Lucas* ou o "*Problema de Josefus*". Além disso, concluímos com outros dois temas abordados no Ensino Médio, que utiliza o método recursivo, que são as Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

Capítulo 1

Princípio de Indução

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais. Indução matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de uma enorme quantidade de proposições.

Enquanto os conjuntos constituem um meio auxiliar, os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a Matemática. O outro objeto é o espaço, juntamente com as figuras geométricas nele contidas. Os números são objetos abstratos que foram desenvolvidos pelo homem para servir como modelos que permitem contar e medir e, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza.

Os compêndios tradicionais dizem o seguinte: Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma medição e o resultado é um número real.

Nos padrões atuais de rigor matemático, o trecho acima não pode ser considerado como uma definição matemática, pois faz uso de ideias (como grandeza, unidade, discreta, contínua) e processos (como comparação) de significado não estabelecido. Entretanto, todas as palavras que nela aparecem possuem um sentido bastante claro na linguagem do dia-a-dia. Por isso, embora não sirva para demonstrar teoremas a partir dela, a definição tradicional tem o grande mérito de nos revelar para que serve e por qual motivo foram inventados os números.

1.1 A sequência dos números naturais

Os números naturais constituem um modelo matemático, uma escala padrão, que nos permite a operação de contagem. A sequência desses números é uma livre e antiga criação do espírito humano. Comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata ideal é o processo que torna mais precisa a noção de quantidade; esse processo (a contagem) pressupõe portanto o conhecimento da sequência numérica. Sabemos que os números naturais são $1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

A totalidade desses números constitui um conjunto, que indicaremos com o símbolo $\mathbb{N}$ e que chamaremos de conjunto dos naturais. Portanto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Evidentemente, o que acabamos de dizer só faz sentido quando já se sabe o que é um número natural. Façamos de conta que esse conceito nos é desconhecido e procuremos investigar o que há de essencial na sequência $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Deve-se a *Giussepe Peano* $(1858 - 1932)$ a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os axiomas de Peano. Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possui quatro propriedades fundamentais, das quais resultam, como consequências lógicas, todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números. Começaremos com o enunciado e a apreciação do significado dessas quatro proposições fundamentais a respeito dos números naturais.

1.2 O Poder do Método Indução

Comecemos com a seguinte pergunta:

O que significam expressões do tipo $1 + 2 + \cdots + n$ e $1.2.\cdots.n$?

Note que as operações de adição e multiplicação dos números naturais (ou em qualquer sistema numérico) são binárias, isto é, elas relacionam dois elementos de cada vez. Apesar disso, temos uma ideia bastante intuitiva do significado das expressões acima, até mesmo no que diz respeito aos pontinhos que nelas aparecem. Existe, contudo, um modo de tornar mais rigorosas definições desse tipo por meio do Princípio de Indução Matemática.

1.3 Princípio de Indução Matemática (PIM)

O que é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais? Bem, podemos intuitivamente descrevê-lo dizendo quais são os seus elementos; eles são os números reais da forma:

$$1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1 = (1 + 1) + 1, 4 = 3 + 1 = (1 + 1 + 1) + 1, \ldots$$

Ocorre, porém, que dificilmente poderemos provar alguma propriedade desses números utilizando apenas esta descrição, pois, apesar de sabermos intuitivamente quais são os números que os pontinhos acima representam, teríamos dificuldade de descrevê-los de modo suficientemente explícito.

Uma alternativa consiste em dar algumas propriedades que caracterizem de modo inequívoco o conjunto dos naturais dentro do conjunto dos números reais.

Inicialmente, considere um subconjunto S dos números reais que possui as seguintes propriedades:

(1) S contém o número 1.

(2) Toda vez que S contém um número n, ele necessariamente contém o número $n + 1$.

(3) Não existe subconjunto próprio de S satisfazendo as condições (1) e (2).

Em outras palavras, (3) nos diz que se S possui as propriedades $(1), (2)$ e (3), acima, e se S' é um subconjunto de S que possui as propriedades (1) e (2), então $S' = S$.

Vamos provar que se existe um subconjunto S dos números reais satisfazendo às três condições acima, então esse conjunto é único. De fato, se S_1 e S_2 são dois os subconjuntos, temos que $S_1 \cap S_2$ possui as propriedades (1) e (2), logo pela propriedade (3) segue que

$$S_1 = S_1 \cap S_2 = S_2$$

Não temos como provar que tal conjunto S existe. Portanto, admitiremos o seguinte axioma:

Axioma 1.1 *Existe um subconjunto dos reais que possui as propriedades* $(1), (2)$ *e* (3).

Esse único subconjunto será chamado de conjunto dos números naturais e denotado por $\mathbb{N}$.

A propriedade (3) é o que se chama de Princípio de Indução Matemática. Mais precisamente:

Princípio de Indução Matemática: Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que 1 pertence a S e sempre que um número n pertence a S, o número $n + 1$ também pertence a S, tem-se que $S = \mathbb{N}$.

Esta simples propriedade fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração em Matemática: a demonstração por indução.

Suponha que seja dada uma sentença matemática $P(n)$ que dependa de uma variável natural n, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer. Tais sentenças serão ditas sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos naturais.

A seguir damos alguns exemplos de sentenças abertas definidas sobre $\mathbb{N}$:

(a) $P(n) : n$ é par

É claro que a afirmação $P(1)$ é falsa, pois ela diz que 1 é par; $P(3), P(5)$ e $P(9)$ são falsas, pois afirmam, respectivamente, que $3, 5$ e 9 são pares.

Por outro lado, é também claro que $P(2), P(4), P(8)$ e $P(22)$ são verdadeiras, pois $2, 4, 8$ e 22 são pares.

(b) $P(n) : n$ é múltiplo de 3.

Temos, por exemplo, que $P(1), P(2), P(4)$ e $P(5)$ são falsas, enquanto $P(3)$ e $P(6)$ são verdadeiras.

(c) $P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Temos que $P(1), P(2), P(3), P(4), \ldots, P(10)$ são verdadeiras.

Aqui sabemos precisamente o que significa a sentença aberta $P(n)$, apesar dos pontinhos na sua definição. Ela significa:

"A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 "

Não foi possível visualizar algum número natural n tal que $P(n)$ seja falsa? Após mais algumas tentativas, é possível se "convencer" de que esta fórmula tem grandes chances de ser verdadeira para todo número natural n; ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $P(n) : n^2 - n + 41$ é um número primo para todo $n \in \mathbb{N}$

É fácil verificar que as sentenças $P(1), P(2), P(3)$ são verdadeiras. Com algum trabalho, é possível ir além, verificando também que $P(4), P(5), \ldots, P(35)$ são verdadeiras.

Portanto, é plausível que tenhamos encontrado um polinômio cujos valores nos números inteiros sejam sempre números primos.

Mais alguns testes para confirmar a nossa suspeita? Lá vai, $P(36), P(37), P(38)$ e $P(40)$ são verdadeiras.

Podemos parar por aqui e nos sentir felizes com a nossa descoberta? Bom, para satisfazer os mais céticos, faremos só mais um teste com $n = 41$.

Note que $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo. Logo, para a nossa desilusão, $P(41)$ é falsa!

Podemos provar que não existe nenhum polinômio em uma variável com coeficientes inteiros cujos valores nos naturais sejam sempre números primos. Portanto, não havia a *priori* nenhuma chance de $P(n)$ ser verdadeira para todo número natural n.

Podemos provar que uma sentença aberta definida sobre os naturais é sempre verdadeira, mas não é coerente e possível testar, um por um, todos os números naturais, pois eles são em número infinito. Portanto, será preciso encontrar algum outro método.

Vamos a seguir expor a técnica da demonstração por indução matemática que resolverá esse nosso problema.

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre os naturais e denote por V o seu conjunto verdade em $\mathbb{N}$, isto é, o subconjunto de $\mathbb{N}$, definido como

$$V = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\}$$

Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, basta mostrar que $V = \mathbb{N}$.

Isso pode ser feito usando o Princípio de Indução Matemática.

Basta, para isto, mostrar que 1 pertence a V e que $n+1$ pertence a V , toda vez que n pertence a V.

Provamos, assim, o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *(Princípio de Indução Matemática) Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que*

(i) *$P(1)$ é verdadeira; e*

(ii) *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.4 Os axiomas de Peano

Um matemático profissional, em sua linguagem direta e objetiva, diria que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:

1. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$;

2. A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva;

3. Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n) \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $S(X) \subset X$, então $X = \mathbb{N}$.

Observe que, como estamos chamando de $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, a notação $n \in \mathbb{N}$ significa que n é um número natural. As afirmações $1, 2, 3$ e 4 são os axiomas de Peano. A notação $s(n)$ é provisória. Depois de definirmos adição, escreveremos $n + 1$ em vez de $s(n)$. Como concessão à fraqueza humana, nosso matemático nos faria a gentileza de reformular os axiomas de Peano em linguagem corrente, livre de notação matemática. E nos diria então que as afirmações acima significam exatamente o mesmo que estas outras:

1'. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.

2'. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)

3'. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

4'. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

A partir daí, retomamos a palavra para dizer que o sucessor de 1 chama-se "dois", o sucessor de dois chama-se "três", etc. Nossa civilização progrediu ao ponto em que temos um sistema de numeração, o qual nos permite representar, mediante o uso apropriado dos símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9, todos os números naturais. Além disso, nossa linguagem também fornece nomes para os primeiros termos da sequência dos números naturais. (Números muito grandes não têm nomes específicos, ao contrário dos menores como "mil novecentos e noventa e oito". Quem sabe, por exemplo, o nome do número de átomos do universo?)

Voltando a usar a notação $s(n)$ para o sucessor do número natural n, teremos então $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, etc. Assim, por exemplo, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1. A sequência dos números naturais pode ser indicada assim:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \dots$$

As flechas ligam cada número ao seu sucessor. Nenhuma flecha aponta para 1, pois este número não é sucessor de nenhum outro. O diagrama acima diz muito sobre a estrutura do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

1.5 O axioma da indução

Um dos axiomas de Peano, o último, possui claramente uma natureza mais elaborada do que os demais. Ele é conhecido como o axioma da indução. Faremos dele uma análise detida, acompanhada de comentários.

O significado informal do axioma 4 é que todo número natural pode ser obtido a partir de 1, por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. Assim, por exemplo, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 1, etc. Para se entender melhor o axioma da indução é útil examinar o exemplo, no qual $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ mas a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é modificada, pondo-se $\widetilde{s}(n) = n + 2$. Então, se começarmos com 1 e a este número aplicarmos repetidamente a operação de tomar o "sucessor"(nesta nova acepção) obteremos $\widetilde{s}(1) = 3, \widetilde{s}(3) = 5, \widetilde{s}(5) = 7$, etc., e nunca chegaremos a qualquer número par. Portanto, temos função injetiva $\widetilde{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ para a qual não é verdade que todo número natural n pode ser obtido, a partir de 1, mediante repetidas aplicações da operação de passar de k para $s(k)$.

Dentro de um ponto de vista estritamente matemático, podemos reformular o axioma da indução do seguinte modo: Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se indutivo quando $s(X) \subset X$, ou seja, quando $n \in X \implies s(n) \in X$, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X. Dito isto, o axioma da indução afirma que o único subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ que contém o número 1 é o próprio $\mathbb{N}$.

No exemplo acima, os números ímpares $1, 3, 5, \dots$ formam um conjunto indutivo que contém o elemento 1 mas não é igual a $\mathbb{N}$. O papel fundamental do axioma da indução na teoria dos números naturais e, mais geralmente, em toda a Matemática, resulta do fato de que ele pode ser visto como um método de demonstração, chamado o Método de Indução Matemática, ou Princípio da Indução Finita, ou Princípio da Indução, conforme explicaremos agora.

Seja P uma propriedade que se refere a números naturais. Um dado número natural pode gozar ou não da propriedade P. Por exemplo, seja P a propriedade de um número natural n ser sucessor de outro número natural. Então 1 não goza da propriedade P, mas todos os demais números gozam de P.

Podemos também obter a validade do Princípio de indução matemática através dos Axiomas de Peano, basta observar que, dada a propriedade P cumprindo as condições estipuladas no enunciado do Princípio, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P contém o número 1 e é indutivo. Logo $X = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural goza da propriedade P. As propriedades básicas dos números naturais são demonstradas por indução. Comecemos com um exemplo bem simples.

Exemplo 1.1 *Entre os axiomas de Peano não consta explicitamente a afirmação de que todo número é diferente do seu sucessor, a qual provaremos agora. Seja P esta propriedade. Mais precisamente, dado o número natural n, escrevamos $P(n)$ para significar, abreviadamente, a afirmação $n \neq s(n)$. Então $P(1)$ é verdadeira, pois $1 \neq s(1)$, já que 1 não é sucessor de número algum; em particular, 1 não é sucessor de si próprio. Além disso, se supusermos $P(n)$ verdadeira, isto é, se admitimos que $n \neq s(n)$, então $s(n) \neq s(s(n))$, pois a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva. Mas a afirmação $s(n) \neq s(s(n))$ significa que $P(s(n))$ é verdadeira. Assim, a verdade de $P(n)$ acarreta a verdade de $P(s(n))$. Pelo Princípio da Indução, todos os números naturais gozam da propriedade P, ou seja, são diferentes de seus sucessores.*

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade P é válida para o número natural n (da qual deve decorrer que P vale também para $s(n)$) chama-se hipótese de indução.

O Princípio da Indução não é utilizado somente como método de demonstração. Ele serve também para definir funções $f : \mathbb{N} \to Y$ que têm como domínio o conjunto

$\mathbb{N}$ dos números naturais.

Para se definir uma função $f : X \to Y$ exige-se em geral que seja dada uma regra bem determinada, a qual mostre como se deve associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$.

Entretanto, no caso particular em que o domínio da função é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, a fim de definir uma função $f : \mathbb{N} \to Y$ não é necessário dizer, de uma só vez, qual é a receita que dá o valor $f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta que tenhamos conhecimento dos seguintes dados:

(1) $f(1)$;

(2) Uma regra que permita calcular $f(s(n))$ quando se conhece $f(n)$.

Esses dois dados permitem que se conheça $f(n)$ para todo número natural n. (Diz-se então que a função f foi definida por recorrência.) Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais se pode determinar $f(n)$, o dado (1) acima diz que $1 \in X$ e o dado (2) assegura que $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Logo, pelo axioma da indução, tem-se $X = \mathbb{N}$.

Observação 1.1 *Uma função $f : \mathbb{N} \to Y$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais chama-se uma sequência ou sucessão de elementos de Y. A notação usada para uma tal sequência é $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, onde se usa y_n em vez de $f(n)$ para indicar o valor da função f no número n. O elemento y_n .*

Deste modo, o Princípio da indução matemática pode ser visto como uma propriedade fundamental dos números naturais, em que se $P(n)$ é uma propriedade relativa ao número natural n, tal que:

(i) Base de indução: Mostrar que $P(1)$ é válida;

(ii) Hipótese de Indução: Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

1.5.1 Formulação do Princípio da indução matemática usando conjuntos

O Princípio da Indução Matemática também pode ser enunciando usando a linguagem da teoria de conjuntos:

Teorema 1.2 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*

(i) $1 \in S$;

(ii) *Sempre que $k \in S$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $k+1 \in S$.*

então $S = \mathbb{N}$.

Este teorema pode ser facilmente mostrado usando o princípio da indução matemática. Por outro lado, podemos demonstrar o princípio da indução matemática supondo que o teorema acima é verdade, e considerando o conjunto S de todos os naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira.

1.6 Generalizações da indução matemática

Há muitas variações do princípio da indução matemática, que são no fundo equivalentes, mas podem tornar algumas demonstrações mais simples.

1.6.1 Base genérica

Muitas vezes precisamos provar que uma sentença aberta $P(n)$ vale para todos os números naturais maiores ou iguais a um certo n_0, ou seja, que "$(\forall n \in \mathbb{N})$, $n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$". Por exemplo, a afirmação $n^2 > 3n$ é verdadeira para todo natural n maior ou igual a 4, embora não seja verdadeira se n for $0, 1, 2$ ou 3.

Podemos usar o princípio da indução matemática para provar esse tipo de afirmação, de maneira indireta. Primeiro definimos um outro predicado $Q(m)$ como sendo equivalente a $P(n_0 + m)$. Provamos então a afirmação $(\forall m \in \mathbb{N})$ $Q(m)$, usando o princípio da indução matemática. Essa afirmação então implica $(\forall n \in \mathbb{N})$ $n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$.

Este raciocínio justifica o teorema geral abaixo, que nos permite provar tais afirmações por indução matemática de maneira mais direta, usando n_0 como base em vez de 1:

Teorema 1.3 *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$, se:*

(i) *$P(n_0)$ é verdadeira, e*

(ii) *Para todo $k \geq n_0$, $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$.*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

1.6.2 Passo genérico constante

Numa prova por indução, além de começar com uma base n_0 arbitrária, é possível usar um incremento maior que 1 no passo da indução. Ou seja, o passo da indução pode ser a demonstração de que $P(k) \Rightarrow P(k+p)$, em vez de $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Nesse caso, o roteiro é dado pelo seguinte teorema geral:

Teorema 1.4 *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$, n_0 um número natural qualquer, e p um inteiro positivo, se:*

(i) *$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+p-1)$ são verdadeiros, e*

(ii) *Para todo $k, k \geq n_0, P(k) \Rightarrow P(k+p)$.*

então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.
Observe que, neste caso, a prova da base da indução deve valer para p inteiros consecutivos, $(n_0, n_0+1, \ldots, n_0+p-1)$, e não apenas n_0.

1.7 Usos indevidos da indução matemática

É importante entender e verificar as condições em que a indução matemática se aplica. Se mal utilizada, ela pode levar a conclusões absurdas. Nos exemplos a seguir, tente encontrar o erro na demonstração.

Exemplo 1.2 *Todos os cavalos tem a mesma cor.*

Demonstração: Seja a sentença aberta $P(n)$: "Num conjunto com n cavalos, todos os cavalos tem a mesma cor."Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, por indução.

- Base: Para $n = 1$ a sentença $P(n)$ é verdadeira.
- Hipótese de indução: Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$; isto é, em todo conjunto com k cavalos, todos tem a mesma cor.
- Passo de indução: Vamos mostrar que, em todo conjunto com $k+1$ cavalos, todos tem a mesma cor. Considere um conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{k+1}\}$ com $k+1$ cavalos. Podemos escrever o conjunto C como união de dois conjuntos, cada um com k cavalos, da seguinte forma: $C = C' \cup C'' = \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \{c_2, \ldots, c_{k+1}\}$

  Pela hipótese de indução, todos os cavalos de C' tem a mesma cor. O mesmo é verdade para C''. Como c_2 pertence a C' e a C'', concluímos que os cavalos de C' tem a mesma cor que os cavalos de C''. Logo, todos os cavalos de C tem a mesma cor.

■

Este exemplo, conhecido como paradoxo dos cavalos, foi inventado pelo matemático húngaro *George Pólya* (1887-1985).

O erro na "demonstração" descobre-se ao analisar o raciocínio: faz-se a suposição implícita de que os dois subconjuntos de cavalos aos quais se aplicou a suposição de indução têm um elemento comum, mas isto falha quando $n = 2$.

Este paradoxo é simplesmente o resultado de um raciocínio errôneo. Mostra assim os problemas que se produzem quando se deixam de considerar casos específicos para os quais uma proposição geral pode ser falsa.

O exemplo a seguir ilustra um erro similar na aplicação do princípio da indução matemática, com "conclusão" igualmente absurda:

Exemplo 1.3 *Todos os números naturais são iguais.*

Demonstração: Seja $P(n)$ a sentença aberta "todos os números naturais menores ou iguais a n são iguais."Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução.

- Base: $P(1)$ é obviamente verdadeira.
- Hipótese de indução: Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$, ou seja, todos os números menores ou iguais a k são iguais.

- Passo de indução: Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Pela hipótese de indução, $k-1=k$. Somando 1 em ambos os lados da igualdade temos $k=k+1$. Portanto $P(k+1)$ também é verdadeira.

■

O próximo exemplo mostra a necessidade de provar a base da indução

Exemplo 1.4 *Para todo número natural $n \geq 1$, o número n^2+n é ímpar.*

Demonstração:

- Hipótese de indução: Suponha que k^2+k é ímpar para algum $k \geq 1$.

- Passo de indução: Vamos mostrar que $(k+1)^2+(k+1)$ é ímpar. Observe que $(k+1)^2+(k+1)=k^2+2k+1+k+1=(k^2+k)+2(k+1)$

Este resultado é ímpar, pois (k^2+k) é ímpar pela hipótese de indução, $2(k+1)$ é par, e um número ímpar somado com um número par é ímpar. ■

Neste caso, nossa hipótese de indução é falsa, pois para qualquer $n \geq 1$, o número n^2+n é par e não ímpar como supomos no início.

1.8 Princípio da indução completa (PIC)

Vamos agora enunciar o princípio da indução completa (PIC), também chamado de princípio da indução forte. Esta versão alternativa do princípio da indução matemática serve, como a anterior, para demonstrar sentenças na forma $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$. Em alguns casos essa técnica torna a demonstração da sentença mais fácil que a técnica anterior.

Teorema 1.5 *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que*

1. *$P(0)$ é verdade; e*

2. *Para todo k em $\mathbb{N}$, $(\forall i \in \mathbb{N}) i \leq k$, $P(i) \to P(k+1)$.*

então $P(n)$ é verdade, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, para provar que $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ é verdadeiro, usando indução completa, devemos proceder da seguinte forma:

1. Base da indução: Mostrar que $P(0)$ é verdade.

2. Hipótese de indução: Supor que, para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(i)$ é verdade para todo i com $0 \leq i \leq k$.

3. Passo da indução: Mostrar que $P(k+1)$ é verdade.

Como no princípio da indução matemática, podemos generalizar e considerar a base n_0 no lugar de 0.

1.8.1 Formulação do princípio da indução completa usando conjuntos

Assim como no caso do princípio da indução matemática, o princípio da indução completa também pode ser enunciando usando a linguagem da teoria de conjuntos:

Teorema 1.6 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*

1. $0 \in S$
2. *Para todo* $k \in \mathbb{N}, \{0, 1, 2, \ldots, k\} \subseteq S \to k + 1 \in S$; *então* $S = \mathbb{N}$

1.9 Princípio da boa ordenação (PBO)

Uma outra maneira de provar sentenças abertas sobre número naturais é usar uma propriedade dos números naturais conhecida como o princípio da boa ordenação (PBO). Seja S um conjunto de números reais. Um elemento mínimo de S é um $y \in S$ tal que para todo $x \in S, y \leq x$. O princípio da boa ordenação diz que:

Teorema 1.7 *Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo.*

Note que esta afirmação não é válida para subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$; isto é, existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{Z}$ que não tem elemento mínimo.

Como exemplo de uso do princípio da boa ordenação, vamos provar o Teorema da Divisão de Euclides:

Teorema 1.8 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 0$. Então existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = bq+r$ com $0 \leq r < b$.*

Prova. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, e $S = \{a - b.k : k \in \mathbb{N}, a - b.k \geq 0\}$
Observe que $S \subseteq \mathbb{N}$ pois $a - b.k \geq 0$; e que $S \neq \emptyset$ pois contém $a = a - b.0$. Então pelo princípio da boa ordenação S tem um elemento mínimo. Seja $r = a - b.q$ esse elemento. Suponha agora que $r \geq b$. Nesse caso $a - b.(q+1) = r - b \geq 0$, e portanto $r - b$ está também em S. Como $b > 0$, temos $r - b < r$. Isto contraria a escolha de r como o menor elemento de S. Portanto $r < b$. ∎

1.10 Formas equivalentes do princípio da indução

Nesta seção vamos provar a equivalência do princípio da indução matemática e do princípio da indução completa. Para isso vamos utilizar o princípio da boa ordenação (PBO). Vamos provar que:

$$PIM \Longrightarrow PBO \Longrightarrow PIC \Longrightarrow PIM$$

1.10.1 PIM implica PBO

Demonstração: Vamos supor que o princípio da indução matemática é válido, e provar o princípio da boa ordenação.
Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não possui elemento mínimo; vamos mostrar que ele só pode ser o conjunto vazio. Considere a sentença aberta $P(n)$: "todo elemento de S é maior que n". Vamos provar $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ por indução matemática.

- Base: como $0 \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$, 0 não pertence a S , pois caso contrário seria um elemento mínimo. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
- Hipótese de indução: Vamos supor que $P(k)$ é verdadeira para algum k; isto é, todo elemento de S é maior que k.
- Passo da indução: Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Todo elemento x de S é maior que k, portanto, é maior ou igual a $k+1$. Segue daí que o número $k+1$ não pode pertencer a S , pois nesse caso seria um elemento mínimo. Portanto, todo elemento de S é maior que $k+1$. Ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira. Por outro lado, se x é um elemento qualquer de S , a afirmação $P(x)$ é falsa. Portanto, a afirmação $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ implica que S é vazio.

■

1.10.2 PBO implica PIC

Demonstração: Vamos supor agora que o princípio da boa ordenação é válido, e provar o princípio da indução completa.
Suponha que $P(n)$ é uma sentença aberta que satisfaz as condições do princípio da indução completa, isto é:

1. $P(0)$ é verdade; e
2. para todo $k \in \mathbb{N}, ((\forall i \in \mathbb{N}) i \leq k \rightarrow P(i)) \rightarrow P(k+1)$.

Considere o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é falsa}\}$. Se S não for vazio, pelo princípio da boa ordenação ele possui um elemento mínimo. Pela condição 1 acima, este elemento é positivo, ou seja, é $k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $k+1$ é mínimo, $P(i)$ deve ser verdadeira para todo natural $i \leq k$. Mas pela condição 2, $P(k+1)$ deve ser verdadeira, ou seja $k+1 < S$. Esta contradição significa que S é vazio, ou seja $P(n)$ é verdadeira para todo n. ■

1.10.3 PIC implica PIM

Demonstração: Para concluir, vamos supor que o princípio da indução completa é verdade, e provar o princípio da indução matemática.
Seja $P(n)$ uma sentença aberta que satisfaz as condições do princípio da indução matemática, isto é,

1. $P(0)$ é verdade; e
2. para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

A segunda afirmação implica uma outra, que chamaremos de $2'$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $((\forall i \leq k)P(i)) \to P(k+1)$.
Nesta passagem usamos o fato que
$(\forall i \leq k)\ P(i)$ equivale a $((\forall i < k)P(i)) \wedge P(k)$
e o teorema da lógica proposicional(*).
$(p \to q) \to (r \wedge p \to q)$
onde $p = P(k)$, $q = P(k+1)$, e $r = ((\forall i < k)P(i))$.
As condições 1 e $2'$ são as hipóteses do princípio da indução completa, portanto concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo n. ■

(*)Demonstração do Teorema da lógica proposicional, disponível em (Fundamentos de Matemática Elementar, volume 01 - Gelson Iezzi(e outros) 1977 - Págs 1 a 15)

1.11 Aplicações em Matemática do Princípio de Indução Matemática

1.11.1 Conjuntos finitos e infinitos

Seja $m \in \mathbb{N}$, definimos $I_m = \{x \in \mathbb{N} : x \leq m\} = \{1, \ldots, m\}$.

Diremos que um conjunto A é finito, se $A = \emptyset$ ou se existirem $m \in \mathbb{N}$ e uma bijeção de I_m em A. Se A não é finito, diremos que é infinito.

A questão que nos colocamos agora é saber se o número natural m é univocamente determinado por A e pela existência de uma bijeção de I_m em A. A resposta é positiva e decorre do seguinte resultado.

Teorema 1.9 *Sejam m e n dois números naturais. Se $m > n$, então não existe nenhuma função injetora de I_m em I_n.*

Demonstração: Basta provar o teorema quando $m = n+1$. De fato, se $m > n+1$ e se existisse uma função injetora de I_m em I_n, a sua restrição a I_{n+1} seria também injetora.

Mostraremos por indução sobre n que é verdadeira para todo $n \geq 1$ a seguinte sentença: $P(n)$: Não existe nenhuma função injetora de I_{n+1} em I_n.

(i) $P(1)$ é verdadeira;

(ii) Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira e seja $I_{n+2} \to I_{n+1}$ queremos provar que f não é injetora. Vamos supor, por absurdo, que f é injetora. Duas possibilidades podem ocorrer.

(a) $n+1 \notin f(I_{n+2})$. Neste caso, a função $g : I_{n+1} \to I_n$, definida por $g(x) = f(x)$ para todo $X \in I_{n+1}$ é injetora, o que é uma contradição.

(b) $n+1 \in f(I_{n+2})$. Seja X' o único elemento de I_{n+2}; tal que $f(x') = n+1$.

Consideremos dois subcasos:

(b') $x' = n+2$. Neste caso, $g : I_{n+1} \to I_n$ definida por $g(x) = f(\times)$, $\forall x \in I_{n+1}$ é bem definida e injetora, absurdo.

(b") $x' \neq n+2$. Como f é injetora, temos que $f(n+2) \neq f(x') = n+1$.

Logo a função $g : I_{n+1} \to I_n$ definida por $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x'; \\ f(n+2), & \text{se } x = x'. \end{cases}$
é bem definida e injetora, o que caracteriza uma contradição. ∎

Suponha agora que dado um conjunto A, existam números naturais m e n com $m > n$ e duas bijeções $f : I_m \to A$ e $g : I_n \to A$. Segue então que $g^{-1} \circ f : I_m \to I_n$, é uma bijeção, portanto, injetora o que não é possível pelo teorema. Consequentemente dado um conjunto finito A o número natural m para o qual existe uma bijeção $I_m \to A$ é univocamente determinado por A e é chamado do número de elementos de A. Diremos neste caso que A tem m elementos.

Corolário 1.1 *[Princípio de Dirichlet]. Dados dois conjuntos X e Y respectivamente com m e n elementos, se $m > n$, então não existe nenhuma função injetora de X em Y.*

Demonstração: Existem bijeções $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to Y$. Se existisse uma função injetora $h : X \to Y$, teríamos que $g^{-1} \circ h \circ f : I_m \to I_n$ é injetora, o que não é possível pelo teorema. ∎

O *Princípio de Dirichlet* é também chamado de princípio das gavetas pois admite a seguinte formulação: Dados m objetos a serem distribuídos em n gavetas e se $m > n$,então uma das gavetas deverá conter mais de um objeto.

Corolário 1.2 *Sejam X um conjunto com m elementos e Y um conjunto com n elementos. Se $m < n$, então não existe nenhuma sobrejeção de X em Y.*

Demonstração: Suponha que exista uma sobrejeção f de X em Y, então f admite uma inversa à direita $g : Y \to X$. Portanto, $f \circ g : Id(\gamma)$. Segue então que g admite uma inversa à esquerda, assim tem-se que g é injetora. Isto contradiz o *Princípio de Dirichlet*. ∎

Corolário 1.3 *Sejam X e Y dois conjuntos finitos com o mesmo número de elementos. Uma função $f : X \to Y$ é injetora se, e somente se, ela é sobrejetora.*

Demonstração: Suponha que f seja injetora e suponha por absurdo que não seja sobrejetora. Seja $y' \in Y$ não pertencente a $f(X)$. Logo é bem definida e injetora a função:
$f_1 : X \to Y \backslash \{y'\}$
$x \mapsto f(x)$
Isto é uma contradição pelo *Princípio de Dirichlet*. Suponha $x' \neq x''$ agora que f seja sobrejetora mas não injetora. Logo existem x' e x'' em X tais que $f(x') = f(x'')$. Portanto é bem definida e sobrejetora a função: $f_2 : X \backslash \{x'\} \to Y \; x \mapsto f(x)$

Isto contradiz o Corolário 1.2. ∎

Proposição 1.1 *Dados dois conjuntos A e B com n elementos, então o conjunto de todas as bijeções de A em B tem $n!$ elementos.*

Demonstração: Considere a sentença aberta $P(n)$: O número de bijeções entre dois conjuntos, cada um contendo n elementos, é $n!$.
$P(1)$ é claramente verdadeira pois só existe uma bijeção entre dois conjuntos com

1 elemento cada um. Suponha $P(n)$ verdadeira e sejam A e B dois conjuntos com $n+1$ elementos cada um. Fixe um elemento a de A. Existem $n+1$ possibilidades para escolher a imagem de a em B por uma bijeção. Para cada escolha destas, por exemplo $a \mapsto b$, as bijeções que tem esta propriedade são tantas quantas são as bijeções de $A \backslash a$ em $B \backslash b$, logo são em número $n!$. Portanto o número total de possibilidades de definir uma bijeção de A em B é $(n+1).n! = (n+1)!$ ∎

Daremos agora um exemplo de conjunto infinito

Proposição 1.2 *$\mathbb{Z}$ é infinito.*

Demonstração: Se existissem um número natural m e uma bijeção $f : I_m \mapsto \mathbb{Z}$, teríamos uma função injetora $f^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto I_m$ e portanto a restrição $f^{-1}|I_{m+1} : I_{m+1} \to I_m$ seria injetora, o que é impossível pelo Teorema 1.9. ∎

1.11.2 Binômio de Newton

Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1 $a^n = \begin{cases} a, & n = 1; \\ a.a^{n-1}, & n > 1. \end{cases}$

Para $n, i \in \mathbb{Z}_+$, definimos:

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!(n-i)!}, & n \geq i; \\ 0, & n < i. \end{cases}$$

Pela definição destes números não é claro que se trata de números inteiros. Os próximos lemas nos mostrarão que tais números são efetivamente inteiros.

Lema 1.1 *(Relação de Stifel). Para todo número natural n e todo inteiro i com $1 \leq i \leq n$, temos que:*

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{i.n!}{i!(n-i+1)} + \frac{(n-i+1)n!}{i!(n-i+1)!} \\ &= \frac{i.n! + (n-i+1.n!)}{i!(n-i+1)!} \\ &= \frac{(n+1).n!}{i!(n-i+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{i!(n-i+1)!} \\ &= \binom{n+1}{i} \end{aligned}$$

∎

Lema 1.2 *Dado um número natural n qualquer, para todo número inteiro i com $0 \leq i \leq n$ é inteiro o número* $\binom{n}{i}$.

Demonstração: Por indução sobre n. A proposição é claramente verdadeira para $n = 1$. Suponha que seja verdadeira para n.

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$$

Logo é inteiro pela hipótese de indução. ■

Teorema 1.10 (Binômio de Newton) . *Dados dois elementos $a, b \in \mathbb{R}$ e um número natural n, tem-se que*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \cdots + \binom{n}{i} a^{n-i}.b^i + \cdots + b^n$$

Demonstração: Seja $P(n)$ a igualdade acima. $P(1)$ é obviamente verdadeira. Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira. Temos que $(a+b)^{n+1} = (a+b).(a+b)^n = a.(a+b)^n + b.(a+b)^n$

Pela hipótese de que $P(n)$ é verdadeira, segue que

- $a(a+b)^n = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n + \binom{n}{2} a^{n-1}.b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^2.b^{n-1} + \binom{n}{n} a.b^n$
- $b(a+b)^n = a^n.b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2.b^{n-1} + \binom{n}{n-1} a.b^n + b^{n+1}$

Somando membro a membro estas igualdades e usando as relações do Lema 1, segue que $P(n+1)$ é verdadeira. ■

O corolário segue imediatamente do teorema 1.10 acima

Corolário 1.4 *Para todo número natural n, tem-se que*

$$(a-b)^n = a^n + \binom{n}{1}(-1) a^{n-1}.b + \cdots + \binom{n}{i}(-1)^i a^{n-i}.b^i + \cdots + (-1)^n b^n$$

Capítulo 2

Recorrências

Relação de recorrência (ou passo recorrente) é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos, ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

As relações de recorrência são compostas por duas partes importantes: a(s) condição(ões) inicial(is) que deve(m) ser conhecida(s) e a equação de recorrência que é a regra que permitirá calcular os próximos termos em função dos antecessores.

A equação de recorrência não pode definir sequências sem as condições iniciais, isto é, não é uma relação de recorrência.

Muitas vezes não é possível resolver problemas de contagem diretamente combinando os princípios aditivo e multiplicativo. Para resolver esses problemas recorremos a outros recursos: as recursões ou recorrências. A principal ideia por trás das recorrências é expressar uma quantidade x_n em função de quantidades anteriores $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

Em certas sequências numéricas, em alguns casos, é possível determinar um termo geral de um número da mesma em função de um ou mais de seus termos anteriores. Termos gerais desse tipo são chamados de equações de recorrência.

Uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra (recorrência) que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. Por exemplo PAs, PGs, fatorial, potências com expoente maior do que 1, como, por exemplo:

1. progressões aritméticas: $a_n = a_{n-1} + r$;
2. progressões geométricas: $a_n = a_{n-1}q$;
3. fatorial: $a_n = na_{n-1}$;
4. potências com expoente natural: $a_n = aa^{n-1}$

Para definir uma sequência desse modo, não basta dar a recorrência, mas é preciso dizer qual é o seu primeiro termo. Isto é óbvio nos casos de PAs, PGs. No caso (3), obtemos o fatorial, se tomarmos $a_1 = 1$. Se tomarmos $a_1 = 2$, por exemplo, obtemos a sequência:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 12, a_4 = 48, \ldots$$

que não representa o fatorial. Temos também que (4) somente define as potências de a se tomarmos $a_1 = a$

Podemos classificar os diversos tipos de sequências recorrentes, quanto a sua (seu):

(i) Ordem: A ordem nos dá o número de termos anteriores de quem o termo geral depende. Por exemplo, um termo geral que nos dá um termo da sequência em função de um termo anterior é dito uma recorrência de 1ª*ordem*; o que nos dá um termo em função de 2 termos anteriores é dito uma recorrência de 2ª*ordem*, e assim em diante.

(ii) Termo Independente: Uma equação que nos dá um termo em função de termos anteriores e outras constantes aditivas , ou seja, termos independentes, são ditas recorrências não homogêneas. Equações homogêneas são as recorrências com termos gerais sem termos independentes.

(iii) Linearidade: Uma recorrência é dita linear quando o expoente dos termos anteriores do termo geral são todos iguais a 1, e caso contrário é dita não linear.

2.1 Solução de uma recorrência

Resolver uma relação de recorrência é encontrar uma fórmula explícita que dá o termo geral da sequência, de preferência usando funções elementares ou outras relações de recorrência mais simples.

Muitas sequências são definidas recursivamente(isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 2.1 *A sequência*(x_n) *dos números naturais ímpares* $1, 3, 5, 7, \dots$ *pode ser definida por* $x_{n+1} = x_n + 2 (n \geq 1)$, *com* $x_1 = 1$. *Assim,* $x_n = 2n - 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é a solução dessa recorrência.*

Exemplo 2.2 *Qualquer progressão aritmética* (x_n) *de razão* r *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $x_{n+1} = x_n + r\ (n \geq 1)$, *com* $x_1 = a$. *É fácil ver que* $x_n = a + (n-1)r$ *é uma solução dessa recorrência.*

Exemplo 2.3 *Qualquer progressão geométrica* (x_n) *de razão* q *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $x_{n+1} = q.x_n (n \geq 1)$, *com* $x_1 = a$. *É fácil ver que* $x_n = aq^{n-1}$

Exemplo 2.4 *A sequência* (F_n), *dita de Fibonacci, cujos termos são* $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ *e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores é definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geq 0)$, *com* $F_0 = 0$ *e* $F_1 = 1$. *Veremos mais tarde que*

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

é solução dessa recorrência, também chamada de fórmula de Binet.

Uma recorrência, por si só, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência do Exemplo 2.1, $x_{n+1} = x_n + 2$, é satisfeita, não apenas pela sequência dos números ímpares, mas por todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Nos exemplos 2.1, 2.2, 2.3 temos recorrências de primeira ordem, isto é, nas quais cada termo é expresso em função do antecessor imediato, e que no exemplo 2.4, temos uma recorrência de segunda ordem, ou seja, na qual cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos.

2.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem, expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear se (e somente se) essa função for do primeiro grau, ou seja, se ela é da forma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

Onde g e h são funções reais definidas sobre $\mathbb{N}$.
Dizemos que a recorrência é homogênea, se $h = 0$.

Exemplo 2.5 *As recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ e $x_{n+1} = nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ não é linear. As duas últimas são ditas homogêneas, por não possuirem termo independente de x_n.*

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.6 *Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$.*

Solução 2.1 *Temos:*

$$x_2 = 2x_1$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 2x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = 2x_{n-1}$$

Daí, interagindo, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$. é claro que como não foi prescrito o valor de x_1 , há uma infinidade de soluções para a recorrência, $x_n = C.2^{n-1}$, onde C é uma constante arbitrária.

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$. Com efeito, temos

$$x_2 = x_1 + f(1)$$
$$x_3 = x_2 + f(2)$$
$$x_4 = x_3 + f(3)$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-}1 + f(n-1)$$

Somando, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

O teorema a seguir mostra que qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$

Teorema 2.1 *(Solução de Recorrências Lineares de Primeira Ordem)Se a_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$.*

Demonstração: A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

em

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$$

■

Exemplo 2.7 *Resolver $x_{n+1} = 2x_n + 1, x_1 = 2$.*

Solução 2.2 *Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é, por exemplo, $x_n = 2^{n-1}$, conforme vimos no Exemplo 2.6. Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$, obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$. Daí se tem*

$$y_2 = y_1 + 2^{-1}$$

$$y_3 = y_2 + 2^{-2}$$

$$y_4 = y_3 + 2^{-3}$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}$$

Somando, resulta

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + 2^{-1}\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Daí, $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

2.3 Recorrências lineares de segunda ordem

Uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo

$$f(n)x_n + g(n)x_{n-1} + h(n)x_{n-2} + k(n) = 0$$

Onde f, g, h e k são funções cujos domínios são o conjunto dos números naturais e $f(n)$ nunca se anula. Quando $k = 0$, a recorrência é dita homogênea. Para que uma recorrência do tipo acima nos defina uma sequência, é preciso estipular os valores dos seus dois termos iniciais.

2.3.1 A equação característica

Inicialmente, trataremos das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, isto é, recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Suporemos sempre $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência seria, na realidade, uma recorrência de primeira ordem.

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2+pr+q = 0$, chamada *equação característica*. A nossa suposição preliminar de que $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

Exemplo 2.8 *A recorrência $x_{n+2} = x_{n+1}+x_n$ tem equação característica $r^2 = r+1$. As raízes da equação característica são*

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

O teorema a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, então qualquer sequência da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Teorema 2.2 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + q_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Substituindo $a_n = C_1r_1^n+C_2r_2^n$ na recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q)$$

$$= C_1r_1^n0 + C_2r_2^n0 = 0$$

■

2.3.2 Caracterizando recorrências de segunda ordem

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 2.2.

Teorema 2.3 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistemas de equações

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q)$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n. ■

Exemplo 2.9 *Vamos determinar as soluções da recorrência*

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0.$$

A equação característica $r^2 + 3r - 4 = 0$, tem raízes 1 e -4. De acordo com os Teoremas 2.2 e 2.3, as soluções da recorrência são as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2 (-4)^n$, isto é, $a_n = C_1 + C_2 (-4)^n$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 2.10 *Sequência de Fibonacci e Fórmula de Binet.*

Determinemos o número de Fibonacci F_n definido por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ com } F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1.$$

A equação característica é $r^2 = r + 1$ e as suas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Então
$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
Para determinar C_1 e C_2, basta usar $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Obtemos o sistema
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Logo,
$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Assim,
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
Se as raízes da equação característica forem complexas, a solução $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes arbitrárias pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos. Pondo as raízes na forma trigonométrica, teremos:
$$r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta), r_2 = \rho(cos\theta - isen\theta)$$
$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta), r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta).$$
Logo,
$$C_1r_1^n + C_2r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} n\theta].$$
É claro que $C_1' = C_1 + C_2$ e $C_2' = i(C_1 - C_2)$ são novas constantes e a solução pode ser escrita.
$$a_n = \rho^n[C_1'\cos n\theta + C_2'\operatorname{sen} n\theta]$$

Exemplo 2.11 *A recorrência* $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ *tem equação característica* $r^2 + r + 1 = 0$, *cujas raízes são*
$$r_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \; e \; r_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$
que são complexas de módulo $\rho = 1$ *e argumento principal* $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ *A solução é*
$$x_n = \rho^n[C_1\cos n\theta + C_2 sen\, n\theta] = C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2 sen\frac{n\pi}{3}$$

O que aconteceria se as raízes da equação característica fossem iguais? Os teoremas a seguir respondem essa pergunta.

Teorema 2.4 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$, *então,* $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, *quaisquer que sejam os valores das constantes* C_1 *e* C_2.

Demonstração: Se as raízes são iguais, então $r = \dfrac{-p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ na recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$C_1r^n(r^2 + pr + q) + C_2nr^n(r^2 + pr + q) + C_2r^nr(2r + p)$$

$$= C_1r^n0 + C_2nr^n0 + C_2r^nr0 = 0.$$

■

Teorema 2.5 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $C_1r^n + C_2nr^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determine constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1r + C_2r = y_1 \\ C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2 \end{cases}$$

Isto é,

$$C_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \text{ e } C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}$$

Isso é possível, pois $r \neq 0$

Afirmamos que $y_n = C_1r^n + C_2nr^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1r^n - C_2nr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos:

$$\begin{aligned} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n &= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - \\ &- C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^nr(2r + p) \end{aligned}$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero porque r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$; o quarto é igual a zero porque $2r + p = 0$ já que, quando $r_1 = r_2 = r$, tem-se $r = -\dfrac{p}{2}$.

Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$

Além disso, como $C_1r + C_2r = y_1$ e $C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo n. ■

Exemplo 2.12 *A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ tem equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$. As raízes são $r_1 = r_2 = 2$ e a solução da recorrência é $x_n = C_12^n + C_2n2^n$.*

O teorema a seguir mostra um processo para resolver algumas recorrências não-homogêneas.

Teorema 2.6 *Se a_n é uma solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.*

Demonstração: Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n)$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ pois a_n é a solução da equação original. Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$$

■

A solução de uma recorrência não-homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução homogênea. A solução da homogênea, sabemos achar. Uma solução da não-homogênea, procuraremos por tentativas.

Exemplo 2.13 *A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 + C_2 4^n$. Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n, da recorrência*

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n.$$

Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $n + 3^n$. Que tipo de função deve ser t_n? Poderíamos imaginar que t_n seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 3. Tentaremos $t_n = A_n + B + C3^n$. Substituindo em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ obtemos

$$3A_n + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n.$$

Assim, t_n será solução se $3A = 1, 3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Logo,

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{4}{9} \text{ e } C = -1.$$

Daí

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

Exemplo 2.14 *A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da equação homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$. Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$. Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $1 + 2^n$. Que tipo de função deve ser t_n? é possível que t_n seja a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2. Tentaremos $t_n = A + B2^n$. Substituindo em*

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n,$$

Obtemos $3A = 1 + 2^n$. Essa igualdade é impossível. A recorrência não admite solução da forma $t_n = A + B2^n$.

Parando para pensar no que aconteceu, verificamos que era óbvio que a nossa tentativa não podia dar certo. O espírito da nossa tentativa era tentar uma constante A para que obtivéssemos uma constante que igualaríamos a 1 e tentar $B2^n$ para gerar *uma exponencial que pudéssemos igualar a* 2^n *. É claro que o termo* $B2^n$ *não poderia cumprir o seu papel.* $B2^n$ *é solução da homogênea (é a solução da homogênea que é obtida pondo* $C_1 = B$ *e* $C_2 = 0$*) e, substituído da equação, daria zero e não uma exponencial que pudéssemos igualar a* 2^n*.*

Vamos corrigir a nossa tentativa para $t_n = A + Bn2^n$*. Sempre que na nossa tentativa em algum bloco não cumprir o seu papel, fazemos a correção "aumentando o grau", isto é, multiplicando o bloco por* n*. Agora, substituindo obtemos* $3A - B4B2^n = 1 + 2n$*.*

Se $3A = 1$ *e* $-4B = 1$*, isto é,*

$$A = \frac{1}{3} \text{ e } B = -\frac{1}{4}$$

Temos a solução

$$t_n = \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$$

A solução da recorrência é a soma de h_n *com* t_n*. Portanto,*

$$x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$$

2.4 Sequências infinitas

Uma sequência infinita é uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros limitado inferiormente, ou seja $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq r\}$ para algum inteiro r; por exemplo, todos os naturais $\mathbb{N}$, ou todos os inteiros positivos $\mathbb{N} \backslash \{0\}$. Para estas sequências valem os mesmos conceitos de termo, índice e valor vistos para sequências finitas, bem como a notação x_n em vez de $x(n)$. Além disso, se n é uma variável arbitrária, a fórmula "x_n'' é chamada de termo geral da sequência.

Ocasionalmente o termo sequência também é usado quando o domínio é o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$; nesse caso pode-se dizer que a sequência é bi-infinita.

Exemplo 2.15 *Seja* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *onde* $x_n = n^2$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Os elementos da sequência são:* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 9, \ldots$

Assim como no caso das sequências finitas, a escolha do índice inicial r varia de autor para autor. Em particular, muitos autores definem sequências infinitas como funções dos naturais positivos $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Em outros contextos, entretanto, é conveniente adotar o índice inicial como sendo 0, e definir sequências infinitas como funções com domínio $\mathbb{N}$ (incluindo 0).

O conceito de subsequência também vale para sequências infinitas. Por exemplo, se x é a sequência com domínio $\mathbb{N}$ tal que $x_n = n^2$, e R é o conjunto dos números naturais pares, a subsequência y de x determinada por R seria a restrição de x a R, ou seja, a função: $y = \{(2k, 4k^2) : k \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (2, 4), (4, 16), ...\}$

Como no caso finito, é conveniente supor que os termos de uma subsequência são reindexados a partir de um valor convencional (0 ou 1). No exemplo acima, a subsequência de x determinada por R seria a função $y = \{(k, 4k^2) : k \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (1, 4), (2, 16), ...\}$

2.5 Majoração e minoração de recorrências

Muitas vezes é difícil ou impossível obter uma fórmula explícita exata para uma sequência y definida recursivamente sobre um conjunto de índices D. Porém, nesses casos pode ser possível obter um limitante inferior para y: uma sequência x, com mesmo domínio D, tal que $x_n \leq y_n$ para todo n em D. Analogamente, pode ser possível obter um limitante superior, uma sequência z tal que $y_n \leq z_n$ para todo n em D. Tais limitantes podem ser suficientes para muitos fins, como por exemplo, reserva de espaço de memória para certa tarefa, ou estimativa do tempo de execução de um programa.

Por exemplo, considere a sequência y tal que $y_0 = 3$ $y_n = y_{n-1} + \lfloor y_{n-1}/3 \rfloor$ para todo $n > 0$

Os primeiros termos desta sequência são:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_n	3	4	5	6	8	10	13	17	22	29	38	50	66	88

Podemos obter um limitante superior para y trocando o lado direito da recorrência por uma fórmula mais simples que seja maior igual a esse termo. Por exemplo, $z_0 = 3$ $z_n = z_{n-1} + z_{n-1}/3$ para todo $n > 0$

Podemos provar que $z_n \geq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução em n. Basta observar que $z_{n-1} \geq y_{n-1}$, pela hipótese de indução, e que $|u| \geq u$ para qualquer número real u. A recorrência de z pode ser simplificada para $z_n = (4/3)z_{n-1}$. Esta é uma progressão geométrica com termo inicial 3 e razão 4/3, e, portanto, a solução exata é $z_n = 3(4/3)n$. Podemos então concluir que $y_n \leq 3(4/3)^n$ para todo n em $\mathbb{N}$.

De maneira análoga, podemos obter um limitante inferior x observando que $|u| \geq u - 1$ para todo número real u. Obtemos então a recorrência

$x_0 = 3$

$x_n = x_{n-1} + (x_{n-1}/3 - 1)$ para todo $n > 0$

Esta recorrência pode ser reescrita $x_n = (4/3)x_{n-1} - 1$.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Relações de Recorrência: descoberta e resolução

3.1.1 Como generalizar os casos menores

Vamos considerar primeiro um problema geométrico: qual é o número máximo L_n de regiões definidas por n retas no plano?

Começaremos observando os casos menores: quando nenhuma reta divide o plano, temos somente uma região; quando uma reta o divide, temos duas regiões. Para $n = 2$, temos duas opções: posicionar as retas de forma que fiquem paralelas, formando três regiões, ou de forma que fiquem concorrentes, formando quatro regiões. Escolheremos esta última opção, uma vez que queremos que L_n seja o maior possível. A partir desse caso, percebemos que, ao acrescentar uma reta às $n - 1$ previamente existentes, a n reta deve interceptar todas as anteriores, de forma a conseguirmos a maior quantidade de regiões definidas por n retas no plano.

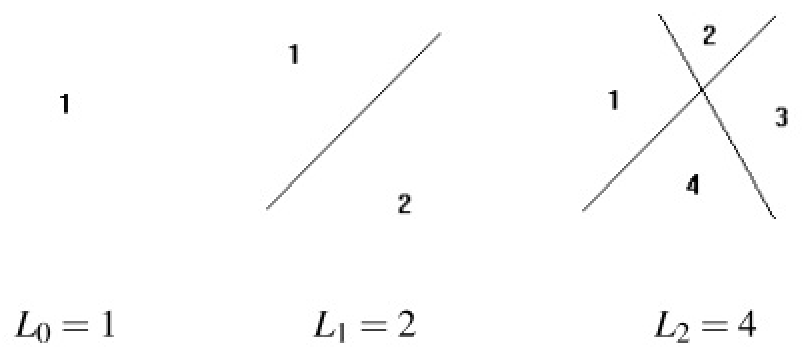

Figura 3.1: Regiões definidas por n retas no plano

Retornando análise de casos menores, ao acrescentarmos a terceira reta, percebemos que ela só pode interceptar três das quatro regiões existentes, independente da posição das duas primeiras retas.

Portanto, $L_3 = L_2 + 3 = 7$ é o máximo que conseguimos. Com esses casos menores em consideração, vamos generalizar o raciocínio.

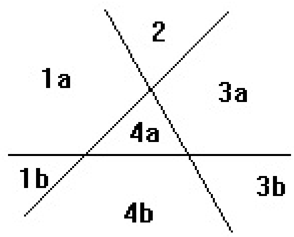

Figura 3.2: Inclusão da terceira reta no plano

Ao posicionar a n-ésima reta acrescentaremos k regiões se, e somente se, tal reta dividir k regiões previamente existentes, o que ocorre se, e somente se, interceptar em $k-1$ pontos as retas anteriores. Como duas retas podem se interceptar em, no máximo, um ponto, temos que a n-ésima reta pode interceptar as $n-1$ anteriores em, no máximo, $n-1$ pontos, criando n regiões novas. Sendo $k \leq n$, encontramos um limite superior:

$$L_n \leq L_{n-1} + n,\ n > 0$$

Para que se consiga o número máximo de regiões, como discutido previamente, a n-ésima reta acrescida não deve ser paralela a nenhuma das outras anteriormente existentes. Além disso, se colocarmos a reta de forma que não passe por nenhum dos pontos de intersecção anteriores atingiremos a igualdade nessa fórmula, uma vez que a nova reta intercepta todas as $n-1$ anteriores em $n-1$ pontos distintos, caracterizando a criação de n novas regiões. Logo, obtivemos a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_n &= L_{n-1} + n, \text{para } n > 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Achada a relação de recorrência, precisamos agora encontrar sua forma fechada. Com o intuito de melhor entender a relação, vamos expandi-la ao máximo:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + S_n, \text{onde } S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \end{aligned}$$

Encontraremos a soma S_n dos n primeiros inteiros positivos a partir do seguinte truque (aparentemente inventado por Gauss em 1786, quando tinha nove anos):

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Basta somar S_n consigo mesmo, mas com os termos na ordem inversa, de forma que cada uma das n parcelas à direita do sinal de igualdade seja igual a $n+1$. Logo,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \geq 0. \tag{3.2}$$

Então, a solução do nosso problema é:

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \text{ para } n \geq 0. \tag{3.3}$$

Para verificar se a solução está realmente correta, vamos provar por indução:

O primeiro passo é trivial, pois

$$L_0 = \frac{0 \cdot 1}{2} + 1.$$

Se supusermos que a equação $L_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$, para $n \geq 0$ é válida para $n-1$, basta mostrar que a mesma vale para n. De fato:

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

Portanto, nossa solução está correta.

Relações de recorrência similares as relações acima são comuns em diversas aplicações. Para achar a forma fechada para relações semelhantes a L_n, passamos por três etapas:

1. Analisar a solução de casos simples e procurar perceber o padrão do problema.
2. Generalizar a solução do problema, encontrar uma relação de recorrência e provar sua validade.
3. A partir da relação de recorrência, encontrar a forma fechada da solução e demonstrar sua validade.

Vamos colocar nosso método em prática em outro problema geométrico:

Qual é o número máximo P_n de regiões tridimensionais que podem ser definidas por n planos diferentes? Começando pelos casos menores: naturalmente, $P_0 = 1$, quando há um plano seccionando o espaço temos duas regiões. Sabemos pelo exemplo anterior que o novo plano não pode ser paralelo aos antigos, logo o segundo plano acrescido deve interceptar o anterior, dividindo as duas regiões anteriores, fazendo com que $P_2 = 4$. O terceiro plano dividirá as quatro regiões anteriores, de forma que $P_3 = 8$.

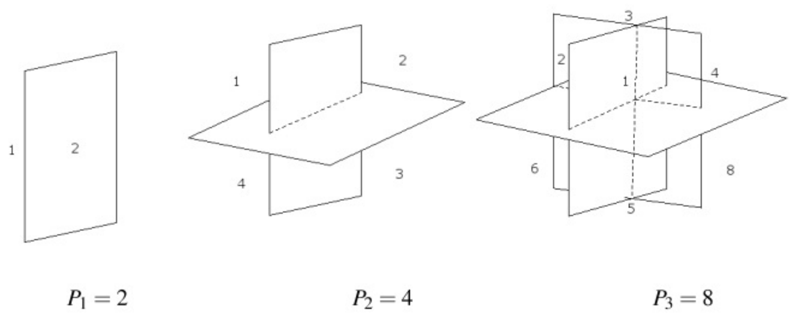

Figura 3.3: Interseção entre planos

Tal sequência nos leva a crer que $P_n = 2^n$, contudo ao acrescentar o quarto plano percebemos que não é essa a forma fechada que procuramos. Para que possamos visualizar melhor o problema, vamos imaginar que temos os três planos coordenados xy, yz e xz do sistema cartesiano. Ao traçar o quarto plano, conforme a figura abaixo, teremos três retas formadas da intersecção deste com os planos coordenados. As regiões determinadas por essas retas no plano acrescido dividem as antigas regiões tridimensionais, gerando sete novas regiões no espaço. Logo, teremos $P_4 = 8 + 7 = 15$.

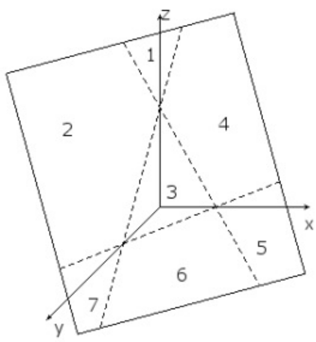

Figura 3.4: Interseção entre 4 planos

Note que ao acrescentar um plano temos que nos assegurar de que este não contenha nenhuma das retas de interseção já existentes. Sem esquecer-se desse aspecto e observando os casos menores, chegamos à generalização apropriada. O n-ésimo plano intercepta os $n-1$ planos antigos em $n-1$ retas distintas, que o dividem em L_{n-1} regiões. O plano, por sua vez, divide o espaço em L_{n-1} novas regiões. Encontramos, portanto, a nossa relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; \\ P_n &= P_{n-1} + L_{n-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Podemos partir em busca da forma fechada para (3.4). Como esse foi um problema similar ao anterior (até as suas relações de recorrência se parecem), vamos resolvê-lo analogamente, expandindo (3.4):

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + L_{n-1} \\ &= P_{n-2} + L_{n-2} + L_{n-1} \\ &= P_{n-3} + L_{n-3} + L_{n-2} + L_{n-1} \\ &= \vdots \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} L_{n-(1+k)}, \text{como sabemos } L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \ \textit{temos que:} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k(k+1)}{2} \right) + 1 \right] \end{aligned}$$

Agora basta manipular a soma:

$$\begin{aligned}
P_n &= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)+\sum_{k=0}^{n-1}1\\
&= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+k)+\sum_{k=0}^{n-1}1\\
&= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k+\sum_{k=0}^{n-1}1
\end{aligned}$$

O último somatório é simplesmente o número de parcelas a serem somadas quando k vai de zero a $n-1$, ou seja, n. O penúltimo somatório já foi calculado anteriormente: a soma dos $n-1$ primeiros inteiros positivos, representada por (3.2) com n no lugar $n-1$. O primeiro somatório representa uma relação de recorrência que tem a seguinte forma fechada

$$\left(\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\right)$$

para não ficarmos sem a solução para P_n. Finalizando nosso cálculos:

$$\begin{aligned}
P_n &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)(n-\dfrac{1}{2})}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)+n\\
&= 1+n\left[\frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})n}{6}+\frac{n-1}{4}+1\right]\\
&= 1+n\left[\frac{2n^2-3n+1+3n-3+12}{12}\right]\\
&= 1+\frac{n(n^2+5)}{6},\ \text{para } n\geq 0 \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Encontramos a forma fechada de (3.4), falta demonstrar sua validade. O primeiro passo da indução é básico: $P_0=1+0(0+5)6=1$. Supondo que (3.5) seja válida para $n-1$, vamos mostrar que vale para n. De fato:

$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1}+L_{n-1}\\
&= 1+(n-1)\left(\frac{(n-1)^2+5}{6}\right)+\frac{n(n-1)}{2}+1\\
&= 1+\frac{n^3-3n^2+8n-6+3n^2-3n+6}{6}\\
&= 1+\frac{n^3+5n}{6}\\
&= 1+\frac{n(n^2+5)}{6}
\end{aligned}$$

Para que não achemos que todas as relações de recorrência são resolvidos ao expandir a equação principal. Vamos a um outro exemplo: o Problema de Josefus.

Conta a lenda que um historiador famoso do primeiro século, Flavius Josefus, estava encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 11 rebeldes judeus, durante uma guerra entre judeus e romanos. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém.

Contudo Josefus, junto com um amigo, não queria participar do pacto suicida, e calculou rapidamente onde ele e o amigo deveriam ficar nesse círculo.

Vamos estudar uma variação desse problema: sabendo que há n pessoas numeradas de 1 a n em um círculo, eliminaremos cada segunda pessoa restante até sobrar um única pessoa. Estamos interessados em calcular $J(n)$, o número do sobrevivente. Para entendermos melhor a questão veremos o que acontece quando $n = 12$. Após a primeira volta, eliminamos, nessa ordem, as pessoas de número $2, 4, 6, 8, 10$ e 12. Na segunda volta descartamos $3, 7$ e 11; e finalmente, na última volta, eliminamos 5 e 1, restando somente a pessoa de número 9.

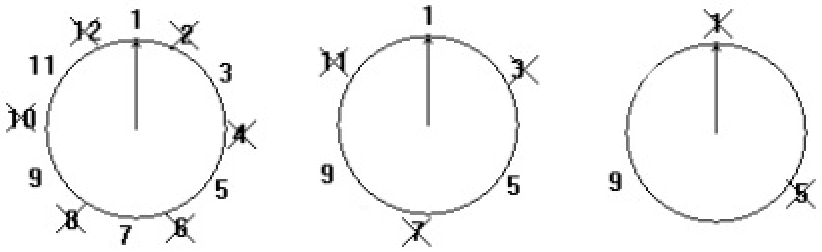

Figura 3.5: Eliminação por voltas

Uma vez entendido o problema, vamos analisar os exemplos com valores pequenos:

n	1	2	3	4	5	6
$J(n)$	1	1	3	1	3	5

Observamos que $J(n)$ é sempre ímpar, o que é coerente com o problema, uma vez que, como foi observado para $n = 12$, na primeira volta eliminamos todos que possuem número par.

Vamos supor então que temos $2n$ pessoas originalmente. Depois da primeira volta, em que eliminamos todos os pares, ficamos com:

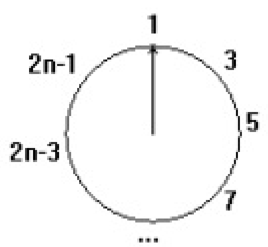

Figura 3.6: Representação para 2n pessoas

Chegamos a uma situação semelhante à que começa com n pessoas, exceto que cada pessoa tem seu número dobrado e diminuído de 1, ou seja,

$$J(2n) = 2J(n) - 1, n \geq 1.$$

No caso ímpar, supondo que temos $2n + 1$ pessoas, a pessoa de número 1 é eliminada logo após a $2n$, restando novamente n pessoas que, desta vez, tiveram seus números dobrados e aumentados de 1.

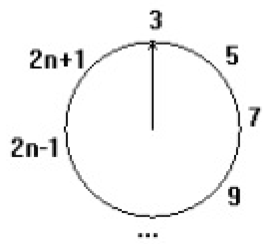

Figura 3.7: Representação para 2n+1 pessoas

Logo, $J(2n + 1) = 2J(n) + 1, n \geq 1$.
Combinando estas equações com sua condição inicial, chegamos à nossa relação de recorrência:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1; \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, \text{ para } n \geq 1; \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1, \text{ para } n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

A partir desta relação de recorrência podemos construir a seguinte tabela para valores pequenos de n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Percebermos que a cada potência de 2 em n é formado um grupo que sempre se inicia com $J(n) = 1$ e, à medida em que n cresce, $J(n)$ aumenta de 2 em 2 dentro desse grupo. Então se escrevermos n na forma $n = 2m + l$, em que $2m$ é a maior potência de 2 que não é maior que n, e l é o que sobrou, teremos:

$$j(2^m + l) = 2l + 1, m \geq 0 \text{ e } 0 \leq l \leq 2^m \tag{3.7}$$

que é a forma fechada para (3.6) que procurávamos.
Agora, temos que provar a validade de (3.7). Vamos fazer a indução em m: quando $m = 0$, temos $l = 0$, logo o primeiro passo da indução nos dá $J(1) = 1$, o que é verdade. Vamos dividir a segunda etapa da indução em duas partes: quando l é par ou ímpar. Se l é par, como $m > 0$, $2m + l = 2n$ e, pela segunda equação de (3.6) e usando a hipótese de indução, temos que:

$$J(\underbrace{2^m + 1}_{2n}) = 2J(\underbrace{2^{m-1} + l/2}_{n}) - 1 = 2(2l/2 + 1) - 1 = 2l + 1$$

Se l é ímpar, como $m > 0, 2m + 1 = 2n + 1$, pela terceira equação de (3.6), temos:

$$J(\underbrace{2^m+1}_{2n+1}) = 2J\left(\underbrace{2^{m-1}+\frac{l-1}{2}}_{n}\right)+1 = 2\left(2\frac{l-1}{2}+1\right)+1 = 2l+1$$

Portanto, a indução está completa e (3.7) está provada.

3.1.2 Método de compilação

Vamos estudar agora a Torre de Hanói, um quebra-cabeça criado pelo matemático francês *Édouard Lucas* em 1883, que consiste em uma base contendo três pinos, onde em um deles são dispostos oito discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo.

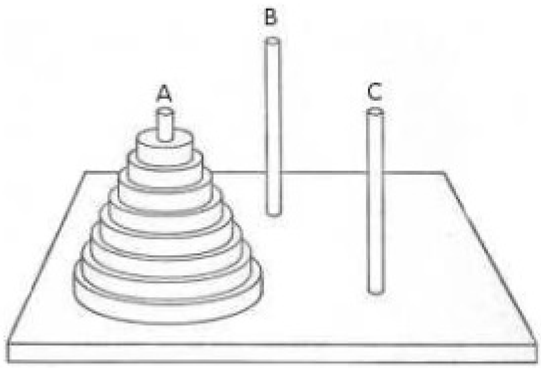

Figura 3.8: Torre de Hanói

O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor.

Lucas anexou ao jogo uma lenda: no começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que continha três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus então chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, seguindo as regras acima. Os sacerdotes então obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Se quando eles terminarem, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará.

Suponha que são dados n discos e seja T_n o número mínimo de movimentos que permite a transferência desses n discos de um pino para outro segundo as regras de Lucas. A melhor maneira de resolver problemas como esse é generalizar um pouco, mas para isso vamos começar analisando os casos menores: temos que $T_0 = 0, T_1 = 1$ e $T_2 = 3$. A resolução para T_3 nos dá uma ideia da generalização adequada. Primeiro movemos o menor disco para outro pino e o disco médio para o terceiro pino. Em seguida, como precisamos mover o maior disco, temos que deixar um pino vago e o único jeito de fazê-lo é colocando o disco menor no mesmo pino do médio. Agora, basta mover o disco grande para o pino vazio, em seguida, colocar a torre de dois discos sobre o disco maior, fazendo com que $T_3 = 2.\ T_2 + 1 = 7$. Generalizando, encontramos um limite superior para T_n: dada a torre com n discos, temos que mover a torre com $n-1$ discos para um outro pino, em seguida mover o n-ésimo disco e depois colocar a torre de $n-1$ discos sobre o disco maior. Logo, com $2T_{n-1}+1$ movimentos resolvemos nosso quebra-cabeça.

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1 \tag{3.8}$$

No entanto, percebe-se que movemos a torre com n discos se, e somente se, mudamos o n-ésimo disco de pino, o que ocorre se, e somente se, houver um pino vago, ou seja, se e somente se, os $n-1$ discos menores estiverem todos em um pino. Para obter tal configuração, foi necessário, no mínimo, T_{n-1} movimentos, que também é a quantidade mínima necessária para colocar a torre de $n-1$ discos sobre o n-ésimo disco, após ter movido este de pino. Então,

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1 \tag{3.9}$$

Portanto, a partir de (3.8) e (3.9) obtivemos uma igualdade e encontramos a relação de recorrência que procurávamos:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Vamos primeiro generalizar a relação de recorrência. O que aconteceria se o problema tivesse produzido uma relação de recorrência parecida com (3.10) mas com constantes distintas? Tentaremos encontrar a forma fechada para a relação de recorrência mais geral:

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha; \\ f(n) &= 2f(n-1) + \beta, n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Começando com $f(0) = \alpha$ e calculando progressivamente é possível construir a seguinte tabela:

n	$f(n)$
0	α
1	$2\alpha + \beta$
2	$4\alpha + 3\beta$
3	$8\alpha + 7\beta$
4	$16\alpha + 15\beta$
5	$32\alpha + 31\beta$

Suspeita-se que o coeficiente de α é 2^n e o de β é $2^n - 1$. Portanto, podemos escrever $f(n)$ da seguinte forma:

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta \tag{3.12}$$

em que

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^n, \\ B(n) &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Ao invés de provar isso por indução tentaremos um forma alternativa de chegar aos mesmos resultados. Como a relação de recorrência vale para quaisquer α e β, podemos escolher em particular $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ em (3.12), obtendo $f(n) = A(n)$ e substituindo esse resultado em (3.11) chegamos à seguinte relação:

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, \\ A(n) &= 2A(n-1). \end{aligned}$$

cuja solução é simplesmente $A(n) = 2^n$.

Agora vamos usar a relação de recorrência (3.11) e a solução (3.12) na ordem contrária, começando com uma função simples $f(n)$ e procurando constantes α e β que a definirão. Substituindo a função constante $f(n) = 1$ em (3.11) temos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 2.1 + \beta. \end{aligned}$$

Estas equações são válidas para todo n quando $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, logo não precisamos provar por indução que estes parâmetros nos dão $f(n) = 1$. Já sabemos que $f(n) = 1$ é uma solução neste caso pois a relação de recorrência (3.11) define de maneira única $f(n)$ para todos os valores de n. Logo, ao substituir tais valores em (3.12), sem esquecer que $f(n) = 1$, obteremos $A(n) - B(n) = 1$.

Portanto, mostramos que as funções $A(n)$ e $B(n)$ em (3.12), que resolvem (3.11), satisfazem as equações: $A(n) = 2^n$, $A(n) - B(n) = 1$.

Ao resolver estas equações, obtemos $B(n) = 2^n - 1$.

Agora que já resolvemos a generalização do nosso problema, para voltar a ele basta substituir $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ em (3.12) considerando os valores encontrados para $A(n)$ e $B(n)$. Então a solução de (3.10) é:

$$T_n = 2^n - 1 \tag{3.13}$$

O método de compilação que utilizamos consiste em escolher valores particulares para α e β e combiná-los, sendo dividido em quatro etapas:

1. Generalizar a relação de recorrência;
2. Achar valores de parâmetros gerais para os quais conhecemos a solução;
3. Compilar uma lista de casos particulares que podemos resolver;
4. Obter o caso geral combinando os casos particulares.

Precisamos de tantas soluções particulares independentes quantos forem os parâmetros independentes. Para compreendermos melhor o método, vamos agora resolver a seguinte relação de recorrência hipotética:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0; \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Supondo que a_n é igual a uma constante mais um múltiplo de n, a relação de recorrência (3.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha, \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n, \text{ para } n > 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Procedendo como no exemplo anterior, percebemos que $R_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $R_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$ e assim por diante, fazendo com que a solução de (3.15) seja da forma geral

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \tag{3.16}$$

Onde $A(n), B(n)$ e $C(n)$ são os coeficientes de dependência nos parâmetros gerais α, β e γ.

Segundo o método de compilação, devemos tentar colocar funções simples de n no lugar de R_n, com o objetivo de encontrar parâmetros constantes α, β e γ em que a solução é particularmente simples.

Ao tomar $R_n = 1$ em (3.15), temos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 1 + \beta + \gamma n, \text{ para } n > 0, \end{aligned}$$

O que implica $\alpha = 1, \beta = 0$, e $\gamma = 0$, logo, substituindo esses valores em (3.16), temos $A(n) = 1$.
Escolhendo $R_n = n$ em (3.15) teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ n &= n - 1 + \beta + \gamma n, \text{ para } n > 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha = 0, \beta = 1$ e $\gamma = 0$,
e ao substituir esses valores em (3.16) teremos $B(n) = n$.
Ao escolher $R_n = n^2$ em (3.15) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ n^2 &= (n-1)^2 + \beta + \gamma n, \text{ para } n > 0, \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 0, \beta = -1$, e $\gamma = 2$
e colocando esses valores em (3.6) temos

$$2C(n) - B(n) = n^2, \text{ donde } C(n) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Ao voltarmos a (3.14), podemos supor, por exemplo, $a_0 = 2, a_n = 5n + 7$, implicando $\alpha = 2, \beta = 7$ e $\gamma = 3$.

A solução dessa relação de recorrência seria

$$S_n = A(n) \cdot 2 + B(n) \cdot 7 + C(n) \cdot 3, \text{ ou seja,}$$
$$S_n = 1 \cdot 2 + n \cdot 7 + \frac{n^2 + n}{2} \cdot 3 = \frac{3n^2 + 17n + 4}{2}.$$

3.1.3 Representação Binária

As potências de 2 tiveram um papel importante nos dois problemas anteriores, logo é interessante examinarmos suas representações binárias. Começaremos com o

Problema de Josefus (representado pela relação de recorrência (3.6)) e consideraremos as representações de n e $J(n)$ em base 2. Suponha que a expansão binária de n seja:

$$n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2,$$

isto é:

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2 + b_0, \text{ onde } b_m = 1 \text{ e } b_i = 0 \text{ ou } b_i = 1$$

Lembrando que $n = 2^m + l$, temos sucessivamente,

$$\begin{aligned} n &= (1 b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0)_2 \\ l &= (0 b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0)_2 \\ 2l &= (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 0)_2 \\ 2l + 1 &= (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 1)_2, \text{ como } b_m = 1 \text{ e } J(n) = 2l + 1, \\ J(n) &= (b_{m-1} b_{m-2} \dots b1 b_0 b_m)_2. \end{aligned}$$

Logo, acabamos de provar que

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2.$$

Ou seja, obtemos $J(n)$ de n fazendo uma translação cíclica para a esquerda de um dígito binário.

Vamos agora generalizar o Problema de Josefus da seguinte forma

$$\begin{aligned} j(1) &= \alpha, \\ j(2n) &= 2j(n) + \beta, n \geq 1, \\ j(2n+1) &= 2j(n) + \gamma, n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.17}$$

e resolvê-lo em representação binária. Tomando $\beta_0 = \beta$ e $\beta_1 = \gamma$, podemos reescrever a relação de recorrência generalizada (3.17) como:

$$\begin{aligned} j(1) &= \alpha, \\ j(2n+k) &= 2j(n) + \beta_k, \text{ para } k = 0, 1 \text{ e } n \geq 1. \end{aligned}$$

Expandindo esta relação de recorrência em notação binária:

$$\begin{aligned} j((\overbrace{b_m b_{m-1} b_1}^{2n} \overbrace{b_0}^{k})_2) &= 2j(\overbrace{b_m b_{m-1} \dots b_1}^{n}) + \beta_{b_0} \\ &= 4j(b_m b_{m-1} \dots b_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= \vdots \\ &= 2^m j((b_m)_2) + 2^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= 2^m \alpha + 2^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0}. \end{aligned}$$

Suponha que modifiquemos agora a notação em base 2 permitindo dígitos arbitrários em vez de apenas 0 e 1. Os cálculos acima nos dizem que:

$$j((b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2) = (\alpha \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \ldots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_2 \tag{3.18}$$

Aproveitando que estamos tratando de uma forma alternativa de resolver o Problema de Josefus, vamos tentar outra forma de resolver o problema original. Para tanto, vamos utilizar as funções piso e teto (respectivamente, o maior inteiro menor ou igual a x, representado por $\lfloor x \rfloor$; e o menor inteiro maior ou igual a x, representado por $\lceil x \rceil$), que dão uma nova dimensão ao estudo de relações de recorrência. Por exemplo, a relação correspondente ao Problema de Josefus pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(n) &= 2J\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - (-1)^n, \text{ para } n > 1. \end{aligned}$$

Considerando finalmente o Problema de Josefus original, em que cada terceira pessoa é eliminada, mas em outra abordagem: ao passarmos por uma pessoa que não é imediatamente eliminada podemos lhe dar um novo número.

Logo, as pessoas de números 1 e 2 ganham novos números $n+1$ e $n+2$, em seguida eliminamos a pessoa de número 3, e renomeamos 4 e 5 como $n+5$ e $n+4$, depois eliminamos a pessoa com número 6. Continuando esse processo, renomearemos $3k+1$ e $3k+2$ como $n+2k+1$ e $n+2k+2$, depois eliminamos $3k+3$ e assim sucessivamente até que a pessoa $3n$ seja eliminada ou sobreviva.

Por exemplo, quando $n = 10$, os números são

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12		13	14		15	16		17
18			19	20			21		22
			23	24					25
			26						27
			28						
			29						
			30						

A k-ésima pessoa eliminada acaba com o número $3k$, logo descobriremos o sobrevivente se descobrirmos o número original da pessoa que ficou com o número $3n$.

Dada uma pessoa de número $N > n$, sabemos que a mesma tem que ter tido um número anterior e nosso objetivo é encontrá-lo . Como sabemos que $N = n+2k+1$ ou $N = n+2k+2$, percebe-se que teremos $k = \left\lfloor \frac{N-n-1}{2} \right\rfloor$; o número anterior era $3k+1$ ou $3k+2$, respectivamente, isto é, o número anterior era $3k+(N-n-2k) = k+N-n$. Portanto, podemos calcular o número original do sobrevivente $J_3(n)$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} N & := & 3n; \\ \text{Quando } N > n, \text{ faremos } N & := & \left\lfloor \dfrac{N-n-1}{2} \right\rfloor + N - n; \\ J_3 & := & N. \end{array}$$

Isto não é uma forma fechada para o Problema de Josefus, mas certamente é uma forma mais rápida de calcular a resposta quando n é grande.

Podemos simplificar o algoritmo se usarmos a variável $D = 3n + 1 - N$ no lugar de N, mudança que corresponde a fazer a contagem regressiva de $3n$ a 1 ao invés de 1 a $3n$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} D & := & 3n+1-\left(\left\lfloor \dfrac{(3n+1-D)-n-1}{2} \right\rfloor + 3n+1-D\right) \\ & = & n+D-\left\lfloor \dfrac{2n-D}{2} \right\rfloor = D - \left\lfloor \dfrac{-D}{2} \right\rfloor = D + \left\lceil \dfrac{D}{2} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{3D}{2} \right\rceil \end{array}$$

e podemos reescrever o algoritmo como

$$\begin{array}{rcl} D & := & 1; \\ \text{Quando } D \leq 2n, \text{ faremos } D & := & \left\lceil \dfrac{3}{2} d \right\rceil; \\ J_3 & := & 3n+1-D. \end{array}$$

Encontrando finalmente uma solução para o Problema de Josefus original.
Usando a notação em representação binária introduzida anteriormente, problemas complicados possuem soluções mais simples. Para exemplificar tal fato, vamos resolver uma variação do problema da Torre de Hanói, visto na seção anterior: suponha que em uma Torre de Hanói existem n tamanhos diferentes de discos e exatamente m_k discos de tamanho k. Vamos tentar determinar $A(m_1, \ldots, m_n)$, o número mínimo de movimentos necessários para transferir uma torre quando discos de mesmo tamanho são indistinguíveis.

Para entendermos melhor o problema, começaremos com uma torre contendo $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. Quantos movimentos $A(2, \ldots, 2)$ precisamos para transferir uma torre dupla de um pino para outro, se discos de mesmo tamanho são indistinguíveis entre si? O raciocínio é análogo ao feito na torre original, com a diferença de que toda vez que movermos um tamanho de disco em vez de movermos somente uma unidade, moveremos duas, ou seja (como discos de mesmo tamanho são indistinguíveis) é o mesmo que mover n discos, apenas fazemos cada movimento em dobro. Logo, $A(2, ..., 2) = 2T_n = 2^{n+1} - 2$.

Voltando à torre com n tamanhos de discos, sendo m_k discos de tamanho k, começaremos analisando casos menores: se temos somente um tamanho de disco, para mover a torre basta m_1 movimentos. Com dois tamanhos de disco, primeiro vamos mover os $m-1$ discos menores para um pino, em seguida os $m-2$ discos maiores para o pino vazio e depois recolocaremos a torre de m_1 discos menores sobre os m_2 maiores, totalizando $A(m_1, m_2) = m_1 + m_2 + m_1 = 2m_1 + m_2$. Percebemos que a generalização desse problema é análoga à da torre original: movemos os m_n discos do maior tamanho somente se movermos a torre de $n-1$ tamanhos menores de discos para outro pino, em seguida, após ter movido os m_n discos do maior tamanho, basta recolocar a torre de $n-1$ tamanhos menores de discos sobre os m_n maiores. Portanto, a relação de recorrência procurada é:

$$\begin{aligned} A(m_1) &= m_1, \\ A(m_1, ..., m_n) &= 2A(m_1, ..., m_{n-1} + m_n). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Essa é uma equação do tipo "Josefus generalizada", isto é, do tipo (3.18) com $\alpha = m_1$ e $\beta_{b_k} = m_k$.
Logo a solução de (3.19) é:

$$\begin{aligned} A(m_1, \ldots, m_n) &= (m_1 ... m_n)_2 \\ &= 2^{n-1} m_1 + \cdots + 2m_{n-1} + m_n. \end{aligned}$$

3.2 A Recorrência na Soma

Somas e relações de recorrência estão intimamente relacionadas. A soma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

é equivalente à relação de recorrência (3.14)

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, n \geq 1. \end{aligned}$$

Podemos calcular, portanto, uma forma fechada para uma dada soma utilizando os métodos do capítulo anterior. Começaremos calculando a soma Q_n dos n primeiros quadrados perfeitos pelo método de compilação.

3.2.1 Método de compilação

A soma $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ dos n primeiros quadrados perfeitos pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0; \\ Q_n &= Q_{n-1} + n^2, n > 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Uma generalização da relação de recorrência (3.15) será suficiente para somarmos termos que envolvem n^2:

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha, \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \text{ para } n > 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

A solução de (3.21) será da forma geral:

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta. \tag{3.22}$$

Perceba que já determinamos $A(n), B(n)$ e $C(n)$, pois (3.21) é igual a (3.15) quando $\delta = 0$. Basta encontrar uma equação que determine $D(n)$, pra tanto vamos tomar $R_n = n^3$ em (3.21), obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ n^3 &= (n-1)^3 + \beta + \gamma n + \delta n^2, \text{ para } n > 0. \end{aligned}$$

O que implica $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -3$ e $\delta = 3$, e ao colocarmos esses valores em (3.22) teremos $B(n) - 3C(n) + 3D(n) = n^3$, donde

$$D(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Estamos interessados na soma $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$, representada sob a forma de relação de recorrência por (3.20), que é (3.21) com $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ e $\delta = 1$.
Portanto $Q_n = D(n)$ e a forma fechada para a soma que procuramos é:

$$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Calcularemos agora uma soma que nos dará uma generalização um pouco diferente. Queremos calcular a soma alternada dos n primeiros quadrados perfeitos, ou seja, procuraremos a forma fechada para $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$, que escrita como relação de recorrência adquire a seguinte forma

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, \\ P_n &= P_{n-1} + (-1)^n n^2, \text{ para } n > 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

cuja generalização é

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha \\ R_n &= R_{n-1} + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A solução de (3.24) tem a forma geral:

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta. \tag{3.25}$$

Vamos partir para a compilação, lembrando sempre que escolhemos funções R_n de forma que ao descobrir os valores dos parâmetros α, β, γ e δ e substituí-los em (3.25) encontremos equações simples e mais fáceis de resolver.

Começaremos com $R_n = 1$. Ao substituir essa função em (3.24) temos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 1 + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \text{ para } n > 0, \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = \delta = 0$. Substituindo esses valores em (3.25) temos que $A(n) = 1$.

Tomando $R_n = (-1)^n$ em (3.24) teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ (-1)^n &= (-1)^{n-1} + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \text{ para } n > 0 \end{aligned}$$

donde $\alpha = 1, \beta = 2$ e $\gamma = \delta = 0$.
Ao substituir os valores dos parâmetros em (3.25) obtemos

$$A(n) + 2B(n) = (-1)^n, \text{ donde } B(n) = \frac{(-1)^n + 1}{2}.$$

Ao substituir $R_n = (-1)^n n$ em (3.24) teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ (-1)^n n &= (-1)^{n-1}(n-1) + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \text{ para } n > 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 2$ e $\delta = 0$, que ao serem substituídos em (3.25) nos dá

$$-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$$

. Logo,

$$C(n) = \frac{(-1)^n 2n + (-1)^n + 1}{4}$$

Finalmente, escolhendo $R_n = (-1)^n n^2$ em (3.24) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ (-1)^n n^2 &= (-1)^{n-1}(n-1)^2 + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2 \text{ para } n > 0, \end{aligned}$$

O que implica $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -2$ e $\delta = 2$. Substituindo os valores dos parâmetros em (3.25) obtemos $B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2$, logo teremos

$$D(n) = \frac{(-1)^n(n^2 + n)}{2}$$

Estamos interessados na soma $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$, representada sob a forma de relação de recorrência por (3.23), que é um caso particular de (3.24) com $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ e $\delta = 1$. Portanto $P_n = D(n)$ e a forma fechada para a soma que procuramos é:

$$P(n) = \frac{(-1)^n(n^2 + n)}{2}$$

3.2.2 Fator Somante

Assim como muitas somas podem ser escritas como relações de recorrência, estas também podem ser reduzidas a somas, portanto vamos estudar um método especial para resolver relações de recorrência que poderiam ter uma resolução complicada por outros métodos. Vamos começar por um exemplo familiar, a Torre de Hanói:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \text{ para } n > 0. \end{aligned}$$

Colocaremos esta relação numa forma similar a (3.14). Para tanto, basta dividir os dois lados de (3.10) por 2^n:

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{2^0} &= 0; \\ \frac{T_n}{2^n} &= \frac{T_{n-1}}{2^n}, \text{ para } n > 0. \end{aligned}$$

Podemos tomar $S_n = \dfrac{T_n}{2^n}$ para obter

$$S_0 = 0; S_n = S_{n-1} + 2^{n-1}, \text{ para } n > 0.$$

Então (3.10) se transforma em

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$$

Note que deixamos de fora da soma o termo com $k = 0$. Para calcular essa soma, vamos utilizar uma truque parecido com o que foi utilizado na Seção (3.1) para calcular a soma dos n primeiros números naturais:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & r & + & r^2 & + & \ldots & + & r^{n-1} & + & r^n & & \\ -rS_n & = & -r & - & r^2 & - & \ldots & - & r^{n-1} & - & r^n & - & r^{n+1} & & \\ \hline (1-r)S_n & = & 1 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 0 & - & r^{n+1} & & \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (1-r)S_n &= 1 - r^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - r^{n+1}}{(1-r)} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Como na nossa soma $r = \dfrac{1}{2}$, temos:

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

No entanto, ao fazer tal truque acabamos por somar a unidade referente a $k = 0$, logo temos que subtrair 1 do resultado que encontramos:

Lembrando que queremos calcular a forma fechada para o problema da Torre de Hanói, como $S_n = \dfrac{T_n}{2^n}$, tornou-se simples encontrar a solução:

$$\begin{aligned} T_n &= S_n 2^n \\ &= \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] 2^n \end{aligned}$$

A questão a ser respondida agora é: como saberemos por qual fator dividir a relação de recorrência? Tal truque reduz praticamente qualquer relação recorrente da forma a soma.

$$a_nT_n = b_nT_{n-1} + c_n \tag{3.27}$$

A ideia é multiplicar ambos os lados por um fator somante s_n:

$$s_na_nT_n = s_nb_nT_{n-1} + s_nc_n.$$

Tal fator é escolhido de forma que

$$s_nb_n = s_{n-1}a_{n-1}.$$

Então escrevendo $S_n = s_na_nT_n$ obtemos

$$\begin{aligned} s_na_nT_n &= s_{n-1}a_{n-1}Tn - 1 + s_nc_n \\ S_n &= S_{n-1} + s_nc_n. \end{aligned}$$

Como em toda relação de recorrência temos que definir S_0, definiremos como $s_0a_0T_0$, logo

$$S_n = s_0a_0T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k$$

como $s_nb_n = s_{n-1}an - 1$, temos $s_1b_1 = s_0a_0$, o que implica

$$S_n = s_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k.$$

Mas como queremos encontrar a solução de (3.27), sabendo que $S_n = s_na_nT_n$, temos que:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{S_n}{s_na_n} \\ T_n &= \frac{1}{s_na_n}\left(s_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Resta ainda saber como vamos encontrar o fator somante s_n correto que resolve (3.27). A relação $s_nb_n = s_{n-1}a_{n-1}$, ou seja $s_n = \dfrac{s_{n-1}a_{n-1}}{b_n}$, pode ser expandida, nos dizendo que a fração

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_2} \tag{3.29}$$

ou qualquer múltiplo constante desse valor, será um fator somante apropriado. No caso da Torre de Hanói, por exemplo, $a_n = 1$ e $b_n = 2$, fazendo com que $s_n = 2^{-n-2}$. No nosso exemplo, escolhemos $s_n = 2^{-n}$, que é um múltiplo constante do fator somante encontrado usando (3.29).

Vamos aplicar esse método a uma relação de recorrência cuja solução seria um pouco mais difícil de encontrar pelos métodos anteriores:

$$\begin{aligned} T_0 &= 5, \\ 2T_n &= nT_{n-1} + 3n!, n > 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Nesse caso $a_n = 2, b_n = n$ e $c_n = 3n!$. Substituindo esses valores em (3.29),temos:

$$s_n = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}^{n-1 \text{ vezes}}}{n \cdot (n-1) \dots 2} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

Logo, ao substituir esse valor, juntamente com os respectivos valores de a_n, b_n e c_n, em (3.28) vamos obter:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{s_n a_n} \left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \right) \\ &= \frac{1}{\frac{2^{n-1}}{n!} \cdot 2} \left(1 \cdot 1 \cdot 5 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!} \cdot 3k! \right) \\ &= \frac{n!}{2^n} \left(5 + 3 \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \right), \end{aligned}$$

usando o resultado encontrado em (3.26), temos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{2^n}(5 + 3(2^n - 1)), \text{ então chegamos à solução de (3.30)} \\ &= \frac{n!}{2^{n-1}} + 3n!. \end{aligned}$$

3.3 Progressão Aritmética - PA

As Progressões Aritméticas (PA) constituem-se na família mais simples de sequências definidas recorrentemente. Elas são comuns na vida real e sempre aparecem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização de um bem ao longo do tempo.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo. A sequência $(400, 430, 460, 490, 520, 550, \dots)$ é um exemplo de uma progressão aritmética.

O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão da progressão acima é igual a 30.

Vamos à definição formal. Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_13 = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_13 , avançamos 8 termos; $a_12 = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_12 ; $a_4 = a + 17 - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_17 para a_4 e, de modo geral,

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

pois, ao passar de a_1 para a_n , avançamos $n - 1$ termos.

Exemplo 3.1 *O cometa Halley visita a Terra a cada* 76 *anos. Sua última passagem por aqui foi em* 1986. *Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?*

Solução 3.1 *Os anos de passagem do cometa foram* $1986, 1910, 1834, \ldots$ *e formam uma progressão aritmética de razão* -76. *O termo de ordem* n *dessa progressão é* $a_n = a_1 + (n-1)r$, *isto é,* $a_n = 1986 - 76(n-1) = 2062 - 76n$. *Temos* $a_n > 0$ *quando* $n < \dfrac{2062}{76} = 27,13\ldots$. *Portanto, os termos positivos dessa progressão são os* 27 *primeiros,* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{27}$. *Logo, ele nos visitou* 27 *vezes na era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano* $a_{27} = 2062 - 76 \cdot 27 = 10$

Exemplo 3.2 *Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão dessa progressão é igual ao raio do círculo inscrito.*

Solução 3.2 *Chamemos os lados do triângulo de* $x - r, x, x + r$. *Esse é um bom truque para facilitar as contas; ao representar uma progressão aritmética com um número ímpar de termos, começar pelo termo central.*

Como a progressão é crescente, a hipotenusa é o último termo. Pelo Teorema de Pitágoras, $(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$. *Daí* $x^2 = 4rx$ *e, já que* $x \neq 0$ *pois* x *é um dos catetos,* $x = 4r$. *Os lados são então* $3r, 4r$ *e* $5r$. *O perímetro é* $2p = 3r+4r+5r = 12r$ *e a área do triângulo é:* $S = \frac{3r.4r}{2} = 6r^2$ *Assim:*

$$\frac{S}{P} = \frac{6r^2}{6r} = r$$

Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em $n, a_n = a_1 + (n-1)r = r.n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1.

Por esse motivo, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem.

Reciprocamente, se em uma sequência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n, de grau menor que ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética. Com efeito, se $x_n = a_n + b, (x_n)$ é uma progressão aritmética na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$.

Como em uma progressão aritmética $a_n = a_0 + nr$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função afim $a(x) = a(0) + rx$.

Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n , o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$, etc. estão em linha reta.

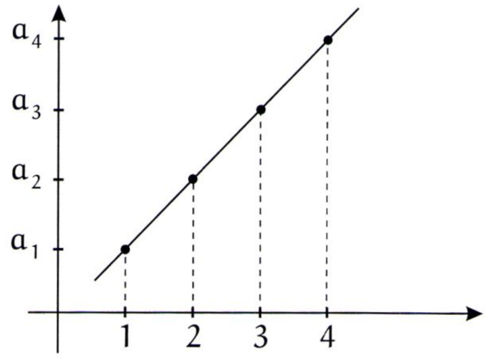

Figura 3.9: Gráfico de uma PA

3.3.1 Soma dos termos de uma PA

Baseados na ideia de Gauss, usada para calcular a soma $1+2+\cdots+100$, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Teorema 3.1 *A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética* $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ *é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração: Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de três para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$. Daí, $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Observe que, ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$ e $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. ■

Exemplo 3.3 *A soma dos n primeiros números ímpares é*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$$

Observe que S_n , no exemplo anterior, é também um polinômio do segundo grau em n, sem termo independente. Isto se generaliza como segue.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n$$

Observe que, se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética. Com efeito $P(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética na qual $\dfrac{r}{2} = a$ e $a_1 = a + b$

Definição 3.1 *Define-se para sequências o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n-1} - a_n$.*

Portanto, da definição segue imediatamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é constante.

Definição 3.2 *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária.*

Exemplo 3.4 *A sequência $a_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre cada termo e o anterior,*

$$b_n = \Delta a_n = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

é uma progressão aritmética não-estacionária.

3.4 Progressão Geométrica - PG

Ao utilizarmos progressões aritméticas para modelar problemas de juros simples, obtemos uma situação como segue. Considere um capital de $R\$10.000,00$ aplicado a uma taxa de juros mensal de 2%:

Mês	Valor Inicial	Juros	Valor Final
1	10.000	10.000 + 2%=200	10.200
2	10.200	10.000 + 2%=200	10.400
3	10.400	10.000 + 2%=200	10.600
4	10.600	10.000 + 2%=200	10.800
5	10.800	10.000 + 2%=200	11.000
6	11.000	10.000 + 2%=200	11.200

Você já viu alguém aplicar dinheiro dessa forma? Pense na sua caderneta de poupança. O mais verossímil é que o juro incida sobre juros, pois já no segundo mês o nosso capital não é mais $R\$10.000,00$, mas $R\$10.200,00$; logo é esse capital que deve ser remunerado no segundo mês. Obtemos assim uma nova tabela (com arredondamento na segunda casa decimal):

Mês	Valor Inicial	Juros	Valor Final
1	10.000	10.000 + 2%=200	10.200
2	10.200	10.200 + 2%=204	10.404
3	10.404	10.404 + 2%=208,08	10.612,08
4	10.612,08	10.612,08 + 2%=212,24	10.824,32
5	10.824,32	10.824,32 + 2%=216,49	11.040,81
6	11.040,81	11.040,81 + 2%=220,82	11.260,92

O que se nota nessa tabela é que, a menos das aproximações feitas, o quociente entre o nosso capital em um mês e o do mês anterior é constante igual a $1,02$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.3 *Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento (ou decrescimento) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.*

Portanto, de acordo com o problema acima, as PGs modelam fenômenos como o aumento de um capital aplicado a uma taxa anual prefixada. Da mesma forma, as PGs modelam o crescimento de uma população a uma taxa anual ou, ainda, o decaimento da radiação emitida por um material radioativo.

Assim, as PGs aparecem muito frequentemente não só nas aplicações, mas também, em vários contextos matemáticos e, por isso, certamente, são muito mais interessantes do que as progressões aritméticas.

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Por exemplo, $a_{13} = a_5q^8$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_5 para a_13; $a_12 = a_7q^5$, pois avançamos 5 termos ao passar de $a_7 para a_12$; $a_4 = \frac{a_17}{q^13}$, pois ao passar de a_{17} para a_4 , retrocedemos 13 termos; de modo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n , avançamos $n - 1$ termos.

Em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir de zero, nesse caso, $a_n = a_0q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a n.

Como em uma progressão geométrica $a_n = a_0q^n$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(0)q^x$. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

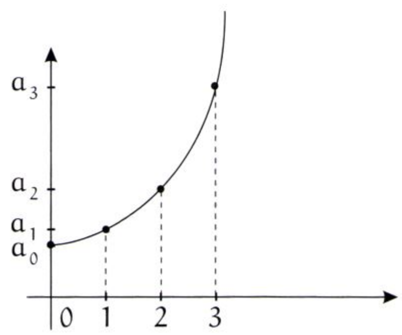

Figura 3.10: Gráfico de uma PG

Exemplo 3.5 *Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale* 5 *e o oitavo termo vale* 135. *Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?*

Temos $a_8 = a_5q^3$ *, pois ao passar do quinto termo para o oitavo, avançamos* 3 *termos. Logo,* $135 = 5q^3$ *e* $q = 3$. *Analogamente,* $a_7 = a_5q^2 = 5 \cdot 3^2 = 45$.

O sétimo termo vale 45.

3.4.1 A fórmula das taxas equivalentes

Lema 3.1 *Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então* $1 + I = (1 + i)^n$.

Demonstração: Seja G_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $G_0(1 + I)^1$. Como um período de tempo T equivale a

n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $G_0(1+i)^n$. Logo, $G_0(1+i)^1 = G_0(1+i)^n$ e $1+I = (1+i)^n$. ∎

Exemplo 3.6 *Uma bomba de vácuo retira, em cada sucção, 2% do gás existente em certo recipiente. Depois de 50 sucções, quanto restará do gás inicialmente existente?*

Temos $i = -2\% = -0,02$ e $n = 50$. Daí, $1+I = (1+i)^n = (1-0,02)^{50} \cong 0,3642$ e $I \cong -0,6358 = -63,58\%$. A quantidade de gás diminuirá de aproximadamente 63,58%. Restarão aproximadamente 36,42% do gás inicialmente existente.

3.4.2 A soma dos termos de uma PG

Lema 3.2 *A soma nos n primeiros termos de uma progressão geométrica a_n de razão $q \neq 1$, é $S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$*

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando por q

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo, temos $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n$ e, finalmente, $S_n = a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ∎

Exemplo 3.7 *Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, \ldots$. O valor dessa soma é*

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

Calculando, obtemos um estupendo número de dígitos:

$$18446744073709551615$$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1\frac{1-0}{1-q}$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Exemplo 3.8 *O limite da soma $0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$ quando o número de parcelas tende a infinito é igual a $\dfrac{0,3}{1-0,1} = \dfrac{1}{3}$. O resultado é intuitivo pois somando um número muito grande de termos da progressão encontraremos aproximadamente a dízima periódica $0,33333\cdots = \dfrac{1}{3}$*

As aplicações mostradas neste capítulo, são tais que poderão motivar a introdução desta teoria devidamente adaptada no ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] Hefez, A., *Indução Matemática*, OBMEP, Rio de Janeiro: (2007).

[2] Grahan, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O., *Concrete Mathematics* Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co. (1988)

[3] Hefez, A. *Elementos de Aritmética*, 1. ed. SBM, Rio de Janeiro: (2003).

[4] Gomide, A., Stolfi, J., *Elementos de Matemática Discreta para Computação*, disponível em: <http://www.ic.unicamp.br/ stolfi/cursos/MC358-2012-1-A/docs/apostila.pdf> acesso em: 01/12/2014

[5] Lima, E. L., *O Princípio da Indução* disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ lramos/me100/elonOBM.pdf> acesso em 01/12/2014

[6] Scheinerman, E.R. *Matemática Discreta: Uma Introdução.* São Paulo:Cengage Learning, (2011).

[7] Boyer, C.B. *História da Matemática*, 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, (1996).

[8] Lima, E. L.,[et al.] *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2 Rio de Janeiro: SBM, (2006)

[9] Oliveira, K. I. M. Fernandez, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* Rio de Janeiro: SBM, (2010).

[10] Cattai, A. P., *Análise Real*, disponível em: <http://www.uern.br/professor/arquivo_baixar.asp?arq_id=5187>, acesso em 03/12/2014.

[11] Iezzi, G., Murakami,C. *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 1, 3ª edição, Atual: São Paulo, (1977).

[12] Menezes, P. B., *Matemática Discreta Para Computação e Informática*, 4ª edição, Bookman, Porto Alegre: (2013)

[13] Lipschutz, S., Lipson, M. *Matemática Discreta*, 3ª edição, Bookman, Porto Alegre: (2013)

[14] Schwer, I.,[et al.] *Matemática Discreta: Con aplicaciones a las Ciencias de la programación y computación*, 1ª edição, Santa Fé: Universidad Nacional del Litoral(UNL): (2005)

[15] Gomes, C.A., Gomes, J.M. *Tópicos de Matemática, IME-ITA-Olimpíadas*, volume 2, 1ª edição, VestSeller, Fortaleza, (2012).