Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Leandro de Jesus Dueli

Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares

Juiz de Fora - MG

2013

Leandro de Jesus Dueli

Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora - MG

2013

Dueli, Leandro de Jesus

Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares / Leandro de Jesus Dueli. - 2013.

124f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Geometria não Euclidiana. 3. Interdisciplinaridade. 4. Ensino. I. Título.

Leandro de Jesus Dueli

Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Profa. Dra. Valéria Mattos da Rosa
(Orientadora)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Allan de Oliveira Moura
PROFMAT
Universidade Federal de Viçosa - UFV

Juiz de Fora, 13 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

- A Deus por esta oportunidade de continuar me aprimorando. A Ele honra, poder e glória.
- A minha esposa Patrícia, pela paciência, dedicação, companheirismo e parceria na elaboração e correção deste texto.
- Aos meus pais pelo exemplo, pela educação herdada e pelas orações e a toda minha família pelo apoio.
- Aos meus colegas de curso pelo coleguismo e pelas discussões que tanto me ajudaram nesta caminhada.
- Aos colegas de viagem Altamiro, Josimar, Marisa e Lívia, por fazerem minhas viagens a Juiz de Fora mais descontraídas.
- Ao Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais - Campus Barbacena, nas pessoas do Diretor Geral Prof. José Roberto Ribeiro Lima e do Diretor de Ensino Prof. Luiz Carlos Gomes Junior pela colaboração prestada sempre que necessária.
- Aos meus colegas de trabalho pelo companheirismo.
- Aos meus amigos Hélcio, por me ajudar com algumas fontes de pesquisa e com o globo terrestre e Vanessa, pelas hospedagens durante o curso.
- Aos meus alunos que se dispuseram a me ajudar no procedimento experimental.
- Ao professor José Barbosa pela disposição em relação ao PROFMAT e aos demais professores pelos ensinamentos.
- A professora Valéria pela orientação.
- A Capes pelo financiamento e a SBM pela oportunidade que me deu de fazer um Mestrado nos moldes do PROFMAT.
- A todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma sequência de atividades interdisciplinares entre Matemática e Geografia com o objetivo de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Esférica facilitando a apropriação de seus conceitos elementares por alunos do 1º ano do Ensino Médio. Paralelo a isto, objetiva rever conceitos da Geometria Euclidiana e fazer comparações entre as Geometrias Euclidiana e Esférica, mostrando que ambas são consistentes. Estas atividades foram adaptações das apresentadas por PATAKI (2003), PRESTES (2006) e ANDRADE (2011) e encontram respaldo nos PCN's ao trabalhar com resolução de problemas.

É feito um recorte histórico das Geometrias não Euclidianas (Hiperbólica e Esférica) partindo de tentativas de demonstração do Postulado V de Euclides até as formalizações destas geometrias por Lobachevski, Bolyai e Gauss (Geometria Hiperbólica) e Riemann (Geometria Esférica) no século XIX. São abordados conceitos elementares da Geometria Esférica e de Cartografia que são utilizados na sequência de atividades.

As atividades desenvolvidas mostraram que é possível o professor introduzir no seu plano de aula as noções básicas de Geometria Esférica articulando teoria e prática e trabalhando interdisciplinarmente e com contextualização.

Palavras-Chave: Matemática, Geometria não Euclidiana, Interdisciplinaridade, Ensino.

ABSTRACT

This paper presents a sequence of interdisciplinary activities between Mathematics and Geography in order to contribute to the teaching and learning of Spherical Geometry facilitating the appropriation of their elementary concepts for students in the 1st year of high school. Parallel to this, wants review concepts of Euclidean Geometry and make comparisons between Euclidean and Spherical Geometry, showing that both are consistent. These activities were adapted from those given by PATAKI (2003), PRESTES (2006) and ANDRADE (2011) and find support in the PCN's to work with problem solving.

A historical survey was made about non-Euclidean geometries (Hyperbolic and Spherical) starting attempts demonstration of Euclid's fifth postulate until the formalization of these geometries by Lobachevski, Bolyai and Gauss (Hyperbolic Geometry) and Riemann (Spherical Geometry) in the nineteenth century. Are broached basic concepts of Spherical Geometry and Cartography that are used in the sequence of activities.

The activities shown that the teacher can introduce in your class plan the basic notions of Spherical Geometry linking theory and practice and working interdisciplinarily and with contextualization.
Key-words: Mathematics, Geometry No Euclidean, Interdisciplinary, Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria presente nos livros didáticos dos ensinos Fundamental e Médio é a geometria de Euclides, proposta por ele em sua mais importante obra, *Os Elementos*. Esta obra é composta por 13 livros que contém as bases da Geometria e da Aritmética.

Euclides apresenta a geometria de forma axiomática, isto é, a geometria como uma ciência que parte de certas hipóteses básicas: os chamados postulados (ou axiomas).

A Geometria Euclidiana se manteve incólume no pensamento matemático até o início do século XIX, acreditava-se que a geometria apresentada por Euclides era a única geometria possível e *verdadeira*, no sentido de corresponder à realidade. Embora não se duvidasse da validade dessa geometria, havia certa insatisfação com seus fundamentos, em razão do caráter não intuitivo do Postulado V, o postulado das paralelas. Se o Postulado V não caracterizava um “postulado”, então deveria ser tratado como um teorema. Tal questionamento perturbou, durante muito tempo, alguns matemáticos, dentre eles Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann, que trabalharam no sentido de provar o Postulado V de Euclides.

A partir desses questionamentos e das tentativas de se provar o Postulado V, surgiram as chamadas Geometrias não Euclidianas [1], no século XIX, que vêm, como o nome indica, pôr em dúvida a concepção euclidiana até então dominante.

Não se pode afirmar que a Geometria Euclidiana seja incoerente, o que ocorre é que a geometria euclidiana é uma geometria “plana”, adequada a espaços de curvatura nula. Essa geometria foi utilizada com frequência em representações geográficas, apesar de a Terra ser um espaço quase esférico, para análises em nível local, considerando-se o espaço plano. Porém, quando são consideradas grandes distâncias esse raciocínio pode implicar em resultados errôneos.

[1] Nesse trabalho dispensa-se o uso do hífen na expressão “Geometrias não Euclidianas”. Além disso, como não há uma padronização para uso de letra maiúscula ou minúscula na escrita do “não” nessa expressão, optou-se por utilizar sempre letra minúscula. Essa padronização não é utilizada nas citações literais e títulos de pesquisas acadêmicas citados neste trabalho.

O desenvolvimento dessas Geometrias não Euclidianas levou gradualmente à compreensão de que a Geometria Euclidiana era apenas uma de várias geometrias possíveis (não contraditórias), e que todas elas eram igualmente válidas, nenhuma sendo mais *verdadeira* do que a outra.

O estudo das Geometrias não Euclidianas, em especial a Geometria Esférica (ou Geometria Riemanniana), não faz parte da matriz curricular dos Ensinos Fundamental e Médio, sendo que uma das razões dessa não inserção pode ser atribuída à sua complexidade. Porém, esse conteúdo "rebuscado" é inerente a diversos temas que norteiam o cotidiano desses alunos.

Mesmo os alunos tendo contato nos Ensinos Fundamental e Médio apenas com as Geometrias Plana e Espacial, ao estudarem o Globo Terrestre em Geografia trabalham com pontos, linhas e ângulos sobre a esfera e no seu interior. A partir desse pressuposto pode ser evidenciada a necessidade de apresentar aos alunos uma geometria que lhes possibilite criar significados em relação às linhas traçadas no Globo Terrestre, tendo uma compreensão mais polida da relação entre as disciplinas estudadas e com melhores condições de entender e interpretar os elementos do Globo.

A localização, por exemplo, de um ponto no Globo Terrestre, dadas suas coordenadas geográficas (latitude e longitude), poderia ser melhor compreendida se os alunos compreendessem conceitos básicos da Geometria Esférica.

Uma das relações entre a Matemática e a Geografia ocorre nos princípios de funcionamento de modernos sistemas de localização sobre o Globo Terrestre. Enquadra-se neste exemplo um aparelho amplamente utilizado, inclusive por alunos, o GPS.

Tendo as coordenadas (latitude e longitude) de dois pontos quaisquer sobre a superfície terrestre sempre é possível determinar a distância entre eles. Quando este cálculo é feito na geometria euclidiana, a menor distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une. Quando estamos na superfície terrestre a menor distância entre dois pontos é calculada ao longo de um arco de circunferência máxima ou geodésica. Como determinar, então, distâncias em uma superfície curva? Este questionamento, que é matemático, pode surgir na aula de Geografia. A Matemática não pode ser ensinada desvinculada de outras disciplinas e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio BRASIL (2002, p. 111) dizem que deve haver uma "aprendizagem contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos".

1.1 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

A Geometria Euclidiana não é suficiente para descrever todos os fenômenos do mundo atual, sendo que diversas aplicações físicas, por exemplo, estão baseadas na aplicabilidade de Geometrias não Euclidianas. Evidencia-se que a Geometria Euclidiana facilita uma série de conjecturas práticas, mas não todas, pois afinal o mundo não é um plano.

Embora se saiba que a Geometria Euclidiana é a mais conveniente para ser usada na resolução dos problemas, a introdução das Geometria não Euclidianas em quaisquer dos níveis de ensino proporcionará uma visão mais real do nosso mundo, uma vez que a maioria dos objetos usados no dia-a-dia com suas formas mais diversas demonstram superfícies com curvaturas diferentes das formas que a Geometria Euclidiana sempre ensinou.

Várias pesquisas na área, em particular PATAKI (2003), PRESTES (2006) e ANDRADE (2011), comprovam a validade e importância de caminharmos nessa linha de pesquisa, assim como a eficácia do método aqui proposto.

Este trabalho também encontra justificativas nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), quando afirmam:

> Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma **pluralidade de modelos geométricos**, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 25, grifo nosso).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999) também caminham nesta vertente elegendo como competências para esse nível de ensino: identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade; utilizar instrumentos de medição e de cálculo; articular o conhecimento científico e tecnológico em uma perspectiva interdisciplinar.

Desta forma, encontramos subsídios suficientes para a execução deste trabalho.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Os objetivos deste trabalho são:

- Gerais:
  - Construir conceitos básicos de Geometria Esférica;
  - Revisar conceitos de Geometria Euclidiana;
  - Comparar semelhanças e diferenças entre estas Geometrias;
  - Contribuir para uma integração interdisciplinar com as disciplinas: Geografia, História e Educação Artística;
  - Proporcionar reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino da Geometria Esférica.
- Específicos:
  - Elaborar propostas para o ensino das Geometrias não Euclidianas a partir da reconstrução dos conceitos da Geometria Euclidiana;
  - Propor uma sequência de atividades que mostrem a relação interdisciplinar existente, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados, possibilitando uma aprendizagem motivadora.

1.3 METODOLOGIA

Neste trabalho é adotada a metodologia da Engenharia Didática. O conceito Engenharia Didática, que emergiu no início da década de 80, deve-se a Michèle Artigue.

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1996, p. 196) apud ANDRADE (2011, p. 25), se caracteriza "por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

Artigue (1988, p. 283) apud PATAKI (2003, p. 64-65) compara essa metodologia ao trabalho de um

> (...) engenheiro que, para realizar um projeto particular, apoia-se em conhecimentos científicos de seu domínio, submete-se a um controle científico, mas ao mesmo tempo, necessita trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos simplificados da ciência e, portanto, lidar com todos os meios de que ele dispõe, problemas que a ciência não quer ou não é capaz de manipular.

Segundo Artigue (1996) apud ANDRADE (2011, p. 26) este método possui quatro fases:

1. Análises prévias;
2. Construção e análise *a priori* das situações didáticas;
3. Experimentação;
4. Análise *a posteriori* e validação.

A descrição destas fases se encontra em [2], [31] e [32].

A sequência de atividades, proposta no Capítulo 5, foi aplicada seguindo esta metodologia: em cada atividade foram feitas análises *a priori* dos conhecimentos prévios dos alunos nos baseando no questionário e nos PCN's do Ensino Fundamental, em seguida foram desenvolvidas as questões de cada atividade (experimentação) e por fim foram feitas análises *a posteriori* comparando os resultados da experimentação com as análises *a priori*.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No Capítulo 1, Introdução, é feito um breve recorte histórico do surgimento da Geometria Esférica. Neste mesmo capítulo é levantado o questionamento da interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia, citando os PCN's dos Ensinos Fundamental e Médio. Ainda neste capítulo são expostos a justificativa e a importância do trabalho, os objetivos a serem alcançados e a metodologia da pesquisa.

No Capítulo 2 são apresentados e analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e do Ensino Médio PCNEM (BRASIL, 2000) e PCN+ (BRASIL, 2002) das disciplinas Matemática e Geografia em busca de relações entre estas duas disciplinas e justificativas para se elaborar propostas interdisciplinares. São apresentadas e comentadas pesquisas que abordaram o mesmo tema.

No Capítulo 3 é feito um levantamento histórico a respeito das Geometrias não Euclidianas tendo como ponto de partida a Geometria Euclidiana. Discute-se nesse capítulo a obra *Os Elementos* de Euclides, dando ênfase no Postulado V. São apresentadas algumas tentativas de demonstração deste Postulado. As Geometrias não Euclidianas são apresentadas separadamente, partindo de reformulações do Postulado V de Euclides. Ao final deste capítulo são tecidas algumas comparações.

No Capítulo 4 são abordados os conceitos elementares da Geometria Esférica e de Cartografia, que são utilizados no Capítulo 5.

No Capítulo 5 são apresentadas as propostas de sequências didáticas interdisciplinares juntamente com as análises dos resultados.

No Capítulo 6 estão descritas as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

No Apêndice A é apresentada a solicitação de autorização destinada à direção da escola onde se deu a pesquisa.

No Apêndice B é apresentado o termo de anuência e concessão de imagens destinado aos responsáveis pelos alunos envolvidos na pesquisa.

No Apêndice C são apresentados os relatórios dos alunos com suas opiniões acerca da sequência de atividades.

No Anexo A é apresentado o questionário aplicado aos alunos com o objetivo de sondar os conhecimentos prévios acerca de Trigonometria e Geografia.

No Anexo B são apresentados os cálculos de Eratóstenes para a obtenção da medida do raio da Terra.

No Anexo C é apresentada uma proposta de atividades complementares às apresentadas no Capítulo 5.

No Anexo D é apresentada uma proposta de atividades sobre o funcionamento do GPS.

2 O QUE DIZEM OS PCN'S E AS PESQUISAS

O presente trabalho visa a elaboração de propostas de sequências didáticas interdisciplinares que auxiliem os alunos do Ensino Médio no aprendizado de conceitos básicos da Geometria Esférica. Devido ao público alvo desse trabalho, faz-se necessário e inevitável observar as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN relativas à Geometria, Geografia e interdisciplinaridade.

2.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - PCN

Os PCN's são diretrizes que foram elaboradas pelo Governo Federal em 1996 e que têm como objetivo padronizar o ensino no país, estabelecendo pilares fundamentais para guiar a educação formal e a própria relação escola-sociedade no cotidiano.

A Matemática ocupa uma posição singular nos PCN's.

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. (BRASIL, 1999, parte III, p. 9).

No que se refere à Geometria, nos PCN's do Ensino Fundamental - PCNEF (BRASIL, 1998) de Matemática se sugere que na 5ª série (atual 6º ano) sejam desenvolvidos estudos dos elementos de uma superfície esférica, tais como centro, raio, corda, diâmetro, arco e circunferência máxima através de material concreto (bola de isopor) e na 6ª série (atual 7º ano) sejam desenvolvidas atividades para o estudo da bissetriz onde os alunos possam determinar o meridiano do lugar através de algumas marcas e medições.

Nos PCNEF de Geografia (BRASIL, 1998) se sugere que os conteúdos ligados ao estudo do Globo Terrestre e da Cartografia sejam concentrados no 3º ciclo (atuais 6º e 7º ano); no 4º ciclo (atuais 8º e 9º ano) a Cartografia não se constitui num eixo, mas é fundamental utilizá-la como um recurso para trabalhar as informações geográficas, permitindo as correlações e sínteses mais complexas. Os PCNEF de matemática sugerem, ainda, que os professores trabalhem com mapas e com as coordenadas geográficas trazendo também para a matemática a responsabilidade sobre a formação desses conceitos, sendo interessante que os alunos percebam a analogia entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas geográficas.

Percebe-se que no Ensino Fundamental, observando as propostas curriculares para esse nível nos PCN's, as disciplinas de Matemática e Geografia devem ser trabalhadas de maneira vinculada, interdisciplinar. Principalmente pelo fato desta interdisciplinaridade propiciar a obtenção, por parte dos alunos, de mais significados quando estudados os elementos do Globo Terrestre. Isto é confirmado nos PCN's de Matemática do Ensino Médio, quando afirmam que

> (...)o aprendizado deve ser planejado desde uma perspectiva a um só tempo multidisciplinar e interdisciplinar, ou seja, os assuntos devem ser propostos e tratados desde uma compreensão global, articulando as competências que serão desenvolvidas em cada disciplina e no conjunto de disciplinas, em cada área e no conjunto das áreas. Mesmo dentro de cada disciplina, uma perspectiva mais abrangente pode transbordar os limites disciplinares. (BRASIL, 1999, parte III, p. 9).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, corroboram com esta perspectiva, sugerindo uma nova abordagem no ensino da Geometria diferente da abordagem tradicional restrita à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, e mais

> (...)é importante destacar que este tema estruturador [Geometria e medidas] pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a Geometria clássica euclidiana. (BRASIL, 2002, p. 125).

Essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado com contexto e fundamento, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo aluno estará fragmentado e será ineficaz. Segundo os PCNEF de Geografia (BRASIL, 1998, p. 37) para determinados assuntos com ampla dimensão não há possibilidades teóricas de entendimento dos mesmos quando tratados isoladamente, por isso a prática didática e pedagógica da interdisciplinaridade se torna um recurso para impedir o ensino fragmentado do mundo. A interdisciplinaridade deve ser um meio, um caminho que proporcione ao aluno uma aprendizagem global de determinado assunto, possibilitando uma visão por diversos ângulos e que haja uma compreensão de maneira consistente.

A Resolução de Problemas é, segundo BRASIL (1999), uma importante estratégia de ensino e segundo BRASIL (2002), peça central para o ensino de Matemática. Quando o indivíduo está engajado no enfrentamento de desafios o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem. Isto não acontece quando se trabalha apenas com exercícios de aplicação de conceitos e técnicas matemáticas, pois neste caso,

> (...) o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002, p. 112).

Busca-se na Resolução de Problemas que os alunos, no tratamento de situações desafiadoras, construam estratégias de resolução, planejem etapas, relacionem diferentes conhecimentos, verifiquem regularidades, desenvolvam sua capacidade de raciocínio, ampliem sua capacidade de comunicação e argumentação e perseverem, enfim, na procura da solução. E, para isso, BRASIL (2002) afirma que os desafios devem ser reais e fazer sentido.

Uma outra estratégia de ensino recomendada pelos PCN's é a História da Matemática. Este recurso pode contribuir efetivamente no processo de ensino e aprendizagem esclarecendo ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno.

> Ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração. (BRASIL, 1998, p. 42-43).

A História das Geometrias não Euclidianas tem cerca de 2300 anos, surgindo de indagações do postulado das paralelas. Isso mostra como um determinado saber pode levar muito tempo para ser edificado, sendo necessárias várias gerações e culturas para construí-lo. Sendo abordada de maneira correta, não apenas contando trechos da história da Matemática, este recurso pode levar o aluno a desenvolver conceitos mais consistentes e a uma apropriação mais abrangente do conteúdo.

Os PCN's consideram, como citado anteriormente, a importância das estratégias de Resolução de Problemas e História da Matemática no ensino, e as recomendam. Além disso, propõe a inserção de estratégias interdisciplinares. Dentro desta realidade pode ser abordada a Geometria, em particular a Geometria Esférica, um tema que foi construído ao longo de milênios e que favorece a abertura de vários trabalhos interdisciplinares (seja com a História, Geografia, Artes, Física etc.) e a formulação de diversas situações-problemas desafiadoras (possíveis e reais), como o cálculo de distâncias inacessíveis. Essa realidade mostra a importância desta pesquisa, que visa instigar os alunos por esse tipo de estudo e almeja, também, motivar os professores de Matemática a inserirem-na no currículo de Matemática.

2.2 AS PESQUISAS NA ÁREA

Vários pesquisadores observaram a importância de se introduzir os conceitos da Geometria Esférica na Educação Básica. Dentre eles podemos citar BRITO (1995) que apresenta um estudo histórico-pedagógico das Geometrias não Euclidianas; PATAKI (2003) que propõe uma sequência didática interdisciplinar entre Geometria Esférica e Geografia a professores da rede estadual de ensino de São Paulo; PRESTES (2006) subsidia a implementação de propostas que visam a interação entre Matemática e Geografia; MARQUEZE

(2006) que apresenta uma sequência de atividades por meio de resolução de problemas envolvendo a tesselação[1] das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica; ALVES (2012) que explica, com muita clareza, a matemática envolvida no funcionamento do GPS e discute o cálculo da distância entre dois pontos da superfície terrestre e ANDRADE (2011) que investiga a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por 2 (dois) alunos do 2º ano do Ensino Médio a partir de uma sequência de ensino.

O estudo dos trabalhos desses pesquisadores contribuiu para a escolha do tema deste trabalho, assim como para a forma de execução do procedimento experimental. Estes trabalhos favoreceram uma revisão bibliográfica sobre as investigações realizadas no Brasil acerca das Geometrias não Euclidianas, sendo de substancial importância para a presente pesquisa. Estes trabalhos auxiliaram também: na definição do público alvo; perceber o quão é importante se trabalhar conteúdos em seu contexto histórico; na elaboração de sequência didática proposta neste trabalho; reafirmar que a resolução de problemas é uma estratégia de ensino que aponta para resultados positivos.

O presente trabalho se aproxima dos trabalhos de PATAKI (2003), de PRESTES (2006) e de ANDRADE (2011). A sequência didática proposta neste trabalho é baseada nas atividades desenvolvidas por estas pesquisadoras, com algumas adaptações.

A diferença entre os trabalhos destas pesquisadoras reside no público alvo, como mencionado anteriormente, e no referencial teórico. PRESTES (2006) tem seu trabalho fundamentado nas teorias de Vygotsky e Vergnaud a fim de estruturar a interdisciplinaridade e a construção do conhecimento através das relações do sujeito com o meio, sua percepção e conceituação. ANDRADE (2011) adotou em seu trabalho como suporte teórico: a Teoria das Situações Didáticas de BROUSSEAU (1986) e a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (2009). PATAKI (2003) se fundamentou na teoria das Situações Didáticas de BROUSSEAU (1986) e de BARTH (1993) concernente à formação de professores.

PRESTES (2006), ANDRADE (2011) e PATAKI (2003) fizeram uso da mesma metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática. Esta metodologia é, também, utilizada na presente pesquisa, como mencionado na seção 1.3.

[1]"Tesselar uma superfície plana significa cobrir a superfície com figuras planas, de modo que não existam espaços entre elas e nem sobreposições. Tesselar uma superfície esférica tem o mesmo significado e as figuras deixam de ser planas e passam a ser esféricas." (MARQUEZE, 2006, p. 72)

3 GEOMETRIAS

As Geometrias não Euclidianas[1] surgiram há aproximadamente 2300 anos no momento em que Euclides publicou *os Elementos*, onde apresentava a Geometria de forma axiomática. O nome "Geometria não Euclidiana" só passou a ser popularizado (e fazer sentido) após tentativas de se provar o Postulado V, a partir dos outros postulados, ao longo de séculos. Percebeu-se, dessa forma, a possibilidade de se construir geometrias diferentes da de Euclides, violando o Postulado V.

3.1 DA GEOMETRIA EUCLIDIANA ÀS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

A Geometria[2] tem origem provável na agrimensura ou medição de terrenos, segundo o historiador Heródoto (século V a.C.).

As cheias do rio Nilo extravasavam as margens depositando lamas aluviais ricas em nutrientes tornando o delta do Nilo extremamente fértil, em contrapartida estas inundações apagavam as marcas físicas que delimitavam os terrenos. Sem estas marcas os agricultores e administradores não saberiam claramente os limites dos terrenos de cada produtor para realizarem o plantio e pagarem os impostos devidos. Os antigos faraós passaram então a nomear funcionários, os agrimensores, para avaliar os prejuízos das inundações e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses. Desta forma nasceu a geometria. Estes agrimensores acabaram aprendendo a determinar as áreas de lotes de terreno dividindo-os em retângulos e triângulos.

A Geometria era, até então, uma ciência empírica, um conjunto de regras práticas

[1] O primeiro a empregar o termo "geometria não-euclidiana" foi Taurinos em 1825, com a criação da geometria logarítmica-esférica, mas não obteve muita atenção (BONOLA, p. 81, 1955 apud SILVA, p. 4, 2006).

[2] O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medição).

para obter resultados aproximados. Apesar disso, estes conhecimentos foram utilizados nas construções de pirâmides e templos babilônios e egípcios. A partir de Tales de Mileto (600 a.C., aproximadamente), geômetra grego, a Geometria começou a ser estabelecida como teoria dedutiva. Por volta de 500 a.C. as primeiras academias foram fundadas na Grécia e a procura por conhecimentos sobre Geometria aumentavam.

Euclides (cerca de 325 a.C. a 265 a.C.) foi o primeiro a apresentar, de maneira sistemática, a Matemática, em particular a Geometria, como ciência dedutiva, onde cada afirmação deve ser deduzida, de maneira lógica, de outras mais simples, e assim sucessivamente. No começo dessa sequência lógica deveriam haver, evidentemente, algumas afirmações não demonstradas, que Euclides chamou de postulados (aquilo que se pode). Segundo Carmo (1987, p. 25) "Euclides procurou escolher como postulados afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmas".

Acerca de Euclides não se sabem informações como, por exemplo, onde nasceu e sua formação. Sabe-se que ensinou em Alexandria, no Egito, durante o reinado do rei Ptolomeu I (306-283 a.C.) que criou um importante instituto científico conhecido como *Museu* (BRITO, 1995, p. 34).

No *Museu* Euclides alcançou grande prestígio pela forma brilhante como ensinava Geometria e Álgebra, tornando-se um bom educador com reconhecida habilidade como expositor, conseguindo assim atrair para as suas lições públicas um grande número de discípulos. Sua mais importante obra, *Os Elementos*, era usada como texto introdutório ao estudo de matemática elementar.

Devido à importância desta obra, trataremos do seu conteúdo na subseção seguinte.

3.1.1 Os Elementos

Os Elementos foi publicado por volta de 300 a.C. contemplando áreas como a Aritmética e a Geometria. Trata-se de um conjunto de 13 volumes abrangendo diversas matérias como teoria dos triângulos, álgebra geométrica, teoria dos números, geometria dos sólidos entre outros, onde Euclides apresenta a Geometria com estrutura de Ciência, sistematizando a grande massa de conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo do tempo, dando ordem lógica e estabelecendo o conceito de lugar geométrico.

Diz-se que depois da Bíblia, *Os Elementos* é o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental [KATZ (1998, p. 59) apud BARBOSA (2011, p. 28)].

Os tópicos tratados em cada um dos volumes de *Os Elementos* são:

- Livro I - Os fundamentos da geometria plana;
- Livro II - Álgebra geométrica;
- Livro III - Teoria da circunferência;
- Livro IV - Figuras inscritas e circunscritas;
- Livro V - Teoria das proporções abstratas;
- Livro VI - Figuras geométricas semelhantes e proporcionais;
- Livro VII - Fundamentos da teoria dos números;
- Livro VIII - Continuação de proporção e teoria dos números;
- Livro IX - Teoria dos números;
- Livro X - Classificação dos incomensuráveis;
- Livro XI - Geometria dos sólidos;
- Livro XII - Medição de figuras;
- Livro XIII - Sólidos regulares.

O Livro I possui uma lista de 23 definições, 5 postulados, 9 noções comuns (axiomas) e 48 proposições (teoremas). A distinção entre axiomas e postulados não é muito clara, Braz (2009, p. 12) afirma que "noções comuns seriam consideradas hipóteses aceitáveis a todas as ciências e postulados seriam hipóteses próprias da Geometria".

Algumas definições do Livro I (EUCLIDES, 2009, p. 97-98):

- 2. E linha é comprimento sem largura;
- 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
- 23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Axiomas do Livro I (EUCLIDES, 2009, p. 99):

- Axioma I: As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
- Axioma II: E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;
- Axioma III: E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais;
- Axioma IV: E, caso iguais seja adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;
- Axioma V: E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
- Axioma VI: E as metades da mesma coisa são iguais entre si;
- Axioma VII: E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;
- Axioma VIII: E o todo [é] maior do que a parte;
- Axioma IX: E duas retas não contêm uma área.

Postulados do Livro I (EUCLIDES, 2009, p. 98):

- Postulado I: Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
- Postulado II: Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
- Postulado III: E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
- Postulado IV: E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
- Postulado V: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (Figura 1)

Este conjunto de axiomas e postulados deu origem ao que chamamos de Geometria Euclidiana. Esta Geometria foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada, isto é, construída a partir de axiomas (ou postulados).

Quanto menor o número de axiomas, mais elegante é a teoria axiomática. Os axiomas devem ser escolhidos de modo que garantam consistência, suficiência e independência.

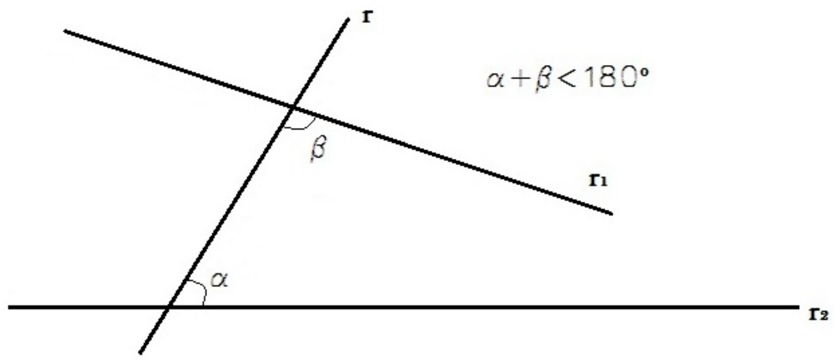

Figura 1: Postulado V

Dizemos que um conjunto de axiomas[3]: é consistente quando garante a impossibilidade de se deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas; é suficiente (ou completo) quando a teoria pode ser desenvolvida sem a necessidade de outros axiomas e é independente quando nenhum dos axiomas pode ser demonstrado a partir dos demais.

Uma axiomática recente da Geometria é devida a A. V. Pogorélov e pode ser acompanhada em [5] e em [17].

O último postulado é conhecido como o *postulado das paralelas.* Por não possuir, aparentemente, o mesmo grau de evidência que os restantes, este postulado recebeu muitas críticas. O próprio Euclides deve ter considerado o Postulado V pouco evidente, pois retardou o quanto pode o seu uso. Euclides demonstra as 28 primeiras proposições do Livro I sem utilizar o Postulado V.

Existem várias formas equivalentes do Postulado V, a mais conhecida deve-se a Playfair[4] e se enuncia da seguinte maneira:

V' - Por um ponto P fora de uma reta dada r passa não mais que uma paralela a r.

Estas formas equivalentes do Postulado V mostram que este não é óbvio, nem intuitivo, por isso vários geômetras de diversas origens, durante vários séculos, tentaram demonstrá-lo a partir dos outros postulados.

Algumas tentativas estão descritas na sequência desta Dissertação.

[3]Em 1899, David Hilbert (1862 – 1943) fez um estudo rigoroso de *Os Elementos* de Euclides em sua obra "Fundamentos de Geometria". Além disso, Hilbert esclarece alguns problemas lógicos nesta obra. Hilbert também elaborou o primeiro conjunto completo de axiomas da Geometria Euclidiana, subdividindo-os em axiomas de: incidência, ordem, congruência, paralelas e continuidade (BRAZ, 2009, p. 13). Em 1904, Hilbert provou que a geometria euclidiana é consistente se a aritmética for consistente.

[4]Segundo Greenberg (2001, p. 19) apud (BARBOSA, 2011, p. 29) este Postulado apareceu em um trabalho de John Playfair em 1795, apesar de já ter aparecido muito antes nos trabalhos de Proclus.

3.1.2 O Postulado V

O Postulado V foi objeto de muitas tentativas de demonstração, mas a maioria delas ou admitiam fatos equivalentes a ele ou não podiam ser demonstradas utilizando-se apenas os outros quatro postulados.

- Ptolomeu I

Ptolomeu viveu na época de Euclides. Na tentativa de provar o Postulado V usou como argumento que se uma reta intercepta uma segunda reta, também interceptará todas as retas paralelas a esta segunda. Com isso Ptolomeu cometeu um erro assumindo que o paralelismo acarreta na congruência de duas figuras, e isto só é válido na Geometria Euclidiana.

- Proclus (410 - 485)

Proclus queria mostrar que se uma reta transversal corta uma de duas paralelas então corta também a segunda. Dessa forma Proclus admite, em sua tentativa de demonstração, que a distância entre duas retas paralelas é limitada, isto é, duas retas paralelas são equidistantes, o que equivale ao Postulado V.

- Nasir Eddin All Tusin (1201 - 1274)

Em sua tentativa de demonstração Nasir supôs o seguinte axioma: "sejam m e n duas retas, A um ponto de m e B um ponto de n, tais que AB é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m. Então as perpendiculares baixadas de m à reta n, do lado do ângulo agudo, são menores do que AB e as que ficam do outro lado são maiores do que AB" (Figura 2) e considerou um quadrilátero em que os ângulos da base eram retos e os lados AB e CD congruentes (Figura 3).

Nasir concluiu que esta figura é um retângulo, com os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ retos. Dividindo-se esse retângulo pela sua diagonal obtêm-se dois triângulos, provando a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é 180º, o que equivale ao Postulado V.

- John Wallis (1616 – 1703)

Wallis supôs o seguinte axioma na tentativa de demonstração: "Dado um triângulo é possível construir um outro que lhe é semelhante, com área arbitrária". Esse axioma, porém, é equivalente ao Postulado V.

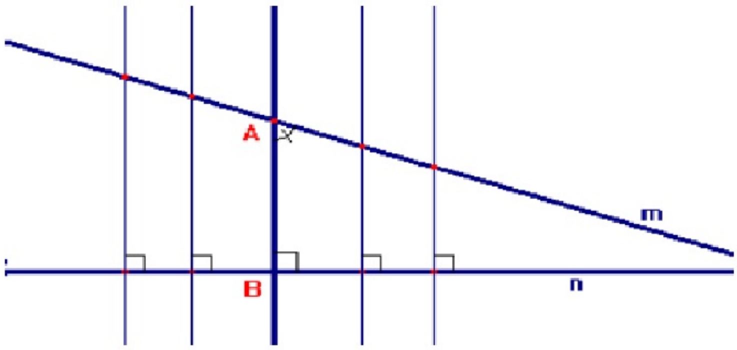

Figura 2: Axioma de Nasir. Fonte: BRAZ (2009, p. 16)

Figura 3: Quadrilátero de Nasir

- Girolamo Saccheri (1667 - 1733)

Dentre as tentativas de demonstração do Postulado V, a que mais se aproximou de uma solução foi a de Saccheri, que a publicou em um trabalho no ano de 1733. Ele não tentou demonstrar diretamente, propôs uma prova por redução ao absurdo[5]. Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$, onde os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos e os lados AD e BC congruentes (Figura 4) (já utilizada por Nasir Eddin), e provou o seguinte lema:

> Se um quadrilátero $ABCD$ tem os ângulos consecutivos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ retos, e os lados AD e BC iguais, então o ângulo $\hat{C}$ é igual ao ângulo $\hat{D}$; mas se os lados AD e BC são desiguais, dos dois ângulos $\hat{C}$, $\hat{D}$, é maior o que é adjacente ao menor lado, e vice-versa. [BONOLA (1955, p. 23) apud SILVA (2006, p. 9)].

[5]Trata-se de um método indireto de demonstração. Assume-se como verdade o contrário do que se quer provar e chega-se a uma contradição.

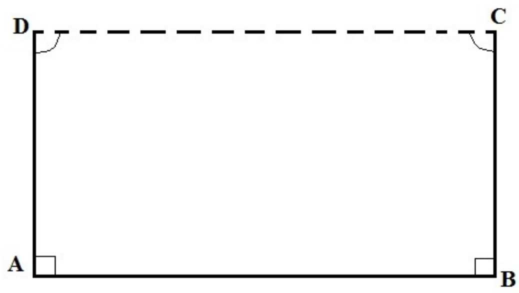

Figura 4: Quadrilátero de Saccheri

A incumbência de Saccheri era provar que seu quadrilátero era um retângulo. Saccheri contemplou três possibilidades (hipóteses):

1. Caso OBTUSO: os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são maiores que 90º. Nesse caso $AB > CD$;
2. Caso EUCLIDIANO: os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são iguais a 90º. Nesse caso $AB = CD$;
3. Caso AGUDO: os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são menores que 90º. Nesse caso $AB < CD$.

Saccheri admitia em sua prova que apenas uma dessas três hipóteses devesse ser correta. Se a segunda era correta e os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ fossem retos, seria possível concluir daí o Postulado V. Restaria provar que as outras possibilidades levariam a uma contradição.

Para provar que a primeira hipótese leva a uma contradição, Saccheri considerou um triângulo retângulo (Figura 5) onde M é o ponto médio de AC e MN é uma perpendicular de M até AB.

A demonstração segue como em SILVA (2006, p. 10). Se vale a hipótese do ângulo obtuso no quadrilátero $NBCM$, então a soma dos ângulos $M\hat{C}B + C\hat{B}N + B\hat{N}M + N\hat{M}C > 360^o$ então os ângulos $M\hat{C}B + N\hat{M}C > 180^o$ já que ABC é um triângulo retângulo em B. Mas $A\hat{M}N + N\hat{M}C = 180^o$ pois são ângulos suplementares; e então $M\hat{C}B > A\hat{M}N$. Traçando a perpendicular ML, de M até BC, temos os triângulos AMN e MCL com hipotenusas iguais. A soma anterior leva a concluir que $ML > AN$, pois oposto ao maior ângulo, está o maior lado. No quadrilátero $LBNM$, o ângulo $N\hat{M}L > 90^o$ e então $NB > ML$ e $NB > AN$, se vale a hipótese do ângulo obtuso.

Então, se considerarmos intervalos iguais ao longo da linha AC, suas projeções verticais levarão a intervalos crescentes na linha horizontal AB. Esse resultado leva Saccheri a

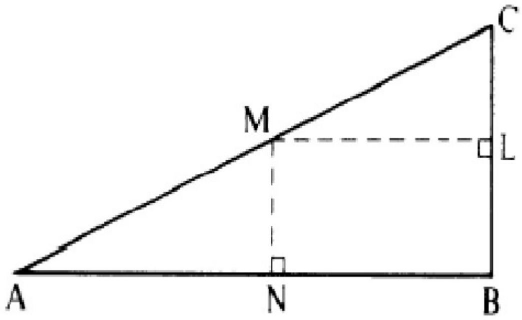

Figura 5: Triângulo retângulo usado por Saccheri na demonstração da hipótese do ângulo obtuso. Considerando a hipótese como verdadeira, $NB > NA$. Fonte: SILVA (2006, p. 10)

concluir que a hipótese do ângulo obtuso leva a uma contradição e, portanto sua negação, ou seja, o Postulado V seria válido.

Saccheri usou o mesmo raciocínio para contradizer a terceira hipótese, mas não conseguiu demonstrar corretamente. Mesmo assim ele obteve várias proposições interessantes que decorrem de se negar o Postulado V. A descoberta de novas geometrias teria ocorrido quase um século antes se ele percebesse que não havia contradição para ser encontrada.

- Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)

Da mesma forma que Saccheri, Lambert tentou demonstrar o Postulado V por contradição. Ele retomou a hipótese do ângulo agudo de Saccheri, mas não obteve êxito. Na tentativa de demonstração ele obteve, como Saccheri, "proposições estranhas". Entre estas destaca-se[6]:

> (...) a diferença para dois ângulos retos da soma dos ângulos internos de um triângulo não é zero, como na geometria usual, porém proporcional à área do triângulo; um fato paradoxal é que a constante de proporcionalidade assim obtida parecia ser uma constante absoluta e universal. (CARMO, 1987, p. 30).

Lambert considerou um quadrilátero com três ângulos retos e contemplou três hipóteses para o quarto ângulo: Reto (o que equivale ao Postulado V), Agudo ou Obtuso (Figura 6).

[6]Essa diferença é conhecida como "deficiência do triângulo" e seu valor é igual a zero na Geometria Euclidiana.

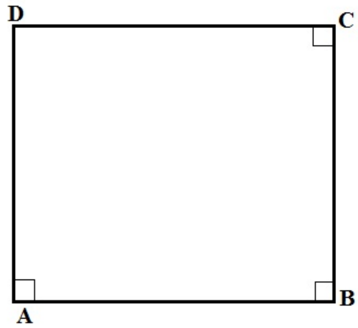

Figura 6: Quadrilátero de Lambert

Lambert rejeitou, da mesma forma que Saccheri, a hipótese do ângulo obtuso, observando que ela seria válida para triângulos esféricos. Se fosse válida esta hipótese,

> (...) então as propriedades das figuras seriam como aquelas quando as figuras são traçadas sobre uma esfera, e nesse caso as linhas retas seriam como os círculos máximos. Porém, como os círculos máximos se encontram em mais de um ponto, não possuem as propriedades das linhas retas, o que permite refutar a hipótese do ângulo obtuso [ROSENFELD (1988, p. 100) apud SILVA (2006, p. 11)].

Lambert observou também que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário. Estas observações foram comprovadas posteriormente por Riemann e Lobachewsky.

- Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

Legendre também não obteve êxito em suas tentativas de demonstração do Postulado V. Ele propôs três hipóteses sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, que implicitamente eram equivalentes às de Saccheri:

1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º (o que equivale ao Postulado V);
2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º;
3. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º.

Legendre comprovou a primeira hipótese e descartou a possibilidade da terceira hipótese por ter encontrado contradições na demonstração. Para comprovar a segunda hipótese ele admitiu um argumento que não estava demonstrado: "por um ponto qualquer situado no interior de um ângulo pode-se desenhar uma reta que corta os dois lados do ângulo" (BARBOSA, 2011, p. 38). E esse argumento também é equivalente ao Postulado V, invalidando a prova de Legendre.

3.1.3 Geometrias não Euclidianas

As Geometrias não Euclidianas surgiram formalmente no século XIX, mas esta descoberta não se deve unicamente aos matemáticos do século XIX. Elas são um produto de árduo trabalho de matemáticos em tentativas frustradas de demonstração do Postulado V de Euclides. A busca por resultados serviu como guia para outros matemáticos na descoberta de novas geometrias.

Entre os matemáticos do século XIX que contribuíram para esta descoberta estão Gauss, Bolyai, Lobachewski e Riemann. Os três primeiros formalizaram a Geometria Hiperbólica e o último formalizou a Geometria Esférica.

3.1.3.1 Geometria Hiperbólica

O surgimento da Geometria Hiperbólica[7] é devido ao fato de se negar o Postulado V de Euclides. Em seu lugar é usado o seguinte Postulado característico da Geometria Hiperbólica: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas (e consequentemente infinitas) que não encontram a reta dada.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi o maior matemático de sua época e é considerado um dos fundadores das Geometrias não Euclidianas. Ele possuía as ideias fundamentais das geometrias não euclidianas. Isto é confirmado por várias de suas cartas, uma delas remetida a Taurinus em 1824 onde cita:

[7]"O nome Geometria Hiperbólica foi dado pelo matemático Félix Klein em 1871, pois, de acordo com a etimologia, a palavra hipérbole está relacionada a excesso e, nesta geometria o número de paralelas a uma reta dada passando por um ponto excede o número (um) da geometria euclidiana" [TRUDEAU (1987, p. 159) apud BARBOSA (2011, p. 40-41)].

> “A hipótese que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º conduz a uma geometria separada, totalmente diferente de nossa geometria (euclidiana), que é em si própria inteiramente consequente, e que desenvolvi de maneira inteiramente satisfatória para mim, de tal modo que posso nela resolver qualquer problema, exceto a determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori” (CARMO, 1987, p. 31).

Gauss tentou provar o Postulado V inicialmente por contradição como fizera antes Saccheri e Lambert, mas na segunda década do século XIX começou a deduzir uma nova geometria, formulando ideias e teoremas (BRAZ, 2009, p. 22).

Gauss obteve alguns resultados, como provar que a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado numa superfície de curvatura negativa constante é proporcional a área do triângulo. Esse resultado coincide com o trabalho de Lambert e indicava a existência de uma geometria onde não era válido o postulado das paralelas (BRAZ, 2009, p. 23).

Johann Boylai (1802 - 1860) e Nikolai Ivanovitsch Lobachewski (1793 - 1856) começaram suas teorias negando o Postulado V de Euclides, admitindo que “mais de uma paralela a uma linha reta poderia passar pelo mesmo ponto” (SILVA, 2006, p. 15-16).

Bolyai era filho de Wolfgang (ou Farkas) Bolyai (1775 - 1856), amigo de Gauss. Wolfgang havia tentado provar o Postulado V em dois trabalhos, sem êxito, pois o que fez foi encontrar formas semelhantes do mesmo [BONOLA (1955, p. 60) apud SILVA (2006, p. 15)]. Wolfgang enviou as descobertas de seu filho a Gauss, que se surpreendeu com a genialidade de Bolyai, mas respondeu dizendo:

> “Se eu começasse com a afirmação de que não ouso louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria; mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados dos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo.” [BARBOSA (2002, p. 49) apud BRAZ (2009, p. 24)].

Johann ficou desapontado com a resposta de Gauss e não publicou mais nada referente ao assunto [BARBOSA (2002, p. 50) apud BRAZ (2009, p. 24)].

Quanto a Lobachewski, sua teoria das paralelas, publicada em 1829, não teve muita atenção em seu país nem em outra parte do mundo. Lobachewski deduziu uma série de teoremas a partir da negação do Postulado V, sem chegar a nenhuma contradição, mostrando que este Postulado não poderia ser demonstrado e que era possível conceber outras Geometrias tão consistentes quanto a Geometria de Euclides (ANDRADE, 2011). Ele foi o primeiro a publicar suas descobertas, à frente de Gauss e Bolyai, mas o reconhecimento só veio depois de sua morte.

Segundo Braz (2009) Eugênio Beltrami (1835-1900) mostrou em 1868 que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana, provando definitivamente que não era possível provar o Postulado V de Euclides. O mesmo autor conclui que desta forma não poderia haver contradição.

3.1.3.2 Geometria Elíptica ou Esférica

No ano de 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Elíptica ou Esférica, um sistema geométrico tão consistente quanto a Geometria Hiperbólica. Riemann substitui o Postulado V de Euclides por: "Não há reta paralela a l que passe por um ponto P fora de l" (BARBOSA, 2011, p. 46), considerando assim a possibilidade de prolongar, indefinidamente, um segmento de reta. Dessa forma, faz-se necessário alterar o Postulado II de Euclides, que afirma ser possível alongar arbitrariamente um segmento dado.

Segundo Andrade (2011) Riemann afirma que nesta Geometria não existem paralelas a uma reta dada. Riemann ainda interpreta o plano como uma superfície de uma esfera e uma reta como uma circunferência máxima sobre essa esfera. Nesta Geometria a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º.

Coutinho (2001, p. 73) apud ANDRADE (2011, p. 41) afirma que: "Na Geometria Riemanniana abandona-se a noção de, 'estar entre' e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitada". Isto é, as retas, que são as circunferências máximas de uma esfera, são finitas (ao percorrê-las sempre se volta ao ponto de partida), mas ilimitadas (elas podem ser percorridas indefinidamente). Ainda segundo Coutinho (2001, p. 73) apud ANDRADE (2011, p. 41) na Geometria Riemanniana, diferentemente da Geometria Euclidiana, as retas podem, casualmente, interceptar-se em mais de um ponto (as circunferências máximas se interceptam necessariamente em dois pontos).

A Geometria Esférica é uma geometria de espaços de curvatura constante positiva (sugere-se para consulta sobre curvatura a seção 3.1 de [37], e [19]). Essa geometria tem como propriedade essencial o fato de que seu volume é finito de modo que se um ponto se move sobre ela na mesma direção ele retornará ao ponto de partida. Em vez das linhas retas da Geometria Euclidiana na Geometria Esférica temos *geodésicas* ou seja, os arcos dos grandes círculos que podem ser traçados sobre a esfera.

3.1.3.3 Algumas comparações entre as Geometrias

A descoberta dessas Geometrias não Euclidianas pôs fim à discussão acerca do Postulado V de Euclides, agora é fato que ele não pode ser demonstrado, sendo um postulado independente dos demais. Pôs fim também a uma outra discussão: ser uma geometria verdadeira ou não; agora se sabe que todas são consistentes, e portanto verdadeiras.

Segundo Carmo (1987), uma das aplicações mais importantes das Geometrias não Euclidianas foi a sua influência na concepção matemática do século XX, mostrando a necessidade de se raciocinar com rigor e manter a intuição sob controle. "Isto provocou o desenvolvimento do método axiomático, que dominou boa parte da matemática durante as primeiras décadas do século XX, e permitiu a criação de teorias matemáticas com um alto nível de abstração" (CARMO, 1987, p. 33-34).

Carmo (1987, p. 34) afirma, também, que o método axiomático, instrumento na criação do qual a análise do Postulado V desempenhou um papel importante, é indispensável na Matemática. O autor afirma também que esse método é apenas "útil, e não um guia à criação matemática".

Uma das diferenças entre as Geometrias Euclidiana, Esférica e Hiperbólica pode ser constatada empiricamente em Observatório Nacional (2012), como se segue:

- Tome uma folha de papel e coloque-a sobre uma superfície plana. O papel cobrirá a superfície suavemente;
- Na tentativa de se cobrir uma superfície esférica, com uma folha de papel do mesmo tamanho, percebe-se que para cobri-la é necessário permitir que vincos surjam no papel. Isso indica que próximo a qualquer ponto dado sobre a superfície da esfera a área do papel é maior do que a área que você está tentando cobrir;
- E na tentativa de se cobrir a superfície de uma sela (modelo de Geometria Hiperbólica) com a mesma folha de papel percebe-se que o inverso acontece: a área do papel

passa a ser insuficiente para cobrir a superfície próxima a qualquer ponto sobre ele e o papel se rasga.

A seguir, apresentamos uma tabela comparativa entre as Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Esférica apresentadas por Davis & Hersh (1995, p. 211) apud CRUZ & SANTOS (2012, p. 18-19).

Comparações entre as Geometrias			
CONTEÚDO MATEMÁTICO	**GEOMETRIA EUCLIDIANA**	**GEOMETRIA HIPERBÓLICA**	**GEOMETRIA ESFÉRICA**
Duas retas distintas intersectam em	Um ponto	Um ponto	Em dois pontos antípodos
Dada uma reta L e um ponto P exterior a L, existe(m)	Uma reta e só uma que passa por P e é paralela a L	Pelo menos duas retas que passam por P e é paralela a L	Não há reta que passa por P e é paralela a L
Uma reta	É dividida em duas por um ponto	É dividida em duas por um ponto	Não é dividida em duas por um ponto
As retas paralelas	São equidistantes	Nunca são equidistantes	Não existem
Se uma reta intercepta uma de duas paralelas	Intercepta a outra	Pode ou não interceptar a outra	Como não há paralelas, isto não ocorre
A hipótese de Saccheri válida é a do	Ângulo reto	Ângulo agudo	Ângulo obtuso
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira	São paralelas	São paralelas	Interceptam-se
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180º	Menor do que 180º	Maior que 180º
A área de um triângulo é	Independente da soma dos seus ângulos	Proporcional ao defeito da soma de seus ângulos	Proporcional ao excesso da soma de seus ângulos

Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são	Semelhantes	Congruentes	Congruentes
Bissetrizes de um triângulo	Possui três. São semirretas que dividem o ângulo ao meio		Possui três. São círculos máximos
Alturas de um triângulo	Possui três. São segmentos de retas		Possui três. São arcos de círculos máximos
Medianas de um triângulo	Possui três. São segmentos de retas		Possui três. São arcos de círculos máximos
Lados de um triângulo	São segmentos de retas		São ângulos com vértices no centro da esfera. São medidos em graus
Classificação de triângulos quanto aos ângulos	Retângulo: um ângulo reto; Acutângulo: ângulos internos agudos ou Obtusângulo: um dos ângulos é obtuso		Retângulo: um ângulo reto; Birretângulo: dois ângulos retos ou Trirretângulo: três ângulos retos

Classificação de triângulos quanto aos lados	Isósceles: dois lados com a mesma medida e dois ângulos congruentes; Equilátero: três lados com medidas iguais e três ângulos congruentes e Escaleno: dois lados quaisquer não são congruentes		Retilátero: um lado mede 90º; Birretilátero: dois lados medem 90º e Trirretilátero: cada um dos lados mede 90º
Soma dos ângulos externos	É a soma dos internos não adjacentes		Varia entre 0º e 360º
Soma dos ângulos internos de quadrilátero	Igual a 360º	Menor que 360º	Maior que 360º

Tabela 1: Comparações entre as Geometrias. Fonte: DAVIS & HERSH (1995, p. 211) apud CRUZ & SANTOS (2012, p. 18-19)

Ao admitir a existência de uma multiplicidade de sistemas geométricos, passou-se a discutir qual deles é o mais apropriado para descrever o mundo físico.

Estamos acostumados a utilizar a Geometria Euclidiana e por isso podemos erroneamente considerar que esta Geometria, e nenhuma outra, é a mais adequada para se aplicar ao espaço. Mas devemos observar que para figuras pequenas as diferenças entre os resultados obtidos pelas Geometrias Euclidiana e Esférica são absolutamente irrisórias, isto é, estas Geometrias são praticamente iguais.

Pela sua simplicidade a Geometria de Euclides é a mais conveniente para utilização pelo homem comum, pelos engenheiros, pelos topógrafos, pelos agrimensores etc. Entretanto, a Geometria de Riemann serviria para o mesmo propósito. Nossas construções, como casas, pontes, rodovias, túneis, se manteriam se fossem construídos com base na Geometria Riemanniana. E mais, a navegação aérea e marítima continuará funcionando com base na Geometria Riemannian, que neste caso é a mais adequada. Os físicos e os astrônomos, que lidam com distâncias cósmicas, ainda estão tentando responder a questão de qual Geometria é a mais adequada ao entendimento do universo. É possível que, com o avanço da ciência e com os equipamentos cada vez mais sensíveis que estão sendo construídos e postos em funcionamento, em breve respostas mais precisas poderão ser dadas para todas essas questões. Até obterem uma resposta definitiva continuarão utilizando a Geometria Euclidiana como base para seus cálculos. (SEARA DA CIÊNCIA, 2013)

4 GEOMETRIA ESFÉRICA E GEOGRAFIA

Neste Capítulo abordamos conceitos elementares da Geometria Esférica e da Cartografia.

4.1 GEOMETRIA ESFÉRICA - CONCEITOS ELEMENTARES

Na sequência de atividades propostas no Capítulo 5 serão abordados alguns conceitos da Geometria Esférica. Nossa principal referência é [1]. Um aprofundamento desses conceitos pode ser obtido nesta mesma referência. Conceitos elementares de Geometria Esférica podem ser observados também nas referências [2], [28], [31] e [32].

Segundo Alves (2012, p. 9) a *superfície esférica* centrada no ponto O e raio r (número real positivo) é definida como o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r. Conforme se observa na Figura 7:

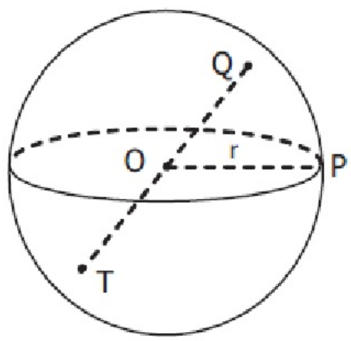

Figura 7: Superfície Esférica. Fonte: ALVES (2012, p. 9)

Alves (2012, p. 9) define como pontos interiores à superfície esférica aqueles cuja distância a O é menor que r e como pontos exteriores à superfície esférica aqueles cuja distância a O é maior que r. Denomina-se *esfera* de centro O e raio r a reunião da superfície esférica de centro O e raio r com seus pontos interiores. O segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado *um raio* da superfície esférica e o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado *uma corda* da superfície esférica. Quando uma corda contém o centro ela é chamada *um diâmetro* da superfície esférica. Como se sabe, o comprimento de qualquer diâmetro é o número $2r$ que é chamado *o diâmetro*.

A relação entre superfícies esféricas e planos no espaço é da mesma estrutura que a relação entre circunferências e retas no plano. Um plano E é *tangente* a uma superfície esférica S se $E \cap S$ contém exatamente um ponto. Esse ponto é chamado *ponto de tangência*. Dizemos que o plano e a superfície esférica se tangenciam nesse ponto. O plano E é *secante* à superfície esférica S se $E \cap S$ contém mais do que um ponto.

São imediatas as proposições seguintes: um plano é perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica se, e somente se, é tangente à mesma e se o plano que intercepta a superfície esférica contém o centro desta superfície, a intercessão é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio da superfície esférica.

Para uma situação mais geral, Alves (2012, p. 45-46) propõe o seguinte teorema:

Teorema 4.1. Se um plano contém um ponto do interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica (Figura 8).

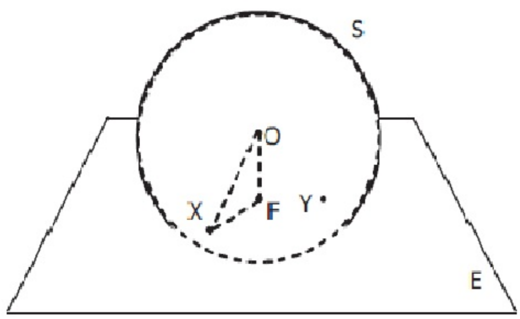

Figura 8: Teorema 1. Fonte: ALVES (2012, p. 13)

Demonstração. Seja E um plano que não passa pelo centro O da superfície esférica S e que contém um ponto Y do seu interior. Sendo F o pé da perpendicular a E traçada a partir de O, vamos mostrar que a intersecção $E \cap S$ é uma circunferência de centro F.

Sabemos que $OY < r$, pois Y está no interior de S. No triângulo retângulo ΔOFY temos que $\overline{OY}$ é hipotenusa, enquanto que $\overline{OF}$ é cateto. Logo $OF < OY < r$, ou seja, F também está no interior de S.

Seja X um ponto qualquer na intersecção $E \cap S$. Então ΔOFX tem um ângulo reto em F e, pelo teorema de Pitágoras,

$$OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2$$

e, portanto, $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$ (observe que $r^2 - OF^2 > 0$).

Logo X está na circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Provamos assim que a intersecção $E \cap S$ está contida na circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$.

Isso ainda não significa que a intersecção é a circunferência. Para completar a demonstração, precisamos mostrar que todo ponto da circunferência pertence à intersecção.

Seja X um ponto qualquer da circunferência, em E, com centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Novamente pelo teorema de Pitágoras,

$$OX^2 = OF^2 + FX^2 = OF^2 + r^2 - OF^2 = r^2.$$

Portanto $OX = r$ e X pertence à superfície esférica S. □

A intersecção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada, por Alves (2012, p. 46) uma *circunferência máxima* da superfície esférica (ou *geodésica*). Este nome se deve ao fato que as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica. Um exemplo de circunferência máxima é a Linha do Equador (Figura 9), mas os outros paralelos no globo terrestre não o são. Eles são menores que o Equador, tornando-se muito pequenos perto dos polos Norte e Sul, o que veremos na seção 4.2.

Duas circunferências máximas são ditas perpendiculares se estiverem em planos perpendiculares. Pode se mostrar então que para cada duas circunferências máximas existe uma terceira circunferência máxima perpendicular a ambas. Por exemplo, se duas circunferências máximas no globo terrestre passam pelos polos, a Linha do Equador é perpendicular a ambas. Esta situação pode ser representada na Figura 10, onde as retas ACA' e ADA', são perpendiculares à reta $BCDE$.

Os pontos A e A' são extremos de um mesmo diâmetro da esfera, por isso são de-

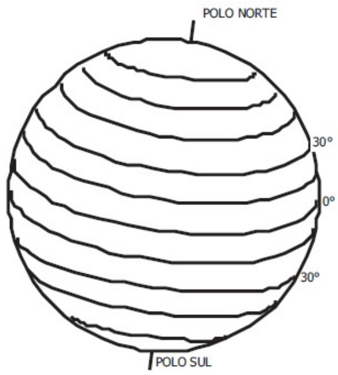

Figura 9: Paralelos do Globo Terrestre. Fonte: ALVES (2012, p. 14)

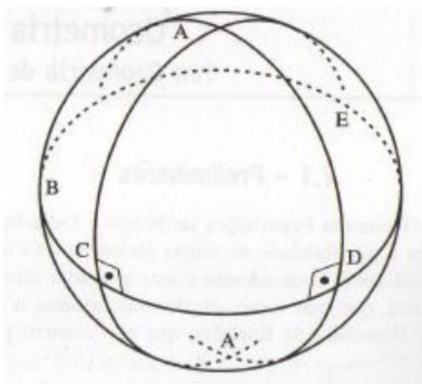

Figura 10: Retas Perpendiculares no Globo Terrestre. Fonte: COUTINHO (2001, p. 74) apud MARQUEZE (2006, p. 58)

nominados *antípodas*. Coutinho (2001) apud ANDRADE (2011, p. 47) diz que a reta $BCDE$, perpendicular às retas ACA' e ADA' é chamada de *polar comum* dos pontos A e A', e estes dois pontos são os polos da reta $BCDE$. Afirma ainda que a distância de qualquer um dos polos, A ou A', a qualquer ponto da reta $BCDE$ é constante (chamada distância polar), percebendo-se assim que duas retas secantes, como ACA' e ADA', tem em comum uma única reta perpendicular $BCDE$.

Verifica-se desta forma que na Geometria Esférica uma reta tem um comprimento finito, pois a distância de qualquer reta ao polo é uma constante, independente da reta considerada, e este comprimento é quatro vezes a distância polar. E mais, diferentemente da Geometria Euclidiana, onde retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si, na Geometria Esférica as retas perpendiculares a uma terceira não são paralelas entre si, mas concorrentes.

É importante salientar também que mesmo a reta tendo comprimento finito na Geometria Esférica, ela não pode ser enclausurada por uma curva da superfície. "Não há como rodear, isto é, dar uma volta em torno de um círculo máximo, sem interceptá-lo" (MARQUEZE, 2006, p. 59). Além disso, não existem retas paralelas na Geometria Esférica, nem retas não secantes, pois duas retas quaisquer dessa Geometria sempre se encontram em dois pontos antípodas.

Dados dois pontos quaisquer sobre uma superfície esférica, denomina-se *arco de circunferência máxima* na Geometria Esférica o trecho da reta que fornece o menor comprimento entre eles, define-se esse trecho como segmento de reta na Geometria Esférica (Figura 11).

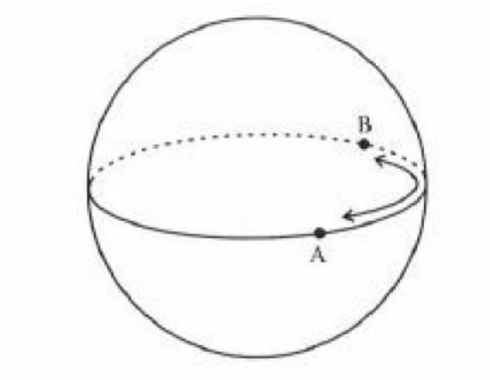

Figura 11: Arco Geodésico. Fonte: COUTINHO(2001, p. 83) apud MARQUEZE (2006, p. 60)

A medida desse comprimento pode ser obtida, como podemos ver na Figura 12, conhecendo-se a medida α do ângulo $A\hat{O}B$, onde O é o centro da superfície esférica S. O comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, por isso $d(A, B) = 2\pi r\alpha/360$, onde r é o raio da superfície esférica e α é o ângulo central dado em graus.

De acordo com Coutinho (2001) apud ANDRADE (2011, p. 48), define-se ângulo esférico como sendo a interseção de duas retas (círculos máximo) e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes à superfície esférica pelo ponto de interseção, como pode ser observado na Figura 13.

Pode-se definir ângulo esférico também como o ângulo diedral entre os semiplanos que contém as semicircunferências máximas. Segundo Santos (2008) apud ANDRADE (2011, p. 49), ângulo diedral (ou diedro) é o ângulo formado pela interseção de dois semiplanos com a mesma origem. Na Figura 14 o ângulo diedral é formado pelas semicircunferências m e n.

A porção da superfície esférica limitada unicamente por arcos de circunferência má-

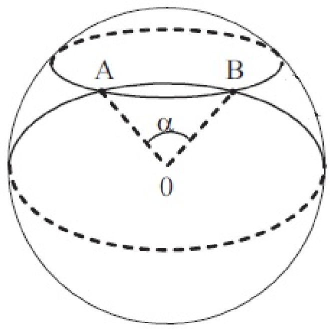

Figura 12: Comprimento do segmento de reta AB. Fonte: adaptado de ALVES(2012, p. 73)

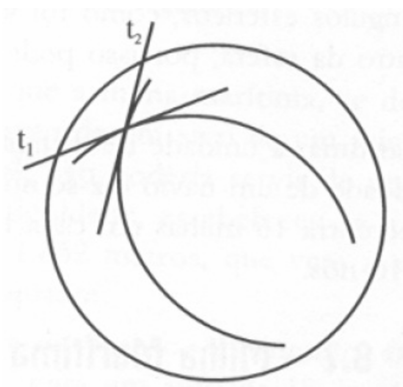

Figura 13: Ângulo Esférico. Fonte: COUTINHO (2001, p. 83) apud MARQUEZE (2006, p. 60)

xima é denominada *polígono esférico*.

O triângulo esférico, que será abordado na sequência de atividades do Capítulo 5, é formado pelos arcos de círculos máximos que unem três pontos quaisquer A, B e C, distintos e não pertencentes ao mesmo círculo máximo de uma esfera. Estes arcos são os lados do triângulo esférico, como pode ser visto na Figura 15.

Os lados BC, AC e AB do triângulo esférico da Figura 15 podem ser denotados, respectivamente, por a, b e c e suas medidas são as medidas dos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera, podendo assim serem medidos em graus ou radianos. Os ângulos internos do triângulo ABC são os ângulos esféricos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, o que pode ser observado na Figura 16.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Esférica não é constante como na Geometria Euclidiana, ela varia de acordo com o triângulo esférico considerado. O máximo que se pode afirmar é que a soma das medidas de seus ângulos

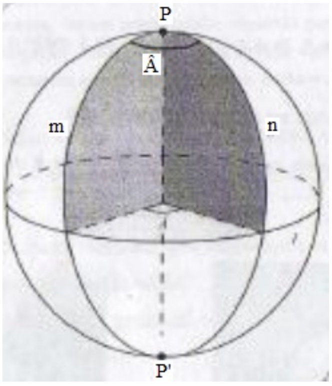

Figura 14: Ângulo Diedral. Fonte: SANTOS (2009, p. 9) apud ANDRADE (2011, p. 49)

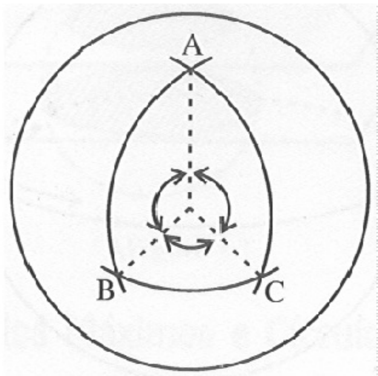

Figura 15: Triângulo Esférico. Fonte: COUTINHO (2001, p. 84) apud MARQUEZE (2006, p. 61)

internos esteja entre 180º e 540º, isto é, dado um triângulo esférico ABC, tem-se que $180^o < med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) < 540^o$. Quanto aos lados a, b e c do triângulo esférico, pode-se afirmar apenas que: $180^o < med(a) + med(b) + med(c) < 360^o$, sendo que nenhum dos lados pode ter medida superior a 180º. Curiosamente, os triângulos esféricos podem ter até três ângulos retos, como pode ser conferido na Figura 17.

4.2 NOÇÕES DE GEOGRAFIA

Algumas noções elementares de Geografia se fazem necessárias, assim como de Geometria Esférica, para o bom andamento, e consequentemente uma aprendizagem mais consistente, da sequência de atividades propostas no Capítulo 5. Passamos então a algumas importantes definições.

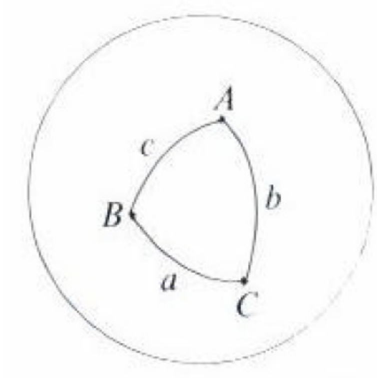

Figura 16: Triângulo Esférico 2. Fonte: RYAN (1986, p. 108) apud MARQUEZE (2006, p. 61)

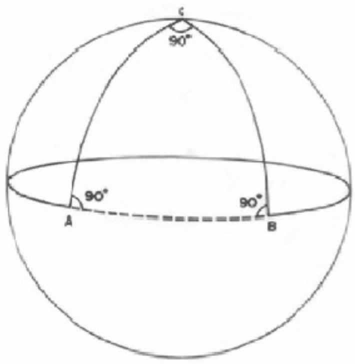

Figura 17: Triângulo Trirretângulo. Fonte: OBSERVATÓRIO NACIONAL (2012, p. 4)

4.2.1 Conceitos

A Geografia, segundo Michaelis (2013), é a ciência que tem por objeto de estudo a descrição da Terra na sua forma, acidentes físicos, clima, produções, populações, divisões políticas etc. E pode ser dividida em várias vertentes como Geografia astronômica, biológica (ou biogeografia), botânica (ou fitogeografia), econômica, física, histórica, humana (ou antropogeografia), matemática, política e zoológica (ou zoogeografia).

Para o desenvolvimento das atividades do Capítulo 5 é necessário que tenhamos conhecimentos a respeito da Geografia Matemática, que, segundo Michaelis (2013), tem por objeto de estudo determinar a forma e as dimensões do globo terrestre, as suas relações com os corpos celestes, as posições e as distâncias relativas dos lugares da sua superfície e a representação de toda a Terra, ou de parte da sua superfície, sobre globos ou cartas.

Inserida na Geografia, está a Cartografia. De acordo com Duarte (2002, p. 15), em 1964, durante o 20º Congresso Internacional de Geografia, realizado em Londres, a

Associação Cartográfica Internacional adotou a seguinte definição de Cartografia:

> "Conjunto de estudos e operações científicas, artísticas e técnicas, baseado nos resultados de observações diretas ou de análise de documentação, com vistas à elaboração e preparação de cartas, planos e outras formas de expressão, bem como sua utilização" (DUARTE, 2002, p. 15).

Segundo Duarte (2002, p. 47), *rede geográfica* é o conjunto formado por paralelos e meridianos, isto é, pelas linhas de referência que cobrem o globo terrestre com a finalidade de permitir a localização precisa de qualquer ponto sobre sua superfície e de orientar a confecção de mapas.

Os *mapas* são "representações geométricas planas, simplificadas e convencionais, do todo ou de parte da superfície terrestre, numa relação de similitude conveniente denominada escala". (JOLY, 1990, p. 7)

A *escala*, segundo Joly (1990, p. 8), mais do que uma simples relação matemática, é um fator de aproximação do terreno cheio de significado científico e técnico. Se por um lado, a escala determina um certo nível de análise em função do espaço a cobrir e dos detalhes a atingir no plano da pesquisa e do levantamento de campo, por outro lado, no estágio da redação, a escala é condição de precisão, da legibilidade, da boa apresentação e da eficiência do mapa.

4.2.2 O formato da Terra e sua rede geográfica

A esfericidade da Terra foi comprovada no século III a.C. pelo matemático grego Eratóstenes de Cirene (276 a.C. – 196 a.C.). Ele calculou o raio da Terra obtendo um resultado próximo do real valor. O resultado encontrado, bem como os erros no cálculo são apresentados no Anexo B.

Segundo Alves (2012, p. 19) a Terra não é uma esfera perfeita, uma vez que é achatada nos polos. Na verdade, a Terra é aproximadamente um *elipsóide*. A Figura 18 mostra uma secção da superfície terrestre através de um plano que contém a reta que liga os polos Norte e Sul. Esta secção aproxima-se de uma elipse cujo semieixo maior a é a metade do diâmetro do Equador e o semieixo menor b é a metade da distância entre os polos.

O achatamento da Terra é dado pela razão $(b-a)/b$. O valor extremamente pequeno desta razão, aproximadamente 0,00337, nos permite, para efeitos didáticos, desprezar esse

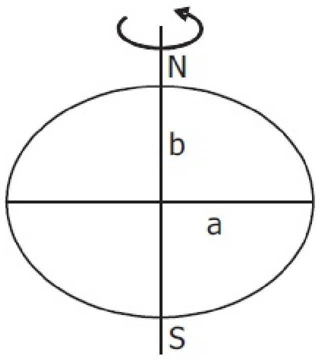

Figura 18: Formato elíptico da Terra. Fonte: ALVES (2012, p. 19)

achatamento e considerar a Terra como se fosse uma esfera, um globo, o globo terrestre.

A Figura 19 ilustra um globo terrestre. Nela o ponto N representa o *Polo Norte* e o ponto S o *Polo Sul*. A reta determinada por N e S é chamada o *eixo polar*. Ela é a reta em torno da qual a Terra efetua seu movimento de rotação. O plano que passa pelo centro da superfície esférica e é perpendicular ao eixo polar chama-se o *plano do Equador*.

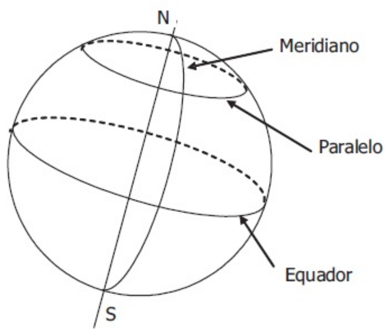

Figura 19: Globo terrestre. Fonte: ALVES (2012, p. 21)

O *Equador* é a intersecção do plano do Equador com a superfície esférica. O Equador é, portanto, uma circunferência máxima[1], como vimos no Capítulo anterior.

O plano do Equador, que passa pelo centro da superfície esférica, divide-a em duas partes chamadas *Hemisférios*: o *Hemisfério Norte* (que contém o Polo Norte) e o *Hemisfério Sul* (que contém o Polo Sul).

Os *paralelos* são as secções da superfície terrestre através de planos paralelos (ou coincidentes) ao plano do Equador, sendo portanto circunferências. Os paralelos notáveis

[1] O Equador, na verdade, é o único paralelo que é uma circunferência máxima e cujo centro é o centro da Terra. (JOLY, 1990, p. 39)

são:

- o Equador
- o Trópico de Câncer
- o Trópico de Capricórnio
- o Círculo[2] Polar Ártico
- o Círculo Polar Antártico

e podem ser conferidos na Figura 20.

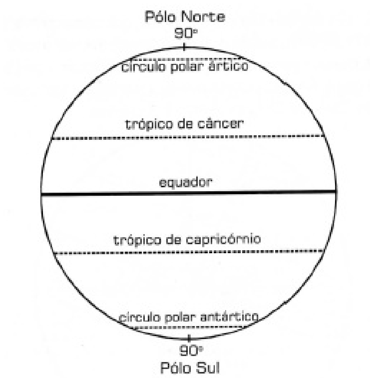

Figura 20: Paralelos com nomes especiais. Fonte: DUARTE (2002, p. 53)

A posição dos paralelos especiais está relacionada com os seguintes critérios: o movimento de rotação da Terra, a inclinação do eixo do planeta e ainda com o movimento de revolução, o que determina o plano da eclíptica[3]. De acordo com Duarte (2002, p. 53), o movimento de rotação determina o surgimento do eixo, cujas extremidades são os polos geográficos. A inclinação do eixo em relação ao plano da eclíptica, por sua vez, tem uma relação com um dos movimentos da Terra que faz variar esta inclinação em 40 mil anos, determinando a posição dos paralelos especiais. O eixo da Terra é perpendicular ao

[2]Os livros de Geografia utilizam com muita frequência a palavra "círculo" para designar a circunferência. Em particular, descrevem o Equador como um círculo máximo e utilizam nomes como círculo polar. Isto é, na verdade, um abuso de linguagem consagrado pelo uso sistemático ao longo do tempo. A nomenclatura utilizada por profissionais não matemáticos, no caso os geógrafos, não precisa coincidir necessariamente com a usada pelos matemáticos. (ALVES, 2012, p. 22)

[3]"O plano da eclíptica é aquele que contém o círculo da esfera celeste delimitado pela eclíptica (círculo máximo da esfera celeste que corresponde à órbita da Terra em volta do Sol), sendo que o ponto em que ele toca a superfície terrestre determina a posição dos Trópicos de Câncer e de Capricórnio. O ponto em que o eixo da eclíptica toca a superfície terrestre determina a posição dos Círculos Polares Ártico e Antártico". (DUARTE, 2002, p. 53-54)

plano do Equador, da mesma forma que o eixo da eclíptica é perpendicular ao plano da eclíptica. Os dois eixos formam um ângulo de 23 graus e 27 minutos entre si, o mesmo ocorrendo com os planos do Equador e da eclíptica. Estas posições podem ser observadas na Figura 21.

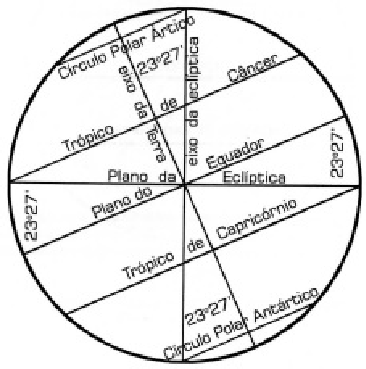

Figura 21: Determinação dos paralelos especiais. Fonte: DUARTE (2002, p. 54)

Os *meridianos* são semicircunferências que ligam os Polos Norte e Sul por meio de arcos máximos, isto é, arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos polos. Convém ressaltar que os meridianos, ao contrário dos paralelos, não são circunferências. Além disso, eles estão contidos em planos perpendiculares ao plano do Equador. O meridiano mais notável é o de *Greenwich*, nome de uma localidade próxima a Londres, onde está instalado um observatório astronômico. Este meridiano divide a Terra em dois hemisférios, um a Leste (E) e outro a Oeste (W). (Figura 22)

Figura 22: Meridianos. Fonte: DUARTE (2002, p. 48)

4.2.3 As Coordenadas Geográficas

As coordenadas geográficas, latitude e longitude, são utilizadas para determinar a posição de um ponto qualquer situado sobre a superfície terrestre.

Segundo Alves (2012, p. 25), a *latitude* de um ponto P é o valor angular do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0º a 90º N (norte) ou de 0º a 90º S (sul).

Ainda segundo Alves (2012, p. 25) a *longitude* de um ponto P é o valor angular do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0º a 180º E (leste) ou de 0º a 180º W (oeste).

Na Figura 23 temos as coordenadas geográficas do ponto P, onde $\theta = m(\angle EOP)$ é a latitude de P e $\varphi = m(\angle GMP)$ é a longitude de P. Desta forma, pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais e pontos sobre um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.

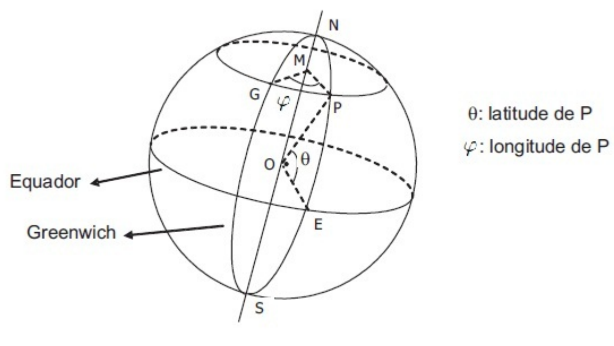

Figura 23: Coordenadas Geográficas do ponto P. Fonte: ALVES (2012, p. 26)

5 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste Capítulo são apresentadas as análises dos questionários aplicados aos alunos (este questionário é apresentado no Anexo A). Ainda neste capítulo é apresentado o perfil dos alunos que participaram da parte experimental do Mestrado, são descritas as sequências didáticas utilizadas e analisados os resultados obtidos.

5.1 ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta seção são apresentados os sujeitos da pesquisa e a instituição onde a pesquisa foi desenvolvida. O perfil dos alunos foi obtido através da análise de questionário que os mesmos responderam.

5.1.1 Sujeitos

Esta proposta é trabalhada com doze alunos do 1º Ano do Curso Técnico (em Hospedagem) Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais - Campus Barbacena. Estes alunos têm aulas de disciplinas propedêuticas no período da manhã e aulas de disciplinas técnicas à tarde dois dias na semana, nas terças-feiras e quartas-feiras. Dos alunos envolvidos, dez moram em zona urbana e dois em zona rural e a média de idade é 15 anos. Sete são do sexo feminino e cinco do masculino.

5.1.2 Instituição

A Escola foi criada, pelo Doutor Diaulas Abreu, em 1910 pelo decreto nº 8.358 de 9 de novembro, assinado pelo então presidente Nilo Peçanha, como Aprendizado Agrícola de Barbacena subordinado ao Ministério da Agricultura, Indústria e Comércio. Constituiu o 1º passo para a instalação do ensino agrícola no país. Suas atividades foram iniciadas em 14 de junho de 1913, no governo do Marechal Hermes da Fonseca.

Ao longo dos anos, teve seu nome e subordinação muitas vezes modificados. Hoje, encontra-se vinculada à Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica - SETEC - do Ministério da Educação.

Em imponente estilo normando, a instituição possui uma área de aproximadamente 479 ha e uma grande diversidade de cursos, acompanhando as mudanças de cenários e sempre buscando atender as demandas da comunidade local e regional.

Atualmente, como Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Sudeste de Minas Gerais - Campus Barbacena, são oferecidos a mais de 2500 alunos cursos técnicos, tecnológicos, licenciaturas, bacharelados, engenharias, Proeja e ensino à distância.

Os cursos[1] oferecidos são:

- Curso de Pós-graduação *lato sensu*: Planejamento e Gestão de Áreas Naturais Protegidas;
- Cursos Superior: Administração, Agronomia, Licenciatura em Ciências Biológicas, Licenciatura em Educação Física, Licenciatura em Química, Nutrição, Tecnologia em Alimentos, Tecnologia em Gestão Ambiental, Tecnologia em Gestão de Turismo, Tecnologia em Sistemas para Internet;
- Cursos Técnicos Concomitante e Subsequentes: Enfermagem, Informática, Meio Ambiente, Nutrição e Dietética, Segurança do Trabalho;
- Cursos Técnicos Integrados: Agroindústria, Agropecuária, Hospedagem, Química;
- Educação a Distância - Cursos Técnicos: Agropecuária (polos Alfenas, Barbacena, Cataguases e Santana do Garambéu), Secretariado (polos Barbacena e Santana do Garambéu);
- Proeja: Cuidador de Idosos, Fic (Agroindústria/Panificação);
- Mulheres Mil;
- Pronatec:

[1] Os cursos oferecidos bem como o histórico da Instituição estão disponíveis em http://www.barbacena.ifsudestemg.edu.br/. Acesso em 28/01/2013.

– FIC: Agente Comunitário de Saúde, Padeiro e Confeiteiro - Barbacena, Padeiro e Confeiteiro - Barroso, Recepcionista de Eventos;

– Técnico: Agropecuária, Eventos, Informática, Química, Recursos Humanos.

O Campus Barbacena desenvolve, por meio dos professores, alunos e servidores diversos projetos de pesquisa e extensão que atendem a comunidade interna e externa de Barbacena. Além disso, os estudantes podem participar de atividades esportivas e culturais.

O profissional, que o Campus Barbacena forma, tem conhecimentos científico, ético, crítico e empreendedor, a fim de contribuir para o desenvolvimento sustentável em uma sociedade mais justa e solidária.

5.1.3 Materiais

Foram disponibilizados os seguintes materiais para a execução das atividades com os alunos: bolas de isopor, barbantes, réguas, transferidor, tiras de cartolina, lápis, canetas hidrocor, blocos de papel e calculadoras. Além desses materiais, foram disponibilizados um globo terrestre, computador, projetor de mídia e mapa-múndi. Cada dupla de alunos recebeu no início de cada sessão um roteiro com as atividades previstas para aquela sessão. Ao término de cada sessão todo o material foi recolhido e guardado para a próxima sessão.

5.2 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

O objetivo do questionário (Anexo A) foi obter informações sobre os alunos a fim de se obter um perfil dos envolvidos no procedimento, assim como fazer um levantamento dos conhecimentos dos alunos em relação à Trigonometria e Geografia, que foram utilizados na sequência didática proposta.

Analisando as respostas contatou-se que alguns não gostam de Matemática (ou gostam pouco) devido às dificuldades que eles encontram ao resolver um problema (principalmente de lógica). Eles apresentaram conhecimentos prévios referentes a ângulos, triângulos retângulos, relações métricas (seno e cosseno), ângulo central a uma circunferência, unidades de medida para medir circunferência e arcos de circunferência, operações envolvendo graus, minutos e segundos e localização de um ponto sobre a superfície terrestre através das coordenadas geográficas. Constatou-se também que eles não sabiam ou se esqueceram da Lei dos Cossenos e a relação entre um arco de circunferência e o ângulo central que o determina.

Com essa análise se observou que seria necessário revisar esses conhecimentos quando estes forem indispensáveis nas atividades da sequência.

5.3 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para a execução das atividades foi solicitada uma autorização da direção da instituição. Após deferimento do pedido iniciou-se o desenvolvimento dos trabalhos experimentais. Este pedido de autorização está apresentado no Apêndice A.

A proposta de trabalho foi apresentada aos alunos juntamente com o clássico "Problema da Cor do Urso": "Uma pessoa caminha 1 km na direção SUL, depois mais 1 km na direção LESTE e, finalmente, mais 1 km na direção NORTE. A partir de então verifica que acabou voltando exatamente para o ponto inicial de onde saiu. Nesse momento essa pessoa vê um urso. Pergunta-se de que cor era esse urso?". Os alunos duvidaram da possibilidade do evento mencionado acontecer, segundo eles a pessoa só retornaria ao mesmo lugar se o trajeto fosse triangular e ainda questionaram o que o urso tinha a ver com a estória.

Os alunos foram informados que seria necessária uma autorização de seus pais ou responsáveis para participarem do procedimento, devido ao fato de ser um procedimento experimental envolvendo coleta de dados, fotografias e filmagens, esta autorização se encontra no Apêndice B. Juntamente com o termo de autorização dos responsáveis, foi passado aos alunos o questionário, que se encontra no Anexo A. Os alunos que se dispusessem a participar do procedimento deveriam entregar na aula seguinte o questionário preenchido e o termo de autorização dos responsáveis assinado.

Cumpridas as exigências legais, a sequência foi iniciada. Foi desenvolvida uma sequência de 9 atividades com os alunos, para tanto foram realizadas 4 sessões em dias e horários preestabelecidos, totalizando 6 horas e 20 minutos. O local onde se deu o experimento foi uma sala de aula na própria escola onde os alunos estudam. Os dias, atividades e duração das sessões estão descritos na Tabela 2.

Os alunos foram divididos em duplas e cada aluno recebeu uma folha de papel sulfite tamanho A4 para anotações. Estas folhas foram recolhidas ao final de cada seção e serviram de base para considerações e conclusões. Ao longo das seções o pesquisador também fez anotações por escrito e gravou o áudio de algumas discussões.

Data	**Atividade(s)**	**Duração**
17/01/2013	01, 02 e 03	1h40min
24/01/2013	04	1h20min
24/01/2013	05, 06 e 07	1h40min
28/01/2013	08 e 09	1h40min

Tabela 2: Cronograma de execução das atividades

5.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA - ANÁLISE DOS RESULTADOS

A sequência de atividades aqui descritas foram adaptadas de PATAKI (2003), PRESTES (2006) e ANDRADE (2011). Apresenta-se também, nesta seção, as análises *a priori* e *a posteriori* destas atividades realizadas pelos alunos.

A escolha destas atividades se deve ao fato de apresentarem uma cronologia adequada ao bom entendimento e compreensão por parte dos alunos. Na sequência proposta, cujas atividades são estruturadas através de situações-problema, os conceitos são institucionalizados interdisciplinarmente à Geografia, de forma a tornar o aprendizado mais consistente do conteúdo Geometria Esférica.

- **Atividade 01:**

Apresentação do problema:

"Sejam bem-vindos marujos! Vocês estão a bordo do navio "Aventura". Há um tesouro enterrado na Ilha do Urso (Noruega), uma ilha desabitada, mas que serviu de passagem para russos e alemães quando começaram a se interessar pelo Ártico no final do século XIX, e nossa missão é encontrá-lo. O pagamento será uma parte do tesouro. Partiremos da Ilha Lambda (Ilhas Bermudas), na América Central, para não levantar suspeitas junto à Marinha Brasileira. Para não precisar levar muita bagagem é preciso determinar qual é a distância a ser percorrida e assim saber quantos dias levaremos para retornar dessa busca pelo tesouro, ricos! Então marujos, como determinar a distância entre estas ilhas? Qual é este valor?”

Análise *a priori*

Esta é uma atividade de motivação. Ela objetiva traçar paralelos interdisciplinares entre a Geometria Esférica e a Geografia. Outro objetivo desta atividade é estimular os alunos a participarem de toda a sequência de atividades em busca da solução. Nesta atividade os alunos perceberão que serão necessários novos conhecimentos para solucioná-la, a Geometria Euclidiana não será o bastante.

Espera-se que os alunos respondam que a distância entre as ilhas seria uma linha reta devido aos conhecimentos que eles já possuem da Geometria Euclidiana (a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une). É esperado também que eles concluam que ainda não será possível solucionar o problema proposto.

Desenvolvimento da Atividade

O problema foi proposto apresentando as ilhas no mapa-múndi (Figura 24). Fiz então o questionamento: O que vocês acham? Como seria a distância? Os alunos começaram a discussão:
Aluno 03: “Podemos usar a escala, basta medir quantos centímetros tem entre as ilhas e multiplicar pela escala”.
Aluno 02: “Outra forma é utilizar o teorema de Pitágoras, basta tomar duas retas perpendiculares que passam pelas ilhas”.
Aluno 11: “É isso mesmo, basta descrever duas retas perpendiculares e traçar uma diagonal formando um triângulo retângulo, e depois aplicar o teorema de Pitágoras para descobrir a distância.”

Figura 24: Posição das ilhas no mapa-múndi

O Aluno 02 fez um desenho esquemático de como calcular a distância. Esse desenho pode ser visto na Figura 25.

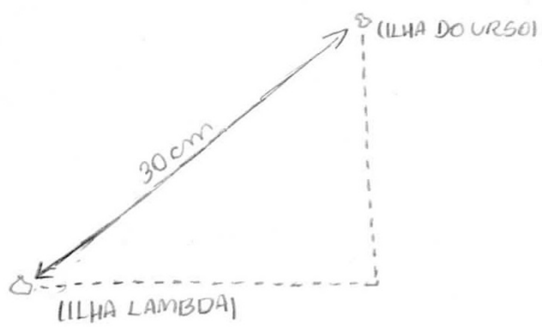

Figura 25: Proposta de cálculo da distância pelo Aluno 02

Os colegas concordaram com os Alunos 03, 02 e 11. Minha intenção nesse momento era mostrar aos alunos que o uso da escala para resolver o problema era inadequado. Apontei para as posições da Groelândia e do Brasil e perguntei:
Professor: “Qual dos territórios é o maior.”
Alunos: “O território do Brasil.”
Professor: “Qual é a relação entre as dimensões? O Brasil é muito maior do que a Groelândia?”
Alunos: “Pouca coisa de diferença.”

Depois dessa resposta pedi ao Aluno 08 para ler no mapa e informar aos colegas as áreas de cada território, e para o espanto dos demais a área do Brasil é cerca de 4 vezes maior do que a da Groelândia. E uma discussão sobre Geografia começou:
Aluno 02: “A escala não pode ser usada? Ela serve de que então?”
Aluno 07: “Acho que a escala só pode ser usada na linha do Equador. E a ilha do Urso fica mais perto do polo Norte.”
Aluno 10: “É verdade, se formos observar o mapa os ‘quadrinhos’ perto do Equador são bem menores do que os ‘quadrinhos’ perto dos polos.”
Aluno 11: “Então 1cm na linha do Equador é diferente de 1cm mais perto dos polos. Isso se deve às projeções, perto dos polos as regiões são desproporcionais.”
Aluno 02: “É verdade. A escala não funciona nesse caso, nem o teorema de Pitágoras. Então como é que mede?”

Outra pergunta foi lançada:

Professor: “Só é possível se descolar entre uma ilha e outra percorrendo o trajeto de uma reta?”
Aluno 08: “Teria outro jeito de medir?”
Aluno 02: “Deve ter, mas não faço ideia.”

Os demais alunos não se manifestaram.

Análise *a posteriori*

Todos os alunos entenderam o problema. Percebeu-se que eles estavam com a Geometria Euclidiana em mente quando tentaram resolvê-lo e se depararam com algumas dificuldades. Percebeu-se também que os alunos detinham o conhecimento de noções básicas de Cartografia, o que ajudará bastante no restante da sequência.

- **Atividade 02:**

Questões:
a) Para a tripulação do navio Aventura chegar à Ilha do Urso, como você acha que será o caminho percorrido? Em Geometria, qual a figura que você usaria para representar esse percurso?
b) Como você representaria no papel a situação do problema descrito na atividade 01?

Foram fornecidos o globo terrestre e bolas de isopor aos alunos para ajudá-los nesta atividade.

Análise *a priori*

Espera-se que alguns alunos respondam que o caminho não é retilíneo e sim “curvo”, devido ao formato arredondado (quase esférico) da Terra. De outros, porém, é esperado que respondam ser retilíneo, devido à Geometria Euclidiana.

Desenvolvimento da Atividade

Os alunos afirmaram que a distância entre as ilhas é o comprimento do menor caminho, que até então era um segmento de reta. Alguns desenharam um segmento de reta, outros desenharam um arco. Acompanhemos a discussão:
Aluno 02: “Tem que ser uma reta.”
Aluno 10: “Mas estamos na superfície de uma bola, então tem que ser curvo.”

Alguns desenhos feitos pelos alunos são apresentados na Figura 26.

Nesse momento foi apresentada uma ferramenta do *Google Maps* que está em testes,

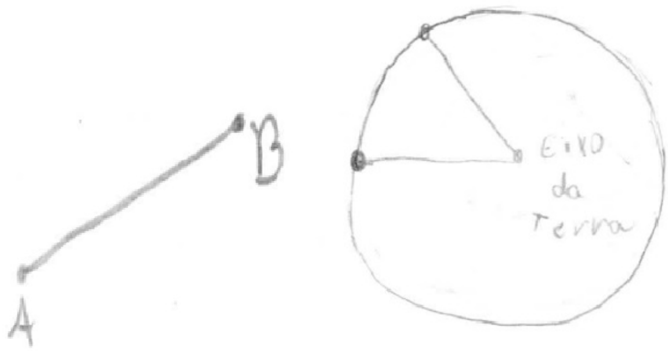

Figura 26: Desenhos do Aluno 07 (esquerda) e do Aluno 06 (direita) para a questão proposta

mas que pode se tornar uma funcionalidade regular, trata-se da "Ferramenta para medição de distância"[2]. Esta ferramenta possibilita medir a distância entre dois pontos quaisquer marcados no Globo (*Google Earth*).

Foi apresentado o segmento (arco de circunferência) que determina a distância entre as duas ilhas utilizando esta ferramenta. O objetivo dessa atividade foi mostrar aos alunos que o segmento que une as ilhas não é retilíneo e sim curvo. Como pode ser observado na figura seguinte (Figura 27):

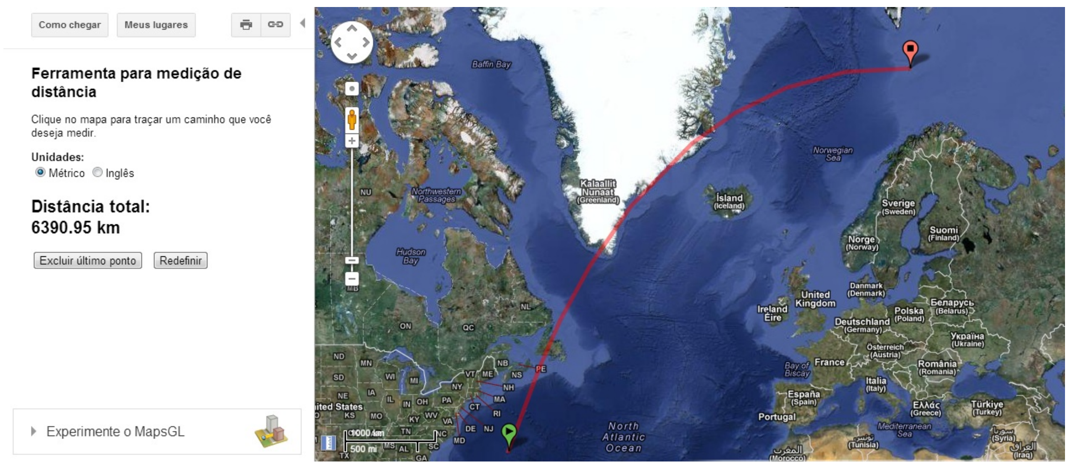

Figura 27: Distância entre as Ilhas. Fonte: *Google Maps*. Acesso em 30/12/2012

O Aluno 05 começou uma discussão:

Aluno 05: "Então quer dizer que a menor distância entre dois pontos é um arco de circunferência? Então porque os pedreiros trabalham calculando medidas com a trena esticada

[2]disponível em http://support.google.com/maps/bin/answer.py?hl=pt&answer=175859&topic=1687290&ctx=topic. Acesso em 30/12/2012.

e não curva?”
Aluno 03: “Da mesma forma os engenheiros quando fazem os projetos.”
Professor: “Até aqui na sala mesmo, qual é a distância entre o Aluno 08 e o Aluno 10, ou entre paredes paralelas? Eu posso determinar essas distâncias com a trena esticada?”
Aluno 06: “Sim.”
Professor: “E por que eu não posso executar o mesmo procedimento para determinar a distância entre as ilhas?”
Aluno 05: “Talvez porque elas estejam muito distantes.”
Aluno 02: “Qual a distância mínima entre os pontos para que o segmento [que os une] seja curvo?”

A pergunta do Aluno 02 intrigou os colegas que começaram a simular outras distâncias, eles tomaram duas cidades próximas como Barbacena-MG e Juiz de Fora-MG e duas cidades distantes, como Rio de Janeiro-RJ e Natal-RN. A discussão continuou:
Aluno 10: “Não faria sentido uma distância ser curva e outra ser reta, acredito que todas sejam curvas, já que todos estamos na superfície terrestre.”
Aluno 02: “Então a trena do pedreiro faz curva? Como que ele vai construir uma parede ou um muro?”
Aluno 10: “Aí eu já não sei.”

Os alunos começaram a questionar o uso da trena esticada ou curva para medir distâncias. Convidei os alunos a fazerem a seguinte experiência: localize as ilhas no globo terrestre e tente medir a distância entre elas utilizando a régua (Figura 28). Começou-se então a discussão:
Aluno 08: “Seria necessária uma ‘régua curva’.”
Aluno 10: “De fato, se fôssemos caminhar sobre a régua jamais chegaríamos à outra ilha, essa régua tem que curvar.”

A discussão continuou:
Aluno 08: “E se usássemos uma linha ou barbante?”
Aluno 02: “É verdade, daria pra medir quantos centímetros tem entre as ilhas, mas o globo também não tem algumas distorções?”
Aluno 08: “Aí eu já não sei.”
Aluno 03: “Acho que tem sim, mas bem menos do que no mapa. O erro seria bem menor.”
Aluno 10: “Nós não descobrimos ainda essa questão de como o pedreiro usa uma trena

Figura 28: Tentativa de calcular distâncias no globo terrestre com a régua

esticada se a superfície terrestre não é plana.”

Nesse instante os alunos foram levados até a janela da sala e mostrei a linha do horizonte. Disse a eles:
Professor: “Por muito tempo se acreditou que a Terra era plana por causa disso (da linha do horizonte) até perceberem que os navios desapareciam no horizonte. Isso se deve à dimensão da Terra. O fato do raio da Terra ser muito grande faz com que localmente pareça estarmos num plano. Isto é o que chamamos de curvatura, quanto maior o raio, menor é a curvatura, e vice-versa. Por isso a Terra parece ser plana localmente e podermos calcular medidas, como pedreiros e engenheiros, como trenas esticas (retilíneas). Tomem duas bolas de isopor com raios diferentes e determinem um segmento na bola menor, agora desenhem este mesmo segmento na bola maior, o que está acontecendo?”
Aluno 02: “O segmento era mais curvo, agora está mais achatado”.
Professor: “Agora imaginem este mesmo segmento em bolas com raios cada vez maiores.” (Figura 29)
Aluno 03: “O segmento vai ficando cada vez mais achatado, cada vez mais retilíneo.”
Aluno 10: “Sensacional.”

Análise *a posteriori*

Os alunos não tiveram muita dificuldade em se convencerem de que a distância entre as ilhas seria dada pelo comprimento de um arco de circunferência, a questão que pairava no ar agora era como medi-lo. Disse a eles que este era um dos objetivos desse trabalho e que as discussões estavam muitos boas e convergindo para tal. Percebeu-se como os alunos ficaram admirados em saber que a distância entre dois pontos não necessariamente é uma

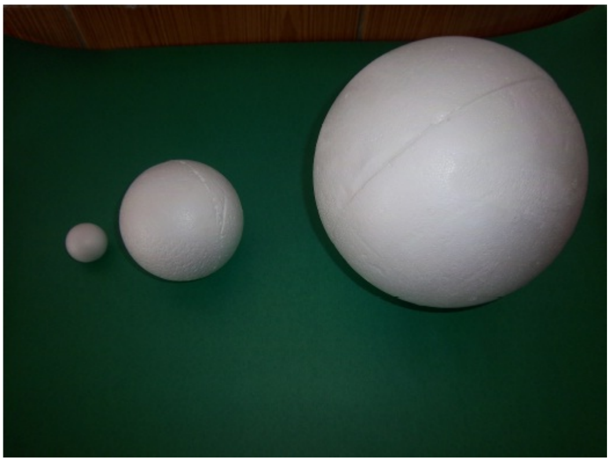

Figura 29: Bolas de isopor com medidas de raios diferentes

reta, o que causou uma ruptura em um dos paradigmas da Geometria Euclidiana (que a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une). Outra questão levantada constantemente era se haveria um mínimo de distância necessária para que o segmento que une dois pontos fosse reto ou curvo. Essa questão foi respondida na discussão sobre curvatura.

O valor dado pelo *software* será comparado com o encontrado pelos alunos na Atividade 09.

- **Atividade 03:**

Questões:
a) Marque um ponto no papel dado. Quantas linhas distintas podem ser traçadas passando por esse ponto?
b) Você recebeu uma bola de isopor representando a superfície esférica. Marque um ponto nela. Quantas linhas podem ser traçadas por esse ponto? Essas linhas possuem fim?
c) Agora, marque dois pontos no bola de isopor. Ligue-as por vários caminhos. Qual é o menor caminho que liga esses pontos? Esse caminho tem comprimento finito?
d) Prolongue esse menor caminho nos dois sentidos. Quantos caminhos você obteve? É possível determinar o comprimento dos caminhos encontrados?
e) Se considerarmos duas linhas distintas, em uma superfície esférica, elas têm ponto de intersecção? Quantos?

Análise *a priori*

O objetivo desta atividade é definir e descrever os caminhos que passam por um e dois pontos distintos em uma superfície esférica e também conceituar a concorrência entre duas circunferências máximas numa superfície esférica. Para esta atividade foram disponibilizados elásticos para ajudá-los a determinar as circunferências máximas.

É esperado que respondam às questões propostas ainda com a Geometria Euclidiana em mente, isto é, no item (a) responderão que existem infinitas retas que passam por um ponto. No item (b) era esperado que respondessem que por um ponto passariam infinitas linhas com comprimento finito. No item (c) esperávamos que concluíssem que por dois pontos na superfície esférica passam infinitos caminhos, todos de comprimento finito, sendo o menor deles dado por uma curva, um arco de circunferência. No item (d) eram esperadas duas situações: os alunos que não compreenderam que o menor caminho é um arco de circunferência concluiriam que se prolongarmos esse menor caminho nos dois sentidos obteríamos infinitos caminhos e os alunos que compreenderam que o menor caminho é um arco de circunferência concluiriam que seriam apenas dois caminhos, ou seja, o caminho de A para B e o de B para A, circundando a superfície esférica e em ambos os casos os comprimentos desses caminhos poderiam ser determinados. No item (e) era esperado que os alunos perguntassem antes que linhas eram, se circunferências máximas ou não, e daí concluíssem que haveriam dois pontos de interseção entre linhas distintas se estas fossem circunferências máximas.

Desenvolvimento da Atividade

Todos os alunos responderam no item (a) que por um ponto podem passar infinitas linhas. A representação do Aluno 02 pode ser vista a seguir.

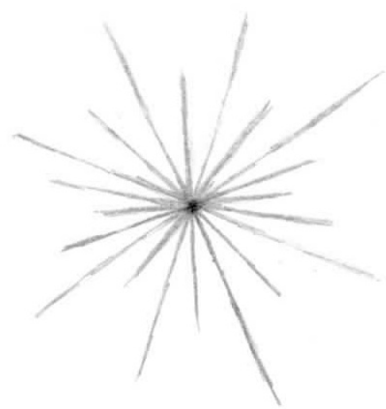

Figura 30: Desenho do Aluno 02 representando a infinidade de linhas possíveis

No segundo item o Aluno 07 levantou o seguinte questionamento:
Aluno 07: “Qual é a largura dessas linhas? Se a linha for ‘grossa’ serão finitas.”
Aluno 03: “Linha não tem largura, só comprimento.”
Professor: “De fato Aluno 03, a linha tem apenas uma dimensão.”
Aluno 07: “Então são infinitas.”
Professor: “Exatamente”

Todos os alunos reconheceram, no item (b), a infinidade de linhas que podem ser traçadas passando por um ponto da bola de isopor. Eles observaram também que estas linhas são circulares e tem comprimentos diferentes e mensuráveis.

Ainda neste item foi disponibilizado aos alunos elásticos (Figura 31) para a auxiliá-los no desenho das linhas. Os alunos perceberam que, dependendo da linha que eles traçassem com o elástico, ele se soltava da bola de isopor. O elástico só permanecia preso à bola em determinadas posições. Esta propriedade dos elásticos nos ajudou a definir o conceito de circunferência máxima.

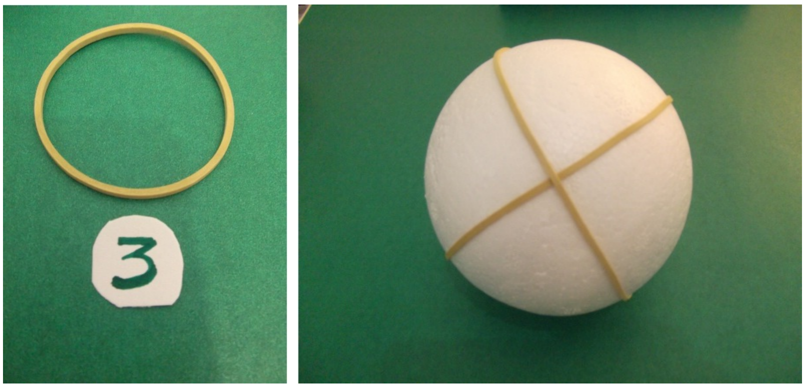

Figura 31: Materiais para manipulação

Acompanhemos a discussão:
Aluno 02: “O elástico não para na bola quando se quer fazer circunferências menores, só nas maiores.”
Aluno 05: “É verdade, de todas as linhas que tracei na bola, só consegui colocar o elástico sobre as maiores.”
Aluno 08: “Parece que o elástico não ajudou muito.”
Professor: “Na verdade Aluno 08 o elástico ajudou, e muito, sabe por que? Porque estas linhas sobre as quais o elástico parou recebem um nome especial, estas linhas são as maiores que se pode determinar numa superfície esférica passando por um ponto e são chamadas de circunferências máximas ou geodésicas, e elas equivalem à reta na superfície

esférica.”
Aluno 08: “Então quer dizer que por um ponto na superfície esférica passa infinitas linhas, mas uma única reta?”
Aluno 02: “Não Aluno 08, você pode ter infinitas retas, olha aqui. (Figura 32)”

Figura 32: Bola de isopor do Aluno 02 com elásticos

Aluno 08: “É verdade. Então qualquer linha fora do elástico não é considerada reta.”
Professor: “Em outras palavras, para ficar mais claro, uma reta na superfície esférica é uma linha que divide a esfera em duas partes iguais (dois hemisférios) e estas linhas, como já disse, são circunferências máximas, são as maiores circunferências que se pode determinar sobre a superfície esférica.”

No item (c) pedi aos alunos que inicialmente apenas desenhassem as linhas e só depois usassem o elástico. Eles perceberam que o menor caminho entre os pontos era um arco de circunferência e esse arco coincidia exatamente com a posição do elástico quando os alunos o colocaram sobre os pontos formando uma circunferência máxima, que por sua vez tem comprimento finito.

O Aluno 03 concluiu:
Aluno 03: “Então a distância entre dois pontos continua sendo uma reta, só que agora temos uma ‘reta’ diferente, uma ‘reta’ curva, mas não deixa de ser reta.”
Aluno 06: “Legal.”
Professor: “Percebam que os dois pontos dividem a reta (circunferência máxima) em dois arcos, um menor e um maior, caso os pontos não sejam antípodas. A distância entre os dois pontos é a medida do arco menor, que equivale a um segmento de reta na superfície esférica.”
Aluno 11: “O que são pontos antípodas?”

Professor: “São pontos diametralmente opostos.”

O item (d) foi discutido juntamente com o item (c), visto que neste item os alunos já utilizaram a circunferência máxima concluindo que é possível determinar o comprimento dos caminhos encontrados, por serem segmentos de reta na superfície esférica.

No item (e) os alunos levantaram alguns questionamentos:
Aluno 11: “Que linhas são estas? São retas? Se forem retas necessariamente serão dois pontos de intercessão. E estes pontos serão antípodas.”
Aluno 05: “De fato. Do contrário pode não ter nenhum ponto de intercessão ou um ponto de intercessão.”

Análise *a posteriori*

Nesta atividade os alunos perceberam mais algumas rupturas na Geometria Plana, como por exemplo, o fato da reta agora ter comprimento finito, o fato de dois pontos poderem ser ligados por vários caminhos e o fato de retas concorrentes poderem ter dois pontos de intercessão. Alguns alunos ainda não acreditavam no que estava acontecendo, percebeu-se que os alunos que mais detinham conhecimento de propriedades e características da Geometria Plana obtiveram mais dificuldades em assimilar as propriedades e características da Geometria Esférica. Percebeu-se que o manuseio com a bola de isopor contribuiu para uma maior abstração e representação mental dos conceitos abordados até o momento.

Os alunos fizeram anotações no bloco de notas pertinentes às questões do roteiro e a outras questões levantadas nos momentos de discussão, como por exemplo, o fato da Terra ser redonda. Esperava-se que esta questão fosse levantada. Até então sempre se afirmou ser a Terra esférica, mesmo sabendo que ela é achatada nos polos, na verdade a Terra é aproximadamente um elipsoide. Esta questão, que foi levantada pelo Aluno 08, foi discutida pelos demais alunos. Ficou como atividade para eles descobrirem o porquê de considerarmos a Terra redonda. Espera-se que respondam ser devido à insignificância desse achatamento em relação às dimensões da Terra.

Encerra-se a primeira sessão de atividades, o Aluno 02 mencionou que nunca tivera antes uma aula de matemática dinâmica, uma aula que envolvesse material concreto. Isto confirma a necessidade de introduzir materiais manipuláveis no ensino de Matemática, por promoverem uma aula mais dinâmica.

- **Atividade 04:**

Questões:

a) No plano cartesiano, como se sabe, um ponto é localizado (determinado) por suas coordenadas cartesianas x e y. E no globo terrestre, como um ponto pode ser localizado?
b) Localize e determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição das Ilhas Bermudas e da Ilha do Urso.
c) O globo terrestre possui um eixo de rotação imaginário. Como se chamam as interseções do globo terrestre com esse eixo?
d) Localize e caracterize o Equador.
e) Identifique que tipos de circunferências você vê na superfície do globo terrestre.
f) Quais das circunferências são circunferências máximas?
g) Quais das circunferências são denominadas paralelos terrestres?
h) Quais das circunferências são denominadas meridianos?

Análise *a priori*

Antes de iniciar esta atividade é levantada a questão da esfericidade da Terra da sessão anterior, e é esperado, como mencionado anteriormente, que concluam a insignificância do achatamento diante das dimensões do planeta.

Esta atividade exige conhecimentos a respeito de Geografia. Pelas discussões sobre Geografia levantadas no primeiro encontro e pelas respostas ao questionário percebeu-se que eles não terão dificuldades nesta atividade. Os objetivos desta atividade são localizar pontos no globo terrestre utilizando suas coordenadas geográficas, em particular os polos Norte e Sul, definir e identificar os Paralelos e Meridianos Terrestres, relacionando-os às circunferências e semicircunferências máximas e comparar a localização de um ponto no plano cartesiano com a de um ponto no globo terrestre.

Possivelmente alguns alunos apresentarão alguma dificuldade para definirem os meridianos como semicircunferências máximas e os considerarão como circunferências máximas, caso não se atenham a uma das definições dada em Geografia "são semicírculos imaginários traçados sobre a Terra de polo a polo".

Para esta atividade são disponibilizados materiais para determinar as coordenadas geográficas das ilhas. Espera-se que os alunos as determinem utilizando regra de três simples.

Desenvolvimento da Atividade

Antes de trabalharmos as questões propostas para esta atividade foi feita uma recapitulação do que se tinha visto nas atividades anteriores. Os alunos começaram a dizer o

que tinham aprendido:
Aluno 03: “A distância entre dois pontos nem sempre é dada por um segmento de reta.”
Professor: “Muito bem Aluno 03. O que mais pessoal?”
Aluno 02: “Por dois pontos na esfera passam infinitas linhas e que retas são circunferências máximas.”
Aluno 10: “As retas tem comprimentos finito.”

Os alunos foram apresentando os conhecimentos adquiridos e levantando questionamentos. Disse a eles que as próximas atividades iriam respondê-los. Passamos então para as tarefas deixadas no encontro anterior, sobre a esfericidade da Terra e a posição dos trópicos.
Aluno 05: “Eu pesquisei, mas não consegui entender.”
Aluno 11: “Vi que é porque o raio da Terra é muito grande, daí esse achatamento pode ser desprezado.”
Professor: “Muito bem Aluno 02, é isso mesmo. Vou explicar utilizando um desenho” (Figura 33).

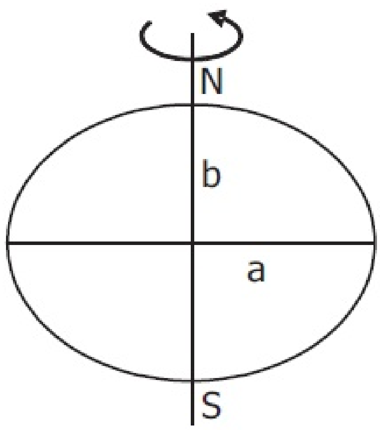

Figura 33: Determinando o achatamento da Terra. Fonte: ALVES (2012, p. 19)

A Figura 33 encontra-se na subseção 4.2.2. E com base nesta subseção foi discutida com os alunos a insignificância do coeficiente de achatamento da Terra, que é próximo de zero, aproximadamente 0,00337. Devido a isso se chegou a um consenso de que a Terra pode ser considerada redonda (esférica). Na discussão uma nova questão é levantada:
Aluno 11: “Quanto mede o raio da Terra?”
Professor: “Boa pergunta Aluno 11. Alguém sabe?”
Aluno 02: “Acho que 32000km.”

Aos alunos foi explicado como Eratóstenes calculou a medida do raio da Terra. Estes cálculos podem ser acompanhados no Anexo B. Durante a explicação foram feitas explanações sobre solstício, equinócio e a posição dos paralelos notáveis, isto é dos trópicos e dos círculos polares, sendo-lhes apresentada a Figura 21. Foi explicado aos alunos que a inclinação do eixo da Terra em relação ao plano da eclíptica varia. Esta variação vai de 22º até 24º30' e leva mais ou menos 42 mil anos. Atualmente, a inclinação diminui 47" por século. Esta variação é causada pela ação do Sol e da Lua.

Os alunos ficaram encantados com as novas descobertas e até brincaram:
Aluno 10: "Achei que a Terra fosse virar de cabeça para baixo."
Professor: "Que bom que não. Vamos às questões?"

No item (a) todos responderam corretamente que para localizar um ponto no globo basta ter suas coordenadas geográficas (latitude e longitude), como já haviam respondido no questionário. No item (b) os alunos utilizaram o mapa-múndi para determinar as coordenadas geográficas aproximadas das ilhas, como podemos conferir na Figura 34.

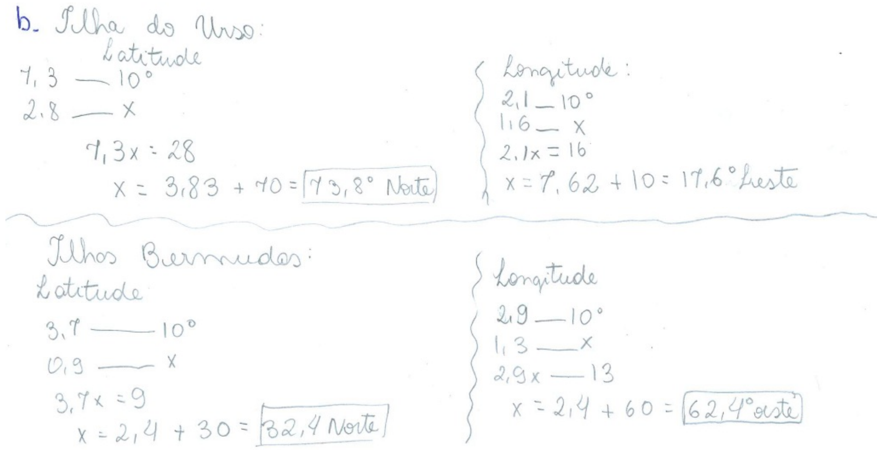

Figura 34: Cálculo aproximado das coordenadas geográficas pelo Aluno 03

No item (c) os alunos responderam corretamente que são os polos Norte e Sul. No item (d) caracterizaram o Equador como: único paralelo que é circunferência máxima e reta que divide o globo nos hemisférios Norte e Sul. No item (e) responderam que são todos os paralelos. No item (f) os alunos responderam que apenas o Equador era uma circunferência máxima. No item (g) responderam que são os trópicos, os círculos polares e o Equador. No item (h) responderam que não há circunferência máxima denominada meridiano pois os meridianos são semicircunferências, por isso o máximo que se poderia afirmar é que os meridianos são arcos de circunferência máxima que passam pelos polos.

Análise *a posteriori*

Esta atividade durou mais tempo do que se tinha planejado devido ao fato da abertura das discussões sobre o cálculo do raio da Terra e a posição dos trópicos e círculos polares. Estas discussões foram muito bem-vindas no trabalho, pois inseriram os alunos no contexto histórico, a ponto de usarmos em todo o trabalho o valor 22/7 para π, da mesma forma que Arquimedes. Como mencionado anteriormente, os alunos não tiveram dificuldades nessa atividade. O globo terrestre foi fundamental nesta atividade, por permitir a visualização dos paralelos e meridianos e consequentemente das coordenadas geográficas.

O procedimento para calcular o raio da Terra pode ser realizado empiricamente pelos alunos. Há uma iniciativa de resgatar este procedimento histórico, envolvendo alunos e professores da Educação Básica, Clubes de Astronomia ou grupos, em atividades de socialização e motivação ao aprendizado da Ciência, através da utilização das tecnologias de informação e comunicação, trata-se do Projeto Eratóstenes[3], que vem sendo desenvolvido há alguns anos nos países vizinhos (Argentina, Uruguai, Chile etc) e que em 2010, começou também a ser implantado no Brasil, através da parceria com a Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA), a Rede Brasileira de Astronomia (RBA) e a Casa da Ciência da UFMS (Universidade Federal de Mato Grosso do Sul), em conjunto com a comissão organizadora geral, localizada na Argentina.

O projeto foi apresentado superficialmente aos alunos, por não ser um dos objetivos do trabalho, mas eles ficaram motivados em participar de tal projeto.

- **Atividade 05:**

Como você observou, unindo dois pontos distintos em uma superfície esférica, obtemos um arco de circunferência.
a) Procure medir a distância entre esses pontos. Como você mediu essa distância? Que instrumentos você utilizou? Que unidades você pode usar para medir essa distância?
b) Há uma única distância entre esses pontos? Qual a distância entre os polos Norte e Sul?

Análise *a priori*

O objetivo desta atividade é definir e medir a distância entre dois pontos de uma superfície esférica utilizando uma régua adequada. Para esta atividade são disponibilizados

[3]Mais informações podem ser obtidas em https://sites.google.com/site/projetoerato/get-started. Acesso em 27/01/2013.

os seguintes materiais: régua em cm, barbante, fita métrica, papel sulfite, tesoura e bolas de isopor.

É esperado no item (a) que alunos tentem medir a distância entre os pontos com a régua, verificando a impossibilidade de seu uso para tal fim e concluam que o a fita métrica ou o barbante seriam os mais adequados. Espera-se também que os alunos concluam que as unidades de medida grau e radiano também podem ser utilizadas para medir distâncias entre pontos de uma superfície esférica.

No item (b) é esperado que, atrelados à Geometria Euclidiana, respondam que é uma única distância. Espera-se também que concluam que a unidade de medida mais adequada para se calcular distância entre pontos de uma superfície esférica é o grau/radiano.

Dificuldades podem surgir na confecção do instrumento (régua) para medir distâncias na superfície esférica, no estabelecimento do grau como a unidade de medida adequada, visto que isto rompe com a Geometria Euclidiana, onde a distância é dada em uma unidade de comprimento e na relação entre arco de circunferência e o ângulo central correspondente a ele (como constatado na análise do questionário).

Desenvolvimento da Atividade

No item (a) os alunos sugeriram várias formas de medir, como a polegada, a régua e a fita métrica, sendo esta última a melhor opção. Os alunos desenharam réguas numa folha fornecida a eles. Um dos desenhos pode ser visto na Figura 35.

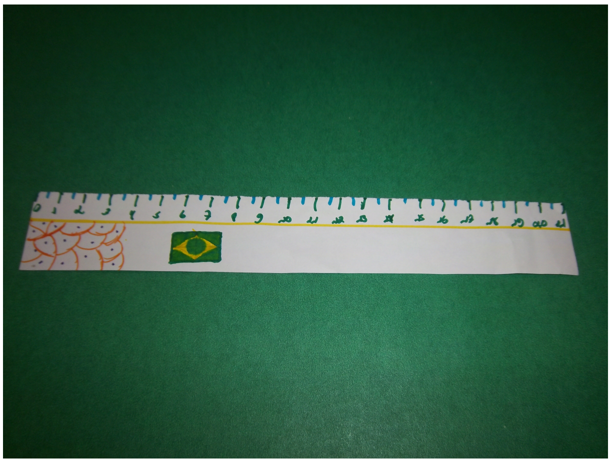

Figura 35: Régua desenhada pelo Aluno 10

Utilizando esta régua os alunos calcularam o raio da bola de isopor fornecida a eles. Os cálculos são apresentados a seguir, na Figura 36.

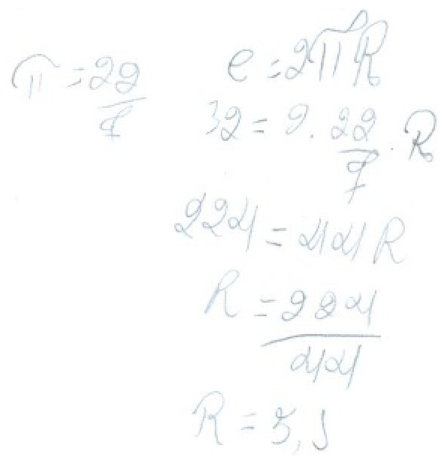

Figura 36: Cálculo do raio da bola de isopor feito pelo Aluno 06

O valor aproximado do raio, utilizando para π o valor 22/7 (como Arquimedes), foi 5,1 cm.

Neste instante perguntei qual era a distância a entre os polos Norte e Sul da bola de isopor. Qual não foi minha surpresa imediatamente alguns responderam que a distância era de 10,2 cm, isto é, o dobro do raio (diâmetro). Ao perguntar a eles se eles tinham certeza disso, eles titubearam e acabaram percebendo o erro.
Aluno 08: “Só se eu passasse pelo centro da Terra.”
Aluno 11: “É verdade, a distância não pode ser o diâmetro, é a metade da circunferência.”

Os alunos calcularam a distância entre os pontos que eles haviam marcado na bola de isopor na Atividade 03 (Figura 37). Perguntei a eles se o centímetro é a única unidade de medida possível para medir a distância entre esses pontos que eles fizeram na bola de isopor. Eles responderam que poderia ser o milímetro também, se os pontos estivessem muito próximos.

Professor: “E se a bola fosse maior?”
Aluno 01: “Daí usaria o quilômetro.”

Os alunos ainda não tinham percebido que o segmento de reta da Geometria Esférica é uma relação entre o arco de circunferência máxima e o ângulo central correspondente a ele. Esta dificuldade era esperada, como mencionamos anteriormente.
Professor: “Qual é a unidade que usamos para medir o comprimento de uma circunferência ou uma parte dela (setor circular)?”

Figura 37: Cálculo da distância entre os pontos

Aluno 11: "Usamos o grau ou radiano."

Nesse momento fiz um desenho no quadro representando um setor circular (Figura 38). Expliquei aos alunos: a relação entre o arco AB e o ângulo central α correspondente a ele; que o comprimento do arco varia de acordo com o ângulo central α e com o raio r, com isto ficou claro que fixado o ângulo central, o comprimento do arco pode mudar.

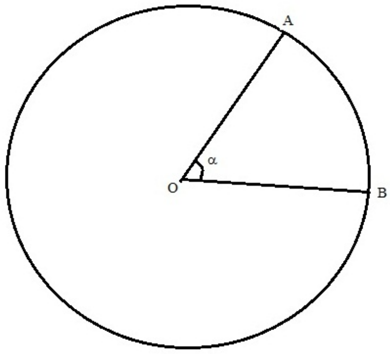

Figura 38: Circunferência com setor circular de ângulo α

Os alunos concluíram então que o comprimento do arco de circunferência máxima, que é um segmento na Geometria Esférica, pode ser medido em graus e radianos, e esta é a medida mais adequada para medi-los.

Utilizando regra de três simples eles calcularam o ângulo entre os pontos marcados na bola de isopor. Um dos cálculos pode ser visto na Figura 39.

No item (b) responderam que há uma única distância entre os pontos apesar de haverem dois caminhos (segmentos). A distância é o menor deles. E quanto à distância

$$32\text{ cm} - 360^\circ$$
$$5\text{ cm} - x$$

$$32x = 1800$$
$$\boxed{x = 56{,}25^\circ}$$

Figura 39: Cálculo do ângulo entre os pontos feito pelo Aluno 03

entre os polos terrestres, responderam corretamente que seria metade da circunferência, bastaria saber o valor do raio.

Análise *a posteriori*

Os alunos encontraram um pouco de dificuldade nesta atividade. O fato de terem como certo que a distância entre pontos é dada por uma unidade de comprimento (o que é verdade na Geometria Euclidiana) trouxe uma barreira ao entendimento desta nova unidade de medida que também fornece a distância entre pontos, o grau ou radiano. Para esse entendimento foi enfatizado o fato de termos esferas com diferentes medidas de raio, mas em todas elas o ângulo central é o mesmo. Esperava-se que os alunos construíssem uma régua graduada em graus, e não foi feito, mas isso não frustra nosso trabalho devido ao fato dos alunos sempre recorrerem à regra de três simples quando quisessem determinar o ângulo entre dois pontos.

- **Atividade 06:**

Na bola de isopor que você possui, faça o esboço de duas retas (circunferências máximas).

a) Quantos são os pontos de interseção e quantos são os arcos determinados por esses pontos?

b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na bola de isopor? Quantos?

c) Defina este ângulo, caso exista algum. Que elementos o constituem?

d) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura desse ângulo? Você conhece algum instrumento que poderia auxiliá-lo a obter a medida do ângulo esférico?

Análise *a priori*

Esta atividade tem como objetivos identificar e definir ângulo numa superfície esférica.

No item (a) é esperado que respondesse que são exatamente dois pontos (antípodas inclusive) e quatro arco de mesmo comprimento. E que estes arcos formavam oito ângulos no item (b).

No item (c) é esperado que definam ângulo esférico como a figura formada por dois arcos de circunferência máxima e que os elementos que os formam são os arcos de circunferência máxima (lados) e os pontos de interseção desses arcos (vértices).

É esperado no item (d) que respondam que o grau ou radiano são as unidades de medida adequadas para medir a abertura de um ângulo esférico e que esta medida não pode ser obtida pelo transferidor.

Desenvolvimento da Atividade

No item (a) os alunos responderam corretamente que seriam dois pontos (antípodas). Como podemos ver na Figura 40.

Figura 40: Desenho das retas feitas na bola de isopor pelo Aluno 11

Ainda neste item, os alunos responderam que são determinados quatro arcos. No item (b) os alunos responderam que podem ser observados 8 ângulos e estes ângulos são formados pelos arcos de circunferência, já respondendo ao item (c).

No item (d) alguns alunos afirmaram não saber qual unidade de medida utilizar, outros sugeriram o transferidor, mas logo disseram da impossibilidade de utilizá-lo pelo fato de não estarmos trabalhando no plano. Até que o Aluno 05 deu a ideia (Figura 41) de planificar o ângulo esférico e depois utilizar o transferidor.

A ideia do Aluno 05 foi aceita pelos colegas.
Professor: "Está corretíssimo Aluno 05, esta é uma das formas de se calcular o ângulo


d) Graus. Planificar o ângulo e usar o transferidor

Figura 41: Proposta do Aluno 05 para calcular o ângulo esférico

esférico. Implicitamente você está tomando retas tangentes às circunferências máximas nos pontos de intercessão e calculando o ângulo entre elas" (Figura 42).

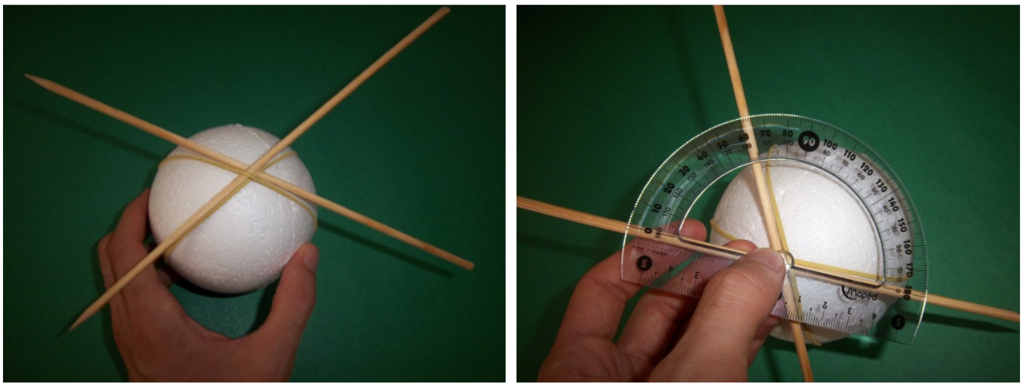

Figura 42: Cálculo do ângulo esférico

Professor: "Outra forma de calcular este ângulo é 'fatiar' a esfera e determinar o ângulo entre as secções planas, como podemos ver na Figura 14."

Análise *a posteriori*

Nesta atividade os alunos aprenderam sobre "ângulos esféricos". Eles não tiveram muita dificuldade, mesmo porque suas respostas ao questionário já nos garantia conhecimentos prévios acerca de ângulos. Nesta atividade houve um questionamento muito interessante do Aluno 05, ela pergunta o seguinte: "Se os arcos são os lados que formam o ângulo, então podemos ter um polígono de 'dois lados'?" Esse questionamento gerou uma grande discussão, o que era de se esperar pois isto vem romper paradigmas da Geometria Euclidiana, onde o polígono com o menor número de lados é o triângulo. Esta discussão foi muito positiva para a consolidação desta nova Geometria. Nas discussões procura-se sempre deixar bem claro que o que os alunos sabiam não estava errado, apenas não valia neste novo universo.

- **Atividade 07:**

Na bola de isopor, marque três pontos distintos, tais que dois a dois pertençam a uma mesma circunferência máxima. Ligue esses pontos, usando a régua esférica que você

construiu.
a) Descreva a figura encontrada. Ela se assemelha a alguma figura da Geometria Plana? Que nome você daria a essa figura?
b) Faça na bola de isopor um esboço da atividade 01, de tal maneira que o vértice (L) seja o ponto de localização da Ilha Lambda, o vértice (U) seja o ponto de localização da Ilha do Urso e o vértice (P) esteja no polo. A figura encontrada no item anterior pode representar a situação proposta na Atividade 01?

Análise *a priori*

Nesta atividade os alunos identificam e definem triângulo em uma superfície esférica e percebem sua utilidade na resolução do problema proposto na Atividade 01.

No item (a) é esperado que eles construam, sem dificuldade, a figura que é facilmente identificada como um triângulo. Podem ainda descrever a figura como composta por três lados (arcos) e três vértices (pontos de interseção dos arcos).

No item (b) é esperado que façam o que está sendo pedido sem dificuldades.

Desenvolvimento da Atividade

Alguns alunos tiveram dificuldades em fazer o que se pedia, eles estavam tentando marcar os pontos e depois as retas. Sugeri que fizessem o contrário. Com isto, todos fizeram o que foi solicitado, apresentado o seguinte resultado (Figura 43).

Figura 43: Triângulo desenhado na esfera pelo Aluno 10

No item (a) os alunos afirmaram que a figura encontrada se assemelha a um triângulo por possuir três lados e três ângulos. Um nome para esta figura poderia ser (segundo sugestões dos alunos) “triângulo esférico” ou “triângulo curvo”.

No item (b) os alunos concluíram que o “triângulo” encontrado no item (a) pode representar a situação-problema, pois a distância procurada é exatamente um dos "lados" do triângulo, uma das representações dos alunos pode ser vista na Figura 44.

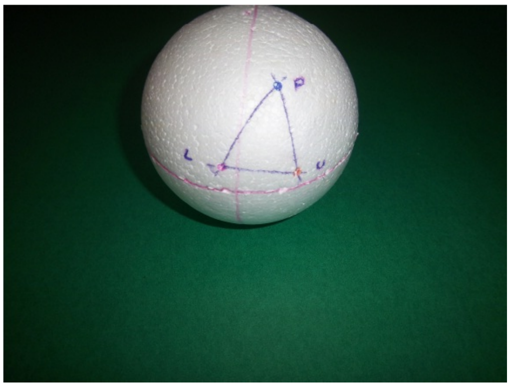

Figura 44: Esboço da Atividade 01 feito na bola de isopor pelo Aluno 06

Alguns questionamentos começaram a surgir:

Professor: "Se eu quiser passar para o papel o triângulo que vocês desenharam na bola de isopor, os lados desse triângulo serão retos?"

Aluno 06: "Não, o triângulo seria assim (Figura 45)."

Aluno 08: "De fato, o meu também ficou assim. Os lados são arcos, então são arredondados."

Figura 45: Representação no plano do triângulo esférico pelo Aluno 06 (esquerda) e pelo Aluno 08 (direita)

No meio da discussão o Aluno 01 levantou um importante questionamento:

Aluno 01: "A soma dos ângulos internos é igual a 180°?"

Professor: "Boa pergunta Aluno 01, o que vocês acham?"

Aluno 08: "Acho que dá 360°, devido à circunferência tem 360°."

Aluno 10: "Como o triângulo esférico é mais 'gordinho', acho que é maior que 180° sim."

Neste momento reportei ao globo terrestre e fiz a seguinte construção: "considerem um triângulo com um dos vértices sobre o polo Norte e os outros dois sobre o Equador. Observe de imediato que este triângulo é isósceles. O ângulo de qualquer meridiano com o Equador é igual a 90º, então se você considerar o 'lado' sobre o Equador como a base do triângulo, a soma dos ângulos da base é igual a 180º. Como isto, por menor que seja o terceiro ângulo, a soma dos três ângulos supera os 180º. E mais, esta soma varia entre 180º e 540º, mas não vamos entrar nestes detalhes, por fugir dos nossos objetivos."

<u>Análise *a posteriori*</u>

Nesta atividade os alunos caracterizaram o triângulo esférico e aprenderam mais uma característica da Geometria Esférica, que a soma dos ângulos internos excede 180º, diferentemente da Geometria Euclidiana. Foi questionado numa das discussões se havia alguma Geometria onde a soma dos ângulos internos do triângulo era inferior a 180º, expliquei a eles a existência de várias geometrias tão consistentes quanto a Geometria Plana (Euclidiana) e em uma delas em especial, chamada Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos é menor que 180º. Contei um pouco da história desta Geometria para situá-los, sem muito aprofundamento, por fugir dos objetivos do presente trabalho.

- **Atividade 08:**

Você irá determinar a Relação Fundamental dos Triângulos Esféricos, também chamada fórmula do Cosseno.
Os espetos de madeira representarão as semirretas, e as bolinhas de isopor os pontos. Assim, construa um triedro convexo e nomeie cada ponto como mostra a figura abaixo.

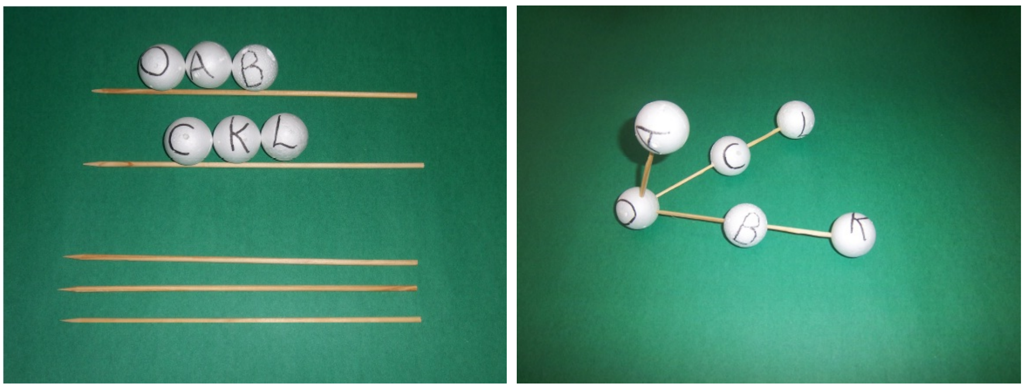

Figura 46: Relação Fundamental dos Triângulos Esféricos (I)

Complete o triedro construído anteriormente como mostra a figura abaixo. O ponto O indica o centro de uma esfera E, e os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo esférico de E. Devem ser construídos os segmentos AL e AK tangentes, respectivamente, às circunferências máximas AC e AB no ponto A. O segmento OA é raio da esfera E.

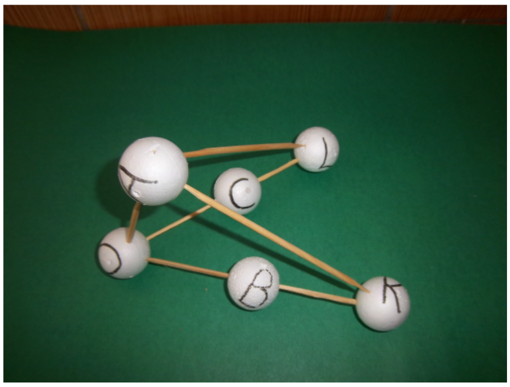

Figura 47: Relação Fundamental dos Triângulos Esféricos (II)

No triedro construído temos um triângulo esférico ABC de uma esfera de centro O e raio unitário OA. Sejam $\hat{A} = m(CAB)$, $\hat{B} = m(ABC)$ e $\hat{C} = m(BCA)$ as medidas de seus ângulos internos e c, a e b as medidas dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Mostrar que $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. Para isto:

a) Encontrar e anotar todos os triângulos planos que compõe o triedro.

b) A relação que se quer mostrar envolve senos e cossenos de argumento específicos (a, b, c, A). Encontrar, em cada um dos triângulos esboçados, as relações entre senos e cossenos que envolvam esses argumentos.

c) É possível que esta relação mostrada solucione a situação da atividade 01?

Análise *a priori*

O objetivo desta atividade é determinar a Lei dos Cossenos para os lados de um triângulo esférico e reconhecer a aplicabilidade desta relação.

No item (a) é esperado que os alunos identifiquem os triângulos OAK (retângulo em A), OAL (retângulo em A), LOK e LAK.

No item (b) é esperado que usem as relações nos triângulos OAK da seguinte forma:

$\sin c = \frac{KA}{KO} \rightarrow KA = KO \sin c$

$\cos c = \frac{AO}{KO} \rightarrow KO = \frac{1}{\cos c}$

$KO^2 = 1 + KA^2$ (Teorema de Pitágoras)

No triângulo OAL, são esperadas as seguintes relações:

$\sin b = \frac{LA}{LO} \rightarrow LA = LO \sin b$

$\cos b = \frac{AO}{LO} \rightarrow LO = \frac{1}{\cos b}$

$LO^2 = 1 + LA^2$ (Teorema de Pitágoras)

Nos triângulos LOK e LAK é esperado que usem a lei dos cossenos no plano e que o ângulo O corresponda ao lado a do triângulo esférico ABC, chegando às relações:

$KL^2 = LO^2 + KO^2 - 2.LO.KO.\cos a$ (I)

$KL^2 = LA^2 + KA^2 - 2.LA.KA.\cos A$ (II)

Substituindo (I) em (II), ter-se-ia

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Sendo esta a Relação Fundamental para triângulos esféricos, que permite associar as medidas dos lados e de um ângulo em um triângulo esférico.

No item (c) é esperado que respondam que esta relação é útil na resolução do problema proposto na Atividade 01, visto que as ilhas e o polo Norte forma um triângulo esférico, e o que está se pedindo é exatamente a medida de um dos lados desse triângulo.

São esperadas dificuldades na aplicação das relações trigonométricas e principalmente na aplicação da lei dos cossenos, visto que no questionário poucos alunos se lembraram da fórmula.

Desenvolvimento da Atividade

Os Alunos 10 e 11 ajudaram a construir o tetraedro, durante a construção foram sendo explicados cuidadosamente os elementos do tetraedro: o vértice O é o centro de uma esfera; os segmentos OA, OB e OC são raios, portanto A, B e C são pontos da esfera; os segmentos KA e LA são tangentes à esfera (nesse momento foi feito um desenho no quadro explicando o que é a tangência), portanto eles são perpendiculares ao raio OA; o triângulo esférico ABC foi desenhado no quadro com os seus elementos constituintes, vértices A, B e C e lados a, b e c; por fim foi informado que a esfera era unitária, isto é, seu era era unitário.

No item (a) os alunos encontraram vários triângulos, inclusive o triângulo esférico ABC, como se pode ver na Figura 48, porém disse a eles que nos interessava apenas os triângulos planos, isto é, com lados retilíneos, com isso eles encontraram apenas quatro, OAK, OAL, LOK e LAK.

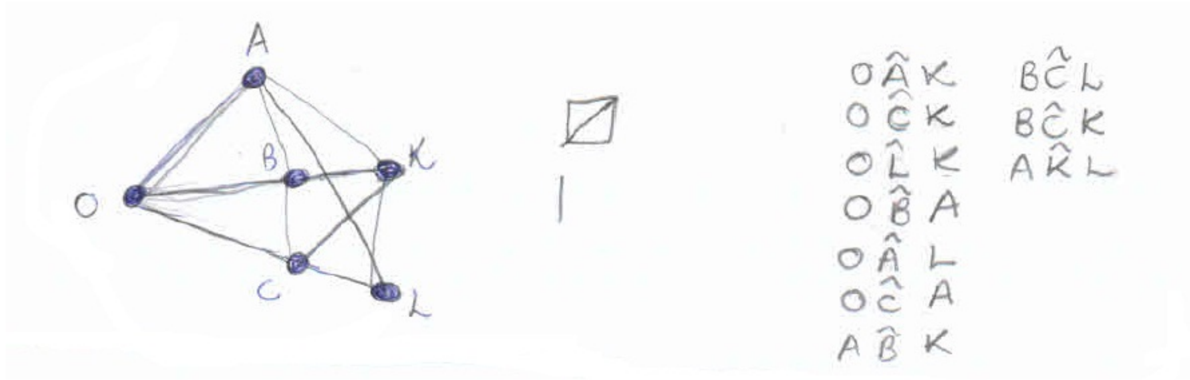

Figura 48: Triângulos encontrados pelo Aluno 10

No item (b), eles tiveram bastante dificuldade em perceber os ângulos internos dos triângulos OAL e OAK. Foram necessárias intervenções para que os alunos compreendessem. Os alunos foram lembrados de que só se poderiam utilizar as relações seno e cosseno em triângulos retângulos e que a lei dos cossenos no plano valem para qualquer triângulo.

A pedido de um aluno foi demonstrada a lei dos cossenos. Em seguida os alunos extraíram as relações necessárias para a obtenção da Relação Fundamental para triângulos esféricos, como podemos ver na Figura 49.

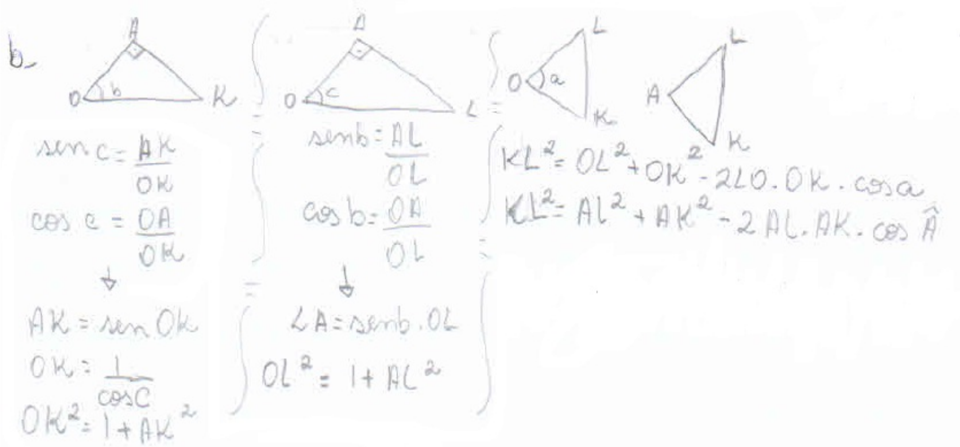

Figura 49: Relações encontradas pelo Aluno 03 nos triângulos OAK, OAL, LOK e LAK

No item (c) os alunos responderam positivamente, já que esta fórmula relaciona os lados de um triângulo com um de seus ângulos. Levantou-se então um questionamento quanto às medidas dos lados desse triângulo e de um dos ângulos internos. Respondi a eles que na Atividade 09 eles teriam as respostas.

<u>Análise *a posteriori*</u>

Esta atividade foi a primeira que exigiu uma construção matemática mais extensa, percebeu-se inclusive um cansaço na obtenção da Relação Fundamental para triângulos esféricos. Ao término desta atividade foi feita uma pausa para os alunos descansarem para, só então, reiniciarmos os trabalhos. Neste intervalo houveram ainda alguns questionamentos sobre os ângulos internos dos triângulos OAK, OAL, LOK e LAK, o modelo construído utilizando bolas de isopor e espetos de madeira foram muito úteis para a compreensão dos alunos.

- **Atividade 09:**

Para resolver a situação da Atividade 01 proposta, utilizaremos as conclusões obtidas anteriormente e as coordenadas geográficas de cada uma das ilhas.
a) Como representaria por meio de um desenho no papel o triângulo esférico PLU, no qual P é o pólo, L é a posição da ilha Lambda e U é a posição da ilha do Urso. Chame d a distância entre as ilhas.
b) O que você necessita traçar para representar, no desenho anterior, a latitude e a longitude das ilhas?
c) Represente, no desenho anterior, a latitude α_L da ilha Lambda e determine a medida do lado LP.
d) Represente, no desenho anterior, a latitude α_U da ilha do Urso e determine a medida do lado UP.
e) Represente as longitudes β_L e β_U das ilhas Lambda e do Urso, respectivamente, no desenho anterior. A soma das medidas das longitudes de L e U corresponde à medida de qual ângulo do triângulo esférico? Determine essa medida.
f) Você pode aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos para solucionar a situação da atividade 01? Justifique.
g) Para essa situação da atividade 01, como pode ser escrita a Relação Fundamental?
h) Utilizando a calculadora, determine a medida da distância d em graus.
i) Determine a distância d, em km, sabendo que o raio do planeta Terra é aproximadamente 6371 km.

Análise *a priori*

Nesta atividade os alunos determinam a solução do problema proposto na Atividade 01, para tanto é necessário o uso de uma calculadora científica. São utilizadas a coordenadas geográficas encontradas na Atividade 04, a saber: Ilha Lamda (32,4º N, 62,4º W), Ilha do Urso (73,8º N, 17,6º E).

No item (a) espera-se que os alunos façam, sem dificuldades, o triângulo esférico com vértices sendo o polo Norte e as ilhas.

No item (b) é esperado que os alunos respondam que são necessários os referenciais: meridianos, o meridiano de Greenwich, paralelos, a linha do Equador e os polos.

Nos itens (c) e (d) espera-se que os alunos determinem os lados LP e UP calculando as diferenças $90^o - \alpha_L$ e $90^o - \alpha_U$, respectivamente.

No item (e) é esperado que os alunos verifiquem que a soma das longitudes β_L e β_U corresponde à medida do ângulo P.

Espera-se no item (f) que a resposta seja positiva visto que já teremos todos os elementos para a obtenção do lado LU do triângulo esférico.

No item (g) é esperado que os alunos substituam os elementos do triângulo esférico na Relação Fundamental, ficando: $\cos d = \cos PL \cos PU + \sin PL \sin PU \cos P$.

No item (h) espera-se que os alunos substituam os valores na fórmula e determinem o valor de d, em graus, utilizando a calculadora científica. Em seguida, espera-se que utilizem-se da regra de três simples e do raio da Terra para determinar o valor de d em quilômetros. Uma dificuldade pode surgir no manuseio da calculadora científica.

Desenvolvimento da Atividade

No primeiro item os alunos não tiveram dificuldade em representar o que estava sendo pedido, como podemos ver na Figura 50. Nesta figura a aluna Aluno 05 nomeou um dos vértices como B (significando Ilhas Bermudas, onde se encontra a Ilha Lambda).

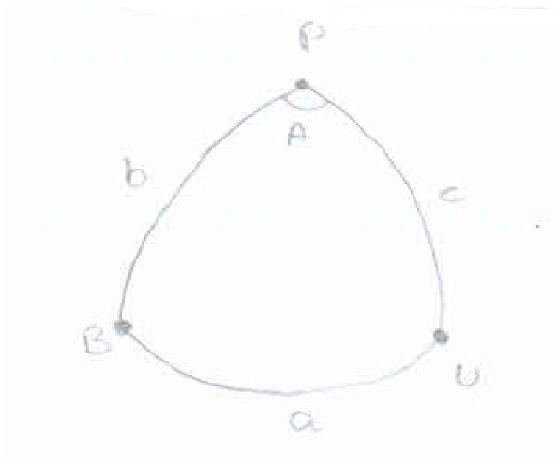

Figura 50: Triângulo esférico desenhado pelo Aluno 05 representando a situação do problema proposto na Atividade 01

No item (b) os alunos ficaram um pouco confusos, eles não haviam entendido a questão. Então apresentei as coordenadas geográficas dos pontos e questionei: “A ilha Lambda está a 32,4º N em relação a que? E está a 62,4º W em relação a que?” Com estas perguntas os alunos observaram que são necessários os referenciais: meridiano de 0º (Greenwich) e a linha do Equador.

Nos itens (c) e (d) os alunos fizeram corretamente os cálculos, não apresentando dificuldade. O que era de se esperar, devido às respostas à questão 14 do questionário, sobre operações com ângulos.

No item (e) os alunos também não apresentaram dificuldade no cálculo com os ângulos, porém necessitaram de uma representação da situação no globo terrestre para visualizarem a situação e concluir que a soma das longitudes daria exatamente o ângulo P. As longitudes foram somadas porque as ilhas estavam em hemisférios diferentes, do contrária as longitudes seriam subtraídas. Um exemplo desta situação foi dado aos alunos para uma melhor compreensão do que estava sendo dito.

A Figura 51 apresenta as contas feitas pela aluna Aluno 03.

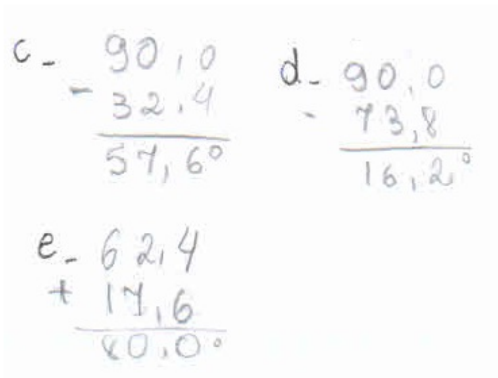

Figura 51: Operações realizadas pelo Aluno 03 para a obtenção dos lados PL e PU

No item (f) os alunos responderam positivamente porque afirmaram possuir todos os elementos da fórmula, exceto um, que é exatamente o que está sendo proposto na Atividade 01.

No item (g) os alunos substituíram os lados do triângulo PLU na Relação Fundamental, obtendo $\cos d = \cos PL \cos PU + \sin PL \sin PU \cos P$ e no item (h) determinaram o valor de d em graus desta forma:

$\cos d = \cos PL \cos PU + \sin PL \sin PU \cos P$

$\cos d = \cos 57,6^{\circ} \cos 16,2^{\circ} + \sin 57,6^{\circ} \sin 16,2^{\circ} \cos 80^{\circ} = 0,5541$

Neste item foi necessário o uso da calculadora científica para se determinar o seno e cosseno dos ângulos 16,2º, 57,6º e 80º, bem como o arccos $0,5541$ para se obter o valor de d, que vale aproximadamente 56,35º, como se pode ver na Figura 52.

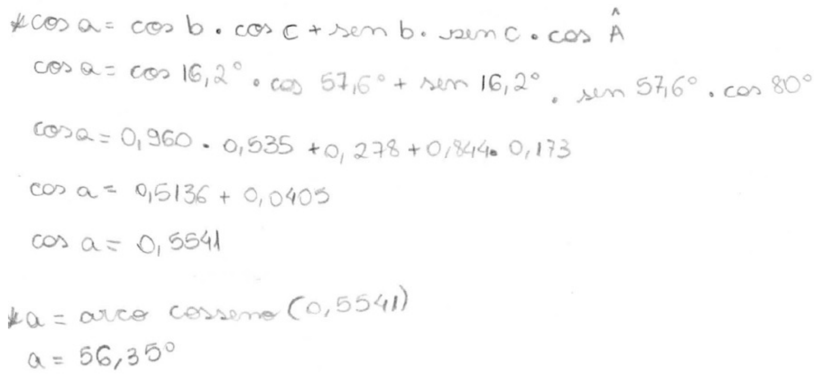

Figura 52: Operações realizadas pelo Aluno 11 para a obtenção do valor de d em graus

No item (i), com o valor do raio e uma regra de três simples, os alunos encontraram, sem dificuldades, o valor para d o valor de 6268,356 km.

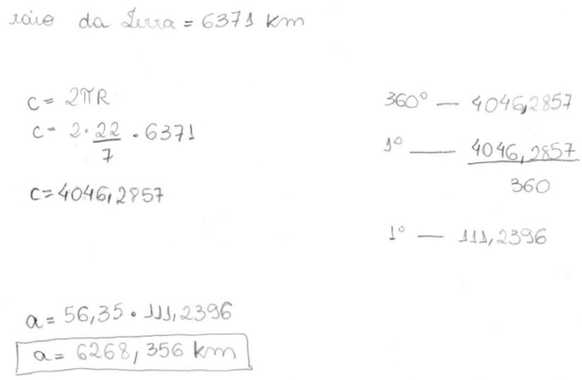

Figura 53: Operações realizadas pelo Aluno 11 para a obtenção do valor de d em quilômetros

Análise *a posteriori*

Nesta atividade percebeu-se um dinamismo por parte dos alunos, por saberem que estavam muito próximos de obter a distâncias entre as ilhas. Eles não apresentaram muitas dificuldades, apenas no final, quando tiveram que usar a calculadora, foi necessária uma intervenção.

Na Atividade 02 a ferramenta para medição de distância do *Google Maps* forneceu o valor de 6390,95 km para a distância entre as ilhas. O valor encontrado pelos alunos é bastante razoável (diferença de 122,6 km, aproximadamente 1,92% de erro), visto que o valor encontrado pela ferramenta do *Google Maps* utilizou as coordenadas exatas das ilhas, a saber: Ilha Lambda (32º18'N, 64º47'W) e da Ilha do Urso (74º30'N, 19º00'E), já os alunos usaram uma aproximação das coordenadas no mapa-múndi.

Esta sequência de atividades perpassou pela Álgebra, Aritmética, Trigonometria e Geometria Esférica, proporcionando muitas discussões e reflexões. Os conhecimentos adquiridos nas atividades, somados aos conhecimentos prévios dos alunos e à interação entre os alunos envolvidos foram fundamentais para se chegar ao término das atividades com êxito.

Assim como Andrade (2011, p. 105) acreditamos que "... um trabalho de pesquisa sempre será um produto inacabado e que esta particularidade é que lhe confere sua singularidade."

Podem ser acrescentadas atividades complementares a estas envolvendo outros tópicos da Geometria Esférica, conforme por ser visto no Anexo C.

6 *CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS*

Neste capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e são propostas algumas investigações futuras.

6.1 CONCLUSÕES

Com o decorrer da aplicação das atividades pode-se perceber que os alunos conseguiram compreender os conceitos desta "nova" Geometria fazendo relações desta com a Geometria Plana. Os alunos fizeram relações entre as Geometrias Plana e Esférica no sentido de compará-las e diferenciá-las. A sequência foi desenvolvida de maneira progressiva, gradual, de tal forma que nos é permitido concluir que houve uma aprendizagem significativa dos conceitos abordados.

Era esperado que houvesse certa resistência por parte dos alunos no aprendizado dos conceitos da Geometria Esférica, isto porque a Geometria que eles tinham conhecimento era a Geometria Plana (Euclidiana). Na realização destas atividades entendeu-se que os erros cometidos fazem parte da construção de um novo saber, pois estes erros são oriundos de conhecimentos prévios dos alunos.

O questionário respondido pelos alunos teve um importante papel neste trabalho, além de promover um levantamento do perfil dos alunos envolvidos, ele auxiliou na elaboração de um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos, o que culminou nas análises *a priori* das atividades do Capítulo 5.

Os alunos faziam as atividades em duplas e depois expunham as soluções e questionamentos. Esta forma de trabalhar, dividindo o grupo em duplas, associada ao aspecto descontraído que o ambiente oferecia, mostrou-se satisfatória, visto que em duplas há uma melhor interação entre os componentes e todos os elementos do grupo tem uma maior participação nas atividades.

Por mais descontraído que tenha sido o trabalho, sempre se fez uso da linguagem matemática, respeitando sua nomenclatura, como por exemplo, a diferenciação entre círculo e circunferência, esfera e superfície esférica etc.

Ao trabalharem com materiais manipuláveis, como o globo terrestre e o mapa-múndi, verificou-se uma maior assimilação dos conteúdos envolvendo a Geografia e uma maior facilidade nos cálculos matemáticos envolvidos. Os materiais manipuláveis, além de promoverem uma abstração dos modelos, proporcionando uma imagem mais apropriada das representações que os alunos usam para compreender e raciocinar, deixam a atividade mais dinâmica e descontraída. Desta forma estes materiais se mostraram muito eficazes no desenvolvimento deste trabalho.

Os momentos mais importantes do experimento foram aqueles em que ocorriam rupturas nos conceitos e propriedades da Geometria Plana, como por exemplo, o fato de não existirem retas paralelas na Geometria Esférica, da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer na Geometria Esférica exceder 180º etc. Nestes momentos eram feitas pausas para reflexão para que ficasse claro que o que era verdade em uma Geometria, não necessariamente seria em outra.

Esta sequência de atividades, elaborada para o ensino das Geometrias não Euclidianas a partir da reconstrução dos conceitos da Geometria Euclidiana, trouxe muitas contribuições para o ensino-aprendizagem dos conceitos básicos da Geometria Esférica por proporcionar reflexões e questionamentos sobre aspectos do ensino da Geometria Esférica, tais como: por que ensinar, como ensinar e quando ensinar esta Geometria.

A resposta à primeira pergunta encontra-se na importância de tal Geometria para uma melhor visão do espaço por parte do aluno, afinal de contas o mundo não é plano.

Quanto à segunda pergunta, a resposta é exatamente a proposta deste trabalho, esta 'nova' Geometria pode ser ensinada através de uma sequência de atividades interdisciplinares desencadeadas por uma situação-problema. A resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino apontada pelos PCNEM. Esta contextualização permite que diversos conhecimentos sejam utilizados para resolver a situação-problema proposta, promovendo uma inter-relação entre os conteúdos de Matemática e Geografia.

A terceira pergunta abre uma grande variedade de respostas. Não há um momento "ideal" para se introduzir esta 'nova' Geometria no currículo. Nossa proposta é que se insira no começo do segundo bimestre, logo após uma introdução à linguagem de conjuntos (conceitos, operações, problemas etc.) e temas básicos de álgebra (equações e inequações polinomiais do 1º e 2º graus, sistemas de equações) vistos no 1º bimestre, pois nesse tempo os alunos terão visto em Geografia noções de cartografia, escalas e projeções cartográficas. Desta forma esta sequência de atividades pode ser trabalhada em conjunto com o professor de Geografia.

Conseguiu-se realizar todas as atividades experimentais que fazem parte desta dissertação no tempo predeterminado. A divisão das atividades em quatro sessões com 1h40min de duração cada uma, isto é, duas horas-aula de 50min geminadas, foi suficiente para não alongar as atividades, o que poderia tornar os trabalhos cansativos, lembrando-se que o objetivo final era chegar no resultado (calcular a distância entre as ilhas).

Esta proposta, além de proporcionar uma apropriação mais consistente do conteúdo, também contribui para que o professor tenha um método alternativo para ensinar Geometria, utilizando-se de materiais manipuláveis e dispensando, desta maneira, o método tradicional. Concomitante a isso, os alunos poderão vivenciar um aprendizado contextualizado e lúdico, o que fará com que o aluno tenha outra visão da Matemática, como se pode perceber nos relatórios feitos pelos alunos ao final da sequência de atividades. Neste relatório foi pedido aos alunos que colocassem suas opiniões sobre o experimento comparando as expectativas com os resultados. Estes relatórios, que podem ser vistos no Apêndice C, confirmam a validade da proposta desta pesquisa e apontam para outro ponto importante: a visão que se tem de uma Matemática inacessível onde só se resolvem exercícios, que separam os que conseguem dos que não conseguem resolver, pode mudar. É claro que esta mudança não acontecerá rapidamente, para que isto aconteça se propõe uma didática gradativa e contextualizada, onde o professor procure trabalhar os conteúdos progressivamente e fazendo conexões com outras disciplinas.

Os objetivos foram alcançados, tanto gerais como específicos, posto que foi possível inter-relacionar a Matemática (Trigonometria) com a Geografia, a História e a Educação Artística quando foram propostas atividades que levaram os alunos a resolverem problemas de Matemática (cálculo de distância) utilizando coordenadas geográficas, além disso desenvolveram seu senso artístico e criativo ao trabalharem com a bola de isopor e ao construir o tetraedro convexo para demonstrar a Relação Trigonométrica dos Triângulos Esféricos.

Este trabalho, portanto, mostra que é possível o professor introduzir no seu plano de aula as noções básicas de Geometria Esférica abordadas na sequência de atividades aqui proposta, articulando teoria e prática e trabalhando interdisciplinarmente e com contextualização.

6.2 PESQUISAS FUTURAS

Para trabalhos futuros se sugere:

- Aplicar as atividades propostas no Anexo C, complementando as atividades do Capítulo 5;
- Aplicar as atividades propostas no Anexo D e investigar sua potencialidade como proposta de ensino;
- Desenvolver o Projeto Eratóstenes, mencionado na Atividade 04 do Capítulo 5;
- Inserir Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) no ensino de Geometrias não Euclidianas, isto é, introduzir softwares que permitam a construção/visualização de elementos da Geometria Esférica, como por exemplo o CABRI - GÉOMÈTRE II Plus;
- Investigar outras características e propriedades da Geometria Esférica, tais como semelhança e congruência de triângulos, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras;
- Investigar a relação entre a área de um triângulo esférico e a soma dos seus ângulos internos. E com isto determinar o "excesso esférico".

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. Apostila PIC 2011, disponível em <http://www.obmep.org.br/prog_ic_2010/apostila2010.html>. Acesso em 21 de dez de 2012.

[2] ANDRADE, M. L. T. D. **Geometria Esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico**. 2011. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

[3] ARTIGUE, M. **Engenharia Didáctica**. In: BRUNI, J. Didáctica das Matemáticas. Tradução por Maria José Figueiredo. Liboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-197. (Coleção Horizontes Pedagógicos).

[4] BARTH, B-M. **O saber em construção**. Lisboa. Instituto Piaget, [1993?]

[5] BARBOSA, J. L. M **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. 161p. (Coleção do Professor de Matemática).

[6] BARBOSA, J. L. M. **Geometria hiperbólica**. Goiânia. Ed. Da UFG, 2002.

[7] BARBOSA, L. N. S. C. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas.** 2011. 57f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

[8] BLOG FÍSICA MAIA. **Órbitas dos satélites**. Disponível em <http://fisicamaia.blogspot.com.br/2009/03/orbitas-dos-satelites.html>. Acesso em 04 de fev de 2013.

[9] BONOLA, R. **Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development**. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

[10] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[11] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Geografia.** (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[12] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III e Parte IV**. Brasília: MEC, 1999.

[13] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

[14] BRAZ, F. M. **História da Geometria Hiperbólica.** 2009. Monografia (Especialização em Matemática para Professores) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

[15] BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico.** 1995. 187f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

[16] BROUSSEAU, G. **Fondemens et méthodes de la didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33 - 115. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.

[17] CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 6, 25-48, dez de 1987.

[18] COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

[19] CRUZ e SANTOS. **Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas – Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio.** Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-8.pdf>. Acesso em 31 de dez de 2012.

[20] DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência Matemática.** Lisboa: Gradiva, 1995.

[21] DUARTE, P. A. **Fundamentos de Cartografia.** 2 ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2002. 208p. (Série Didática).

[22] DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano - Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Editora da Física, 2009.

[23] EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

[24] GREENBERG, M. J. **Euclidean an non-euclidean geometies**: development and history. 3 ed. New York: Freeman, 2001.

[25] INOVAÇÃO TECNOLÓGICA. **Conheça os dois satélites que colidiram no espaço**. Disponível em <http://www.inovacaotecnologica.com.br /noticias/noticia.php?artigo=conhecaos- dois-satelites-que-colidiram-no-espacoid=>. Acesso em 04 de fev de 2013.

[26] JOLY, F. **A Cartografia.**; tradução: Tânia Pellegrini. 4 ed. Campinas: Ed. Papirus, 1990. 136p.

[27] KATZ, V. J. A. **A History of mathematics:** an introduction. 2 ed. Addisson-Wesley, 1998.

[28] MARQUEZE, J. P. **As faces dos sólidos platônicos na superfície esférica: uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas de feometria esférica.** 2006. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

[29] MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Acesso em 01 de jan de 2013.

[30] OBSERVATÓRIO NACIONAL. **A Geometria dos Espaços Curvos ou Geometria Não-Euclidiana**. Disponível em <http://www.miniweb.com.br/ ciencias/artigos/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf>. Acesso em 21 de dez de 2012.

[31] PATAKI, I. **Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar.** 2003. 214f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

[32] PRESTES, I. C. R. **Geometria esférica: uma conexão com a Geografia.** 2006. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

[33] ROSENFELD, B. A. **A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space**. Trad. Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.

[34] RYAN, P. J. **Euclidean an non-Euclidean Geometry:** an analytic approach. New York: Cambridge University Press, 1986.

[35] SANTOS, J. C. A. P. **Um proposta de geometria não euclidiana para sala de aula**. São Paulo: IME - USP; Projeto de ensino de matemática, 2009.

[36] SEARA DA CIÊNCIA. **Qual é a geometria do Universo?**. Disponível em <http://www.searadaciencia.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica7.htm>. Acesso em 03 de fev de 2013.

[37] SILVA, A. P. B. **O desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas durante o século XIX.** 2006. 131f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

[38] TRUDEAU, R. J. **The non-euclidean revolution**. Boston: Birkhäuser, 1987.

APÊNDICE A – SOLICITAÇÃO PARA A EXECUÇÃO DA PESQUISA

SOLICITAÇÃO

Ilmo Sr. José Roberto Ribeiro Lima
Diretor Geral do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – Campus Barbacena

Eu, Leandro de Jesus Dueli, servidor pertencente ao quadro permanente de pessoal deste IF, matrícula SIAPE nº 1xxxxx2, aluno regular do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Juiz de Fora, sirvo-me do presente para solicitar a Vossa Senhoria a autorização para efetuar um procedimento experimental com alunos do 1º Ano do Curso Técnico em Hospedagem Integrado ao Ensino Médio. Trata-se de uma sequência de atividades envolvendo o conteúdo "Geometria Esférica". Estas atividades serão desenvolvidas com os alunos interessados em participar em horários preestabelecidos. A proposta inicial é que sejam realizadas durante a semana à tarde, podendo também serem realizadas aos sábados. Estão previstos 6 encontros e a duração de cada um deles será de aproximadamente uma hora e trinta minutos. Em anexo encontra-se um modelo de termo de anuência e concessão que será enviado aos pais, para que tomem ciência do projeto de pesquisa e como se dará o trabalho.

Nestes termos, peço deferimento.

Barbacena, 02 de janeiro de 2013

Leandro de Jesus Dueli

APÊNDICE B – AUTORIZAÇÃO DOS RESPONSÁVEIS

Termo de Anuência e Concessão de Imagens

Pesquisa para Dissertação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF.
Projeto: Geometria Esférica: Propostas de atividades interdisciplinares.
Pesquisador: Leandro de Jesus Dueli
Orientadora: Profª Dra. Valéria Mattos da Rosa.

Este projeto propõe elaborar propostas de sequências didáticas interdisciplinares para o desenvolvimento de conteúdos de Geometria relacionados com a Geografia. Nestas sequências será investigada a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica. Para tanto serão conduzidas algumas sessões de aulas fora do horário normal de aulas com alunos do 1º Ano do Curso Técnico em Hospedagem Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais - campus Barbacena. Durante essas sessões os alunos serão acompanhados na compreensão dos conceitos que relacionam a Matemática e a Geografia. Os registros serão feitos durante as aulas através de filmagens, fotografias e gravações que poderão ser divulgados. Poderá haver benefícios para o aluno participante deste estudo, uma vez que estaremos desenvolvendo o ensino-aprendizagem da Matemática. Após a comunidade Matemática tomar conhecimento de nossas conclusões, poderão ocorrer mudanças nas práticas de ensino de Matemática.

Este TERMO é para certificar que eu, ,
concordo em participar como voluntário(a) do projeto científico acima mencionado.

Por meio deste, dou permissão para ser filmado (a) e fotografado (a) e que todas as informações possam ser gravadas em CD e DVD. Estou ciente de que, ao término da pesquisa, essas informações e os resultados poderão ser divulgados.

Barbacena, de janeiro de 2013.

Aluno(a)

Responsável pelo(a) aluno(a)

Pesquisador

APÊNDICE C – RELATÓRIO DOS ALUNOS

Neste Apêndice apresentamos os relatórios de alguns alunos contendo suas opiniões sobre a sequência de atividades. Na última sessão alguns alunos faltaram. As atividades da última sessão, juntamente com o relatório, seriam aplicadas aos ausentes em data posterior ao término deste trabalho.

Aluno 11: "De modo geral, minha opinião sobre este pequeno curso é que foi excelente, muito além de minhas expectativas. Quando aceitei fazer algumas aulas extras de Matemática, o que eu esperava eram folhas e folhas de exercícios, aplicados de maneira a avaliar quem saberia e quem não saberia.

E não foi pequena a minha surpresa ao me deparar com aulas práticas e dinâmicas de uma matéria pela qual eu não tenho muita afinidade. O método de ensino foi extraordinário, principalmente por ensinar de maneira divertida algo que é totalmente diferente do que se ensina dentro de sala de aula.

Recomendo essa dinâmica de ensino, penso que a Matemática seria mais bem vista dessa forma.

Quanto aos exercícios, também os achei deliciosos de resolver, misturando conceitos antigos e novos, e Geografia, o que é estimulante para quem está fazendo."

Aluno 04: "Infelizmente não pude vir nos outros dias, mas neste dia em que eu vim achei muito interessante apesar de não ter entendido algumas coisas, principalmente por este fato.

Mas gostei bastante, por isso fiquei ressentido disto.

Gostaria de parabenizá-lo pela iniciativa e desejar boa sorte no seu mestrado, obrigado pela oportunidade de conhecer a Matemática de outra maneira."

Aluno 06: "Esta foi uma experiência repleta de descobertas, como um verdadeiro marujo descobrindo novos horizontes.

Já havia passado por este oceano, mas não havia visto a grandeza de suas ‘curvas’.

Foi muito bom o tempo passado neste navio, os perigos (um dia estar de cabeça para baixo) e descobertas (raio da Terra, designação de retas, distâncias entre pontos em uma superfície esférica etc.).

Hoje gosto muito mais deste oceano e pretendo estar sempre descobrindo novos.

Desculpe pelos defeitos do marujo e OBRIGADA CAPITÃO.”

Aluno 08: “Foi muito bom e divertido aulas de Matemática práticas pois nos ajudam a entender mais claramente o universo matemático.

Só faltou uma coisa: jogar o capitão ao mar.”

Aluno 03: “Eu gostei muito das aulas, pois aprendi muitas coisas novas.

Eu acredito que o professor seja como o *Google*, porque no final as soluções sempre são óbvias, mas mesmo assim foi muito divertido.”

Aluno 07: “Gostei muito do projeto promovido, apesar de gostar muito da disciplina de Matemática, não gostava muito da parte de Geometria. Porém, com esses encontros, onde aprendemos sobre Geometria não Euclidiana (a parte de Geometria Esférica), estou gostando bem mais de Geometria e me interessando mais ainda pela Matemática.

Bom, apesar de não gostar muito de Geografia, ela me ajudou muito a entender a Geometria Esférica e aí o projeto se tornou bem mais convidativo.

Sinceramente, os resultados superaram minhas expectativas, consegui entender o que me foi proposto e todo conhecimento é bem vindo, então posso dizer que gostei demais do projeto e estou realmente satisfeita.”

Aluno 10: “Ao meu ver o curso foi uma surpresa, principalmente quanto a forma de trabalhar esta Geometria. Achar a distância entre duas ilhas consideravelmente distantes foi desafiador. Gostei das aulas, das práticas, da utilização de coisas concretas para melhor observação (já que é de inteira importância para a imaginação neste estudo).

Enfim, foi uma experiência válida e inovadora, onde se aprende a ‘ver o mundo de outra forma’ literalmente, com novas perspectivas e experimentações.”

ANEXO A – QUESTIONÁRIO

Caro Aluno(a),

O questionário abaixo se destina à pesquisa de Mestrado de Leandro de Jesus Dueli em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF. A Dissertação tem o seguinte título: *Geometria Esférica: Propostas de sequências interdisciplinares.*

A finalidade do questionário é obter informações sobre seu perfil e sobre suas noções de Trigonometria. As informações obtidas no questionário serão mantidas em total sigilo, servindo apenas para a finalidade desta pesquisa. Sua colaboração é de fundamental importância.

Pela contribuição, desde já agradeço.

Leandro de Jesus Dueli

Questionário

1. Qual é o seu nome?
2. Qual é sua idade?
3. Você mora em zona urbana ou rural?
4. Você gosta da disciplina de Matemática?
5. Você sabe o significado da palavra Trigonometria? Em caso afirmativo escreva qual é, se não sabe, escreva o que você acha que significa.
6. Para você o que é um ângulo? Descreva com suas palavras, se quiser pode usar o auxílio de desenhos.
7. O que é um triângulo retângulo?

8. Você já estudou as relações trigonométricas seno e cosseno? Em caso afirmativo, quais são e o que elas representam?

9. Você conhece a lei dos cossenos dada pela fórmula: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos A$? Para que serve?

10. Você sabe identificar um arco de circunferência e um ângulo central? (Novamente, se quiser use o auxílio de desenhos)

11. Você sabe qual é a relação entre um arco de circunferência e o ângulo central que o determina? Novamente, se quiser pode usar o auxílio de desenhos para responder à pergunta.

12. Qual (is) unidade (s) de medida usamos para medir arcos de circunferência?

13. Qual (is) unidade (s) de medida é (são) utilizada (s) para medir comprimento de uma circunferência? Como é calculado o comprimento de uma circunferência?

14. Como você resolveria a seguinte operação: 180 graus menos 48 graus e 30 minutos, ou seja, $180^o - 48^o30'$?

15. Você sabe determinar a posição de um ponto sobre a superfície terrestre? O que é necessário possuir para determiná-la?

ANEXO B – CÁLCULO DO RAIO DA TERRA

Segundo Alves (2012, p. 23) o cálculo do raio da Terra mais notável da Antiguidade foi realizado pelo grego Eratóstenes (276-196 a.C.). Eratóstenes trabalhava na biblioteca do museu de Alexandria e desta forma teve acesso a papiros relacionados a acontecimentos astronômicos importantes acumuladas durante séculos. Um deles é o fato de que em Siena, 5 000 estádios (medida grega de comprimento, equivale a 185 metros aproximadamente) ao sul de Alexandria e situada aproximadamente no mesmo meridiano, o Sol se refletia no fundo de um poço ao meio-dia de um determinado dia de cada ano (solstício[1] de verão do hemisfério norte). Ao meio-dia deste dia, Eratóstenes mediu o ângulo que o raio do Sol (Figura 54) fazia com a vertical de Alexandria, achando aproximadamente 7º12'. Este ângulo equivale a aproximadamente $1/50$ do comprimento do meridiano terrestre - que é de 360º (2π).

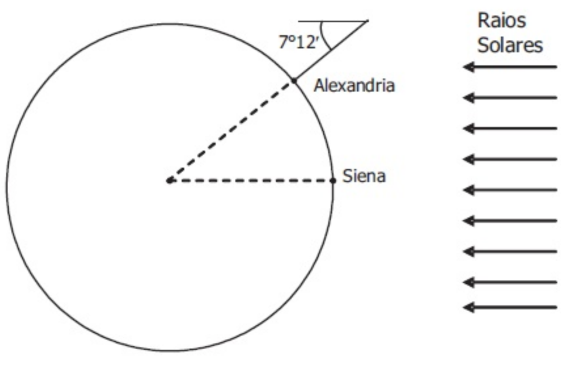

Figura 54: Medindo o raio da Terra. Fonte: ALVES (2012, p. 23)

Eratóstenes determinou o comprimento da circunferência terrestre, admitindo que os raios solares cheguem ao nosso planeta praticamente paralelos, utilizando o teorema das

[1]Neste dia, aproximadamente 21 de junho, o hemisfério norte está mais voltado para o Sol, de maneira que recebe mais luz, marcando assim o início do verão no hemisfério norte e início do inverno no hemisfério sul. Este é o dia mais longo e a noite mais curta do hemisfério norte.

retas paralelas[2] e uma regra de três simples.

$$\begin{array}{rcl} 1/50 \times 2\pi & \cdots & 925 \text{ Km} \\ 2\pi & \cdots & \text{C} \end{array}$$

Então $C = 46250$ Km é a medida da circunferência terrestre. O comprimento da circunferência, como se sabe, é dado por $2\pi r$, e o valor de π já havia sido determinado por Arquimedes[3] como sendo $22/7$, desta forma tem-se:

$$C = 2\pi r \Rightarrow 46250 = 2 \times 22/7 \times r \Rightarrow r = 46250/(2 \times 22/7) \Rightarrow r = 7.357,95 \text{ km}$$

Hoje este valor está medido muito precisamente correspondendo a 6.371 km (considerando o relevo e o achatamento nos polos). Em uma época em que ainda não havia sido desenvolvido o cálculo e muito menos aparelhos capazes de realizar medidas de longas escalas de comprimento, o valor encontrado por Eratóstenes é bastante razoável.

[2]Este teorema nos diz que se duas retas paralelas são interceptadas por uma transversal, então seus ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) são congruentes (iguais).

[3]Arquimedes (287 a.C. − 212 a.C.)

ANEXO C – ATIVIDADES COMPLEMENTARES À SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Estas atividades, também sugeridas por PATAKI (2003), podem ser acrescentadas às 9 já propostas no Capítulo 5.

- Atividade Complementar 01:

Questões:
a) Como você define *reta* numa superfície esférica?
b) Numa superfície esférica existem retas concorrentes? Justifique.
c) Numa superfície esférica existem retas paralelas? Justifique.
d) Os paralelos terrestres são retas paralelas numa superfície esférica? Justifique.
e) Na Geometria Esférica a reta é infinita? Justifique.
f) Numa superfície esférica como você define segmento de reta?

- Atividade Complementar 02:

Questões:
a) Utilizando as réguas esféricas feitas na Atividade 05, desenhe duas retas na bola de isopor. Quantas regiões internas à elas ficam determinadas? Caracterize essas regiões.
b) Qual a condição para que duas retas sejam perpendiculares entre si numa superfície esférica? O que você pode concluir a respeito dos ângulos determinados pela interseção dessas retas?

- Atividade Complementar 03:

Questões:

a) Como pode ser definido polígono na Geometria Esférica?

b) É possível construir um polígono de dois lados nessa Geometria? Justifique.

c) Como pode ser definido um quadrilátero?

d) É possível construir um quadrado? Justifique.

- Atividade Complementar 04:

Questões:

a) Marque os pontos A, B e C, distintos, na bola de isopor. Quantos triângulos você pode formar com esses vértices?

b) Diante da conclusão anterior, como você complementa a sua definição de triângulo esférico escrita na Atividade 07?

Sabe-se que na Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180º. Vejamos o que acontece num triângulo esférico.

c) Marque um ponto P numa superfície esférica. Trace uma reta da qual P é o polo. Existe um triângulo que tem apenas um ângulo reto?

d) É possível construir um triângulo que tenha dois ângulos retos numa superfície esférica? Justifique.

e) É possível construir um triângulo que tenha três ângulos retos numa superfície esférica? Justifique.

f) Qual é a soma S_i das medidas dos ângulos internos de um triângulo que possui três ângulos retos?

g) O que se pode concluir sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo numa superfície esférica?

h) Considere, numa superfície esférica, um triângulo FGH, cujos ângulos internos medem f, g e h. Como você define ângulo externo a esses ângulos internos? Qual a medida dos ângulos externos?

i) Qual é a soma S_e das medidas dos ângulos externos de um triângulo numa superfície esférica?

- Atividade Complementar 05:

Na Geometria Euclidiana triângulos são semelhantes se, e somente se, todos os ângulos correspondentes são congruentes e todos os lados correspondentes são proporcionais (AAA).

a) Desenhe numa superfície esférica um triângulo ABC cujos lados têm uma medida qualquer. Desenhe outro triângulo DEF, tal que a medida de seus lados seja a metade da medida dos lados do triângulo ABC. Você pode concluir que os ângulos do triângulo DEF são congruentes aos ângulos do triângulo ABC? Podemos dizer que esses triângulos são semelhantes? Justifique.
b) Na Geometria Euclidiana a congruência de triângulos pode ser verificada nos seguintes casos: LLL, LAL e ALA. Verifique essas possibilidades de congruência de triângulos numa superfície esférica. Há mais algum caso possível de congruência?
c) Numa superfície esférica, é válido o Teorema de Pitágoras? Justifique.

ANEXO D – FUNCIONAMENTO DO GPS

Neste Anexo é proposta uma sequência de atividades com o objetivo de levar os alunos ao conhecimento do procedimento matemático para a localização de um ponto qualquer na superfície terrestre, isto é, o funcionamento matemático do GPS. Estas atividades foram extraídas de Alves (2012), a diferença é que aqui propomos uma fragmentação do texto. O texto foi dividido em oito atividades, quatro atividades compõe a primeira sessão (Geometria Analítica) e quatro atividades compõe a segunda sessão (A Matemática do GPS).

Esta sequência é proposta para alunos da 3ª série do Ensino Médio, pois nesta etapa, os alunos já conhecem a Geometria de Euclides, seus axiomas e postulados, já dominam as figuras planas, sabem se localizar no globo, determinam soluções (se houverem) de sistemas lineares, trabalham com matrizes etc. O que eles podem não saber ainda são os conceitos de geometria esférica, isto se não lhes foi ensinado no primeiro ou segundo ano do ensino médio. Caso eles já tenham noções de geometria esférica, como determinar distâncias, operar com triângulos esféricos etc. eles podem partir direto para esta proposta. Do contrário, deve-se utilizar a proposta apresentada no Capítulo 5 antes de introduzir esta.

Na 3ª série do Ensino Médio os alunos estudam geometria analítica. Neste conteúdo, os alunos determinam as equações de retas e circunferências tendo as condições necessárias para tal.

Na primeira sessão são apresentadas propostas de atividades vinculadas à Geometria Analítica e na segunda são apresentadas propostas de atividades a respeito do GPS e de sua matemática.

D.1 GEOMETRIA ANALÍTICA

- Atividade 01: Deduzir a equação da esfera, tanto a reduzida como a geral, e acompanhar alguns exemplos.

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, uma dupla aplicação do teorema de Pitágoras mostra que a distância de P a O é expressa por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A Figura 55, a seguir, exibe a posição do ponto P no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O e auxilia na dedução da distância de O a P.

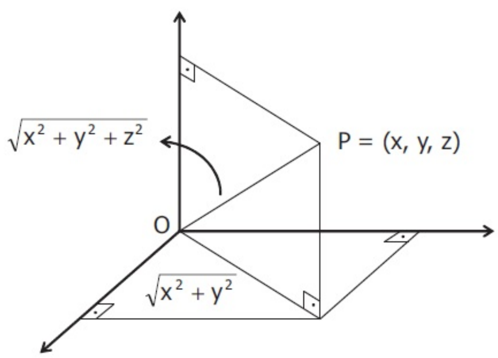

Figura 55: Coordenadas Cartesianas do ponto P. Fonte: ALVES (2012, p. 54)

De maneira geral, dados $P = (x, y, z)$ e $C = (u, v, w)$ a distância entre eles é dada pela fórmula por

$$d(P, C) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}.$$

Sendo r um número real positivo, a superfície esférica S de centro $C = (u, v, w)$ e raio r é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2 \tag{D.1}$$

A equação (D.1) acima é denominada *equação reduzida* de S. Assim, por exemplo, $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ é a equação reduzida da superfície esférica de centro $C =$

$(-1, 2, 0)$ e raio $r = \sqrt{4} = 2$. Desenvolvendo os quadrados em (D.1), obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \tag{D.2}$$

que é uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{D.3}$$

onde a, b, c e d são números reais.

A equação (D.3) é denominada *equação geral* de S. Assim, a superfície esférica de centro $C = (-1, 2, 0)$ e raio $r = 2$ tem como equação geral $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Dada uma equação da forma (D.3) quais são as condições sobre as constantes a, b, c e d de tal maneira que (D.3) seja a equação geral de alguma superfície esférica S? Determinando estas condições, quais as coordenadas do centro e qual o raio de S?

Considerando a equação (D.3) e *completando quadrados* temos:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} + z^2 + cz + \frac{c^2}{4} + d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \tag{D.4}$$

A equação (D.4) pode ser reescrita na forma da equação (D.1). Assim,

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d \tag{D.5}$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} = r^2 > 0 \tag{D.6}$$

Desta forma a equação (D.3) será a equação geral de alguma superfície esférica S se, e somente se,

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0 \tag{D.7}$$

Considere, por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 8 = 0$. Nesta equação, $a = 4$, $b = -2$, $c = -6$ e $d = 8$. Verifica-se que esta é a equação de uma superfície esférica, pois a condição (D.7) é satisfeita.

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 16 + 4 + 36 - 32 = 24 > 0$$

O raio r é tal que $r^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$, logo $r = \sqrt{6}$. O centro C desta superfície esférica, de acordo com (D.1) é o ponto de coordenadas $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}) = (-2, 1, 3)$

A equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ não é equação de superfície esférica, pois $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 16 + 0 - 40 = -20 < 0$. Reescrevendo-a na forma (D.1), ter-se-ia $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = -5$. O conjunto solução desta equação é vazio.

Já a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 0$, quando colocada na forma (D.1), pode ser escrita como $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$. A solução desta equação é única, o ponto de coordenadas $(1, 2, 3)$

- Atividade 2: Demonstrar um teorema que desempenhará um importante papel na fundamentação matemática do funcionamento do GPS.

Teorema D.1. Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares então essa intersecção consiste de um único ponto.

Demonstração. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4, respectivamente. Mostraremos que se $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ e C_1, C_2, C_3 e C_4 são não coplanares então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.

Sendo $x^2 + y^2 + z^2 + a_jx + b_jy + c_jz + d_j = 0$ as equações gerais de S_j , onde j = 1, 2, 3, 4, ao subtrairmos essas equações duas a duas obtemos equações lineares em x, y e z uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados.

Tal equação linear determina o plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, subtraindo as equações de S_1 e S_2 obtém-se uma equação do plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando-se os planos que contém $S_1 \cap S_2$, $S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$ temos que se $P = (x, y, z)$ está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ então (x, y, z) é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \tag{D.8}$$

A prova do teorema estará terminada se mostrarmos que o sistema (D.8) tem uma única solução, pois a existência de dois pontos distintos em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ acarretariam duas soluções distintas do sistema linear (D.8).

Sendo $C_j = (u_j, v_j, w_j)$ o centro de S_j , j = 1, 2, 3, 4, comparando as equações (D.2) e (D.3) acima temos $a_j = -2u_j$, $b_j = -2v_j$, $c_j = -2w_j$ de modo que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}$$

Como C_1, C_2, C_3 e C_4 são não-coplanares segue que o determinante à direita não é nulo e, portanto, (D.8) é um sistema linear com determinante não nulo tendo assim uma única solução. □

Evidentemente o simples fato do sistema linear (D.8) ter uma única solução, significando que os centros são não-coplanares, não acarreta necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste de um único ponto P. Em outras palavras, a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é essencial para a validade do teorema.

A eventual solução de (D.8) nos dará o procurado ponto P desde que pertença simultaneamente às quatro superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4.

- Atividade 03: Exemplo.

Considere, por exemplo, as superfícies esféricas abaixo.

S_1: centro $(0, 0, 1)$ e raio $\sqrt{2}$
S_2: centro $(0, 3, 0)$ e raio $\sqrt{10}$
S_3: centro $(2, 0, 0)$ e raio 1
S_4: centro $(0, 0, 0)$ e raio 1

Estas superfícies possuem centros não-coplanares e o sistema (D.8), neste caso, é dado por

$$\begin{cases} 6y - 2z = 0 \\ 4x - 2z - 4 = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \tag{D.9}$$

O sistema (D.9) tem solução única, o ponto $(1, 0, 0)$. Verifica-se que este ponto pertence simultaneamente a S_1, S_2, S_3 e S_4 de modo que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{(1, 0, 0)\}$.

- Atividade 04: Estabelecer a relação entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O no centro da Terra, o eixo Oz positivo apontando na direção do Polo Norte N, o plano Oxy sendo o plano do Equador com o eixo Ox positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo cortando o meridiano de longitude 90ºE (Leste).

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, sejam θ e φ os ângulos assinalados na Figura 56 a seguir.

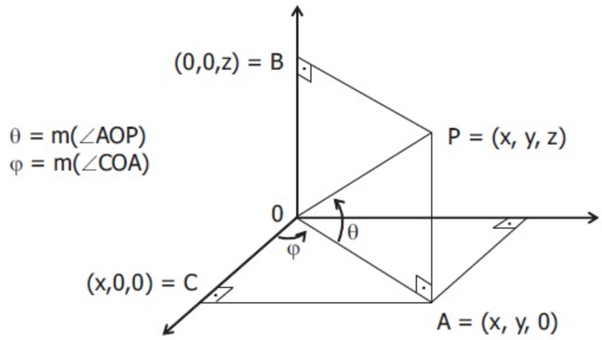

Figura 56: Relação entre coordenadas. Fonte: ALVES (2012, p. 59)

Quando P está sobre a superfície terrestre os ângulos θ e φ acima indicados correspondem exatamente à latitude e longitude do ponto P como anteriormente definidos na subseção (4.2.3). A diferença entre $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra é chamada de *elevação* (ou *altitude*) de $P = (x, y, z)$.

No triângulo retângulo ΔOPB da figura acima temos

$$\cos(90^{\text{o}} - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

e, como $\cos(90^{\text{o}} - \theta) = \sin\theta$, segue que $\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Esta expressão atribui a θ um único valor entre 0 e 90 quando $z > 0$ e um único valor entre -90 e 0 quando $z < 0$. No primeiro caso dizemos que a latitude de P é θ° N enquanto que no segundo a latitude de P é $(-\theta)^\circ$ S.

Por outro lado, no triângulo retângulo ΔOAC temos

$$\sin\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Estas expressões definem um único valor entre 0 e 180 quando $y > 0$ e dizemos que a longitude de P é φ° E. Quando $y < 0$, assume um único valor entre -180 e 0 e, neste caso, a longitude de P é $(-\varphi)^\circ$ W.

Determinemos, como exemplo, as coordenadas geográficas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas por $P = (3\sqrt{3} \times 10^6, -3 \times 10^6, 6\sqrt{3} \times 10^6)$. Considere como unidade de medida o metro.

Temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 27 \times 10^{12} + 9 \times 10^{12} + 108 \times 10^{12} = 144 \times 10^{12}$$

e

$$x^2 + y^2 = 27 \times 10^{12} + 9 \times 10^{12} = 36 \times 10^{12}$$

Logo, $\sin\theta = \frac{6\sqrt{3}\times 10^6}{12\times 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e, portanto, $\theta = 60^o$.

Como $\sin\varphi = -\frac{3\times 10^6}{6\times 10^6} = -\frac{1}{2}$ e $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}\times 10^6}{6\times 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos $\varphi = -30^o$.

Assim as coordenadas geográficas de P são $\theta = 60^o$N e $\varphi = 30^o$W. Supondo o raio da Terra igual a $6,4 \times 10^6$ metros temos que a elevação de P mede $12 \times 10^6 - 6,4 \times 10^6 = 5,6 \times 10^6$ metros.

O processo acima pode ser invertido: conhecendo-se a latitude θ, a longitude φ e a elevação de um ponto P, podemos determinar suas coordenadas cartesianas x, y e z.

Como antes, interpretamos as designações N/S para θ e E/W para φ como positivas/negativas, respectivamente. Por exemplo, um ponto com latitude 40^o N e longitude 70^o W terá $\theta = 40^o$ e $\varphi = -70^o$ enquanto que um ponto com latitude 40^o S e longitude 70^o E terá $\theta = -40^o$ e $\varphi = 70^o$.

A partir da elevação de P obtemos o valor de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ que denotaremos por r. Logo $\sin\theta = \frac{z}{r}$ e, portanto, $z = r\sin\theta$.

Por outro lado, como $\cos\theta = \sin(90 - \theta) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}$ segue que $x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\varphi = r\cos\theta\cos\varphi$ e $y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\varphi = r\cos\theta\sin\varphi$.

O quadro a seguir apresenta, de maneira resumida, as relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}}$$

Na segunda seção veremos a Matemática do GPS.

D.2 A MATEMÁTICA DO GPS

- Atividade 01: A história do GPS.

A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura para *Global Positioning System*. Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites (Figura 57), orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores determinar a sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

Figura 57: Satélite. Fonte: INOVAÇÃO TECNOLÓGICA (2013)

O projeto foi iniciado em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos com o propósito de que aeronaves e navios militares pudessem determinar, em qualquer circunstância de tempo, sua posição exata. Ajuda no lançamento de mísseis e a localização de tropas terrestres em movimento foram outras necessidades que motivaram tal projeto.

Os projetistas do GPS também o planejaram para uso civil, porém, com precisão menor do que para as operações militares.

O sistema NAVSTAR (abreviatura para **Nav**igation **S**atellite **T**iming **a**nd **R**anging), nome oficial dado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos ao GPS, consiste de

Figura 58: Satélites em órbita. Fonte: BLOG FÍSICA MAIA (2013)

um segmento espacial (os satélites), um segmento de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e um segmento do usuário.

Os vinte e quatro satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28º de visualização sobre a Terra. Isso assegura com que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites. Todos os vinte e quatro satélites são controlados pelas estações terrestres de gerenciamento. Existe uma "estação master", localizada no Colorado (Estados Unidos), que com o auxílio de quatro estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitoram o desempenho total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema com o padrão necessário. Após o processamento de todos esses dados, as correções e sinais de controle são transferidas de volta para os satélites.

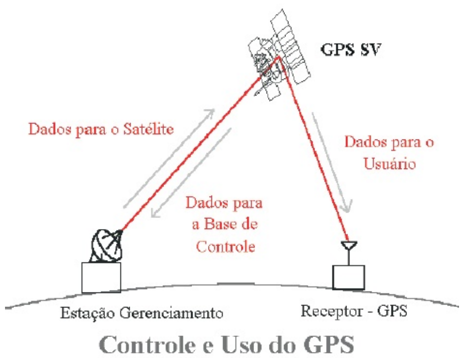

Figura 59: Controle e Uso do GPS. Fonte: ALVES (2012, p. 66)

- Atividade 02: Precisão, utilidade e funcionamento do GPS.

Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário) funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Esta diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal (aproximadamente $2,99792458 \times 10^8$ m/s – a *velocidade da luz*) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama *efeméride*, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas como o descrito na seção anterior. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a equação geral da superfície esférica imaginária. Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada, não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude) e a elevação.

A precisão do tempo é essencial na operação do GPS. Um erro de um microssegundo (10^{-6} segundos) no registro do lapso de tempo desde a transmissão até a sua recepção resulta num erro de 300 metros. Unidades receptoras do GPS extremamente precisas podem determinar sua posição a menos de um metro.

Com o fim da guerra fria, o sistema GPS passou a oferecer uma precisão muito maior para o usuário civil, disponibilizando a ele a mesma precisão que só os militares tinham a algum tempo atrás. Hoje em dia, com auxílio do piloto automático e do GPS, uma aeronave civil é capaz de percorrer distâncias transatlânticas e pousar sem a interferência do piloto com erro de alguns centímetros com o eixo da pista.

A navegação é a função primária do GPS sendo usado em aeronaves, navios, veículos e por indivíduos que usam o receptor portátil ("de bolso"). Atualmente o GPS tem se mostrado útil em diversas situações das quais destacamos algumas.

1. Roteirista de viagens: determinam além da sua posição dentro de uma cidade, quais

as atrações e pontos turísticos mais próximos, hotéis, postos de emergências etc.

2. Monitoramento de abalos sísmicos: tais abalos são precedidos por alterações no campo gravitacional que distorcem as ondas de rádio permitindo, através do GPS, tentar prever a ocorrência de um terremoto com algumas horas de antecedência.

3. Meteorologia: o GPS gera informações para a previsão da meteorologia, estudo do clima e outros campos de pesquisa relacionados.

4. Localização para resgate: o serviço usa o GPS para guiar helicópteros de socorro até o lugar do acidente.

5. Aplicações industriais: áreas infectadas por pestes são identificadas por fotografias aéreas e, com uso do GPS, um trator pode ser guiado para aplicações de pesticidas.

6. Uso militar: coordenadas de ataque, orientação e controle para mísseis balísticos, marcação para artilharia, bombardeio de aeronaves, defesa aérea, rastreamento de submarinos, localização de minas e radares inimigos, atos terroristas etc.

- Atividade 03: Discutir, do ponto de vista matemático, o método utilizado pelo GPS na determinação da posição de um ponto sobre a superfície terrestre.

OBS.: *As informações transmitidas no sistema GPS envolvem, por uma questão de precisão, dez ou mais dígitos. Para um aproveitamento mais realista da atividade, sugerimos a utilização de calculadoras ou softwares com capacidade de resolver sistemas lineares com coeficientes dessa ordem. Uma alternativa, abrindo mão eventualmente da precisão, é trabalhar com um número menor de dígitos utilizando a notação científica. Suponha que o raio da Terra meça* $6,378164 \times 10^6$ *metros e considere a velocidade da luz sendo de* $2,99792458 \times 10^8$ *m/s.*

A tabela abaixo indica as efemérides (em metros) de cada satélite.

	x	**y**	**z**
Satélite 1	$1,877191188 \times 10^6$	$-1,064608026 \times 10^7$	$2,428036099 \times 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \times 10^7$	$-1,308719098 \times 10^7$	$2,036005484 \times 10^7$
Satélite 3	$2,459587359 \times 10^7$	$-4,336916128 \times 10^6$	$9,090267461 \times 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \times 10^6$	$7,251740720 \times 10^6$	$2,527733606 \times 10^7$

Tabela 3: Efemérides de cada satélite. Fonte: ALVES (2012, p. 69)

Um receptor GPS registra os seguintes lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Tabela 4: Lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite. Fonte: ALVES (2012, p. 69)

(a) Calcule a distância entre o receptor e cada satélite.
(b) Escreva as equações gerais das imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais às distâncias calculadas no item anterior.
(c) Determine as coordenadas cartesianas do ponto P que pertence simultaneamente às quatro superfícies esféricas obtidas no item anterior.
(d) Determine a latitude, a longitude e a elevação do ponto P.
(e) Consulte um atlas geográfico ou um globo terrestre para identificar a posição desse usuário do GPS.

- Atividade 04: Determinar distâncias na superfície esférica.

A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando A a B (Figura 60). No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta $\overline{AB}$ e seu comprimento AB é a distância entre A e B. Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta uma vez que ela é curvada em todas as direções e túneis através da Terra não são permitidos. Como medir a distância entre dois pontos A e B neste caso?

Quanto maior o raio de uma circunferência, mais ela se aproxima de ser uma reta. Como as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica S são as circunferências máximas, é razoável esperar que a distância (em S) entre dois pontos A e B seja o comprimento do arco menor $\widehat{AB}$ da circunferência máxima que passa por A e B.

O cálculo desse comprimento pode ser feito a partir do conhecimento da medida α do ângulo $\angle AOB$ onde O é o centro da superfície esférica S. Como o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, uma regra de três simples nos dá o valor procurado.

Sendo r o raio da superfície esférica temos

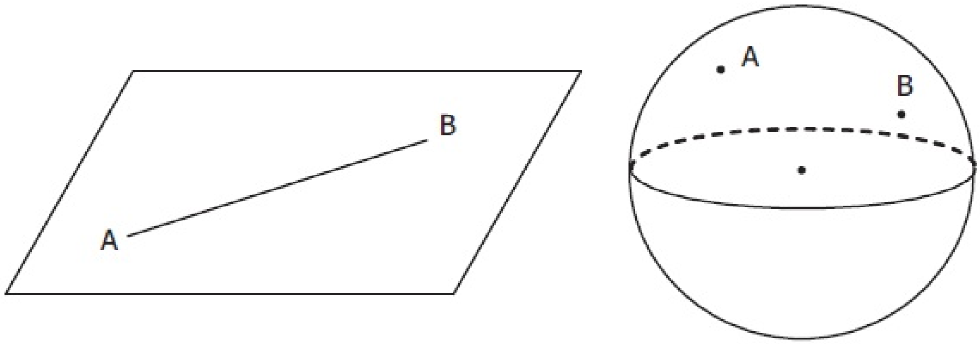

Figura 60: Distâncias. Fonte: ALVES (2012, p. 71)

$$360^o \ldots 2\pi r$$
$$\alpha^\circ \ldots d(A,B)$$

de modo que $d(A,B) = (\alpha/360).(2\pi).r$.

Todos os meridianos estão contidos em circunferências máximas enquanto que, entre os paralelos, apenas o Equador é uma circunferência máxima. Logo quando A e B possuem a mesma longitude, a diferença entre as latitudes pode ser usada para achar a medida α. Analogamente quando A e B estão sobre o Equador é a diferença entre as longitudes que nos permite calcular α.

As cidades de Curitiba e Goiânia, por exemplo, estão sobre o mesmo meridiano (49^o W) e suas latitudes são 26^o S e 17^o S, respectivamente. Estão assim separadas por 9^o de latitude e, tomando o raio da Terra como 6400 km, segue que a distância entre elas é dada por

$$(9/360).(2\pi).6400 \approx 1005km.$$

As cidades de Quito, no Equador, e Entebe, em Uganda, estão ambas sobre o Equador. A longitude de Quito é 79^o W enquanto que a de Entebe é 32^o E. Logo a diferença entre suas longitudes é de 111^o de modo que a distância entre elas é igual a

$$(111/360).(2\pi).6400 \approx 12399km.$$

Quando duas cidades A e B estão sobre um mesmo paralelo, que não seja o Equador, o caminho mais curto possível entre elas, ao contrário do que diz nossa intuição, *não* é o comprimento do arco menor $\widehat{AB}$ daquele paralelo e sim o comprimento do arco menor

$\widehat{AB}$ da circunferência máxima que passa por A e B. Conforme vemos na Figura 61.

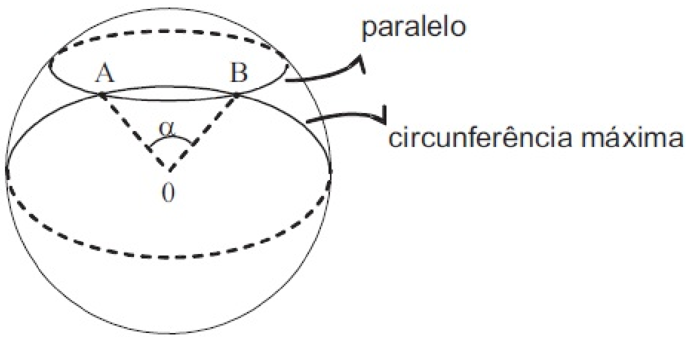

Figura 61: Arco menor. Fonte: ALVES (2012, p. 73)

Por exemplo, as cidades de Nova York e Nápoles estão praticamente sobre o mesmo paralelo (41ºN) e suas longitudes são 74ºW e 14ºE, respectivamente. Pode-se verificar que o comprimento do arco menor do paralelo entre as duas cidades é cerca de 7419 km.

Se A e B representam as cidades de Nova York e Nápoles, respectivamente, vejamos como calcular neste caso o comprimento do arco menor $\widehat{AB}$ da circunferência máxima que passa por A e B, ou seja, como calcular $\alpha = m(\angle AOB)$.

Considerando-se um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas como descrito na Seção D.1 deste Anexo e supondo, como de costume, o raio da Terra medindo 6400 km, podemos escrever

$A = 6400(\cos 41^o \cos(-74^o), \cos 41^o \sin(-74^o), \sin 41^o)$
$B = 6400(\cos 41^o \cos 14^o, \cos 41^o \sin 14^o, \sin 41^o)$,
ou seja,
$A = 6400(0,20802, -0,72547, 0,65606)$
$B = 6400(0,73229, 0,18257, 0,65606)$.

A medida procurada α será obtida por meio da relação

$$< \vec{OA}, \vec{OB} >= ||\vec{OA}||.||\vec{OB}|| \cos\alpha,$$

onde $<,>$ indica o produto interno usual entre os vetores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ enquanto que $||\vec{OA}||$, $||\vec{OB}||$ são os módulos desses vetores, neste caso ambos iguais as 6400.

Como

$< \vec{OA}, \vec{OB} >= 6400^2[0,15233 - 0,13244 + 0,43041] = 6400^2 \times 0,4503,$

segue que $\cos\alpha = 0,4503$ e, portanto, $\alpha = 63^o$.

O comprimento do arco menor $\widehat{AB}$ da circunferência máxima que passa por A e B, que é a distância entre A e B, é então dada por $(63/360).2\pi.6400 \approx 7037$km. Note como esta distância é menor do que aquela calculada ao longo do paralelo.

O argumento acima pode ser utilizado para calcular a distância entre dois pontos quaisquer A e B do globo terrestre. Dadas suas coordenadas geográficas, obtemos suas coordenadas cartesianas e, usando o produto interno $< \vec{OA}, \vec{OB} >$, determinamos $\alpha = m(\angle AOB)$. A distância procurada $d(A,B)$ é então dada por $d(A,B) = (\alpha/360).(2\pi).6400$.

Uma prova formal do fato que $d(A,B)$ é o comprimento do arco menor $\widehat{AB}$ da circunferência máxima que passa por A e B pode ser feito com umas poucas simplificações e a ajuda do cálculo diferencial e integral, mas isso foge dos objetivos do nosso trabalho.