



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# ABORDAGENS DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

PAULO SÉRGIO DE ANDRADE MORAES

Salvador - Bahia

ABRIL DE 2013

# ABORDAGENS DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

PAULO SÉRGIO DE ANDRADE MORAES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.

Salvador - Bahia

Abril de 2013

Moraes, Paulo Sérgio de Andrade

ABORDAGENS DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA  
NO ENSINO BÁSICO / Paulo S. de A. Moraes. – Salvador, 2013.  
53f. : 46 il.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, 2013.

Referências bibliográficas.

1. Carlos Gustavo T. de A. Moreira e Nicolau Corção Saldanha. 2. Telma Morais Madeira. 3. Hung-Hsi Wu. I. dos Santos, Evandro Carlos Ferreira. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. ABORDAGENS DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO .

# ABORDAGENS DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

PAULO SÉRGIO DE ANDRADE MORAES

Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática,  
aprovada em 09 de abril de 2013.

## **Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro  
UFBA

---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva  
UFAL

*À minha família*

# Agradecimentos

Tenho a agradecer, primeiramente, À DEUS por me tranquilizar nos diversos momentos de angústia e preocupação.

Às pessoas mais próximas de mim, como Teresa (esposa), Petra (filha), Flávio (Bodão) e Juci, por não medir esforços em me dar as condições para a realização de meus estudos e a todos os professores que se fizeram presentes neste Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Aos meus pais e irmãos que sempre me incentivaram para continuar e concluir este mestrado, mesmo diante de adversidades.

Seria injusto não mencionar aqui o professor Evandro que, de imediato, aceitou o convite para ser meu orientador; orientação essa, com bastante disposição e paciência para me ajudar na construção deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

*“O grande valor da inteligência  
humana não está em achar a Verdade,  
mas sim em esforçar-se por  
descobri-la.”  
Évariste Galois*

# Resumo

Neste trabalho são apresentadas abordagens da desigualdade isoperimétrica que podem ser utilizadas no ensino básico. Estas incluem: aspectos históricos, deduções formais da desigualdade (dentro as curvas de perímetro fixo a circunferência é a que engloba a maior área) utilizando apenas Geometria Euclidiana e problemas de otimização contextualizados.

Como objetivos específicos pretendemos comparar as áreas de polígonos regulares com perímetro constante; mostrar que a área é uma função do número de lados de um polígono regular (perímetro constante); estabelecer uma fórmula para calcular a área de um polígono regular, convexo e de perímetro constante e resolver problemas de otimização.

**Palavras-chave:** Desigualdade Isoperimétrica; Circunferência; Área; Perímetro constante; Otimização.

# Abstract

This dissertation presents approaches to the isoperimetric inequality that can be used in basic school. These include: historical aspects, formal deductions of the inequality (among the curves of fixed perimeter, a circumference encompasses most area) using only Euclidean Geometry and optimization problems in context.

Specific objectives intend to compare areas of regular polygons with perimeter constant, show that the area is a function of the number of sides of a regular polygon (constant perimeter); establish a formula to calculate the area of a regular polygon, convex and constant perimeter and solve optimization problems.

**Keywords:** Isoperimetric Inequality; Circumference; Area; Constant perimeter; Optimization.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica</b>	<b>6</b>
1.1 Primeira demonstração . . . . .	6
1.1.1 A Elipse . . . . .	6
1.1.2 A Desigualdade Isoperimétrica para triângulos . . . . .	8
1.1.3 A Desigualdade Isoperimétrica para quadriláteros . . . . .	9
1.1.4 A Desigualdade Isoperimétrica para polígonos . . . . .	13
1.1.5 A Desigualdade Isoperimétrica no caso geral . . . . .	20
1.1.5.1 Teorema Principal . . . . .	21
1.2 Segunda demonstração . . . . .	22
<b>2 Aplicações em sala de aula</b>	<b>26</b>
2.1 O porquinho e o seu cercado . . . . .	26
2.2 O retângulo de área máxima . . . . .	27
2.3 O barbante e a construção do triângulo de maior área . . . . .	28
2.4 Aprendendo mais sobre os polígonos regulares isoperimétricos	30
2.4.1 Área em função do número de lados . . . . .	30
2.4.2 Uma solução clássica . . . . .	32
2.5 Função quadrática: máximos e mínimos . . . . .	34
<b>3 Considerações Finais</b>	<b>39</b>
<b>4 Apêndice da dissertação</b>	<b>40</b>
4.1 Conceitos de Perímetro e Área . . . . .	40
4.2 Problema de Dido . . . . .	42
4.2.1 Solução de Steiner . . . . .	42
4.2.2 Variações do Problema de Dido . . . . .	46
4.3 Aplicações . . . . .	47
4.4 Curiosidades . . . . .	49
4.4.1 A obra “Eneida” . . . . .	49

4.4.2	Cartago . . . . .	49
4.4.3	Tunísia . . . . .	50
4.4.4	Mapas de Paris, Colônia e Braga . . . . .	50

**Referências Bibliográficas** **52**

# Introdução

O Problema Isoperimétrico ( isoperimétrico = mesmo perímetro ) teve a sua origem na Grécia Antiga, cerca do século IX a.C., baseada numa lenda, a Lenda de Dido. Esta lenda conta um episódio das migrações fenícias para o ocidente mediterrâneo, mas ficou especialmente conhecida devido ao romance entre Dido e Eneias, reproduzido na Eneida de Virgílio (ver [8]).

Diz a lenda, na sua forma mais antiga, que Muto, o rei de Tiro (antiga cidade fenícia, hoje, Sur, no Líbano), quando morreu, legou o reino aos seus dois filhos, Pigmalião e Elisa (o nome tírio de Dido). Embora Pigmalião fosse ainda uma criança, foi ele quem o povo escolheu para rei. Elisa casou-se com o seu tio Sicarbas, sacerdote de Hércules e segunda figura do Estado depois do rei. Na tentativa de roubar a enorme fortuna do seu cunhado, Pigmalião mandou matar Sicarbas. Dido, horrorizada com o crime, decidiu fugir. Em segredo, carregou os barcos com os tesouros de Sicarbas e fugiu acompanhada por nobres tírios descontentes. Para iludir o irmão durante a fuga, conta a lenda que, durante a viagem, Dido atirou ostensivamente ao mar sacos cheios de areia que dizia estarem cheios de ouro e que oferecia à alma do marido (ver[2]).

Seguiram rumo à África, onde os indígenas os receberam de forma amistosa. Dido pediu um pouco de terra para se estabelecer e, encontrando um lugar adequado ela negociou com o rei Jarbas a compra das terras. Ficou acertado que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar com a pele de um boi. O que aparentemente parecia ser um golpe de gênio: Dido mandou cortar o couro de um boi (Figura 1) em tiras muito finas que depois de unidas formaram um longo fio com que delimitou um território bastante vasto. Os indígenas, obrigados a respeitar a promessa feita, concederam-lhe a terra assim delimitada, onde Dido ergueu a cidade de Cartago.



Figura 1: imagem de Dido e seu povo, cortando o couro de um boi

Como a região a ser escolhida ficava à beira do mar eles decidiram que o formato do terreno seria um semicírculo a ser contornado pela corda.

Sob o reinado de Dido, a cidade de Cartago prosperou e adquiriu tal prestígio que Jarbas, rei indígena, quis casar-se com Dido, ameaçando declarar guerra à cidade caso ela se recusasse. A rainha Dido, que não podia rejeitar a proposta mas abominava essa nova união, pediu um prazo de três meses sob pretexto de acalmar a sombra do primeiro marido com sacrifícios. Quando o prazo terminou, subiu em uma pira fúnebre e suicidou-se.

Foi sobre este tema que Virgílio, sem se preocupar com a cronologia segundo a qual haveria pelo menos 300 anos entre a tomada de Tróia e a fundação de Cartago, fantasiou uma outra versão da estória fazendo intervir Eneias na lenda de Dido, na sua obra Eneida.

Virgílio conta que o herói Eneias é empurrado por uma tempestade para a costa da África e recolhido pelos habitantes de Cartago. Enquanto os companheiros reparavam os navios, Eneias usufruiu da hospitalidade da rainha, que pouco a pouco se apaixonou por ele e se tornou sua amante. Rapidamente o rei Jarbas soube do acontecido e indignado por se ver desprezado conseguiu afastar Eneias com a ajuda de Júpiter. Eneias partiu sem tornar a ver a rainha e esta, quando soube que fora abandonada, ergueu uma enorme pira e suicidou-se entre as chamas.

Na Eneida de Virgílio, a lenda de Dido é descrita com ligeiras alterações sendo, no entanto, semelhante a forma como Dido obteve um território tão vasto.

Na verdade, a rainha Dido deparou-se com o seguinte problema:

*“Dado um fio com um determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar com esse fio ? E de que forma se obtém a quantidade máxima de terra ?”*

Segundo alguns autores(ver [8]), Dido escolheu um local com acesso ao mar, pelo que a sua ideia foi utilizar não só o fio mas também o mar para delimitar a maior porção de terra possível. Por esta razão, o Problema 1 (Figura 2) é designado por problema de Dido.

**Problema 1** *Dentre as curvas planas de comprimento  $L$  com pontos inicial e final numa reta dada, qual é a que juntamente com essa reta delimita a maior área ?*

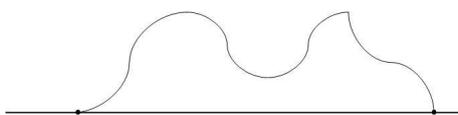
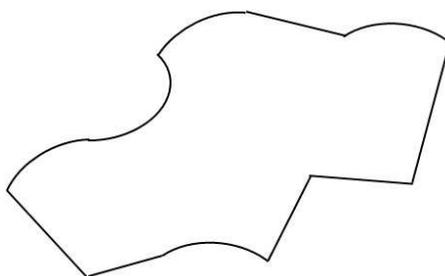


Figura 2: Problema de Dido

O problema matemático que teve por motivação esta lenda (ver [8]) denota-se por problema isoperimétrico clássico e pode ser formulado da seguinte forma:

**Problema 2** *Dentre as curvas simples fechadas do plano, com um dado comprimento, qual é a que delimita a maior área possível ?*



É notável observar que problemas de enunciados tão simples como estes possam ser tão complexos e tenham sido colocados e resolvidos naqueles tempos míticos (ver[2]). Apesar de terem sido resolvidos naquela altura (com base em intuições geométricas, evidentemente), só muitos séculos depois puderam ser justificados. O estudo do problema isoperimétrico clássico permite estabelecer uma propriedade da circunferência usualmente designada por propriedade isoperimétrica da circunferência. A primeira demonstração

desta propriedade aparece num comentário de Teão (335 - 405) à obra *Almagesto* de Ptolomeu (85 - 165) e nos trabalhos de Pappo (290 - 350), mas o seu autor é Zenodoro (200 a.C. - 140 a.C.). Apesar de, nessa época, os gregos terem conhecimento de que a circunferência era a solução do problema isoperimétrico, só a partir de 1880 foi conhecida uma demonstração completa e rigorosa da propriedade isoperimétrica da circunferência, apresentada por Weierstrass (1815 - 1897) nos seus seminários na Universidade de Berlim (ver [7]).

As primeiras abordagens ao estudo do problema isoperimétrico foram obtidas no contexto da Geometria. Zenodoro foi um dos grandes impulsionadores do desenvolvimento do problema, mostrando que, dentre os  $n$ -polígonos de comprimento fixo, o  $n$ -polígono regular é que tem a maior área (assumindo que o  $n$ -polígono existe, isto é, supondo que o  $n$ -polígono podia ser construído com régua e compasso). Só muitos séculos depois surgiram trabalhos de igual impacto. Clara e inegável é também a importância dos trabalhos de Steiner (1796 - 1863). Steiner apresentou várias demonstrações da propriedade isoperimétrica para a circunferência e para as bolas em espaços euclidianos de dimensão superior, usando, entre outros métodos, a chamada simetrização de Steiner. Tal como Zenodoro, Steiner e os seus antecessores ignoraram o problema da existência de solução, fato que foi mais tarde apontado por Dirichlet (1805 - 1859). A solução do problema isoperimétrico foi apresentada por Weierstrass, Schwarz (1843 - 1921) e Edler. Mais tarde, Minkowski (1864-1909) deduziu e utilizou o Teorema de Brunn-Minkowski para demonstrar a desigualdade isoperimétrica, enquanto que Blaschke (1885 - 1962) complementou o método de simetrização de Steiner com o Teorema da Seleção.

Apesar de muitos problemas de otimização terem sido objeto de estudo ao longo dos séculos, só no século XVII deram lugar a uma nova área da Matemática, o cálculo de variações.

É de grande importância o estudo do problema isoperimétrico no desenvolvimento do cálculo de variações. Na tentativa de resolver o problema, Euler deduziu o *Método dos Multiplicadores de Lagrange* (1756), que recebeu o nome de *Método do Problema Isoperimétrico* até o final do século XVIII. Os trabalhos de Euler fornecem uma demonstração completa da propriedade isoperimétrica da circunferência, no entanto tudo indica que Euler não se apercebeu da necessidade de esclarecer se o problema isoperimétrico tinha ou não solução. A questão fundamental da existência de solução de um problema variacional não lhe deve ter ocorrido. No século XIX, Weierstrass mostrou que os métodos do cálculo de variações da época deixavam essa questão em aberto, apresentando alguns exemplos de problemas de otimização que não tinham solução.

Esta questão desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento do cálculo de variações e só foram estabelecidas condições de existência de solução de problemas variacionais muito mais tarde. Aliás, os métodos desenvolvidos para a demonstração do Teorema isoperimétrico foram posteriormente utilizados para caracterizar a existência de solução em problemas variacionais mais gerais.

O estudo do problema isoperimétrico ao longo dos tempos é ainda alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações de desigualdades isoperimétricas nos mais variados contextos matemáticos são ainda estudadas em diferentes áreas de investigação matemática.

A desigualdade isoperimétrica  $L^2 - 4\pi A \geq 0$  onde  $A$  é a área delimitada pela curva  $\gamma$  de comprimento  $L$ , pode ser generalizada para espaços de dimensão superior. Das várias soluções alternativas para o problema isoperimétrico para dimensão superior a dois, mencionam-se a solução de Minkowski (1901) e de Blaschke (1916). A propriedade isoperimétrica tridimensional pode exprimir-se segundo a desigualdade

$$A^3 \geq 36\pi V^2,$$

onde  $A$  é a área de superfície e  $V$  é o volume de um sólido. Além disso, verifica-se a igualdade no caso da superfície esférica.

Tendo em vista que o desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos foi acompanhando os progressos obtidos na resolução do problema isoperimétrico, não é objetivo desta dissertação apresentar demonstrações utilizando o Cálculo Diferencial, mas sim demonstrações utilizando *somente* a Geometria Plana.

# Capítulo 1

## Demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica

Neste capítulo, são apresentadas duas demonstrações para a Desigualdade Isoperimétrica. Embora as duas demonstrações utilizem *somente* conceitos da Geometria Euclidiana Plana, apresentam construções bastante distintas.

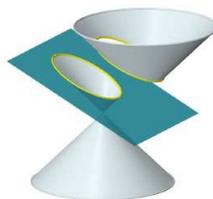
Na primeira, introduziremos o conceito de elipse que vai desempenhar um importante papel nas demonstrações de lemas e proposições até chegarmos ao teorema principal.

Na segunda, utilizaremos o fato de que dentre os triângulos que possuem dois lados com medidas fixas, o *triângulo retângulo* é o que possui a maior área.

### 1.1 Primeira demonstração

#### 1.1.1 A Elipse

É interessante lembrar que a elipse é uma cônica, pois ela pode ser obtida quando intersectamos um plano com uma superfície cônica que não passe pela base e que não intersecte as duas folhas do cone.



**Definição 1** Uma elipse é o conjunto de todos os pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é uma constante positiva dada, sendo esta constante maior do que a distância entre os pontos fixos (ver figura 1.1).

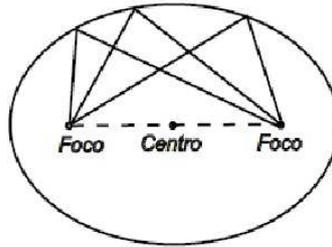


Figura 1.1:

Os dois pontos fixos,  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de *focos* da elipse e o ponto médio  $O$  do segmento que une os focos é chamado de *centro* da elipse. Para ajudar na visualização da definição, imagine que as duas pontas de uma corda estão pregadas nos focos e um lápis descreve uma curva mantendo esticada a corda. A curva resultante será uma elipse, uma vez que as somas das distâncias aos focos é constante, isto é, o comprimento total da corda (ver figura 1.2).

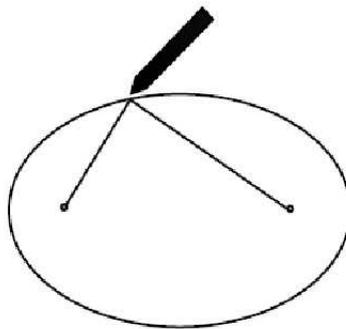


Figura 1.2:

Note que se os focos coincidirem, a elipse se reduz a um círculo. Para elipses que não sejam círculos, o segmento de reta através dos focos com extremidades na elipse é chamado de *eixo maior*, e o segmento de reta através

do centro com extremidades na elipse, e perpendicular ao eixo maior é chamado de *eixo menor*. Os extremos dos eixos são chamados de *vértices* (ver figura 1.3).

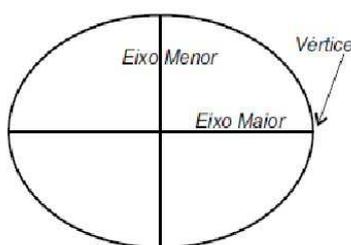


Figura 1.3:

### 1.1.2 A Desigualdade Isoperimétrica para triângulos

Dada uma família de triângulos com base fixa e perímetro fixo, temos:

**Propriedade:** *O terceiro vértice de cada triângulo dessa família situa-se sobre uma elipse cujos focos são os vértices da base.*

**Prova:** De fato, como todos os triângulos da família têm a mesma base e perímetro fixo, a soma das distâncias do terceiro vértice aos outros dois lados é constante. Consequentemente, o terceiro vértice está sobre uma elipse e cujos focos são os vértices da base fixa.

**Lema 1** *Dentre todos os triângulos  $ABC$  de base fixa e perímetro dado, aquele de maior área é o isósceles. Além disso, dados dois triângulos  $ABC$  e  $ABC'$  com mesmo perímetro e  $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$ , a área de  $ABC$  é maior que a área de  $ABC'$ .*

**Prova:** Pela propriedade acima,  $C$  está sobre uma elipse cujos focos são os pontos  $A$  e  $B$ . Além disso, a área do triângulo  $ABC$  é igual a  $\frac{AB \cdot h}{2}$ , onde  $h$  a altura relativa à base  $AB$  (ver figura 1.4). A maior área será obtida quando a altura  $h$  for máxima, e isso ocorre quando  $C$  for o vértice da elipse. Nesse caso, o triângulo é **isósceles**.

Para a prova da segunda parte notemos que se o vértice  $C$  está mais próximo do vértice superior da elipse do que  $C'$ , então  $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$  e a altura do triângulo  $ABC$  é maior do que a altura do triângulo  $ABC'$ , como têm a mesma base segue que  $A_{\Delta ABC} > A_{\Delta ABC'}$ .

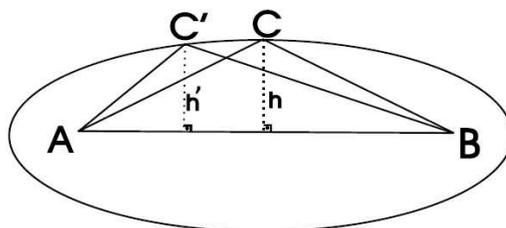


Figura 1.4:

### 1.1.3 A Desigualdade Isoperimétrica para quadriláteros

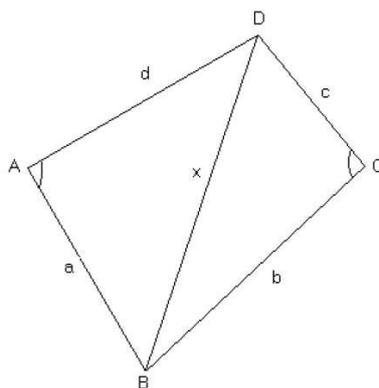
Lembremos que a fórmula de Heron para área de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , em função do semiperímetro  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ , é

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Uma generalização dessa fórmula para um quadrilátero ABCD de lados  $a = \overline{AB}$ ,  $b = \overline{BC}$ ,  $c = \overline{CD}$  e  $d = \overline{DA}$ , em função do seu semiperímetro  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ , é conhecida como *Fórmula de Bretschneider*:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]} \quad (1.1)$$

Aplicando a lei dos cossenos, na figura abaixo, temos:



$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{C}, \\ x^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A}. \end{aligned}$$

Agora, comparando essas duas equações, obtemos:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{C} = a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A}.$$

Isto implica

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2bc \cos \hat{C} - 2ad \cos \hat{A},$$

ou seja,

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2} = bc \cos \hat{C} - ad \cos \hat{A}.$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da igualdade acima, vemos que

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2}\right)^2 = b^2 c^2 \cos^2 \hat{C} + a^2 d^2 \cos^2 \hat{A} - 2abcd \cos \hat{A} \cos \hat{C}. \quad (1.2)$$

Chamando de  $S$  a área do quadrilátero ABCD (ver figura 1.5), podemos escrever,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ad \sin \hat{A} + \frac{1}{2}bc \sin \hat{C}.$$

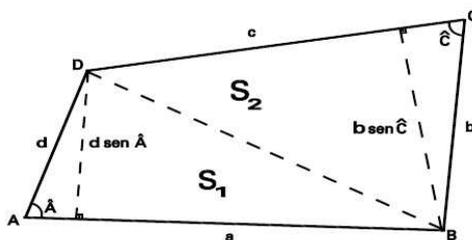


Figura 1.5:

Logo,

$$2S = ad \sin \hat{A} + bc \sin \hat{C}$$

e quadrando os dois membros desta igualdade, vem:

$$4S^2 = a^2 d^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 c^2 \sin^2 \hat{C} + 2abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C} \quad (1.3)$$

somando as equações (1.2) e (1.3) e usando a *relação fundamental* da trigonometria  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  vem:

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{4} + 4S^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos \hat{A} \cos \hat{C} - \operatorname{sen} \hat{A} \operatorname{sen} \hat{C})$$

Por outro lado, da trigonometria sabemos que :

$$\cos \hat{A} \cos \hat{C} - \operatorname{sen} \hat{A} \operatorname{sen} \hat{C} = \cos(\hat{A} + \hat{C}).$$

Então

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{4} + 4S^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C})$$

Daí vem

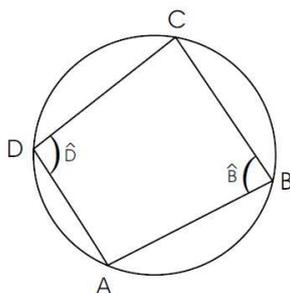
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{a^2d^2 + b^2c^2}{4} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{16} - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= \frac{(ad + bc)^2 - 2abcd}{4} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{16} - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= \frac{(ad + bc)^2}{4} - \frac{1}{2}abcd - \frac{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{16} - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= \frac{(ad + bc)^2}{4} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{16} - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})] \\ &= \frac{1}{16}[4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2] - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})] \\ &= \frac{1}{16}[(2ad + 2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2] - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})] \\ &= \frac{1}{16}[(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2] - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= \frac{1}{16}[(b + c + a - d)(b + c - a + d)][(a + d + b - c)(a + d - b + c)] - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= \frac{1}{16}[2(p - d)2(p - a)][2(p - c)2(p - b)] - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= \frac{1}{16}.16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}). \end{aligned}$$

Como  $S$  é positivo, segue a fórmula (1.1):

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}.$$

**Lema 2** *Um quadrilátero  $ABCD$  é inscrito se, e somente se, os ângulos opostos são suplementares.*

**Prova:** Se o quadrilátero for inscrito, então, claramente,  $\hat{B} + \hat{D}$  é igual a  $\pi$  e, também,  $\hat{A} + \hat{C} = \pi$ , pois a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero vale  $360^\circ$ .



Por outro lado, suponhamos que  $\hat{B} + \hat{D} = \pi$ , mas que o quadrilátero  $ABCD$  não seja inscrito. Como três pontos não colineares determinam uma única circunferência que passa por eles, então consideremos a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e não passa por  $D$ , então temos dois casos a analisar: o primeiro caso quando o ponto  $D$  está no exterior da

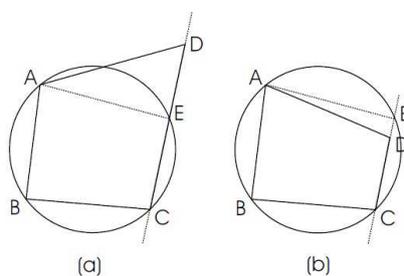


Figura 1.6:

circunferência (ver figura 1.6a) e o segundo caso, quando o ponto  $D$  está no interior da circunferência (ver figura 1.6b).

Para análise dos dois casos, seja  $E$  o ponto de interseção da reta  $\overleftrightarrow{CD}$  com a circunferência, logo o quadrilátero  $ABCE$  é inscrito.

Então  $\hat{B} + \hat{E} = \pi$ , logo  $\hat{D} = \hat{E}$ , absurdo, pois no primeiro caso,  $\hat{E}$  é um ângulo externo ao triângulo  $AED$ , daí  $\hat{E} > \hat{D}$ , e no segundo caso,  $\hat{D}$  é um ângulo externo ao triângulo  $AED$ , daí  $\hat{D} > \hat{E}$ .

Portanto, o quadrilátero é *inscrito*.

**Lema 3** *Dentre todos os quadriláteros com lados dados (fixos), aquele de maior área é o inscritível. Mais ainda, se considerarmos dois quadriláteros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  com lados correspondentes iguais, se  $|\hat{A} + \hat{C} - \pi| < |\hat{A}' + \hat{C}' - \pi|$ , a área de  $ABCD$  é maior que a área de  $A'B'C'D'$*

**Prova:** Dado o quadrilátero  $ABCD$ , como na figura 1.5 onde  $a = \overline{AB}$ ,  $b = \overline{BC}$ ,  $c = \overline{CD}$ ,  $d = \overline{DA}$  e semiperímetro  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ , sua área é:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}.$$

Segue-se que o valor máximo de  $S$  ocorre para o menor valor do cosseno de  $\hat{A} + \hat{C}$ , ou seja, quando  $\cos(\hat{A} + \hat{C}) = -1$ . Nesse caso,  $\hat{A} + \hat{C} = \pi$  e o quadrilátero  $ABCD$  é inscritível.

Pela expressão da fórmula acima, podemos concluir que  $S$  aumenta à medida que  $\hat{A} + \hat{C}$  se aproxima de  $\pi$ , o que comprova a segunda parte deste lema.

### 1.1.4 A Desigualdade Isoperimétrica para polígonos

**Definição 2** *Dada uma sequência  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  com  $n \geq 3$  de pontos distintos no plano, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se também consecutivos  $A_n$  e  $A_1$ , chama-se polígono à reunião dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$ ,  $\overline{A_nA_1}$ . Os  $A_i$  são chamados de vértices e os segmentos  $\overline{A_iA_{i+1}}$  de arestas.*

**Definição 3** *Um polígono é convexo se a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais  $(n - 2)$  vértices num mesmo semiplano em relação à reta determinada. Caso isso não aconteça, dizemos que o polígono é não convexo (ver figura 1.7).*

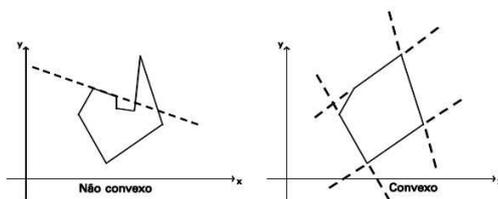


Figura 1.7:

**Lema 4** *Dado um polígono não convexo, sempre podemos encontrar outro polígono convexo com número de lados menor, perímetro menor e área maior.*

**Prova:** Seja  $P$  o polígono não convexo de vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Tomemos os vértices  $A_1$  e  $A_2$ , e tracemos a reta que passa por esses vértices. Se os outros vértices do polígono  $P$  ficam num mesmo semiplano determinado por essa reta, então consideremos a reta que passa por  $A_2$  e  $A_3$  e se ocorre como no caso anterior, continuemos este processo até encontrar o primeiro par de vértices consecutivos  $A_i$  e  $A_{i+1}$  que contenham vértices do polígono e eventualmente podemos ter  $i = 1$ .

Consideremos a reta que passa por  $A_i$  e  $A_{i+2}$  e verifiquemos se há vértices do polígono  $P$  em ambos semiplanos determinados por esta reta. Caso isso ocorra, consideremos a reta que passa por  $A_i$  e  $A_{i+3}$  e continuemos este processo até encontrar o primeiro vértice  $A_{i+k}$  tal que todos os vértices do polígono se encontrem num só semiplano determinado pela reta  $L_{i,i+k}$  que passa por  $A_i$  e  $A_{i+k}$ . Então:

1. Consideremos o polígono  $P'$  com vértices

$P'$ :  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+k}, A_{i+k+1}, \dots, A_n$  (ver figura) exceto nos seguintes casos:

- (a) se  $A_{i-1}, A_i$  e  $A_{i+k}$  são colineares, então  $P'$  será o polígono com vértices

$P'$ :  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+k}, A_{i+k+1}, \dots, A_n$ .

- (b) se  $A_{i-1}, A_i, A_{i+k}$  e  $A_{i+k+1}$  não são colineares mas  $A_{i-1}, A_i, A_{i+k}$  o são,  $P'$  será o polígono com vértices

$P'$ :  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+k}, A_{i+k+1}, \dots, A_n$ .

- (c) se  $A_{i-1}, A_i, A_{i+k}$  e  $A_{i+k+1}$  não são colineares mas  $A_i, A_{i+k}, A_{i+k+1}$  o são,  $P'$  será o polígono com vértices

$P'$ :  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+k+1}, \dots, A_n$  (ver figura 1.7).

2. Consideremos  $P'$  como o primeiro caso do item anterior, em qualquer outro caso procederemos de maneira análoga. Tendo como base a reta  $L_{i,i+k}$ , temos que o polígono  $P''$  com vértices  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i+k}$  está contido no interior do polígono  $P'$ .
3. Notemos que o interior do polígono  $P''$  não faz parte do polígono inicial  $P$ .

Então, das observações anteriores temos que o polígono  $P'$  possui menor número de lados, menor perímetro e maior área (ver figura 1.8b). Se  $P'$

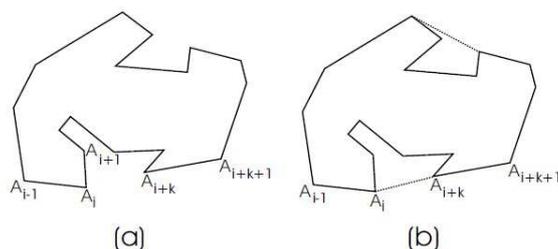


Figura 1.8:

é convexo, finalizamos nossa demonstração, caso contrário continuamos o mesmo processo a partir dos vértices  $A_{i+k}$  e  $A_{i+k+1}$ . Como o número de vértices de um polígono é finito, encontraremos um polígono convexo ao final deste processo.

Serão utilizadas as definições de polígono equilátero e regular nas demonstrações.

**Definição 4** Dizemos que um polígono é equilátero, se todos os seus lados são congruentes.

**Definição 5** Dizemos que um polígono é regular se for equilátero e se todos os ângulos internos são congruentes.

**Proposição 1** Dado um polígono qualquer, existe um polígono equilátero convexo com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual e área maior ou igual.

**Prova:** Provaremos por indução.

Para  $n = 3$ , seja um triângulo  $ABC$  qualquer.

Neste triângulo vamos chamar de  $l$  à média aritmética dos comprimentos dos lados então  $l = \frac{a+b+c}{3}$ .

Se um dos lados mede  $l$ , fixamos os vértices deste lado, e dentre todos os triângulos com esta base e o mesmo perímetro  $3l$ , do lema 1, temos que o de maior área é o triângulo isósceles, logo este será o equilátero.

Caso contrário, supondo que nenhum lado mede  $l$ , então como  $l$  é a média aritmética dos lados, existem lados com medida menor que  $l$  e lados com medida maior que  $l$ . Supondo  $\overline{AB} < l$  e  $\overline{BC} > l$ ; traçamos uma elipse de focos  $A$  e  $C$  passando por  $B$  (ver figura 1.9).

Movimentando o ponto  $B$  sobre a elipse encontramos  $B'$  tal que  $\overline{AB'} = l$  e temos que: o perímetro do triângulo  $AB'C$  é igual ao perímetro do triângulo

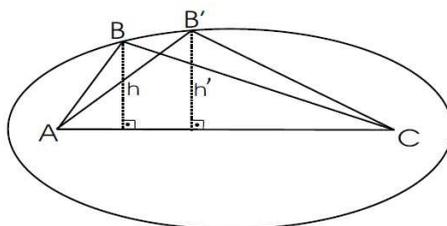


Figura 1.9:

$ABC$  e a altura do triângulo  $AB'C$  é maior que a altura do triângulo  $ABC$ , logo a área do triângulo  $AB'C$  é maior que a área do triângulo  $ABC$ .

Agora, utilizando o caso anterior, encontramos o ponto  $C'$  tal que  $\overline{AC'} = l$  e  $\overline{B'C'} = l$ , tornando o polígono regular com mesmo número de lados, mesmo perímetro e área maior.

Suponhamos que vale a afirmação para polígonos com número de lados menor do ou igual a  $n$ . Mostraremos que a afirmação vale para polígonos com  $(n + 1)$  lados.

Se o polígono de  $(n + 1)$  lados for convexo, pelo lema 4, obtemos um polígono convexo  $P$ , com número de lados menor, perímetro menor e área maior.

Denotemos por  $l$  a média aritmética dos comprimentos dos lados do polígono  $P$ . Se todos os lados já medem  $l$ , então o polígono já é equilátero. Caso contrário, sempre existem lados do polígono  $P$  que são maiores do que  $l$  e lados menores do que  $l$ .

Vamos supor que o lado  $\overline{AB} > l$  e o lado  $\overline{CD} < l$ . Primeiramente suponhamos que o lado  $\overline{CD}$  é consecutivo do lado  $\overline{AB}$ . Então denotaremos  $\overline{CD}$  por  $\overline{BC}$  e assim temos:  $\overline{AB} > l$  e  $\overline{BC} < l$  consecutivos. Consideremos a elipse com focos  $A$  e  $C$ , passando por  $B$ . Movimentamos o vértice  $B$  sobre a elipse até um ponto  $B'$  tal que o lado  $\overline{B'C} = l$ ; este movimento mantém o perímetro fixo e a área aumenta.

Caso o polígono assim obtido seja convexo, ele terá perímetro igual, área maior e um lado a mais de comprimento  $l$  que o polígono  $P$ .

Eventualmente o resultado do movimento anterior pode ser um polígono não convexo (ver figura 1.10). Neste caso, pelo lema 4, existe um polígono convexo com perímetro menor a área maior que a de  $P$  e número de lados menor do que ou igual a  $n$ . Podemos então, usar a hipótese de indução e concluir que existe um polígono equilátero convexo com perímetro maior, área menor e número de lados menor que o de  $P$ .

Se  $\overline{AB} > l$  e  $\overline{CD} < l$  não forem consecutivos, então podemos permutar os lados do polígono mantendo o mesmo perímetro e a mesma área, de modo que  $\overline{AB} > l$  e  $\overline{CD} < l$  sejam consecutivos. De fato, suponhamos que entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  (num dos arcos), digamos  $\overline{BC}$ , todas as arestas possuem comprimentos iguais a  $l$ . Sejam  $\overline{C_1C}$  e  $\overline{CD}$  arestas consecutivas com  $C_1$  no arco  $\widehat{BC}$ . Consideremos então a elipse com focos  $C_1$  e  $D$ , passando por  $C$  e movemos  $C$  até que o novo lado  $\overline{C_1C'}$  seja igual ao antigo lado  $\overline{CD}$ ; como o perímetro permanece inalterado neste processo, temos que o novo lado  $\overline{C'D}$  é igual ao antigo  $\overline{C'C}$ . Caso esse processo de permutação gere um polígono não convexo, procedemos como se os segmentos  $\overline{AB} > l$  e  $\overline{BC} < l$  consecutivos.

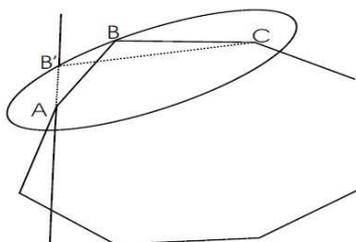


Figura 1.10:

Obtemos então um polígono convexo com dois lados permutados donde o lado de comprimento menor do que  $l$  estará mais próximo de  $\overline{AB}$ . Repetindo o processo de permutação deste tipo, finitas vezes, encontraremos duas arestas consecutivas com lados de comprimentos maiores do que  $l$  e comprimentos menores do que  $l$  e, assim, poderemos aplicar o mesmo desenvolvimento utilizado quando os segmentos  $\overline{AB} > l$  e  $\overline{BC} < l$  são consecutivos, portanto aumentaremos o número de lados de comprimento  $l$ .

**Proposição 2** *Dado um polígono equilátero de  $n$  lados, existe um polígono regular de  $n$  lados com igual perímetro e área maior ou igual.*

**Prova:** Seja  $P$  um polígono equilátero de  $n$  lados (com perímetro  $nl$ ) e denotemos por  $A_1, A_2, \dots, A_n$  seus vértices. A prova é basicamente torná-lo equiângulo e, portanto, regular, mantendo igual perímetro e aumentando a área.

Lembremos que num polígono regular de  $n$  lados, seu ângulo central mede  $\frac{2\pi}{n}$  e cada ângulo interno mede  $\beta_n = \frac{n\pi - 2\pi}{n}$ .

No polígono  $P$  vamos chamar de *ângulo bom* (ver página 15 de [9]) o ângulo interno de  $P$  que mede  $\beta_n$ . Caso contrário, chamaremos de *ângulo mau* (ver página 15 de [9]).

**Afirmção 1:** Não existem menos de 4 ângulos maus.

De fato, mostraremos por absurdo. Suponhamos que  $P$  tem apenas três ângulos maus,  $\hat{A}_i$ ,  $\hat{A}_j$  e  $\hat{A}_k$ , os outros ângulos medem  $\beta_n = \frac{n\pi - 2\pi}{n}$ . Seja  $P_n$  o polígono regular com lados de comprimento medindo  $l$  e denotemos seus vértices por  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Os polígonos com vértices  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$  e  $B_i, B_{i+1}, \dots, B_j$  são congruentes pois todos os seus respectivos lados e ângulos são congruentes (ver figura 1.11).

Da mesma forma, os polígonos  $A_j, A_{j+1}, \dots, A_k$  e  $B_j, B_{j+1}, \dots, B_k$ , assim como  $A_k, A_{k+1}, \dots, A_i$  e  $B_k, B_{k+1}, \dots, B_i$  são congruentes. Consequentemente, os triângulos  $A_i A_j A_k$  e  $B_i B_j B_k$  são congruentes pelo caso de congruência  $LLL$ . Então o polígono  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é regular. Isto contraria o fato de  $P$  ter apenas três ângulos maus.

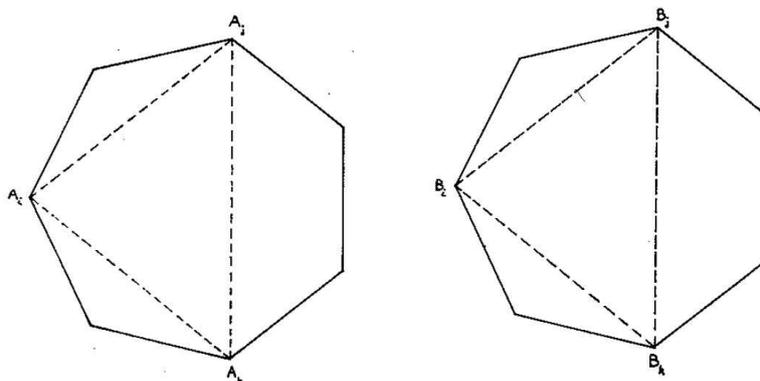


Figura 1.11:

No caso em que tivermos só dois ou um ângulo mau, completamos estes com ângulos bons para fixarmos três vértices e, então, pelo argumento anterior não teremos tal situação.

Assim podemos supor que o polígono  $P$  tem pelo menos quatro ângulos maus. Tomemos neste polígono, dentre o conjunto de ângulos maus, quatro ângulos maus consecutivos  $\hat{D}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , de modo que  $\hat{A} > \beta_n > \hat{B}$ . Eventualmente na poligonal  $CD$  que não contém  $\hat{A}$ , podem existir outros ângulos maus (ver figura 1.12).

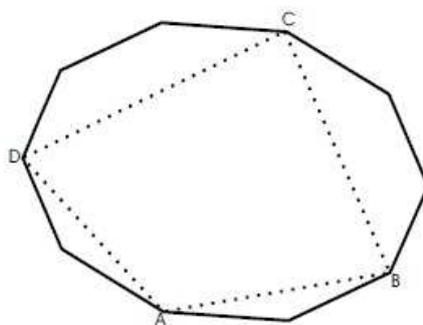


Figura 1.12:

Notemos também que os pontos  $D$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser escolhidos de modo que  $C$  e  $D$  estejam, respectivamente, no interior e no exterior do círculo que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e cujo raio é igual ao do círculo circunscrito ao polígono regular  $P_n$  de lado  $l$  (ver figura 1.13).

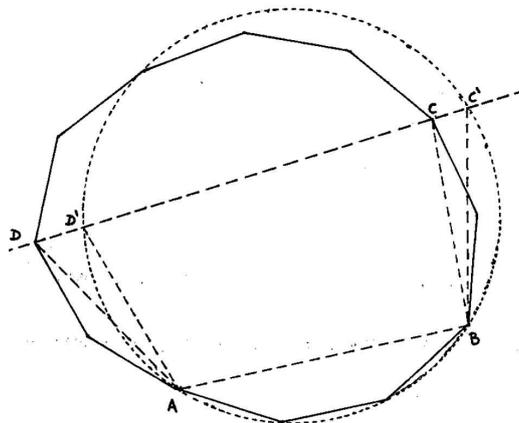


Figura 1.13:

**Afirmção 2:** Se  $\hat{A} > \beta_n > \hat{B}$ , então  $B\hat{A}D + B\hat{C}D > \pi$ .

Sejam  $C'$  e  $D'$  as respectivas projeções de  $C$  e  $D$ , pela reta  $\overleftrightarrow{CD}$ , no círculo conforme indicado na figura 1.13. Temos então que  $B\hat{A}D > B\hat{A}D'$  e  $B\hat{C}D > B\hat{C}'D$  donde  $B\hat{A}D + B\hat{C}D > B\hat{C}'D + B\hat{A}D' = \pi$ , pois o quadrilátero  $ABC'D'$  é inscritível.

Como  $B\hat{A}D + B\hat{C}D > \pi$ , então do lema 3, o quadrilátero  $ABCD$  não possui área máxima entre todos os quadriláteros cujos lados medem  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{AD}$ , respectivamente.

Notemos que, no quadrilátero  $ABCD$ , ao movermos o vértice  $D$  de forma que diminua o ângulo  $\hat{A}$  do quadrilátero, o ângulo  $\hat{C}$  do quadrilátero também irá diminuir. Dessa forma, após este movimento, a soma de  $B\hat{A}D + B\hat{C}D$  diminuirá se aproximando do valor  $\pi$ , e pelo lema 3, este processo está aumentando a área do quadrilátero e, conseqüentemente, do polígono  $P$ , pois os lados do quadrilátero permanecem inalterados assim como as poligonais que os contêm.

Observemos que ao diminuirmos o ângulo  $\hat{A}$  do quadrilátero, estamos aumentando o ângulo  $\hat{B}$  do mesmo. Respectivamente, estará ocorrendo no polígono  $P$  a alteração na medida dos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .

Fazendo esse movimento, sempre com o lado  $\overline{AB}$  fixo, até que o quadrilátero  $ABCD$  se torne inscritível, teremos, nesse instante, que os pontos  $C$  e  $D$  estarão, ambos, ou no interior, ou no exterior ou sobre o círculo da figura 1.13. Caso contrário, se, por exemplo, um desses pontos for interior e o outro exterior ao círculo então, argumentando como na afirmação 2, chegaremos à conclusão de que o quadrilátero  $ABCD$  não é inscritível.

Suponhamos então que os pontos  $C$  e  $D$  são interiores ao círculo quando o quadrilátero  $ABCD$  se tornar inscritível (os outros casos são semelhantes). Então o ponto  $D$  que era inicialmente, ponto exterior ao círculo, passou para o seu interior, daí, em algum instante desse processo, o ponto  $D$  situa-se sobre o círculo. Nessa ocasião o ângulo  $\hat{A}$  do polígono é igual a  $\beta_n$ , ou seja, é um ângulo bom e finalizamos o processo.

Agora, já com mais um ângulo bom no polígono, verificamos se ainda há quatro ou mais ângulos maus. Se sim, como o polígono é uma figura com número finito de lados, repetiremos este processo finitas vezes até que tenhamos em  $P$  menos de quatro ângulos maus.

Assim, das proposições 1 e 2 temos o seguinte corolário.

**Corolário 1** *Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual e área maior do que ou igual a do polígono original.*

### 1.1.5 A Desigualdade Isoperimétrica no caso geral

Relembrando ... a desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva fechada de comprimento  $L$  cerca uma área menor do que ou igual a  $\frac{L^2}{4\pi}$  e que este valor só é atingido se a curva for uma circunferência de raio  $\frac{L}{2\pi}$ .

Antes de demonstrarmos o teorema principal (**Teorema 2**), necessitamos de algumas definições e resultados auxiliares.

**Definição 6** *Um polígono convexo está inscrito numa circunferência se todos os seus vértices pertencem à esta circunferência.*

**Definição 7** *Um polígono convexo está circunscrito a uma circunferência se todos os seus lados são tangentes à esta circunferência.*

### 1.1.5.1 Teorema Principal

**Teorema 1** *Se  $n < m$  a área de um polígono regular de  $n$  lados é menor do que a área de um polígono regular de  $m$  lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

**Demonstração:** A prova da primeira parte do teorema será por indução sobre  $m$ . Supondo a afirmação verdadeira para  $n < m \leq m_0$ , basta provar que a área de um polígono de  $m_0 + 1$  lados é maior que a área do polígono de  $m_0$  lados e mesmo perímetro. Tomamos um polígono regular de  $m_0$  lados, porém interprete-o como um polígono de  $m_0 + 1$  lados, possuindo um de seus lados com medida igual a zero. Pelo corolário 1, podemos encontrar um polígono regular de perímetro igual, área maior e número de lados menor do que ou igual a  $m_0 + 1$ . Na primeira etapa da construção, o lado de tamanho zero, será tornado positivo. Este número de lados só pode ser igual a  $m_0 + 1$  pois senão estaríamos contradizendo a hipótese de indução.

Para a segunda parte, observamos que as áreas dos polígonos de  $n$  lados e perímetro dado tendem para a área do círculo, quando  $n$  cresce. Isto segue do fato de que o polígono regular de perímetro  $L$  tem lado maior que o do polígono de mesmo tipo *inscrito* na circunferência de comprimento  $L$  e menor do que o do polígono *circunscrito* a esta circunferência.

**Teorema 2 (Teorema Isoperimétrico)** *Toda curva fechada de comprimento  $L$  engloba uma área menor do que ou igual a  $\frac{L^2}{4\pi}$ . Além disso, este valor só é alcançado para a circunferência de raio  $\frac{L}{2\pi}$ .*

**Demonstração:** Vamos supor uma curva de comprimento  $L$  englobando uma área  $S$ . Fixemos um número inteiro positivo  $n$  e tomemos  $n$  pontos ao longo da curva, igualmente espaçados em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Ligamos estes pontos por segmentos de reta de modo a se obter um polígono de  $n$  lados e perímetro menor do que  $L$ .

Tomando o fecho convexo deste polígono, seu perímetro será menor do que  $L$  e sua área  $A$  será menor do que  $\frac{L^2}{4\pi}$ .

Consideremos o número de pontos que ou estão dentro deste fecho convexo ou, caso contrário, distam menos de  $\frac{L}{2n}$  de algum dos  $n$  pontos originais. Temos, portanto, que a curva original estará totalmente contida nesta região, pois qualquer ponto da curva dista menos do que  $\frac{L}{2n}$  de algum destes  $n$  pontos. Por outro lado, a área desta região será menor do que ou igual a

$$A + n\pi\left(\frac{L}{2n}\right)^2,$$

pois está contida na união do fecho convexo com  $n$  circunferências de raio  $\frac{L}{2n}$  e centros nos  $n$  pontos. Assim,

$$S \leq A + n\pi\left(\frac{L}{2n}\right)^2 \leq \frac{L^2}{4\pi} + \frac{\pi L^2}{4n}.$$

Como essa estimativa é válida para qualquer  $n$ , temos que

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Por fim, consideramos uma curva de comprimento  $L$  englobando a área  $\frac{L^2}{4\pi}$  e o objetivo é provar que ela é uma circunferência.

De fato, suponhamos por absurdo que a curva não é uma circunferência. Notemos que a curva é convexa, pois se a curva for não convexa, através do lema 4, conseguiremos obter uma nova curva com perímetro menor e área maior contradizendo a condição inicial. Se a curva não é uma circunferência, então existem quatro pontos sobre a curva que são não cocirculares, isto é, o quadrilátero formado por estes pontos não é inscrito.

Denotemos este quadrilátero não inscrito por  $A_1$ . Tornemos o quadrilátero  $A_1$ , inscrito e denotemos este quadrilátero inscrito encontrado, por  $A_2$ . Assim, pelo lema 3, temos que  $A_2 > A_1$ . Lembremos que, neste processo de tornar o quadrilátero inscrito, não alteramos os comprimentos dos lados do quadrilátero  $A_1$ , logo não se alterou também as áreas das curvas exteriores ao quadrilátero  $A_1$ .

Mas, a área da curva aumentou em  $A_2 - A_1$ . Logo sua área será maior que  $\frac{L^2}{4\pi}$  que é um absurdo. Portanto a curva é uma **circunferência**.

## 1.2 Segunda demonstração

Nesta seção, prova-se que o triângulo retângulo de catetos com medidas fixas é o que possui maior área. A partir deste resultado, mostra-se que

a semicircunferência é a curva plana aberta, com extremos em dois pontos de uma reta que engloba a maior área, assumindo o segmento de reta o fechamento do contorno.

Conclui-se, então, que a circunferência é a curva fechada que maximiza a área. Para isto, antes de demonstrarmos o **teorema isoperimétrico**, recorreremos a alguns resultados auxiliares.

Esta demonstração demanda menos operações matemáticas do que a apresentada na seção anterior, entretanto sua construção não permite resolver problemas de otimização que envolvam mourões.

**Proposição 3** *Seja  $F_1$  uma figura plana limitada, não convexa, cuja fronteira seja uma curva plana simples e fechada,  $C_1$ . Então é possível encontrar uma figura plana  $F_2$  de área maior que  $F_1$  tal que sua fronteira  $C_2$  seja uma curva plana, simples e fechada de mesmo comprimento de  $C_1$ .*

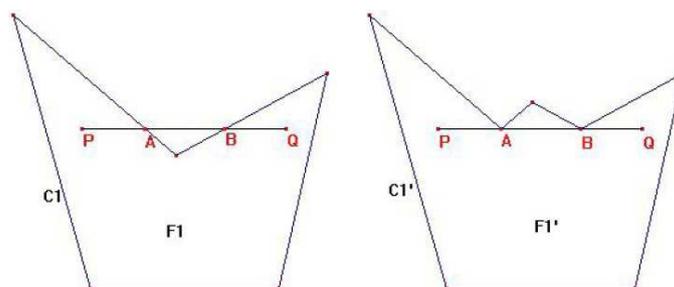


Figura 1.14:

**Prova:** Sabemos que se  $F_1$  não é convexa, então existem pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes a  $F_1$  tais que o segmento  $PQ$  não esteja contido em  $F_1$ . Tomamos os pontos,  $A$  e  $B$ , de interseção do segmento  $PQ$  com  $C_1$ , de modo que  $AB \cap C_1 = \{A, B\}$ . Refletimos uma das partes de  $C_1$  com extremos em  $A$  e  $B$  na reta que contém  $PQ$ , obtendo-se uma nova figura  $F_1'$ , com fronteira  $C_1'$ , de mesmo comprimento que  $C_1$ , porém com área maior do que  $F_1$ .

Se  $F_1'$  ainda não for convexa, repetimos o procedimento até a obtenção de uma figura plana convexa, de mesmo perímetro e área maior do que  $F_1$  (ver figura 1.14).

Baseado nesta proposição, temos que dentre as figuras isoperimétricas, as de maiores áreas serão sempre convexas.

**Proposição 4** *Seja uma curva  $C_1$  plana, simples e aberta, situada de um mesmo lado de uma reta  $r$ , com extremos  $A$  e  $B$  em  $r$ . Suponhamos que a*

curva fechada  $C_1 \cup AB$  seja fronteira de uma figura limitada  $F_1$  não convexa. Então existe uma curva  $C_2$  de mesma natureza de  $C_1$  com os mesmos extremos  $A$  e  $B$  em  $r$ , tal que  $C_2 \cup AB$  seja fronteira de uma curva convexa com área maior do que  $F_1$ .

**Prova:** Considerando a figura  $C_1 \cup AB$ , aplicamos o procedimento descrito na prova da proposição anterior. A figura obtida será  $C_2 \cup AB$ , uma vez que o segmento  $AB$  permanece inalterado na sequência de figuras obtidas de  $F_1$ .

**Proposição 5** Dentre todos os triângulos com dois lados com medidas fixas, o de maior área é o triângulo retângulo que possui esses lados por catetos.

**Prova:** De fato, considerando todos os triângulos  $ABC$  com lados  $AB$  e  $AC$  de medidas fixas. A área  $S$  deste triângulo pode ser calculada pela fórmula  $S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2}$ . O valor máximo da área será obtido justamente quando  $\sin \hat{A}$  for máximo, ou seja, quando  $\sin \hat{A} = 1$  o que implica  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ . Portanto,  $ABC$  é um triângulo retângulo.

**Proposição 6** Seja uma figura plana convexa  $F_1$ , cuja fronteira seja composta por uma curva  $C_1$  plana, simples, aberta, de extremos  $A$  e  $B$  e de comprimento  $L$ , unida com o segmento  $AB$ . Suponhamos que, nessas condições  $F_1$  tenha a maior área possível. Então,  $F_1$  é um semicírculo.

**Prova:** Vamos supor que  $F_1$  não é um semicírculo. Então existe um ponto  $C \in C_1$  tal que  $ABC$  não é um triângulo retângulo, uma vez que, se  $ABC$  fosse retângulo para todo  $C \in C_1$ ,  $F_1$  seria um semicírculo (ver figura 1.15).

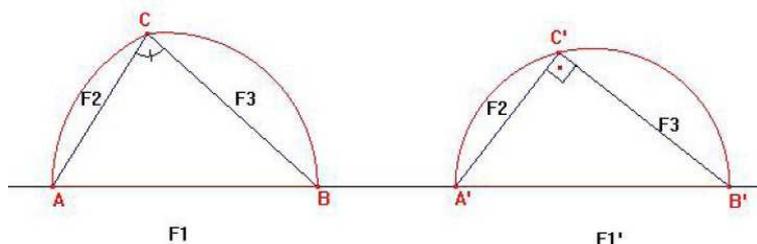


Figura 1.15:

Como  $F_1$  é convexa, os segmentos  $AC$  e  $CB$  estão contidos em  $F_1$ , isto é, o triângulo  $ABC$  está contido em  $F_1$ . Sejam  $F_2$  e  $F_3$  as figuras sobre  $AC$  e  $CB$  de tal modo que  $F_1 = F_2 \cup ABC \cup F_3$ .

Consideremos agora o triângulo  $A'B'C'$ , retângulo em  $C'$ , de tal modo que  $A'C' \equiv AC$  e  $B'C' \equiv BC$ . Pela Proposição 5, a área de  $A'B'C'$  é maior que a área de  $ABC$ . Consideremos, então, a figura  $F'_1 = F_2 \cup A'B'C' \cup F_3$  e chamemos sua fronteira de  $C_2 \cup A'B'$ . Temos, portanto, que  $F'_1$  tem fronteira composta por uma curva  $C_2$  plana, simples, aberta de extremos  $A'$  e  $B'$  e comprimento  $L$  unida com o segmento  $A'B'$ . No entanto a área de  $F'_1$  é maior que a área de  $F_1$ , o que contraria a hipótese.

Entretanto, há ainda a possibilidade da figura  $F'_1$  não ser convexa. É possível pela Proposição 4, tomar  $F''_1$  convexa, com fronteira  $C_3 \cup A'B'$  e área maior que  $F'_1$ . Contrariando as condições da hipótese. Temos, portanto, que  $F_1$  é um semicírculo.

**Teorema 3 (Teorema Isoperimétrico)** *Dado um comprimento fixo, dentre todas as figuras planas, fechadas, convexas e de perímetro igual a esse comprimento, o círculo é a que possui maior área.*

**Demonstração:** Vamos supor que a figura de maior área não seja um círculo. Chamemos essa figura de  $F_1$  e de  $L$  o comprimento de sua fronteira  $C_1$ . Tomemos os pontos  $A$  e  $B$  em  $C_1$  de modo que o comprimento da curva em  $C_1$  de  $A$  até  $B$  seja igual a  $\frac{L}{2}$ . O segmento  $AB$  dividirá a figura em duas outras,  $F_2$  e  $F_3$  (obviamente  $F_1 = F_2 \cup F_3$ ), com fronteiras  $C_2 \cup AB$  e  $C_3 \cup AB$ , respectivamente, ambas com área máxima. Assim,  $F_2$  ou  $F_3$  não é um semicírculo e possui área máxima, contradizendo a Proposição 6, provada.

Portanto, a figura de maior área é o *círculo*.

# Capítulo 2

## Aplicações em sala de aula

Segundo Zalman Usiskin (1995), durante toda a matemática escolar, omitem-se os teoremas que não podem ser demonstrados por métodos padronizados da Geometria euclidiana (ver [13]). Um dos exemplos citados por Usiskin é a desigualdade isoperimétrica – de todas as figuras planas com um dado perímetro, o círculo é a de maior área – que quase sempre é ignorada. Esse teorema, contudo é importante no mundo real e pode ajudar aos alunos a compreender a diferença entre perímetro e área, justifica Usiskin. As aplicações que pretendo apresentar são experiências práticas desse teorema.

### 2.1 O porquinho e o seu cercado

**Problema:** Uma menina tem um porquinho e quer construir um cercado para guardá-lo, tendo para isso um rolo de arame com 30 metros. Qual a forma que este deve ter para que a área seja a maior possível ?

Em termos abstratos, a pergunta é: *qual a forma geométrica que tem maior área, dentre todas as que têm o mesmo perímetro ?*

Os alunos experimentam várias formas conhecidas (círculo, quadrado, retângulos ou triângulos, por exemplo).

Resultado esperado: Círculo.

Sugestão: Ensinar aos alunos, *sem demonstração*, a Desigualdade Isoperimétrica, que afirma que se uma figura plana tem área  $A$  e perímetro  $P$ , então

$$4\pi A \leq P^2.$$

Portanto, concluímos, sem grande esforço, que a área tem de ser menor do que ou igual à do *círculo*.

Como  $A \leq \frac{P^2}{4\pi}$ , se a figura for um círculo, temos:

$$A = \frac{P^2}{4\pi} = \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2,$$

que é a área do *círculo*.

Conclusões:

- Qualquer outra figura plana tem área menor do que a do círculo;
- O resultado afirma que este máximo só é atingido quando a curva é uma circunferência.

Observação: Esclarecer aos alunos que a demonstração existe mas que é demasiadamente difícil para o nível deles.

## 2.2 O retângulo de área máxima

**Problema:** Considerando-se apenas os retângulos, qual é aquele que tem área máxima ?

Nesse caso, poderia propor-se, primeiro, aos alunos que verificassem a desigualdade

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{2.1}$$

o que se prova ser equivalente a

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\iff 4ab \leq (a+b)^2 \\ &\iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\ &\iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\ &\iff (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando-se  $a$  e  $b$  para medidas dos lados desse retângulo, chamando de  $A$  a sua área e de  $L$  o seu perímetro, segue por (3.1) e usando o fato

$$4 > \pi \iff \frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$$

que

$$A \leq \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1}{4} < \frac{L^2}{\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{L^2}{4\pi},$$

ou seja,

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Isto mostra aos alunos a desigualdade isoperimétrica.

Então, para concluir o problema, a área máxima ocorre quando

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \iff (a-b)^2 = 0 \iff (a-b) = 0 \iff a = b.$$

Portanto, o retângulo de área máxima é o quadrado.

## 2.3 O barbante e a construção do triângulo de maior área

**Problema:** Um barbante de comprimento  $L$  é usado para construir triângulos. Pergunta-se: qual é o triângulo e qual a área máxima que poderemos ter ?

**Sugestão:** Os alunos devem observar que podemos construir vários tipos de triângulos com um barbante de comprimento  $L$  (ver figura 2.1) e utilizar a fórmula de Heron previamente estudada conjuntamente com a desigualdade das médias ( $MG \leq MA$ ).

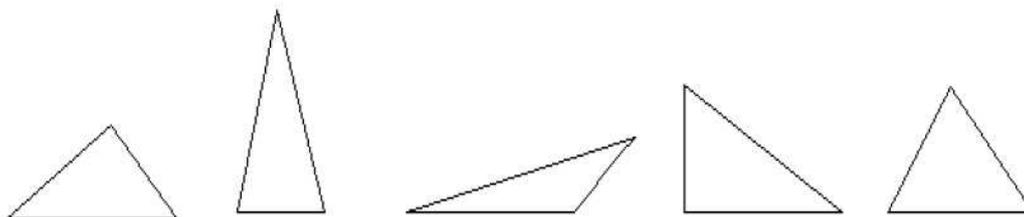


Figura 2.1:

Com algumas orientações do professor, esses alunos podem concluir que trata-se de um triângulo equilátero e encontrar sua área máxima.

Usando a fórmula de Heron, temos:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \\ &= \sqrt{p}.\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c)}. \end{aligned}$$

O perímetro do triângulo é  $L$ , portanto  $p = \frac{L}{2}$  então

$$S = \sqrt{\frac{L}{2}}.\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c)}.$$

A área  $S$  do triângulo é máxima quando

$$\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c)}$$

tem valor máximo.

A desigualdade  $MG \leq MA$ , consiste em dizer que a Média Geométrica de  $n$  números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é sempre menor do que ou igual à Média Aritmética desses  $n$  números, ou seja,

$$MG = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3.\dots.x_n} \leq MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (2.2)$$

A igualdade  $MG = MA$  ocorre se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Usando (2.2) para  $n = 3$ ,  $x_1 = p - a$ ,  $x_2 = p - b$  e  $x_3 = p - c$  tem-se :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x_1.x_2.x_3} &\leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \sqrt[3]{(p-a).(p-b).(p-c)} &\leq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \\ &\leq \frac{3p - (a+b+c)}{3} \\ &\leq p - \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

Como  $p = \frac{L}{2}$  e  $a + b + c = L$  temos:

$$\sqrt[3]{(p-a).(p-b).(p-c)} \leq \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$$

Como a igualdade ocorre somente quando  $x_1 = x_2 = x_3$  segue que

$$p - a = p - b = p - c$$

e, portanto,  $a = b = c$ .

Para tanto, o triângulo de área máxima é o equilátero.  
E como

$$(p - a).(p - b).(p - c) \leq \left(\frac{L}{6}\right)^3$$

segue que a área máxima é dada por:

$$S = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}$$

onde  $p = \frac{L}{2}$  e  $(p - a).(p - b).(p - c) = \left(\frac{L}{6}\right)^3$ .

Daí, vem

$$S = \sqrt{\frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{6}\right)^3} = \sqrt{\frac{L}{2} \cdot \frac{L^3}{216}} = \sqrt{\frac{L^4}{432}} = \frac{L^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}L^2}{36}.$$

## 2.4 Aprendendo mais sobre os polígonos regulares isoperimétricos

A solução clássica associada a polígonos regulares isoperimétricos é consequência imediata de dois fatos geométricos simples:

1. A área é função estritamente crescente do número de lados ;
2. O círculo é o polígono limite quando o número de lados tende ao infinito.

De (1) e (2) temos que, dado o perímetro, o círculo é, no limite, o “polígono regular” que encerra a maior área.

Alguns conhecimentos de extremos de funções de uma variável natural e de trigonometria plana são os únicos pré-requisitos necessários para que os alunos compreendam a solução do problema.

### 2.4.1 Área em função do número de lados

Consideremos um polígono regular convexo de  $n$  lados, com perímetro fixo  $2p$  e sejam  $l_n$  o comprimento de um lado,  $a_n$  o comprimento de seu apótema e  $O$  o seu centro.

Para deduzirmos a expressão da área  $A(n)$  do polígono em função do número  $n$  de lados, consideremos o  $n$ -polígono regular da figura 2.2.

Observe que  $\overline{BC} = \frac{l_n}{2}$ ,  $\overline{OC} = a_n$  e  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ .

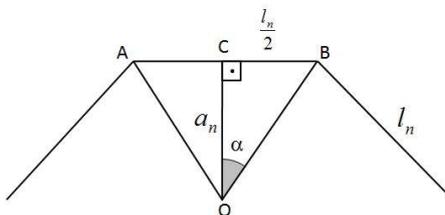


Figura 2.2:

Considerando o triângulo retângulo OCB temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{l_n}{2}}{a_n} = \frac{l_n}{2 \cdot a_n}.$$

Então

$$a_n = \frac{l_n}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Visto que  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ , temos

$$a_n = \frac{\frac{l_n}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Sabemos também que  $2p = n \cdot l_n$ , assim  $\frac{p}{n} = \frac{l_n}{2}$ .

Assim,

$$a_n = \frac{\frac{p}{n}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{p}{n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

A área de um triângulo é igual a  $A = \frac{l_n}{2} \cdot a_n$ .

Portanto, a área  $A(n)$  do  $n$ -polígono é

$$A(n) = n \cdot \frac{l_n}{2} \cdot a_n.$$

Substituindo  $a_n$  e  $l_n$ , temos

$$A(n) = \frac{p^2}{n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

## 2.4.2 Uma solução clássica

Seja  $(x_n)_n = (n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n}))_n$  uma sequência de números reais com  $n$  natural e  $n \geq 3$ . Observe a tabela e veja o que acontece com a sequência quando  $n$  se torna suficientemente grande, ou seja,  $n \rightarrow \infty$ .

$n$	$n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})$
3	5,19615...
4	4
5	3,63271...
6	3,46410...
10	3,24919...
20	3,16768...
50	3,14573...
100	3,14562...
200	3,14185...
500	3,14163...
1000	3,14160...
2000	3,14159...
5000	3,14159...
10000	3,14159...
100000	3,14159...

A partir de  $n = 50$  a sequência  $(x_n)_n$  se aproxima de  $\pi$  com duas casas decimais. E observe que a partir de  $n = 2000$  a sequência se aproxima cada vez mais de  $\pi$  com erro inferior a  $10^{-6}$ .

Analisando a tabela acima, vemos que a sequência  $(x_n)_n$  é decrescente e utilizando uma linguagem formal da Matemática podemos escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})) = \pi.$$

Dependendo da turma, o professor pode apresentar aos alunos noções de limite do Cálculo Diferencial.

Como

$$n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n}) = \pi \cdot \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}},$$

fazendo

$$\frac{\pi}{n} = t$$

temos que

$$\pi \cdot \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = \pi \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{t} = \pi \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t}.$$

Pelo limite fundamental do Cálculo, vem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

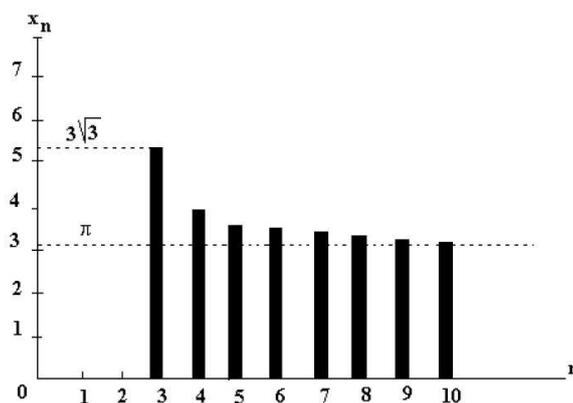
e sabendo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{cos} t} = 1$$

podemos garantir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})) = \pi.$$

O gráfico da sequência  $(x_n)_n = (n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n}))_n$  é :



Pelo gráfico temos que :

$$\pi \leq n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n}) \leq 3\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq \frac{1}{n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} \leq \frac{1}{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{p^2}{n \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} \leq \frac{p^2}{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \leq A(n) \leq \frac{p^2}{\pi}.$$

Temos então que a área máxima de um polígono regular é  $\frac{p^2}{\pi}$ .

Da relação

$$A(n) \leq \frac{p^2}{\pi}$$

podemos escrever

$$\pi \cdot A(n) \leq p^2$$

e portanto

$$4\pi \cdot A(n) \leq 4 \cdot p^2 = (2p)^2,$$

ou seja,

$$A(n) \leq \frac{(2p)^2}{4\pi}$$

que é conhecida por **Desigualdade Isoperimétrica para polígonos**.

## 2.5 Função quadrática: máximos e mínimos

Dentre as aplicações mais notáveis do Cálculo estão aquelas em que se buscam os valores máximos e mínimos de funções.

O dia a dia está cheio de tais problemas e é natural que os matemáticos e outras pessoas os considerem interessantes e importantes.

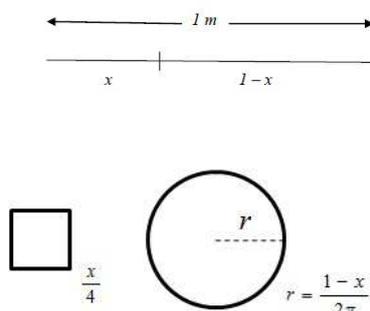
Nesta seção, será resolvido um problema que consiste no cálculo de máximos e mínimos de funções, retirado do livro: **Matemática Elementar (Uma proposta pedagógica)** do autor Antônio Zumpano Pereira Santos.

**Problema:** “Um fio de arame com 1 metro de comprimento é dividido em duas partes. Com uma delas se faz um círculo e com a outra um quadrado. Onde se deve cortar o arame para que a soma das duas áreas seja mínima ? Onde se deve cortar o arame para que a soma das duas áreas seja máxima ?”

Denotamos por  $x$  o comprimento de uma parte. Portanto, a outra parte será  $1 - x$  como ilustrado na figura.

Com a parte  $x$  será construído um quadrado e com a outra parte, um círculo. Assim,  $\frac{x}{4}$  será o lado quadrado e o raio do círculo será  $\frac{1-x}{2\pi}$ .

Podemos observar nesta situação que o número  $x$  está entre 0 e 1, sendo que, se  $x = 1$ , significa que todo o arame foi utilizado para fazer o quadrado,



ou seja, não existe o círculo; o mesmo tem área zero. E se  $x = 0$ , significa que não existe o quadrado portanto, todo o arame foi usado para fazer o círculo.

Para resolver a questão, vamos chamar de  $S$  a soma das áreas do quadrado e do círculo. Então qual deverá ser o tamanho de cada parte para se obter o maior valor possível para  $S$ ? E qual tamanho deverá ter cada parte para se obter o menor valor possível para  $S$ ?

A soma das áreas será:

$$S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2$$

ou melhor,

$$S(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{4\pi} \cdot (1-x)^2.$$

Agora, conhecendo a função  $S$  devemos procurar compreender muito bem o comportamento dessa função no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . Seus valores em  $x = 0$  e  $x = 1$  são, respectivamente,  $\frac{1}{4\pi}$  e  $\frac{1}{16}$ , e o primeiro desses valores é o maior.

Desenvolvendo e agrupando os termos semelhantes do segundo membro de  $S$ , vem:

$$S(x) = \frac{(\pi + 4)}{16\pi}x^2 - \frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{4\pi} \quad (2.3)$$

De imediato o aluno percebe que trata-se de uma função quadrática onde o coeficiente do termo de segundo grau é positivo. Daí, ele já conclui que o gráfico desta função é uma parábola com a concavidade voltada para cima e, portanto, possui um valor mínimo absoluto em seu vértice.

Note que só utilizamos conhecimentos da função quadrática que são estudados na educação básica e o aluno consegue encontrar o ponto da curva onde  $S$  é minimizada.

Estas conclusões sobre o gráfico permite-nos completar a solução do problema, como se segue.



Para maximizar  $S$ , devemos escolher  $x = 0$  e usar o arame para o círculo. Insistindo-se que o arame deva ser realmente cortado, então a questão não tem solução pois, não importa quão pequeno seja o arame utilizado para o quadrado, sempre podemos aumentar a área total utilizando ainda menos arame na construção do quadrado.

E a área total  $S$ , é minimizada quando

$$x = \frac{4}{4 + \pi} \cong 0,56.$$

De fato, tomando-se  $a = \frac{(\pi+4)}{16\pi}$  e  $b = -\frac{1}{2\pi}$  na equação (2.3), basta fazer  $x = -\frac{b}{2a}$  fórmula estudada pelos alunos da educação básica que obteremos o valor mínimo para  $x$ .

Portanto, o comprimento do arame usado para o quadrado é exatamente  $x = \frac{4}{4+\pi}$  e o comprimento usado para o círculo é  $1 - x = 1 - \frac{4}{4+\pi} = \frac{\pi}{4+\pi}$ .

Notamos também que a área mínima só é atingida quando o diâmetro da circunferência é igual ao lado do quadrado, pois

$$2\pi r = 1 - x = \frac{\pi}{4 + \pi} \Leftrightarrow 2r = \frac{1}{4 + \pi}.$$

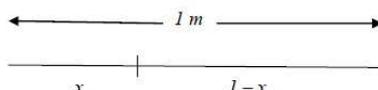
Este mesmo problema poderia ser resolvido trocando o quadrado por um polígono regular qualquer até chegarmos num círculo.

Vejamos o que podemos observar se no caso o arame com 1 metro de comprimento for dividido em duas partes e com cada uma das partes fizermos

um círculo. Onde será cortado o arame para que a soma das duas áreas seja mínima ? E para que a soma das áreas seja máxima ?

Agora a situação é :

Denotamos por  $x$  o comprimento de uma parte. Portanto, a outra parte será  $1 - x$  como ilustrado na figura.



Com uma das partes constrói-se um círculo. Assim,  $\frac{x}{2\pi}$  será o raio do primeiro círculo e o raio do segundo círculo será  $\frac{1-x}{2\pi}$ .



Assim, a soma das áreas será:

$$S = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2,$$

ou melhor,

$$S(x) = \frac{1}{2\pi}x^2 - \frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{4\pi}. \quad (2.4)$$

Para maximizar  $S$ , devemos escolher  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Assim obteremos apenas um círculo de raio  $\frac{1}{2\pi}$  e cuja área máxima é

$$S(0) = S(1) = \frac{1}{4\pi}$$

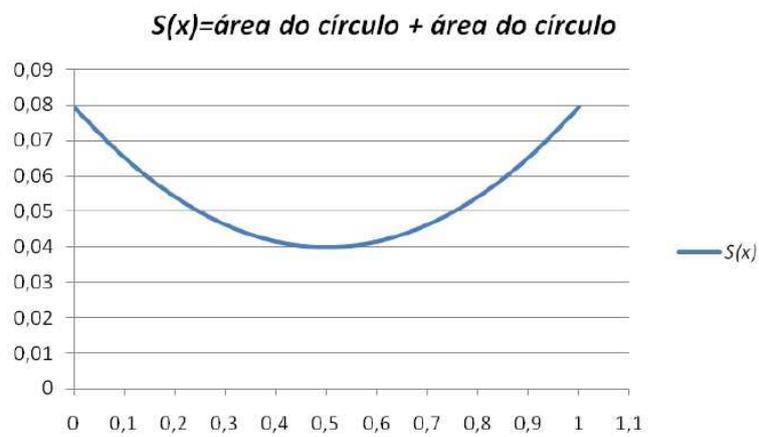
confirmando mais uma vez a desigualdade isoperimétrica.

E a área total  $S$ , é minimizada quando

$$x = \frac{1}{2} = 0,5.$$

De fato, fazendo  $a = \frac{1}{2\pi}$ ,  $b = -\frac{1}{2\pi}$  na equação (2.4) e aplicando a fórmula  $x = -\frac{b}{2a}$  estudada no nono ano do ensino fundamental obteremos o valor mínimo para  $x$ .

Desenhando o gráfico da função  $S$  dada pela equação (2.4) temos:



## Capítulo 3

### Considerações Finais

O estudo do problema isoperimétrico ao longo dos tempos é ainda alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações de desigualdades isoperimétricas nos mais variados contextos matemáticos são ainda estudadas em diferentes áreas de investigação matemática. É interessante notar que as demonstrações podem ser feitas de várias maneiras e a abordagem dessas fórmulas é pouco citada nos livros.

Com as propostas aqui relatadas deseja-se continuar agregando novos elementos capazes de enriquecer e tornar mais acessível o processo de construção do conhecimento matemático.

As atividades em sala de aula precisam estar sempre sendo reavaliadas e o professor precisa buscar metodologias diferenciadas para dinamizar suas aulas.

Concluindo, neste trabalho tive a oportunidade de conhecer e aprender um pouco mais sobre o tema abordado.

# Capítulo 4

## Apêndice da dissertação

### 4.1 Conceitos de Perímetro e Área

Segundo Boyer, no Papiro de Ahmes existem problemas que utilizam o cálculo da medida de área, com o uso de composição e decomposição de figuras.

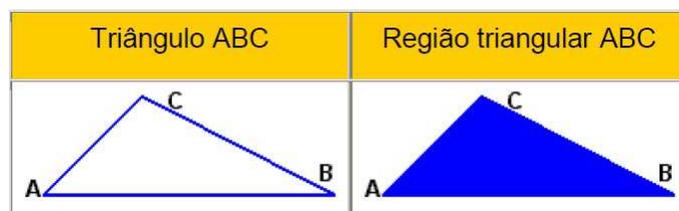
Alguns professores, ao ensinar perímetro o define apenas como “soma das medidas dos lados”. Com esta definição, o que poderíamos dizer sobre o perímetro de uma circunferência ou de uma curva qualquer? Retificando podemos afirmar que perímetro é a medida do contorno de uma determinada figura. Devemos utilizar diferentes estratégias e aplicá-las em circunstâncias variadas para fazer com que os alunos compreendam de fato essa definição.

O mesmo ocorre com o conceito de área, que, muitas vezes, se restringe ao cálculo da área de um retângulo, em que mais uma vez é dito que se deve “multiplicar as medidas dos lados”; depois o ensino da área se estende para outros polígonos, mas a prioridade é o uso de fórmulas. Com essas definições, como calcular a área de um polígono regular conhecendo apenas o seu lado?

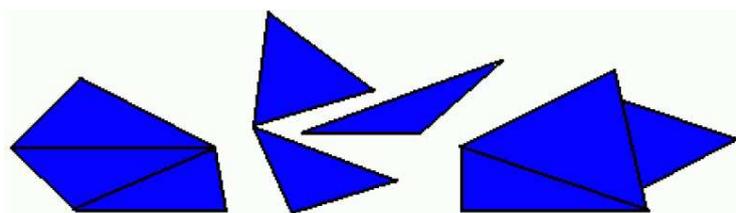
Muitos livros didáticos do ensino fundamental ainda trazem um número reduzido de atividades relacionadas ao estudo do conceito de área de figuras planas, somente introduzindo fórmulas para o cálculo de área, não favorecendo aos professores e alunos para apropriação dos conceitos e das habilidades geométricas para o aprendizado desses conteúdos.

Se analisarmos o desenho na página seguinte, o triângulo  $ABC$  é a reunião dos segmentos de reta  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ . A medida da distância que circunda esse e outros objetos bidimensionais é o perímetro. Portanto, um polígono tem perímetro igual a soma do comprimento de suas arestas. Já a reunião de todos os pontos localizados no triângulo e também dentro do triângulo é chamada uma região triangular, ou seja, área do triângulo. A

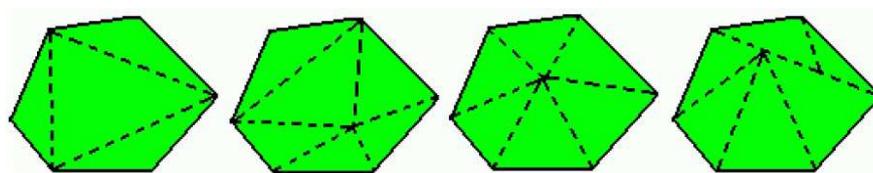
região triangular  $ABC$  é limitada pelo triângulo  $ABC$ . Os pontos dos lados do triângulo  $ABC$  bem como os pontos do interior do triângulo  $ABC$  são pontos da região triangular.



Duas ou mais regiões triangulares não são sobrepostas, se a interseção é vazia, é um ponto ou é um segmento de reta. Cada uma das regiões planas abaixo é a reunião de três regiões triangulares não sobrepostas.



Uma região poligonal é a reunião de um número finito de regiões triangulares não-sobrepostas e coplanares (estão no mesmo plano). Uma região poligonal pode ser decomposta em várias regiões triangulares e isto pode ser feito de várias maneiras.

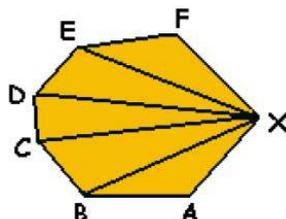


O estudo da área de regiões poligonais depende de alguns conceitos primitivos:

1. A cada região poligonal corresponde um único número real positivo chamado área;
2. Se dois triângulos são congruentes então as regiões limitadas por eles possuem a mesma área;

3. Se uma região poligonal é a reunião de  $n$  regiões poligonais não-sobrepostas então sua área é a soma das áreas das  $n$  regiões.

**Exemplo:** A área da figura poligonal  $ABCDEFX$  pode ser obtida pela decomposição da região poligonal em regiões triangulares  $AXB$ ,  $BXC$ ,  $CXD$ ,  $DXE$  e  $EXF$ ,



daí, vem

$$A(ABCDEFX) = A(AXB) + A(BXC) + \dots + A(EXF).$$

## 4.2 Problema de Dido

**Problema:** *Entre todas as curvas fechadas de um dado comprimento  $L$  encontrar aquela que engloba maior área.*

### 4.2.1 Solução de Steiner

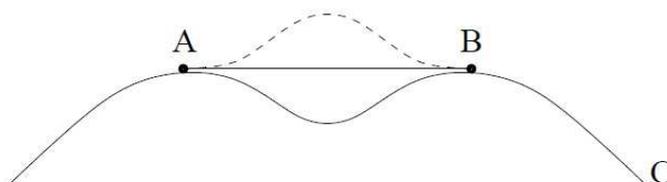
A solução do problema de Dido foi feita em 1836 pelo matemático Jacob Steiner. Steiner provou que a circunferência encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado.

A demonstração de Steiner parte da hipótese de que a solução do problema existe, supondo que a curva  $C$  com comprimento  $L$  seja a solução do problema.

Steiner provou inicialmente que a curva  $C$  procurada deve ser convexa, no sentido de que ela delimita uma região convexa (qualquer segmento de reta unindo dois pontos quaisquer da região deve estar inteiramente contido na região estando a curva  $C$  incluída na região).

Suponhamos que a curva  $C$  não seja convexa, ou seja, possui uma reentrância  $\sigma$  entre dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  sobre  $C$ . Mais exatamente, se  $C$  não é convexa então existem dois pontos  $A$  e  $B$  de  $C$  tais que nenhum ponto do segmento  $AB$  (exceto  $A$  e  $B$ ) está na região delimitada por  $C$ . Fazendo a reflexão da reentrância  $\sigma$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , obtem-se o arco  $\sigma'$

que forma juntamente com o resto do arco  $AB$  uma curva de mesmo comprimento  $L$  que engloba maior área que a curva  $C$  inicial. Isto contradiz a suposição inicial de que  $C$  englobaria a maior área para uma curva fechada de comprimento  $L$ . Portanto, a curva  $C$  procurada deve ser convexa.



Considere agora, dois pontos  $A$  e  $B$  sobre a curva  $C$  de comprimento  $L$ , de modo que eles dividam a curva em dois arcos com o mesmo comprimento  $\frac{L}{2}$  (é sempre possível, partindo de um ponto  $A$  na curva, encontrar um outro ponto  $B$  nesta mesma curva tal que eles dividam a curva em duas curvas de mesmo comprimento; a justificativa para isso é vista com maior rigor utilizando a noção de comprimento de arco visto em cálculo diferencial). Então a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  divide a área da curva em duas partes de mesma área pois, caso contrário, se uma das partes tivesse área maior, refletindo tal parte em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , obteríamos uma outra curva  $C'$  com o mesmo comprimento de  $C$ , só que englobando maior área do que  $C$ .

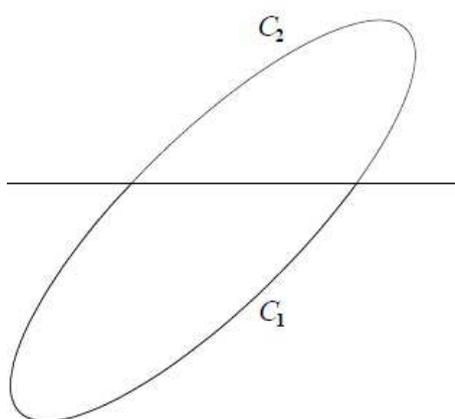


Figura 4.1:  $C = C_1 \cup C_2$

Considerando então apenas metade da solução, pois as duas partes possuem mesma área e mesmo comprimento, o que queremos é encontrar o arco

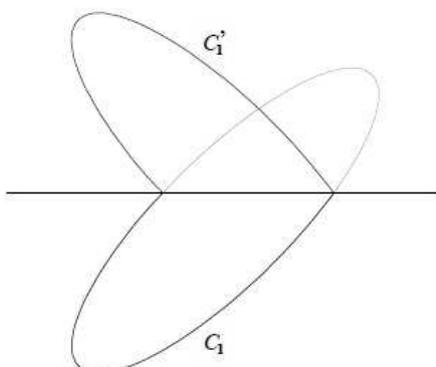


Figura 4.2:  $C' = C_1 \cup C_1'$

de comprimento  $\frac{L}{2}$  delimitado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que encerra maior área entre o arco e a reta. Se encontrarmos a solução da metade do problema teremos encontrado a solução completa para o problema de Dido.

Seja  $P$  um ponto qualquer sobre o arco  $AB$ . Fixando o ponto  $P$  de maneira que os segmentos  $AP$  e  $BP$  não se alterem e de maneira que os arcos  $C_1$  e  $C_2$  também não se alterem, ou seja, de modo que as regiões  $R_1$  e  $R_2$  não se alterem (ver figura 4.3), e se variarmos o ângulo  $\angle APB$ , então o comprimento do arco  $\widehat{APB}$  não se alterará (igual a  $\frac{L}{2}$ ) mas a área englobada por ele e pelo segmento  $AB$  variará.

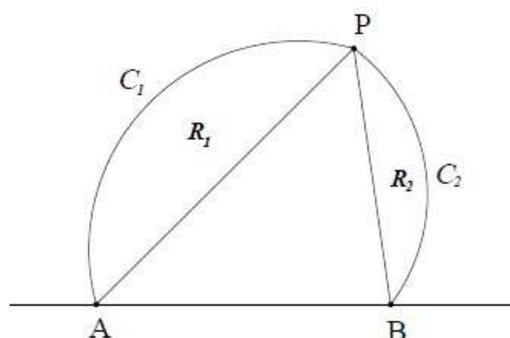


Figura 4.3: Análise do problema

Para obtermos a curva  $APB$  que engloba a maior área, basta encontrarmos o triângulo de maior área inscrito nela. Sabemos que a soma dos

ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , portanto  $0^\circ < \widehat{APB} < 180^\circ$ , se  $\widehat{APB}$  for  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  a área do triângulo  $APB$  irá se degenerar (área zero).

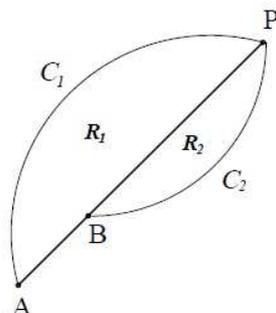


Figura 4.4:  $\widehat{APB} = 0^\circ$

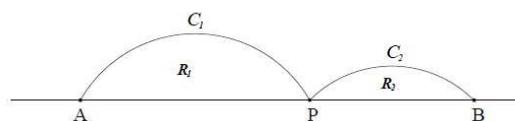


Figura 4.5:  $\widehat{APB} = 180^\circ$

Podemos perceber que se o  $\angle APB$ , partir de zero, aumentar até  $180^\circ$  a área desse triângulo aumenta e a partir de um determinado  $\angle APB$  ela diminui, ou seja, em um certo ângulo  $\angle APB$  a área será máxima.

Isso ocorre quando o ângulo  $\widehat{APB} = 90^\circ$  pois, fixados dois lados do triângulo (o outro lado  $AB$  variando), aquele que possui maior área é o triângulo retângulo (ver figura 4.6).

Como o ponto  $P$  é um ponto qualquer sobre o arco  $AB$  e como o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\widehat{APB} = 90^\circ$  é uma circunferência de diâmetro  $AB$ . Concluimos que a curva  $APB$  é uma semicircunferência. Se a metade da solução é uma semicircunferência, então a solução inteira do problema de Dido é a circunferência.

Observe que a solução de Steiner só é possível se de fato, admitirmos a existência de uma solução para o problema. Steiner aceitou inicialmente essa existência como óbvia, embora o matemático alemão Peter Dirichlet (1805 - 1859) tenha ressaltado essa falha. O problema só foi resolvido rigorosamente pelo matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897) em algum período

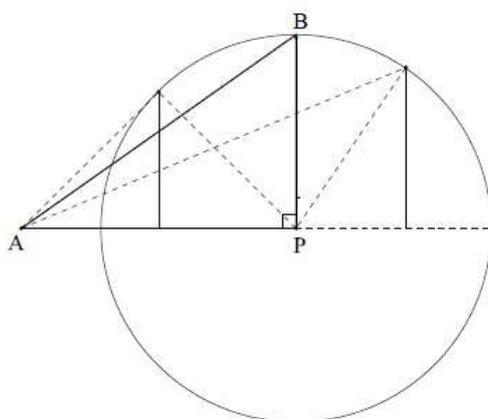


Figura 4.6: Triângulo de área máxima com  $AP$  e  $BP$  fixados

entre 1879 a 1882 usando cálculo de variações. Weierstrass não publicou este resultado devido a sua saúde precária na época, mas as notas de aula de seus alunos foram publicadas em 1927.

#### 4.2.2 Variações do Problema de Dido

**Problema:** *Qual é a curva que cerca a região de área máxima delimitada por uma reta  $m$  e por um arco de comprimento  $L$ , cujas extremidades devem estar sobre esta reta ?*

**Solução:** Dada uma reta  $m$  e assumindo a existência da solução do problema, consideremos a curva  $C$  de comprimento  $L$ , com extremidade sobre  $m$ , que maximiza a área. Para resolvermos este problema teremos apenas que refletir a curva  $C$  em relação à reta  $m$ , obtendo uma nova curva fechada de comprimento  $2L$ . Da solução do problema de Dido, sabemos que entre todas as curvas fechadas de um dado comprimento  $2L$  aquela que engloba a maior área é a circunferência. Portanto, a curva que cerca a região de área máxima é a metade da solução do problema de Dido, que é a semicircunferência de comprimento  $L$ .

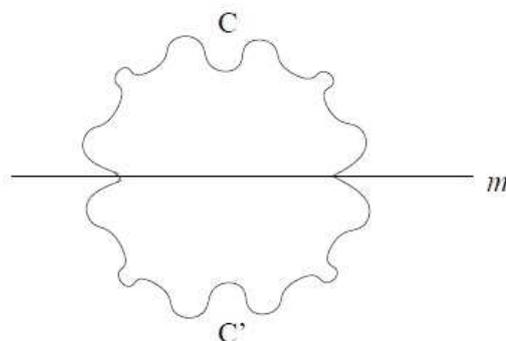


Figura 4.7: Curva de comprimento  $2L$

### 4.3 Aplicações

Veremos que o teorema da desigualdade isoperimétrica também é válido para curvas por partes, sendo assim, enunciaremos as proposições sobre esse teorema com suas devidas demonstrações.

A proposição 7 evidencia que a desigualdade isoperimétrica também é válida para curvas simples não fechadas, na verdade, a hipótese da curva ser simples e fechada é um caso mais geral, esse resultado se torna um caso particular.

**Proposição 7** *São dadas uma reta  $r$  no plano e uma corda flexível  $C$  de comprimento  $L$ . Pousando  $C$  no plano de forma que suas extremidades estejam sobre  $r$ , obtemos uma figura limitada por  $r$  e por  $C$  e cuja área depende da forma que dermos à corda. Então a figura de área máxima entre todas as assim obtidas é um semicírculo com base em  $r$ .*

**Demonstração:** Tomando a reta  $r$  como eixo de rotação, rebata a figura limitada por  $r$  e  $C$  no semiplano oposto à essa figura.

Suponha, por contradição, que essa figura com área máxima não seja um semicírculo, assim, se rebatermos a mesma no eixo  $r$ , obtemos uma curva fechada simples com área máxima e que não é um círculo. Absurdo, pois contradiz o teorema da desigualdade isoperimétrica. Logo, a figura de área máxima é um semicírculo.

**Proposição 8** *Dados dois pontos  $p$  e  $q$  no plano e uma corda flexível  $C$  de comprimento  $L > |p - q|$  a figura de maior área entre aquelas limitadas por  $C$  e pelo segmento de reta  $pq$  é um segmento circular.*

**Demonstração:** Afirmção: A curva obtida com as condições estabelecidas é um arco de circunferência.

Se  $L \leq |p - q|$ , então a curva  $C$  não delimita área. Construa uma curva  $C'$  com comprimento fixo  $L'$  tal que a curva  $C \cup C' = S$  seja fechada, simples e regular. Pelo teorema da desigualdade isoperimétrica, a área máxima que a curva  $S$  pode delimitar é quando  $S$  for uma circunferência. Logo segue que a curva estabelecida na proposição acima é um arco de circunferência.

**Teorema 4** *O perímetro de qualquer curva de largura constante  $l$  é igual a  $\pi l$ .*

A demonstração do teorema se encontra na referência [1].

**Proposição 9** *Se  $\gamma$  é uma curva convexa regular de largura constante  $l$  que limita uma região de área  $A$ , então*

$$A \leq \frac{\pi l^2}{4}$$

*só havendo a igualdade se  $\gamma$  for uma circunferência.*

**Demonstração:** Essa proposição é consequência imediata do teorema 4. Pelo teorema 4, segue que  $L = \pi l$  onde  $L$  é o perímetro de  $\gamma$ .

Do teorema da desigualdade isoperimétrica, vem:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \iff A \leq \frac{(\pi l)^2}{4\pi} \iff A \leq \frac{\pi^2 l^2}{4\pi} \iff A \leq \frac{\pi l^2}{4}.$$

Se  $A = \frac{\pi l^2}{4}$  temos que  $\gamma$  é uma circunferência.

De fato, fazendo  $l = 2r$  onde  $r$  é o raio da circunferência fica demonstrada a igualdade.

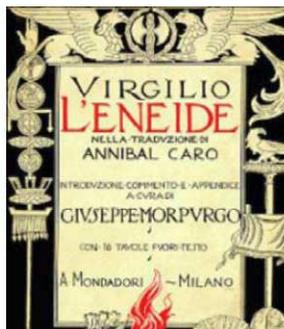
## 4.4 Curiosidades

### 4.4.1 A obra “Eneida”

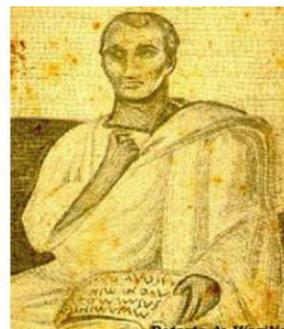
A lenda de Dido (ou Elisa) faz parte do Cântico I da obra épica “Eneida”, escrita pelo grande poeta romano Virgílio (70 a.C. a 19 a.C.).



A personagem



A obra



O autor

### 4.4.2 Cartago

Foto das ruínas de Cartago, cidade fundada por Dido.

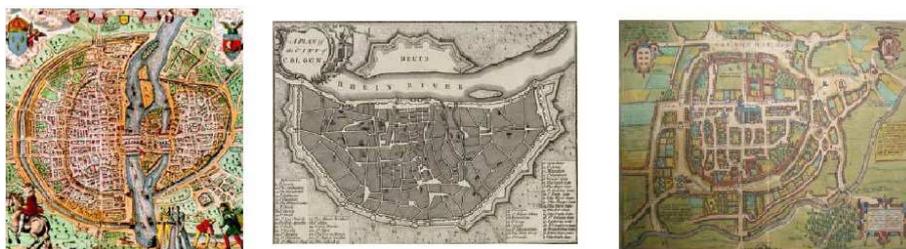


### 4.4.3 Tunísia

Mapa da região do mediterrâneo onde se destaca a Tunísia, ao norte da África.



### 4.4.4 Mapas de Paris, Colônia e Braga



As referências históricas para a solução do problema de Dido não se restringem apenas à literatura (ver [7]).

Durante a idade média era comum a construção de muros de proteção para as cidades. Não por acaso, encontramos muros no formato circular ou semicircular. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa. Utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, otimizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material.

Repare que os mapas das cidades de Paris (França) , Colônia (Alemanha) e Braga (Portugal) tinham formatos circulares ou semicirculares quando as cidades eram banhadas por rios.

# Bibliografia

- [1] Araújo, P. (2004) *Geometria Diferencial*. , Rio de Janeiro , IMPA.
- [2] Boyer, C.B. (1974) *História da Matemática*. , São Paulo , Edgard Blücher.
- [3] Courant, R. e Robbins,H. (2000) *O que é Matemática ?*. , Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda.
- [4] Coxford, A.F e Shulte, A.P. (1995) *As ideias da álgebra*. , São Paulo , Atual.
- [5] Figueiredo, D.G. (1989) *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. , Matemática Universitária, números 9/10 , Rio de Janeiro, SBM.
- [6] Lima, E.L. (1987) *Meu professor de Matemática*. , SBM , Rio de Janeiro.
- [7] Limberger, R. (2011) *Abordagens do problema isoperimétrico*. , Dissertação de Mestrado , Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- [8] Madeira, T.M. (2005) *O problema isoperimétrico clássico*. , Dissertação de Mestrado , Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [9] Moreira, C.G.T. de A. e Saldanha, N.C. (1993) *A Desigualdade Isoperimétrica*. , Matemática Universitária, número 15, 13-19.
- [10] Pasquali, K.C. (2004) *Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana*. , Dissertação de Licenciatura em Matemática , Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- [11] Silva, F.L. (2010) *Matemática e Educação: Uma proposta pedagógica no ensino do Cálculo*. , Dissertação de Especialização em Matemática , Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

- [12] Souza, C.R.A. (2006) *Duas demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica.* , Universidade Federal de Minas Gerais , Belo Horizonte.
- [13] Usiskin, Z. (1995) *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis.* , São Paulo , Atual.
- [14] Wu, Hung-Hsi (1999) *The isoperimetric inequality: The algebraic viewpoint.* , University of California , Berkeley.
- [15] Zaro, M. e Hillebrand, V. (1992) *Matemática Experimental.* , Óptica.