Os Reais e as Expansões Decimais: Aplicações

por

Carla Valéria dos Santos Pacheco

CURITIBA

Março - 2015

Os Reais e as Expansões Decimais: Aplicações.

Carla Valéria dos Santos Pacheco

Curitiba, PR Brasil

carla.pacheco@ifsc.edu.br

30 de março de 2015

Resumo

Neste trabalho, que representa parte de um artigo maior, iremos abordar o conjunto dos números reais, mais precisamente classificá-los em duas categorias: racionais e irracionais. Buscamos ampliar o conhecimento dos leitores em relação a esses conjuntos. Definiremos os números racionais, em sua forma decimal, mostrando a sua padronização quanto as casas decimais. Definiremos os números irracionais onde não há uma padronização. Mostraremos algumas aplicações das expansões decimais desses números.

Palavras-chave: Números **r**eais; Racionais; Irracionais; Decimais. Expansões decimais

1. Introdução

Este trabalho busca ampliar o conhecimento dos professores em relação aos conteúdos dos conjuntos dos racionais e dos irracionais, proporcionando uma nova perspectiva sobre sua construção conceitual, pois a falta de esclarecimento destes conteúdos provoca no aluno respostas equivocadas e incompreensão desse assunto.

A metodologia utilizada aqui tem como alicerce a pesquisa teórica, onde o sólido embasamento teórico nos leva ao tema proposto. Este trabalho representa parte de uma artigo maior e nesta parte apresentamos algumas aplicações das expansões decimais.

2. Conhecendo os diferentes tipos de representação decimal.

Algumas características particulares das expressões decimais correspondem a propriedades específicas dos números que elas representam. Os números racionais são representados por expressões decimais finitas e infinitas periódicas (simples ou compostas). Já os números irracionais são representados por expressões decimais infinitas e não periódicas. Nesta seção vamos definir alguns métodos que permitirão transformar os números racionais representados na sua forma decimal em sua forma fracionária.

2.1 Expressões decimais finitas.

Algumas frações possuem representações decimais finitas. São exemplos de representações decimais finitas de uma fração,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad , \quad \frac{2}{5} = 0{,}4 \quad , \quad \frac{1}{80} = 0{,}0125.$$

Podemos nos perguntar quais frações racionais possuem uma representação decimal finita? Antes de responder a esta pergunta, em geral, vamos examinar um exemplo, que é uma representação decimal finita 0,8625. Sabemos que

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10000}$$

e que qualquer número decimal finito pode ser escrito como uma fração racional com um denominador que é de 10 , 100 , 1000, ou alguma outra potência de 10. Se a fração do lado direito é simplificada, obtemos

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10000} = \frac{69}{80}.$$

O denominador 80 foi obtido dividindo 10.000 por 125, o maior fator comum de 10.000 e 8625. Agora, o número inteiro 80, como 10.000, tem apenas os dois fatores primos 2 e 5. Se tivéssemos começado com qualquer número decimal com representação finita, seja qual for, a forma correspondente a fração racional $\frac{a}{b}$, com a e b primos entre si, teria a mesma propriedade. Isto é, o denominador b teria somente 2 e 5 como fatores primos que são os mesmos fatores de 10, que acaba por decidir a questão.

Proposição: *Um número racional, na forma irredutível* $\frac{m}{n}$, *tem representação decimal finita se, e somente se,* n *não possui fatores primos diferentes de 2 e 5.*

Demonstração: (→) Considerando φ um número de representação decimal finita, é sempre possível colocá-lo na forma $\frac{m}{n}$,com n sendo uma potência de 10. E qualquer potência de 10 tem apenas como fatores primos o 2 e 5.
(←) Suponha que n seja da forma $2^a 5^b$, com a e b inteiros positivos ou nulos. Então, duas coisas podem acontecer: ou b é menor do que ou igual a a ($b \leq a$), ou então b é maior do que a ($b > a$). Se $b \leq a$, multiplicaremos o numerador e o denominador da fração por 5^{a-b}.

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^a5^b} = \frac{m.5^{a-b}}{2^a5^b5^{a-b}} = \frac{m.5^{a-b}}{2^a5^a} = \frac{m5^{a-b}}{10^a},$$

sendo $a - b$ positivo ou nulo, 5^{a-b} será inteiro e, portanto $m.5^{a-b}$ também será um inteiro, digamos β. Podemos escrever:

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta}{10^a}$$

e, como a divisão do inteiro β por 10^a requer apenas que coloquemos vírgula no lugar correto, obtemos para $\frac{m}{n}$ uma representação decimal finita.
Analogamente, concluímos para $b > a$.

■

2.2 Expressões Decimais infinitas – periódicas

Podemos estabelecer que cada um desses números decimais infinitos tem um padrão de repetição, tais como

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ ... \qquad e \qquad \frac{3097}{9900} = 0{,}31282828\ ...$$

Por conveniência, vamos utilizar a notação padrão para indicar um período, através do uso de uma barra sobre a parte repetitiva:

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45}\ , \qquad \frac{3097}{9900} = 0{,}31\overline{28}, \qquad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}.$$

A razão para o padrão repetitivo de dígitos pode ser vista a partir de uma consideração do método padrão de conversão de uma fração, $\frac{2}{7}$, por exemplo, na forma decimal :

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}.$$

No processo de divisão, os restos sucessivos são 6, 4, 5, 1, 3, 2. Quando o resto 2 é atingido, o ciclo está completo e tem um recorrência da divisão de 20 por 7. Os restos são menores do que o divisor, por isso há uma recorrência uma vez que existem apenas seis eventuais restos. Observe que, nesse caso, o resto 0 é desconsiderado, uma vez que não estamos examinando decimais finitos.

No exemplo acima, a recorrência aconteceu quando a divisão de 20 por 7 apareceu pela segunda vez. Agora, 20 por 7 foi o primeiro passo em todo o processo de divisão. Considere, por exemplo, a conversão de $\frac{209}{700}$ para a forma decimal :

$$\frac{209}{700} = 0{,}29\overline{857142}$$

A recorrência aqui acontece quando alcançamos o resto 600, que havia ocorrido vários passos antes. Com 700 como o divisor, sabemos que os eventuais restos são os números 1, 2, 3, . . . , 699. Assim, temos a certeza da repetição de um resto, embora possamos ter que seguir muitos passos para alcançar a repetição.

No caso geral $\frac{a}{b}$, a e b números inteiros e $b \neq 0$, pode-se argumentar de um modo semelhante. Quando o número inteiro a é dividido por um número inteiro b, os únicos restos possíveis são 1, 2 , 3 , . . . , b - 2 , b - 1 , e assim uma recorrência do processo de divisão é determinado. Quando se repete o processo de divisão, um ciclo é iniciado e o resultado é uma dízima periódica.

Proposição: *Qualquer fração racional* $\frac{a}{b}$ *é expressa como um decimal finito ou uma expansão decimal periódica infinita; reciprocamente, qualquer expansão decimal finita ou infinita periódica é igual a um número racional.*

Primeiramente, vamos mostrar, através de um método que pode ser generalizado para cobrir todos os casos, que um número decimal em que há repetição periódica infinita é racional. Depois de tratarmos um caso particular, devemos aplicar o mesmo método para qualquer decimal periódica.

Consideremos, por exemplo, a decimal periódica infinita

$$x = 28{,}123\overline{456} \qquad \text{ou} \qquad x = 28{,}123456456\ldots$$

Vamos multiplicá-la pela primeira vez por um número, em seguida, por outro; Estes números serão escolhidos de modo que, quando tomamos a diferença dos dois produtos, a parte periódica infinita terá sido subtraída. No exemplo, os números 10^6 e 10^3 servirão para este fim. Observe que

$$10^6.x = 28123456,\overline{456}$$

e

$$10^3.x = 28123,\overline{456}\ ,$$

de modo que a diferença $10^6.x - 10^3.x$ é

$$999000x = 28095333\ ,$$

portanto

$$x = \frac{28095333}{999000}.$$

Logo x é um número racional.

Generalizando este método pretende-se mostrar que os números 10^3 e 10^6 não foram escolhidos aleatoriamente, mas foram escolhidos de forma sistemática. Nós devemos omitir a parte inteira do decimal, ou seja, a parte que corresponde a 28 no exemplo acima, porque não desempenha qualquer papel decisivo no processo. Assim, podemos escrever qualquer decimal periódico sem a parte inteira, dessa forma.

Demonstração:

Seja

$$x = 0,a_1a_2 \dots a_s\overline{b_1b_2 \dots b_t},$$

Onde $a_1, a_2, \dots, a_s$ representam os *s* dígitos consecutivos da parte não periódica e $b_1, b_2, \dots, b_t$ representam os *t* dígitos consecutivos do período. Multiplicamos *x* pela primeira vez por 10^{s+t}, depois por 10^s, e obtemos

$$10^{s+t}.x = a_1a_2 \dots a_sb_1b_2 \dots b_t + 0,\overline{b_1b_2 \dots b_t},$$
$$10^s.x = a_1a_2 \dots a_s,\overline{b_1b_2 \dots b_t},$$

Subtraindo as equações, temos

$$(10^{s+t} - 10^s).x = a_1a_2 \dots a_sb_1b_2 \dots b_t - a_1a_2 \dots a_s,$$

de modo que

$$x = \frac{a_1a_2 \dots a_sb_1b_2 \dots b_t - a_1a_2 \dots a_s}{10^{s+t} - 10^s},$$

que é um número inteiro dividido por outro número inteiro e, portanto é racional.
■

Corolário: *Se o denominador b da fração* $\frac{a}{b}$ *é primo relativo com 10 então, o período começa imediatamente após a vírgula.*

O Resultado acima é a contrapositiva do que foi feito na proposição anterior.

O que temos estabelecido nesta seção é que alguns números racionais podem ser expressos como decimais finitos, ao passo que há outros números racionais que podem ser expressos por decimais infinitos. Curiosamente cada decimal finito, com exceção do zero, pode ser expresso numa forma infinita. Claro que isso pode ser feito de uma maneira muito óbvia, quando escrevemos 6,8 como 6,8000 . . . , isto é, com uma sucessão infinita de zeros. Além deste processo óbvio de transformar um número decimal finito em um infinito anexando toda uma série de zeros, há outra maneira. Vamos começar com a expansão decimal bem conhecida:

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$$

Se multiplicarmos ambos os membros desta equação por 3, obtemos o resultado

(1) $$1 = 0,9999 \dots \ .$$

Assim, temos a igualdade entre a expansão decimal finita 1,0 e a expansão decimal infinita 0,9999 ..., Vejamos a equação (1) de outra maneira. Suponha que denotamos o número decimal infinito $0{,}9999\ldots$ por x, isto é,

(2) $$x = 0{,}9999\ldots,$$

Multiplicando por 10, obtemos

(3) $$10x = 9{,}9999\ldots = 9 + 0{,}9999\ldots,$$

Subtraindo a equação (2) da equação (3), obtemos

$$9x = 9 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Assim provamos a equação (1) por uma abordagem diferente da usada inicialmente. Agora, depois de dividirmos a equação (1) por 10, 100, 1000, etc. Produzimos toda sequência de resultados.

(4)
$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 0{,}09999\ldots, \\ 0{,}01 &= 0{,}009999\ldots \\ 0{,}001 &= 0{,}0009999\ldots \\ 0{,}0001 &= 0{,}00009999\ldots, \text{ etc} \end{aligned}$$

Estes resultados podem ser utilizados para converter qualquer decimal finito em uma forma infinita. Por exemplo, podemos escrever:

$$6{,}8 = 6{,}7 + 0{,}1 = 6{,}7 + 0{,}09999\ldots. = 6{,}79999\ldots.$$

Alguns outros exemplos são:

$$0{,}43 = 0{,}42 + 0{,}01 = 0{,}42 + 0{,}009999\ldots = 0{,}429999\ldots.;$$

$$0{,}758 = 0{,}757 + 0{,}001 = 0{,}757 + 0{,}0009999\ldots = 0{,}7579999\ldots.;$$

$$0{,}102 = 0{,}101 + 0{,}001 = 0{,}101 + 0{,}0009999\ldots = 0{,}1019999\ldots.;$$

Este método nos permite escrever qualquer número decimal finito como um número decimal infinito. Por outro lado, as equações (1) e (4) podem ser utilizadas para converter qualquer decimal que tem uma sucessão infinita de noves em um número decimal finito. Alguns exemplos são:

$$0{,}469999\ldots = 0{,}46 + 0{,}009999\ldots = 0{,}46 + 0{,}01 = 0{,}47$$

$$18{,}09999\ldots = 18 + 0{,}09999\ldots = 18 + 0{,}1 = 18{,}1.$$

A questão de como um número decimal pode ser representado de várias formas, envolve uma questão de interpretação. Pois, além de escrevermos 0,43 como 0,42999... também podemos escrever este número nas formas

$$0{,}430 \text{ , } 0{,}4300{,}0{,}43000\text{, } 0{,}430000\text{,...}$$

No entanto, são essas variações triviais sobre 0,43 que fazem não contá-las como diferentes representações. Quando nos referimos a forma decimal infinita de um número, como 0,43, queremos dizer 0,42999... e não 0,43000...

Podemos distinguir dois tipos de números racionais $\frac{a}{b}$, aqueles em que o número inteiro b só tem fatores 2 e 5, e todos os outros. Presume-se que $\frac{a}{b}$ está na forma irredutível. Os do primeiro tipo podem ser escritos tanto como decimais finitos quanto infinitos. Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999\ \dots$$

Os números do segundo tipo podem ser escritos apenas com a representação decimal infinita. Por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ \dots$$

Na seção 2 vimos que duas representações decimais infinitas distintas, nenhuma das quais tendo 9 como período, correspondem a números reais distintos. A proposição abaixo nos ajuda a entender um pouco das restrições apresentadas quanto aos números que possuem nove como período.

Proposição - *O processo das divisões sucessivas nunca gera período formado só por noves.*

Demonstração*:* A prova é por absurdo. Suponha que $\frac{a}{b} < 1$ e que, pelo processo descrito acima, tenhamos chegado, por exemplo, a um período de três noves:

$$\frac{a}{b} = 0, q_1 \dots q_s 999 \dots = 0, q_1 \dots q_s \overline{999}.$$

Isto significa que fomos gerando quocientes $q_1 \dots q_s$ e respectivos restos $r_1 \dots r_s$, e que, a partir daí, digamos, nas próximas 3 etapas, obtivemos:

$$10 \times r_s = 9 \times b + r_{s+1}, \text{com } 0 < r_{s+1} < b$$

$$10 \times r_{s+1} = 9 \times b + r_{s+2}, \text{com } 0 < r_{s+2} < b$$

$$10 \times r_{s+2} = 9 \times b + r_s.$$

Isto nos garante que a partir de agora o bloco de 3 quocientes iguais a 9 vai se repetir, caracterizando assim período 9 para expansão decimal de $\frac{a}{b}$. Somando as 3 igualdades acima, obtemos:

$$10 \times (r_s + r_{s+1} + r_{s+2}) = 9 \times b \times 3 + (r_{s+2} + r_{s+1} + r_s) =$$

$$= 9 \times b \times 3 + (r_s + r_{s+1} + r_{s+2}),$$

ou ainda,

$$r_s + r_{s+1} + r_{s+2} = 3 \times b,$$

o que é absurdo, pois cada resto é estritamente menor do que *b*.

Assim, o processo de divisões sucessivas nunca gera período só formado por 9's.

■

2.3 Expressões decimais infinitas – não periódicas

Na seção anterior caracterizamos as representações decimais de números racionais como sendo aquelas que são ou finitas ou infinitas com dízimas periódicas. Uma conclusão importante que podemos obter a partir desse resultado é a caracterização da representação decimal de números irracionais, a saber: Essas representações são infinitas e sem dízimas periódicas. Com isso, temos nessas representações uma infinidade de algarismos à direita da vírgula sem um padrão de repetição definido. Como consequência, um dado número irracional *não pode ser obtido como uma fração de inteiros* $\frac{m}{n}$ com *n* diferente de 0.

Para começarmos a nossa discussão, vamos exibir a irracionalidade de $\sqrt{2}$ que é a base para provarmos a irracionalidade de infinitos outros números.

Proposição: $\sqrt{2}$ *é um número irracional.*
Demonstração: A prova é por absurdo. Suponha que $\sqrt{2}$ é número racional, podemos escrever

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

onde *a* e *b* são inteiros, primos entre si. Elevando ao quadrado a equação, obtemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

$$a^2 = 2b^2.$$

O termo $2b^2$ representa um inteiro par, então a^2 é um número par, e portanto *a* também é um número par. Seja *a* = 2*c*, onde *c* é também um número inteiro. Substituindo *a* por 2*c* na equação $a^2 = 2b^2$, obtemos

$$(2c)^2 = 2b^2,$$

$$4c^2 = 2b^2,$$

$$2c^2 = b^2.$$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que b^2 também é um inteiro par, o que contradiz a hipótese de $\frac{a}{b}$ ser uma fração irredutível. Logo $\sqrt{2}$ é irracional.

■

De maneira análoga pode-se demonstrar que $\sqrt{p}$ para p primo é um número irracional. Portanto como há infinitos números primos, deduzimos que há infinitos números irracionais produzidos dessa forma.

Convém notar que, embora não exista um padrão de formação das representações decimais dos números irracionais, é muito fácil construí-las para uma infinidade desses números: Basta criarmos um número que tenha uma representação decimal infinita e que não tenha uma dízima periódica. Por exemplo:

$$\beta = 0{,}123456789101112131415161718....$$

O número β foi escrito utilizando-se os dígitos dos números naturais em ordem crescente. Apesar da representação decimal desse número ser de obtenção simples, não é uma representação finita e não possui dízima periódica. Logo β é um número irracional.

Outro exemplo de número q irracional, fácil de construir, é dado por:

$$q = 0{,}1010010001000010000010000001 \ldots$$

q é formado por uma série de uns separados por zeros, primeiro um zero, em seguida dois zeros, em seguida, três zeros e assim por diante. Podemos observar que não existe um período que se repita.

Mais um exemplo de número irracional é a constante de Liouville, definida pela série numérica

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$$

Finalmente as considerações feitas anteriormente nos conduzem a concluir que há uma facilidade na obtenção de uma infinidade de números irracionais. Isto serve para desmistificarmos a ideia intuitiva e equivocada, de que há poucos exemplos desses números. Na verdade pode-se até mostrar que há uma infinidade de representações decimais infinitas e sem dízimas periódicas, o que ratifica o fato de que o conjunto dos números irracionais tem infinitos elementos.

Neste trabalho não trataremos das aproximações dos Irracionais. Indicamos aos leitores que desejarem se aprofundar mais neste assunto específico, a leitura do livro Numbers: Rational and Irrational (NIVEN, 1961).

3. Considerações Finais

Com o presente trabalho podemos observar as demonstrações que nos levam a um tipo de representação de cada número. Vimos que um número real é racional ou irracional e que estes se diferem no comportamento de suas casas decimais. As demonstrações matemáticas são de suma importância, tanto para o professor para que ele sinta-se seguro nos seus argumentos, tanto para o aluno para que ele possa ampliar as estratégias para a resolução de um problema. Entender o comportamento dos números Reais e a diferença entre os seus subconjuntos é a base para um entendimento sólido da matemática. Vimos que a partir dos axiomas dos reais, são construídas várias operações simples até outras mais complexas, como as sequências, que nos levam a entender o comportamento das expansões decimais. Na construção do conhecimento (ou, do conceito), por vezes a intuição nos foi bastante útil, mas isso não significa que a formalização conceitual com o rigor matemático necessário deixou de ser apresentada. Demonstramos alguns resultados importantes das representações decimais que nos permitiram entender como estão associadas às diferentes representações de um número. Dessa forma, esse trabalho visa ser um auxiliador para o professor que deseja entender melhor as diferentes representações decimais, contribuindo com o seu conhecimento e consequentemente melhorando as orientações dadas aos alunos.

Referências

.

[1] ÁVILA, G. *Análise Matemática Para Licenciatura. 3 ed.* São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

.

[2] BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática Através dos Tempos.* São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2004.

[4] FIGUEIREDO, D. G. *Análise 1.* 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[5] NIVEN, I. *Numbers: Rational and Irrational*. The L.W. Singer Company, New Mathematical Library, 1961.

[6] SHAFAREVICH, I.R. *Selected Chapters From Álgebra*. The Teaching of Mathematics 2001, Vol IV, 1, pp 1-34

[7] WHITE, A. J. *Análise Real: Uma Introdução.* São Paulo: Edgard Blucher, 1993.