PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-980, Curitiba, PR
Brasil

Geometrias Não Euclidianas para sala de aula - Linhas

por

Catiane Perotoni Negrello

Preprint PROFMAT 1 (2015) 26 de Março, 2015

Disponível via INTERNET:
http://www.profmat-sbm.org.br

Geometrias Não Euclidianas para sala de aula - Linhas

Catiane Perotoni Negrello
Departamento de Matemática - UFPR
81531-980, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: catianep@yahoo.com.br

Resumo

Este trabalho traz uma coletânea de atividades sobre Geometria Não Euclidiana elaboradas por três autoras, motivadas pela presença da mesma nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná e da carência de materiais didáticos disponíveis atualmente. Buscou-se apresentar uma proposta de material para ser utilizada nas aulas de Matemática, para o que se realizou uma comparação da Geometria Não Euclidiana com a Euclidiana, utilizando materiais didáticos manipuláveis, textos e atividades que despertem o interesse e promovam o envolvimento do aluno para o assunto. Este é o primeiro volume do trabalho que está composto por: volume 1, referente ao conteúdo de Linhas, volume 2, Ângulos e Triângulos, volume 3, Polígonos e Formas Espaciais. As atividades estão subdivididas em: Nível Zero - Ensino Fundamental 1 (1º ao 5º ano), Nível 1 - 6º e 7ºano, Nível 2 - 8º e 9º ano do Ensino Fundamental 2 e, Nível 3 - Ensino Médio.
Palavras-Chave: Geometria Não Euclidiana - Atividades - Material manipulativo.

1 Introdução

A experiência profissional das autoras do presente artigo, atuantes no Ensino Básico do Estado do Paraná, revela que há dificuldade em incorporar esse tema no dia a dia de sala de aula, assim sugere-se atividades que possam ser trabalhadas concomitantemente com a Geometria Euclidiana, fazendo um paralelo à mesma.

Logo, este trabalho é uma proposta de ensino de Geometria Não Euclidiana, a ser usada por professores da Educação Básica, para alunos que cursam desde o Ensino Fundamental 1 até o Ensino Médio. Esse tema está contemplado nas Diretrizes Curriculares Estaduais (2008, p.56), pois segundo elas:

> "Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas Geometrias Não Euclidianas."

Os principais conteúdos abordados nas atividades são: linhas, ângulos, triângulos, polígonos e formas espaciais, esses temas são desenvolvidos a partir de manipulações de objetos concretos, experiências onde o aluno vai percebendo gradativamente as diferenças entre a Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana e construindo suas próprias conclusões. A interação do professor com os alunos no decorrer das atividades, questionando e estimulando, é imprescindível para que esse momento seja de aprendizagem e descoberta, num ambiente propício à experimentação.

Na busca por atividades compatíveis com essa ideia, foram encontrados vários materiais interessantes, dentre os quais destacamos:

- Experimentos de Lénárt (1996): mostra que trabalhar com Geometria Esférica não só é possível, como pode ser uma aventura empolgante tanto para o aluno quanto para o professor;

- Projeto "Matemáticas Experimentais", da UNESCO (2004): propõem aos alunos, segundo os autores *"experimentar, tatear, colocar hipóteses, testá-las, tentar validá-las, procurar demonstrar e debater acerca de propriedades matemáticas"*;

- Os quadrinhos de Petit: de uma maneira simples e divertida, exploram temas instigantes da Geometria Não Euclidiana;

- Os livros de Stewart (2009, 2010): de acordo com o autor *"é uma miscelânea de jogos, quebra-cabeças, histórias e curiosidades matemáticas"* que mostram muitos aspectos divertidos e intrigantes da Matemática;

- Os livros de Coutinho (2001, 2004, 2010): paradidáticos que abrem os olhos a vários pontos das Geometrias Não Euclidianas.

Após as leituras, todas as atividades foram elaboradas de maneira própria das autoras, considerando suas bagagens diversas, pois atuam em todos os níveis sugeridos.

Com isso, o professor terá um guia sobre comparação entre as Geometrias e várias sugestões de atividades e experimentos de Geometria Não Euclidiana que poderá levar para a sala de aula e trabalhar com seus alunos, escolhendo o que mais se adapta à sua turma.

2 Metodologia

Falar em Geometria hoje é falar dos objetos, da tecnologia presente em tudo o que nos cerca, do espaço que estamos ocupando ou que queremos ocupar, é ter um raciocínio lógico e espacial rápido. O professor, ao utilizar esta proposta de material, terá que perceber que o desenvolvimento do conhecimento das Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas tem que se fazer na escola desde muito cedo, pois é desejável que a escola privilegie todos os contextos do mundo em que o ser humano está inserido. A criança deve tomar conhecimento das Geometrias, pois ela está inserida no espaço desde que veio ao mundo, como cita Toledo (1997, p. 221):

> “[...] Através da visão, da audição, do tato, dos seus movimentos, ela vai explorar e interpretar o ambiente que a rodeia e, antes mesmo de dominar as palavras, conhecer o espaço e as formas nele presentes.”.

Portanto, procurou-se privilegiar a utilização de materiais didáticos manipuláveis fazendo a observação e a representação dos mesmos, conhecendo os conceitos básicos das formas geométricas para facilitar a formação intelectual do indivíduo.

O que a história revela é que o ser humano, ao descrever o mundo, iniciou fazendo representações por desenhos, que com o passar do tempo foram sendo conceitualizados até adquirirem significados. Foi o que aconteceu com a escrita e possivelmente pode ter ocorrido com a Geometria. Lorenzato, Turrioni e Perez, (2010, p. 5) citam que:

> “Arquimedes revelou o modo pelo qual fazia descobertas matemáticas e confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes.“

Logo, é desejável que a Matemática ensinada aos alunos seja apresentada nas mais variadas situações, que sejam instigantes e auxiliem no crescimento intelectual. As situações matemáticas apresentadas se iniciam de maneira intuitiva no Ensino Fundamental 1, quando o aluno passa a perceber as formas do ambiente em que está através da observação. Smole (2005, p. 21), diz:

> “Para que a percepção do espaço torne-se cada vez mais elaborada, a criança precisa ver e apreciar a geometria em seu mundo, descobrir formas, desenhá-las, escrever e falar sobre elas.”

Tendo as situações continuidade nas séries posteriores, até o Ensino Médio, onde os alunos já estão aptos a partir do concreto para o abstrato, ou seja, quando conseguem fragmentar e conceituar os elementos das Geometrias com maior rigor.

Por isso, a importância de outras Geometrias além da Euclidiana e, para isso, tem-se uma coletânea de atividades utilizando objetos e o próprio corpo para que percebam as formas. Conforme Lorenzato, Turrioni e Perez (2010, p. 61):

> “O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.”

Situações em que haja a comparação e também o desenho das formas, pois é o momento de trabalhar com o sensitivo: direita, esquerda, atrás, na frente, longe, perto, dentro, fora, grande, pequeno, em cima, embaixo, no meio, no centro, alto, baixo, vazio, cheio, aberto, fechado, igual e diferente. Momento também de recortar, dobrar, moldar, deformar, montar e decompor.

> “O conhecimento do seu próprio espaço e a capacidade de ler esse espaço pode servir ao indivíduo para uma variedade de finalidades e constituir-se em uma ferramenta útil ao pensamento tanto para captar informações quanto para formular e resolver problemas.” (SMOLE, 2005, p. 16).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, recomenda-se que os conteúdos devam ser articulados de acordo com o conhecimento que os alunos possuem, pois, mesmo que o aluno não tenha frequentado a pré-escola, ele tem noções geométricas empíricas. A partir disso, o professor pode desenvolver conceitos e métodos relativos às Geometrias, fazer atividades exploratórias, manipulativas, trabalhar com representações e o aluno compreender o que está à sua volta. O destaque dado no PCN (1997, p. 55 – 56) é:

> "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.
> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema

> e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.
> Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento."

As propriedades geométricas são mais facilmente aprendidas pelo ser humano quando há uma grande variedade de experiências nas quais, a partir do fazer e do ver, ele faça comparações e assim construa os conceitos.

> "Por isso, é essencial que as atividades que permitem o desenvolvimento da percepção espacial possam ser integradas em um programa de ensino de matemática abrangente, levando em conta o desenvolvimento total da criança." (SMOLE, 2005. p. 19).

Então, as atividades propostas buscam a visualização e manipulação, bases primordiais para o desenvolvimento do pensar geométrico. A partir disso, o indivíduo começa a classificar, ordenar, contar, fazer comparações, tirar conclusões e formar o seu conhecimento teórico. Atividades estas, que se apresentam divididas nos conteúdos já citados: linhas, ângulos, triângulos, polígonos e formas espaciais. Cada conteúdo traz um breve resumo do que será trabalhado, com conceitos e definições. E é subdividido em níveis, que também traz uma breve explanação do que se pode trabalhar e despertar nos alunos.

Estes níveis são:

- Nível zero para os alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental 1, onde os alunos descobrem a Geometria de uma forma intuitiva.

- Nível 1 para 6º e 7º ano e Nível 2 para 8º e 9º ano do Ensino Fundamental 2, onde se faz a descoberta dos conceitos.

- Nível 3, o Ensino Médio, onde ocorre a formalização dos elementos da Geometria e a sua aplicação.

Para o Nível zero as atividades são direcionadas ao professor para que aplique com seus alunos, por eles serem mais dependentes. Para os Níveis 1, 2 e 3 as atividades são direcionadas aos alunos, para que sozinhos façam as descobertas.

As atividades foram construídas com a seguinte estrutura:

- **Título:** de uma maneira interessante, chama a atenção do aluno para a atividade.

- **Objetivos:** especificam resultados esperados observáveis.

- **Agora é com você:** onde inicia-se a tarefa propriamente dita. Esse item contém:

  - Material necessário: explicita-se quais materiais serão utilizados para executar a atividade.
  - Como fazer: De uma maneira bem simples, detalha-se como a tarefa deve ser desenvolvida e na maioria delas está separada em Superfície Plana e Superfície Esférica, podendo haver também Superfície Cilíndrica e Cônica.

  Dependendo da atividade há a presença de:

- **Desafio:** relativos à atividade.

- **Para saber mais:** um texto explicativo sobre algum fato ou assunto compatível com o conteúdo trabalhado na atividade.

- **Conceitos Matemáticos:** relata de uma maneira didática os conteúdos vistos na atividade.

- **Sugestão de Leitura:** esse item indica livros, textos, sites ou vídeos onde o aluno pode explorar um pouco mais os conteúdos vistos.

Para a construção das mesmas, foram realizadas pesquisas nos documentos que norteiam o currículo escolar comparando com os livros didáticos utilizados pelas escolas e verificou-se uma falta de material sobre Geometrias Não Euclidianas.

Assim as atividades propostas neste trabalho podem ser acrescentadas, com a autonomia necessária do professor, em suas aulas de Geometria Euclidiana, realizando comparações e enriquecendo o entendimento das Geometrias.

O presente volume tratará apenas do conteúdo Linhas, porém os três volumes elaborados pelas autoras atendem aos seguintes conteúdos:

VOLUME 1 - LINHAS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Linhas retas e curvas - Linhas abertas e fechadas - Paralelas - Perpendiculares	- Linhas retas e curvas - Paralelas - Perpendiculares - Círculo Máximo - Concorrentes	- Geometria Projetiva - Bi e Tridimensionalidade	- Aplicação na Cartografia

VOLUME 2 - ÂNGULOS

Nível 1	Nível 2
- Definição de ângulo - Como medir ângulo na esfera - Construção de ângulos na esfera	- Medida e construção de ângulos

VOLUME 2 - TRIÂNGULOS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Construção de triângulo	- Soma das medidas dos ângulos internos - Triângulos com ângulos retos	- Soma das medidas dos ângulos internos - Congruência e Semelhança	- Relação entre a área de um triângulo e a soma de de seus ângulos internos

VOLUME 3 - POLÍGONOS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Definição de polígonos - Polígonos convexos - Biângulo e Triângulo - Curvatura de superfícies	- Biângulo e Triângulo	- Ladrilhamento	- Aplicação na Cartografia - Comprimento de circunferência - Área de superfície esférica - Faces de poliedros - Truncamento de poliedros

VOLUME 3 - FORMAS ESPACIAIS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Construção de sólidos geométricos: poliedros e não poliedros	- Elementos de poliedros convexos (vértices, arestas e faces) - Planificação de superfície poliédrica	- Ladrilhamento de superfície esférica	- Área de superfície esférica - Poliedros regulares - Poliedros com faces poligonais esféricas

3 Linhas

Segundo *Os Elementos* (2009, p. 97) de Euclides de Alexandria (300 a.C.), traduzida para o português pelo professor Irineu Bicudo: *"uma linha é um comprimento sem extensão"*, ou ainda, *"uma linha é uma longitude sem largura"*.

Assim, uma linha reta é formada por um conjunto infinito de pontos, onde não se tem começo nem fim, ou seja, não possui extremidades. Ao contrário do segmento de reta, que possui extremidades, começo e fim. Por isso, nas atividades propostas, o presente trabalho adotou as linhas retas, mais precisamente os segmentos de retas, pois são mais palpáveis e visuais aos alunos.

Será tratada também a Geometria Esférica, onde as linhas são curvas. A linha chamada de reta é a de menor curvatura, a do Círculo Máximo que divide a esfera em duas partes iguais, como a Linha do Equador ou as linhas de longitude da Terra, chamadas também de Geodésicas.

O modo geométrico também será utilizado para explorar e refletir sobre os caminhos percorridos todos os dias pelas pessoas, por meio da ilustração dessas rotas, bem como os objetos que constituem o mesmo.

3.1 Atividades - Nível Zero

A linha é um dos primeiros conteúdos a serem explorados na escola, então contemplou-se aqui atividades em que se utilizam de materiais concretos envolvendo o cotidiano do aluno, pois há a necessidade de se ver e apreciar as geometrias em seu mundo, descobrir formas, desenhá-las, escrever e falar sobre elas, para que assim se construam seus próprios conceitos. É importante também, que se trabalhe a noção de linha em outras superfícies, por isso foram criadas atividades que fazem um paralelo entre a Geometria Plana e a Geometria Esférica.

3.1.1 Atividade 1 - Percorrendo Caminhos

Objetivos:

- Explorar direções e sentidos em relação ao ambiente em que está inserido.
- Identificar trajetos em linha reta e curva.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, lápis, giz branco ou barbante, fio lastex, esfera de isopor e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície plana:

Inicialmente o professor escolhe um ambiente da escola, pode ser a sala de aula ou o pátio onde as crianças têm seu tempo de lazer. Elas recebem uma folha de papel sulfite e, com o auxílio do professor, desenham um mapa simples do ambiente. Depois, se dirigem a esse ambiente e, o professor simula uma situação, por exemplo: "Imagine que você é um robô que caminha só em linha reta e precisa sair do seu ponto de partida", que pode ser onde os alunos estão no momento, "siga até a árvore mais alta"; "vá até a torre"; "pare perto do portão".

Os alunos fazem a representação dos caminhos no papel e depois, percorrem individualmente o caminho que cada um deles desenhou, enquanto os outros alunos observam se o robô seguiu corretamente as ordens.

Em seguida de acordo com Toledo (1997, p. 229), *"podem ser sugeridas ordens de natureza projetiva (geometria das sombras): 'Caminhe cinco passos para frente'; 'Vire meia-volta à direita e caminhe dois passos'; 'Passe entre Ana e Pedro e caminhe para a frente, até o muro'.* ", ou seja, escolhe-se uma ou mais direções. Depois faz-se o aluno observar as linhas curvas que ficaram representadas no papel.

Observação: Para o 1º ano sugere-se que os alunos vão diretamente para o local escolhido pelo professor e, com o auxílio de giz branco ou de barbante o professor desenha os caminhos a serem percorridos no chão, sendo um caminho com linhas retas e o outro com linhas curvas, para que os alunos percebam a diferença.

Superfície esférica:

Para explorar a superfície esférica, o professor entrega aos alunos uma esfera de isopor com os polos Norte e Sul demarcados, solicita aos alunos que percorram com a canetinha caminhos de um polo ao outro, questionando-os como podem ser estes caminhos:

- Reto?
- Curvo?
- Qual é o mais curto?

Para o último item o professor pode fornecer fio lastex para os alunos fazerem a ligação dos polos e perceberem que a linha seria reta.

Para saber mais:
A maior linha reta do planeta é um Círculo Máximo, como exemplo a Linha do Equador.

Sugestão de leitura:
TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática.* São Paulo: FTD, 1997.

3.1.2 Atividade 2 - Trajetos abertos e fechados

Objetivos:

- Observar e analisar pontos de referência no espaço.
- Exercitar modos de representação na escolha de caminhos.
- Desenvolver a visualização de linhas abertas e fechadas através dos caminhos percorridos.

Agora é com você:

Material necessário: Cartolina com o mapa da escola, lápis preto e colorido, barbante ou lã e esfera de isopor.

Como fazer:

Superfície plana:

Primeiro, a turma é dividida em grupos, os quais recebem uma cartolina com o mapa da escola. Em seguida, o professor coloca situações para que os alunos sugiram caminhos, por exemplo:

- Quero ir e voltar do banheiro feminino. Quais caminhos posso fazer? - Maria a cozinheira, precisa ir à secretaria. Como ela pode chegar lá? E se ela voltasse, como ficaria o caminho por ela percorrido?

Os alunos desenham no mapa com traços pontilhados os destinos sugeridos pelo professor, fazendo cada caminho de uma cor.

Depois cada grupo expõe seu cartaz para que todos visualizem os caminhos apresentados e o professor identifica as linhas abertas e fechadas que se formaram ao fazerem os trajetos.

Pode-se oferecer aos alunos pedaços de barbante ou de lã e propor que colem nos caminhos para a percepção das linhas abertas e fechadas.

Obs.: Nos destinos que se tem que ir e voltar, pedir aos alunos para não voltarem exatamente pelo mesmo caminho, que haja sempre um espaçamento entre eles.

Superfície esférica:

Os alunos recebem uma esfera de isopor com dois polos demarcados e, com a lã ou o fio irão ligar os polos e observar o caminho percorrido, fazendo a análise de aberto e fechado.

- Quando temos um caminho aberto? E fechado?

Para saber mais:

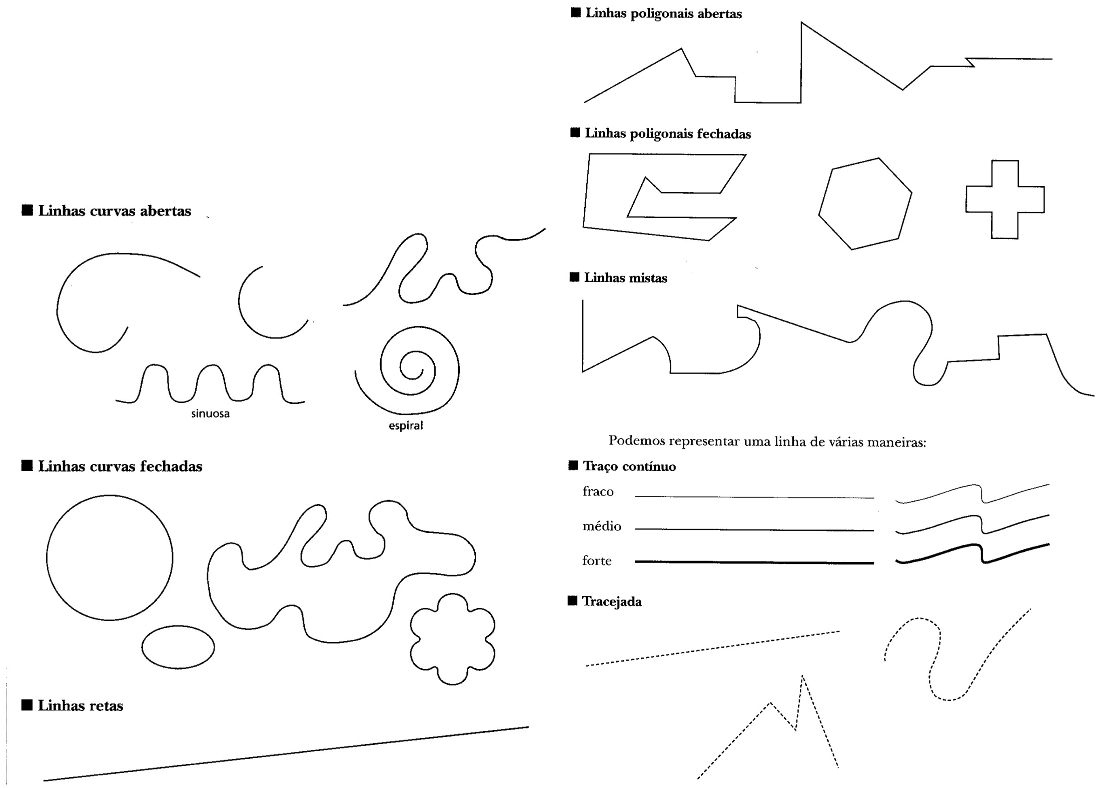

Figura 1: Linhas. (JORGE, 1998, p. 29-31)

3.1.3 Atividade 3 - Linhas na Superfície Terrestre

Objetivo:

- Identificação de linhas abertas e fechadas na superfície do Planeta Terra.

Agora é com você:

Material necessário: imagens aéreas da superfície terrestre e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Entregar aos alunos, imagens aéreas de partes do Planeta Terra onde se encontram grandes plantações, para que assim observem as curvas formadas nas plantações e, nesta análise percebam se são abertas ou fechadas, curvas ou retas. Em seguida, solicitar aos alunos que, com o auxílio da canetinha hidrocor, contornem todas as linhas e depois realizar os seguintes questionamentos:

- Como são as linhas que se formam nas superfícies?
- São abertas?
- São fechadas?
- São retas?
- São curvas?

Figura 2: http://www.fotografia-dg.com/fotos-aereas-grafismos/ e https://www.fotospot.com.br/catalogo/cassio- vasconcellos/cva-029-caixa-aereas-brasil-fotos-aereas-plantacoes/

Para saber mais:

- "Linhas abertas": quando os extremos não coincidem.
- "Linhas fechadas": quando os extremos coincidem.
- "Reta": é um conceito primitivo, não tem extremidades, é ilimitada, é infinita, é um conjunto infinito de pontos e dois pontos determinam ou individualizam uma reta.

3.1.4 Atividade 4 - Paralelas e Perpendiculares no Cotidiano

Objetivo:

- Identificar as retas paralelas e perpendiculares.

Agora é com você:

Material necessário: papel sulfite, lápis preto e imagens de ambientes.

Como fazer:

Primeiramente o professor cria condições favoráveis para que os alunos percebam, manipulem, observem relações de paralelismo e perpendicularismo. Em seguida, com base no local representado na imagem, (por exemplo, a sala de aula), o aluno identifica quais objetos contêm retas perpendiculares e quais contêm retas paralelas, fazendo a representação na folha de sulfite.

Em seguida, será entregue aos alunos uma imagem do cômodo de uma casa, por exemplo, e solicitado aos alunos para que identifiquem nesta imagem as retas perpendiculares e paralelas do ambiente, podendo destacar com lápis de cor.

Exemplos de imagens:

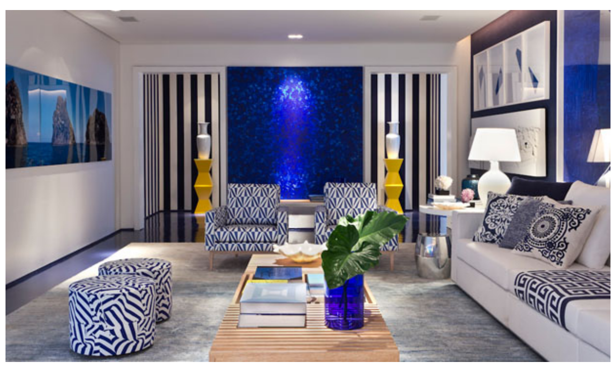

Figura 3: http:http://www.amearquitetura.com/2014/02/11/analise-de-estilo-roberto-migotto/

Figura 4: https:http://www.asarquitetasonline.com.br/casa-cor-sao-paulo/

Para saber mais:

- "Perpendiculares": são retas concorrentes que formam ângulos retos. (Exemplo: As linhas dos cantos das paredes que vêm do teto ao chão, com as linhas do rodapé.)
- "Paralelas": São linhas ou planos equidistantes em toda a sua extensão. (Exemplo:s As linhas horizontais do quadro negro.)
- Robert Recorde foi médico e matemático e, em "A pedra de amolar o intelecto", escreveu: "Para evitar a tediosa repetição dessas palavras "é igual a", utilizarei, como faço frequentemente em meu trabalho, um par de retas paralelas, ou gêmeas de extensão um: =, pois não podem haver duas coisas iguais."

3.1.5 Atividade 5 - Linhas retas em superfícies cilíndricas e cônicas

Objetivo:

- Compreender como se comportam linhas retas em superfícies arredondadas.

Agora é com você:

Material necessário: cilindro e cone em cartolina como abaixo, canetinha hidrocor, tesoura e fita adesiva.

Como fazer:

Inicialmente, o professor entrega aos alunos a planificação do cilindro e do cone em cartolina, sem as bases e com as retas previamente desenhadas.

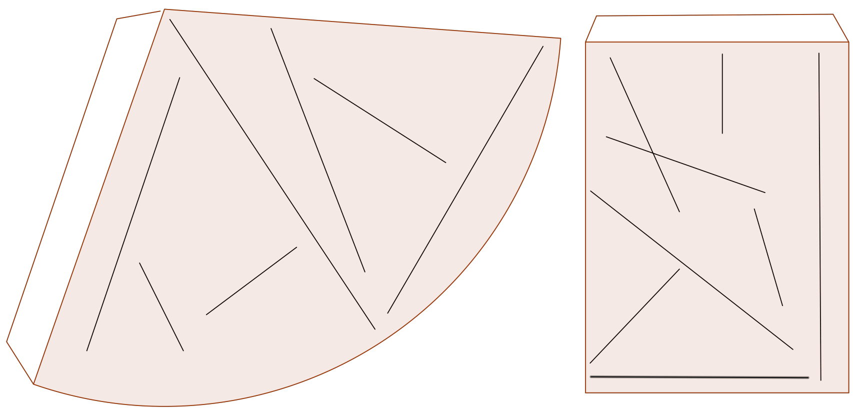

Figura 5: Planificações da superfície lateral do Cone e Cilindro

Em seguida, o professor solicita aos alunos que recortem e colem com fita adesiva. Na sequência, os orienta para que contornem cada linha presente na superfície dos sólidos com a canetinha hidrocor, questionando-os:

- Temos retas ou curvas quando estamos utilizando a canetinha?

Depois, os alunos voltam a planificar os sólidos e, o professor os questiona novamente sobre as linhas:

- São retas ou curvas?
- Há diferença nas linhas ao se ter o sólido formado e ele planificado?

Observação: Espera-se que o aluno perceba que ao confeccionar o sólido e, só depois, contornando as linhas da superfície, estas se comportam como curvas e retas.

3.2 Atividades - Nível 1

Neste nível os alunos possuem uma percepção maior de mundo e, partindo do concreto conseguem fragmentá-lo, observando os conceitos geométricos. Assim as atividades aqui propostas contemplam em paralelo a Geometria Plana e a Esférica, onde os alunos são levados a percorrer caminhos (linhas) em diferentes superfícies.

3.2.1 Atividade 1 - Caminhando na superfície plana e na superfície esférica

Objetivos:

- Traçar caminhos na superfície plana e na superfície esférica.
- Perceber as características que possuem os caminhos possíveis na superfície plana e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, lápis, régua, tesoura, esfera de isopor, corante, conta gotas, alfinetes de cabeça colorida, linha de costura ou barbante fino, dois rolos de fios lastex de cores diferentes, fita métrica e transferidor.

Como fazer:

Superfície plana:

1. Coloque uma folha de papel sulfite sobre uma mesa plana.
2. Marque dois pontos nas laterais da folha (exceto os cantos), nomeando como pontos A e B.
   (a) Quais são alguns caminhos possíveis entre os pontos A e B? Desenhe-os.
   (b) Como são as linhas que traçam os caminhos possíveis entre os pontos A e B? São linhas retas ou curvas?
   (c) Descreva que tamanhos essas linhas podem ter. De que maneira podemos medir essas linhas?
   (d) Arrume o barbante sobre cada umas das linhas e meça o seu tamanho.
   (e) Existe um caminho entre A e B que tenha a menor distância possível? Como é essa linha? De que maneira podemos medir essa linha?

Superfície esférica:

1. Espete dois alfinetes na bola de isopor, relativamente longe um do outro, nomeie estes alfinetes como ponto A e B.
   (a) Quais são alguns caminhos possíveis entre os pontos A e B? Desenhe-os.
   (b) As linhas que representam os trajetos entre A e B são linhas retas ou curvas?
   (c) Como são os tamanhos das linhas?
   (d) De que maneira podemos medir estas linhas?

2. Amarre no alfinete do ponto A um fio de costura.

3. Segure a bola por este fio e tente deixá-la o mais imóvel possível. Pingue uma gota de corante bem próximo ao alfinete e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola. No ponto onde a gota estiver pingando espete outro alfinete, marque como ponto C.
   (a) E agora, quais são alguns caminhos possíveis entre os pontos A e C?
   (b) Como é a linha do trajeto que a gota percorreu de A até C?
   (c) Da maneira como a bola está, a gota poderia ter feito outro caminho de A até C?
   (d) Como podemos medir o tamanho do caminho que a gota percorreu?
   (e) Na sua opinião, o que faz a gota ter percorrido este caminho?
   (f) Existe um caminho que tenha a menor distância possível entre os pontos A e C? Como é essa linha? De que maneira podemos medir essa linha?

4. Marcando outros pontos na superfície esférica (bola de isopor), refaça todas as perguntas e analise as respostas.

   Obs.: Os dois pontos marcados com alfinete representam os dois Polos da Terra, Norte e Sul.

5. Amarre um fio lastex que ligue os dois polos, percorrendo meia volta completa na bola de isopor. Esta é a representação do Meridiano de Greenwich.

Para saber mais:

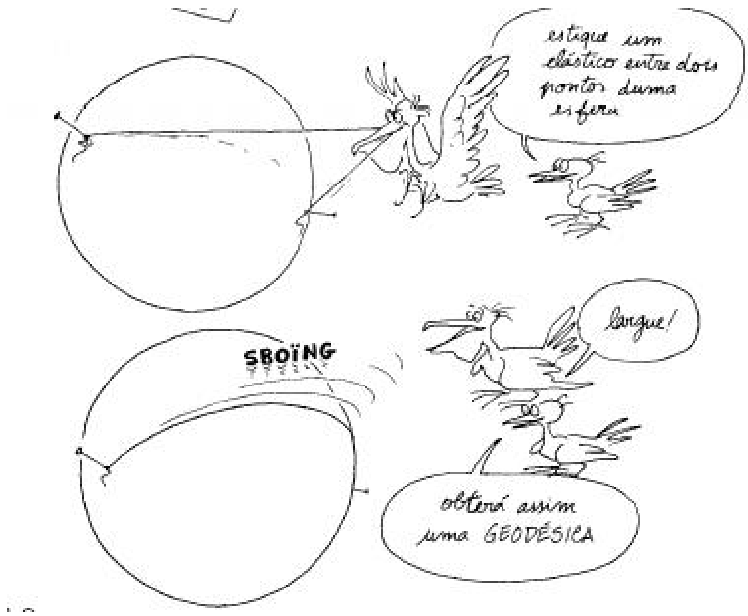

Figura 6: Geodésica (PETIT, p. 20)

3.2.2 Atividade 2 - Comparando caminhos em diferentes superfícies

Objetivo:

- Perceber os caminhos entre dois pontos nas superfícies: da esfera, da lateral do cilindro e da lateral do cone.

Agora é com você:

Material necessário: esfera de isopor, lateral de um cilindro em cartolina, lateral de um cone em cartolina, fita métrica, régua, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex, canetinha hicrocor, lápis, corante e conta gotas.

Como fazer:

<u>Superfície esférica:</u>

1. Espete um alfinete na bola de isopor, nomeie este alfinete como ponto A.

2. Amarre neste alfinete um fio de costura, barbante ou algo similar.

3. Segure a bola por este fio, e deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto A e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola. No ponto onde a gota estiver pingando espete outro alfinete e marque essa posição como ponto B.

4. Desenhe o caminho que a gota percorreu.

   (a) O caminho que a gota percorreu é uma linha reta ou curva?

5. Amarre um fio lastex que una o ponto A até o ponto B e estique o fio.

   (a) O fio esticado tem a mesma medida que o caminho percorrido pela gota de A até B?

   (b) Como podemos medir esta linha?

   (c) Existem outros caminhos que a gota poderia ter percorrido segurando a esfera da mesma maneira?

   (d) Os caminhos que existem têm a mesma medida? Por quê?

   (e) Você conhece alguma interpretação geográfica representada pelos caminhos que a gota percorreu?

   (f) De que maneira, cortando uma laranja com uma faca, obtemos linhas como o caminho que a gota percorreu de A até B?

   (g) Dê outros exemplos onde encontramos linhas com as mesmas características.

   (h) Represente com desenhos situações que exemplifiquem o caminho da gota de A até B.

<u>Lateral do Cilindro:</u>

1. Desenhe um ponto A e um ponto B, distintos, na lateral do cilindro.

2. Trace caminhos que saiam de A e cheguem em B.

   (a) Como são as linhas dos caminhos que existem? São curvas ou retas?

   (b) Como podemos medir o tamanho destes caminhos? Meça esses caminhos.

3. Fixe com alfinete ou fita adesiva um fio lastex esticado que una o ponto A até o ponto B.

(a) Como é a linha deste caminho?

(b) Podemos medir este caminho?

(c) Compare a medida deste caminho com as outras que você já tinha traçado e decida qual é o menor caminho.

4. Desenhe outros quatro pontos na lateral do cilindro, nomeie com C, D, E e F e repita os passos anteriores entre os pontos C e D e entre os pontos E e F.

5. Com uma canetinha, marque os caminhos do fio lastex entre os pontos A e B, C e D, E e F.

6. Abra e estique a lateral do cilindro sobre uma superfície plana.

   (a) A superfície lateral do cilindro ficou plana? Surgem dobras ou a lateral se rasga quando planificada?

   (b) Como são as linhas dos caminhos entre A e B, C e D, E e F? São curvas ou retas?

   (c) Faça desenhos e anotações, que mostrem suas conclusões sobre as linhas entre os pontos na lateral do cilindro.

<u>Lateral do Cone:</u>

1. Desenhe um ponto A e um ponto B na lateral do cone.

2. Desenhe caminhos que saiam de A e cheguem em B ou o contrário.

   (a) Os caminhos representados são linhas retas ou curvas?

   (b) Como podemos medir o comprimento dessas linhas? Meça esses comprimentos.

3. Fixe com alfinete ou fita adesiva, um fio lastex bem esticado que una o ponto A até o ponto B.

   (a) Como é a linha representada pelo fio: reta ou curva?

   (b) Como podemos medir esta distância?

   (c) Compare a medida do fio lastex com as outras medidas das linhas que você traçou no item dois e verifique qual é a menor distância.

4. Desenhe outros quatro pontos na lateral do cone, nomeando-os com as letras C, D, E e F e repita os passos anteriores entre os pontos C e D e entre os pontos E e F.

5. Com uma canetinha, marque os caminhos do fio lastex entre os pontos A e B, C e D, E e F.

6. Abra e estique a lateral do cone sobre uma superfície plana.

   (a) A superfície lateral do cone ficou plana? Aparecem dobras ou a lateral se rasga quando planificada?

   (b) Como são as linhas dos caminhos entre A e B, C e D, E e F? São curvas ou retas?

   (c) Faça desenhos e anotações, que mostrem suas conclusões, para as linhas entre os pontos na lateral do cone.

3.2.3 Atividade 3 - Superfícies

Objetivos:

- Observar que o mundo em que vivemos não é plano.
- Conhecer outras superfícies além da superfície plana.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel sulfite, canetinha hidrocor e esfera de isopor.

Como fazer:

1. Dirija-se à quadra de esportes da escola com a folha de papel sulfite e uma canetinha. Caminhe em linha reta ou se preferir, caminhe sobre as linhas da quadra de esportes.

2. Na folha de papel sulfite trace o caminho que você percorreu.

   (a) Você conseguiria prolongar infinitamente a linha que você traçou no papel?

   (b) As extremidades dessa linha iriam se encontrar em algum momento?

   (c) Como você chamaria essa linha?

3. Agora imagine que você está caminhando sobre uma pista de skate, como a da imagem abaixo, andando sobre a parte inclinada dela.

Figura 7: Pista de Skate

4. Represente na folha de papel sulfite, através de desenhos, a trajetória que supostamente poderiam percorrer em linha reta.
   (a) Como é esta linha que você acabou de desenhar?
   (b) Qual a diferença entre a linha que você desenhou quando percorreu a quadra de esportes e a linha que você percorreu quando, supostamente, caminhou sobre a pista de skate?

5. Finalmente, imagine que você está caminhando sobre uma bola. Também em linha reta.

6. Com uma canetinha colorida, desenhe esse percurso na bola de isopor.
   (a) Como é a linha que você "percorreu"na esfera?
   (b) Você consegue prolongar infinitamente essa linha?
   (c) As extremidades se encontram?
   (d) Pesquise sobre Círculos Máximos no Globo Terrestre.

Desafio:
"Olhando para a esfera."
Qual o maior círculo que conseguimos construir?

Para saber mais:
Você encontrará Círculos Máximos em: COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não Euclidianas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

3.2.4 Atividade 4 - Círculo Máximo

Objetivo:

- Compreender o conceito de reta na esfera.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel sulfite, esfera de isopor, fio de costura, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex, canetinha hidrocor, lápis, corante e conta gotas.

Como fazer:

1. Espete um alfinete na bola de isopor, nomeie este alfinete como ponto A.
2. Amarre neste alfinete um fio de costura, barbante ou algo similar.
3. Segure a bola por este fio, e deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto A e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola. No ponto onde a gota estiver pingando, espete outro alfinete e marque essa posição como ponto B.
4. Amarre o fio lastex no alfinete do ponto A, depois no do ponto B e novamente no do ponto A, de modo que complete a volta na esfera.
5. Trace com a canetinha colorida o caminho do fio lastex.
6. Observe esse caminho e responda:
   (a) Este é o maior círculo que você pode encontrar?
7. Você deve ter notado que o maior círculo é o que passa pelos pontos A e B. Chame o maior círculo de *Círculo Máximo*.
8. O maior círculo da esfera chama-se *reta* na superfície esférica. Nesse caso, na sua opinião a reta é infinita? Pode-se ligar suas extremidades?
9. Escreva suas conclusões.

Para saber mais:
Círculos Máximos e Círculos Menores: Os círculos são máximos quando os planos que interceptam a esfera passam pelo centro da esfera e são menores quando não for esse o caso. Convém observar que os centros dos círculos máximos coincidem com o

centro da esfera correspondente. (COUTINHO, p. 82, 2001)

Sugestões de leitura:
COUTINHO, Lázaro e NETTO, Scipione Di Pierro (in memoriam): *A Geometria dos Mares*. Rio de janeiro: Editora Ciência Moderna, 2010.

3.2.5 Atividade 5 - Qual o caminho do urso?

Objetivos:

- Explorar algumas diferenças básicas entre o plano e a esfera.
- Mostrar a Geometria no modelo esférico com a geografia do nosso Planeta Terra.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel sulfite, lápis, régua, esfera de isopor, canetinha hidrocor e Globo Terreste.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Um urso sai de sua casa e caminha 80 km para o sul. Depois, ele se vira 90^o para leste e caminha em frente por 80 km. Então, ele se vira 90^o para o norte e, caminha mais 80 km. Ele descobre que chegou de volta em casa.
2. Faça um esboço no papel do caminho que o urso percorreu.
   (a) É possível que o urso chegue ao mesmo lugar que partiu?

Superfície Esférica:

1. Utilizando uma esfera de isopor, desenhe o percurso do urso como indicado no item 1 da Superfície Plana acima.
   (a) É possível que o urso chegue ao ponto de partida? Quando?
   (b) Observando o Globo Terrestre, onde o urso vive?
2. Represente, na mesma folha que você fez o caminho do urso no plano, como ficou o caminho dele na esfera?

(a) Os caminhos foram iguais? Justifique:

(b) Que conclusões você pode registrar sobre esses dois caminhos nas superfícies utilizadas?

Desafio:
Escolha um outro formato de superfície e verifique:

- Como ficará o caminho percorrido pelo urso?

3.2.6 Atividade 6 - Retas concorrentes

Objetivos:

- Reconhecer retas concorrentes, tanto no plano, quanto na esfera.
- Verificar em quantos pontos elas podem se encontrar na superfície plana e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel sulfite, régua, esfera de isopor e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Na folha de papel sulfite, trace duas retas que se encontram.

    (a) Como chamamos essas retas?

    (b) Em quantos pontos essas duas retas se encontram?

    (c) Poderiam se encontrar em mais de um ponto? Explique.

Superfície Esférica

1. Faça o mesmo procedimento na esfera: desenhe duas retas que se encontram na bola de isopor, lembrando que para isso, você precisará de dois grandes círculos.

    (a) Em quantos pontos essas duas retas se encontram?

    (b) Poderiam se encontrar em apenas um ponto?

    (c) Seria possível em mais de dois pontos?

3.2.7 Atividade 7 - As paralelas

Objetivo:

- Observar as retas paralelas, quando possível, nas superfícies plana e esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel sulfite, régua, lápis, esquadro e esfera de isopor.

Como fazer:

<u>Superfície Plana:</u>

1. Trace uma reta qualquer na folha de papel.
2. Marque um ponto fora dela e por este ponto trace uma reta paralela à reta original, utilizando os esquadros.
   (a) Quantas retas paralelas você obteve, passando por esse ponto e paralela à reta original?

<u>Superfície Esférica:</u>

1. Agora, trace uma reta na esfera. Lembre-se que para ser considerada uma reta, precisa ser um Círculo Máximo.
2. Tente traçar retas paralelas a essa reta.
   (a) O que você observa?
   (b) Quantas você conseguiu traçar?

3.2.8 Atividade 8 - Construindo perpendiculares na superfície esférica

Objetivo:

- Construir ângulos de 90^o na superfície plana e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel sulfite, régua, lápis, esfera de isopor, esquadro e canetinha hidrocor.

Como fazer:

<u>Superfície Plana:</u>

1. Trace uma reta qualquer na folha de papel e usando a régua e esquadro, trace uma reta perpendicular à reta inicial.

    (a) Você consegue traçar mais de uma reta perpendicular à primeira?

2. Agora, fixe um ponto P fora da primeira reta traçada.

    (b) Quantas perpendiculares à primeira reta, é possível traçar, passando pelo ponto P?

<u>Superfície Esférica:</u>

1. Desenhe, em sua esfera de isopor, dois grandes círculos de modo que dividam a esfera em regiões congruentes.

2. Usando o transferidor, meça todos os ângulos formados por essas retas:

    (a) Que conclusões você chega sobre os ângulos formados por essas retas?

3.2.9 Atividade 9 - As retas paralelas nunca se encontram?

Objetivo:

- Perceber como as retas se comportam na Geometria Projetiva.

Agora é com você:

Material necessário: fotos que dêem noção de distância em relação ao observador, lápis e folha de papel sulfite.

Como fazer:

1. Observe as figuras a seguir:

Figura 8: Trilho e Ponte

   (a) Os trilhos do trem e as marginais da ponte não seriam retas paralelas? Então por que se encontram?

2. Faça na folha de papel sulfite, um desenho de outras retas que "parecem"que se encontram no fundo da imagem.

Para saber mais:
Perceba que, mesmo as retas sendo paralelas, o artista precisa dar noção de infinito através da profundidade, fazendo com que as retas "pareçam que se encontrem". Esse tipo de figura, está representada na Geometria Projetiva.

3.3 Atividades - Nível 2

Neste nível, vamos explorar as perpendiculares nas superfícies plana e esférica. A faixa de Möbius na questão de "dentro"e "fora"no espaço tridimensional. Buscando sempre um aprofundamento dos conceitos geométricos.

3.3.1 Atividade 1 - Perpendiculares nas superfícies plana e esférica

Objetivo:

- Investigar perpendiculares comuns a duas retas no plano e perpendiculares comuns a dois grandes círculos na esfera.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, lápis, régua, esfera de isopor, canetinha hidrocor e transferidor.

Como fazer:

Superfície plana:

1. Na folha de papel, desenhe duas retas concorrentes.
2. Tente desenhar algumas linhas que sejam perpendiculares a ambas.
   (a) Quantas retas perpendiculares você conseguiu?
3. Agora, desenhe duas retas paralelas.
4. Tente desenhar algumas retas que sejam perpendiculares às duas retas paralelas simultaneamente.
   (a) Quantas retas perpendiculares você conseguiu?
5. Registre suas conclusões.

Superfície esférica:

1. Na esfera, desenhe dois grandes círculos.
2. Tente desenhar alguns grandes círculos que sejam perpendiculares a ambos.
   (a)Quantas perpendiculares você obteve?

3.3.2 Atividade 2 - Faixa de Möbius

Objetivo:

- Investigar a questão de "dentro"e "fora"no espaço tridimensional.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, lápis, tesoura, canetinha hidrocor e cola.

Como fazer:

1. Recorte duas tiras de papel, no formato de um retângulo, com aproximadamente 5 cm de largura e 60 cm de comprimento.

2. Em um dos retângulos, cole as extremidades obtendo a forma de um cilindro.

3. No outro retângulo, numere uma das extremidades com os números 1 e 2 e na extremidade oposta, numere com 2 e 1, como na figura a seguir:

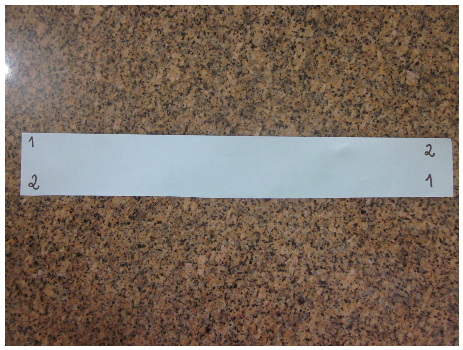

Figura 9: Faixa de Möbius aberta

4. Em seguida, dê uma torção no retângulo e cole as extremidades de modo que números iguais coincidam. Aqui temos a faixa de Möbius.

5. Agora marque um ponto em qualquer lugar de cada faixa com uma canetinha colorida.

6. Tente seguir com a canetinha em linha reta sem tirar a canetinha do papel, nas duas faixas.

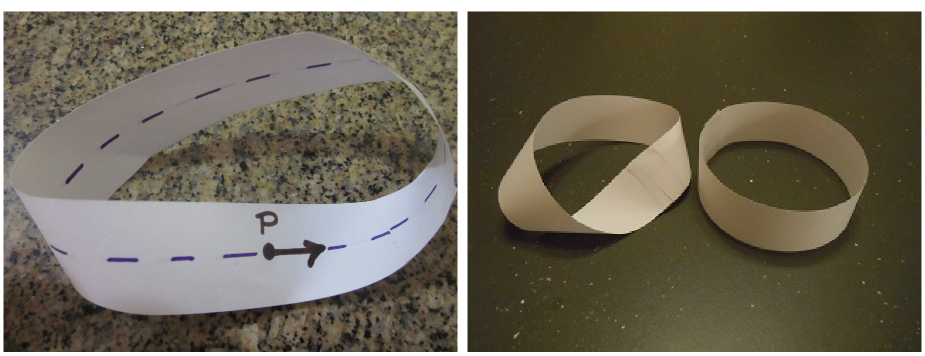

Figura 10: Faixas

(a) O que você observa?

Desafio:

1. Recorte sobre a linha que você traçou na faixa de Möbius e verifique a mudança que ocorre.
2. Divida novamente a faixa ao meio e observe.
3. Escreva suas conclusões.

3.4 Atividades - Nível 3

Neste nível faz-se uso da cartografia, utilizando as linhas presentes no Globo Terrestre, sua planificação e o estudo das paralelas nas superfícies plana e esférica.

3.4.1 Atividade 1 - Representação das linhas cartográficas

Objetivo:

- Entender como a cartografia estrutura o Globo Terrestre, a partir dos meridianos, trópicos e Linha do Equador.

Agora é com você:

Material necessário: Esfera de isopor, fio lastex, fio de costura ou barbante, alfinetes de cabeça colorida, transferidor, conta gotas, corante e fita métrica.

Como fazer:

1. Espete um alfinete na bola de isopor, nomeie este alfinete como ponto A.
2. Amarre neste alfinete um fio de costura, barbante ou similar.
3. Segure a bola por este fio e deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto A e aguarde a gota começar a pingar para fora da bola. No ponto onde a gota estiver pingando, espete outro alfinete e o marque como ponto B. Os pontos A e B são as representações dos Polos Norte e Sul.
4. Amarre um fio lastex do ponto A até o ponto B e também do ponto B ao ponto A pelo outro "lado"da esfera.

5. Utilizando o transferidor, divida a esfera em 24 meridianos igualmente espaçados.

6. Com um fio de costura ou barbante (pois estes não são elásticos) encontre o ponto médio entre os Polos Norte e Sul dos "dois lados"(pontos médios opostos) deste meridiano. Unindo estes pontos temos a representação da Linha do Equador. ($360^o/24=15^o$)

7. Para representar os trópicos, pode-se aproximar sua localização, utilizando o transferidor e marcando 24^o,a partir da Linha do Equador, pois tanto o Trópico de Câncer(situado ao norte da Linha do Equador) como o Trópico de Capricórnio (situado ao sul da Linha do Equador) encontram-se a latitude 23,4378 (23^o $26^{'}$ $16^{``}$ de latitude norte e latitude sul respectivamente).

8. Para representar as linhas que dividem o hemisfério Norte e o hemisfério Sul em latitudes, divida o comprimento da distância entre a Linha do Equador e cada polo em nove partes iguais utilizando a fita métrica. Considere que cada hemisfério possui 90^o de comprimento, partindo da Linha do Equador em latitude 0^o e chegando aos polos em latitude 90^o.

   (a) Qual é o ângulo formado entre a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich?

   (b) Podemos dizer que as linhas dos Trópicos são paralelas à Linha do Equador?

Para saber mais:

A navegação marítima utiliza conceitos da Geometria Esférica para localizar-se na superfície do Globo Terrestre e assim, determina um sistema de coordenadas latitude (Norte-Sul), longitude (Leste-Oeste).

As linhas que representam as latitudes (Norte-Sul) iniciam em grau zero na Linha do Equador. A Linha do Equador é um Círculo Máximo da esfera terrestre e as linhas que representam as latitudes são círculos menores. Assim, a Linha do Equador é uma *reta* na superfície esférica, enquanto que as outras linhas de latitude não são retas na esfera. A latitude varia de 0^o(Linha do Equador) até 90^o no Polo Norte ou 0^o até 90^o no Polo Sul.

As linhas de longitude são sempre meridianos de Círculos Máximos (tem a metade da medida do círculo máximo), pois todas passam pelos pontos antípodas, Polo Norte e Polo Sul. Assim, todas as linhas de longitude são *segmentos de reta* na esfera terrestre. A longitude varia de 0^o em um círculo que contém o Meridiano de

Greenwich (que passa por Gana, França, Bélgica) até 180^o a Leste ou até 180^o a Oeste.

O comprimento da Circunferência Equatorial é 40.075 km, já o comprimento da Circunferência Merididional (que contém o Meridiano de Greenwich) é 40.003 km.

As rotas aéreas também utilizam referência à superfície terrestre e acrescentam uma terceira coordenada chamada de altitude, que é a medida de comprimento determinando a altura (em metros ou pés) em relação à superfície.

Sugestão de leitura:
COUTINHO, Lázaro: *Convite às Geometrias Não Euclidianas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

3.4.2 Atividade 2 - Planificação da esfera a partir dos elementos geográficos, retas paralelas no plano e na esfera

Objetivo:

- Compreender a planificação da esfera a partir da estrutura cartográfica terrestre.

Agora é com você:

Material necessário: esfera de isopor, tecido, tesoura, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex, lápis e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície esférica:

1. Utilizando o transferidor, construir as marcações que representam as linhas de localização terrestre, Polo Norte e Polo Sul, 12 meridianos de mesma distância entre si (marcando um deles como meridiano de Greenwich), Linha do Equador, trópicos de Câncer e de Capricórnio.

2. Com um lápis ou canetinha marque as linhas de localização terrestre e retire os fios lastex.

3. Cubra uma das fatias da esfera de isopor e recorte em tecido um molde desta fatia.

4. Marque todos os cruzamentos entre os meridianos e os trópicos e a Linha do Equador.

Superfície plana:

1. Com o molde da fatia em tecido, desenhe este molde numa folha de papel.

    (a) Quantos destes moldes completam a esfera?

2. Desenhe estes moldes lado a lado em sequência como estava na esfera, marcando os pontos de cruzamento entre os meridianos e os trópicos e a Linha do Equador.

3. Ligue os pontos correspondentes com uma linha reta.

    (b) As linhas são retas paralelas no plano?

4 Considerações Finais

O caminho percorrido, a fim de construir este trabalho, começou em uma das disciplinas cursada no Mestrado Profissional em Matemática, Geometria, em que as autoras foram instigadas a refletir sobre os cinco Postulados de Euclides e suas afirmações e contradições em superfícies que não possuem curvatura nula. Com isso, vislumbrou-se um "alerta", uma oportunidade de rever conceitos geométricos e olhar mais atentamente para superfícies facilmente detectadas no cotidiano, as quais podem ser construídas, ou apenas observadas, a partir de imagens que representam superfícies não possíveis na terceira dimensão. Por exemplo, a Garrafa de Klein.

Procurou-se ir além do programa definido pela disciplina e encontrar as Geometrias Não Euclidianas, tão fascinantes quanto a Geometria organizada por Euclides há mais de dois mil anos. Experimentou-se novos ambientes geométricos, que foram iniciados mais fortemente por Riemann (1826 - 1866) em sua Geometria Elíptica e por Lobachevski (1792 - 1856) em sua Geometria Hiperbólica, entre outros matemáticos e outras Geometrias Não Euclidianas.

As leituras para o trabalho indicaram a presença das Geometrias Não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, o que incentivou as autoras a dirigirem este texto à professores do Ensino Fundamental e Médio, para que esses aprofundem suas experiências geométricas e possam juntos aos seus alunos investigarem, experimentarem e surpreenderem-se.

Como alerta ao professor que decidir conhecer e experimentar com seus alunos as atividades, estas devem ser realizadas primeiramente pelo docente, para que tenha suas próprias reflexões. Assim, observará ironicamente, que ainda existe muito a enxergar naquilo que sempre esteve ao alcance de seus olhos. As sugestões de leitura presentes nas atividades complementam o entendimento e fazem perceber que tanto os profissionais da Matemática, quanto qualquer outro profissional, reconhecem e apresentam de muitas formas todas as Geometrias.

As experiências trazidas com a elaboração e realização das atividades ampliou o convencimento das pesquisadoras de que a Geometria é fundamental ao ser humano, logo, indispensável no currículo escolar.

"Caminhar"por diferentes superfícies e reconhecer conceitos geométricos em cada uma delas aprofunda o entendimento da Geometria de Euclides e de outros surpreendentes ambientes geométricos como os não euclidianos, sempre habitados pela humanidade, talvez impensáveis até aqui, mas impossíveis de serem ignorados a partir de agora.

Referências

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[2] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos Tempos.* Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Editora Blucher, 2010.

[3] BRASIL. Ministério da Educacão. Secretaria de Educacão Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental).* Brasília: MEC, 1998. Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[4] CARDOSO, Luiz R. *Dicionário de Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Expressão e Cultura, 2001.

[5] COMMANDINO, Frederico. *Os elementos.* São Paulo: Edições Cultura, 1944.

[6] COUTINHO, Lázaro; NETTO, Scipione Di Pierro (in memoriam). *A Geometria dos Mares.* Rio de janeiro: Editora Ciência Moderna, 2010.

[7] COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não Euclidianas.* Rio de Janeiro: Interciência,2001.

[8] COUTINHO, Lázaro. *Matemática e Mistério em Baker Street*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2004.

[9] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[10] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial*. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[11] EUCLIDES. *Os elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[12] JORGE, Sonia. *Desenho Geométrico: Idéias e Imagens*. São Paulo: Editora Saraiva, 1998.

[13] LENART, Istvan. *Non-Euclidean Adventures on the LENART SPHERE: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry*. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.

[14] LORENZATO, Sergio. *Coleção formação de professores: O laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. São Paulo: Editora Autores Associados, 2010.

[15] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Coleção PROFMAT: Geometria*. Rio de janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[16] PARANA, Secretaria da Educação do Estado do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[17] PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso: OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA*. Disponível em: http://www.savoir-sans-frontieres.com. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[18] REVISTA ESCOLA. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/geografia/fundamentos/ todo-mundo-seu-globo-426735.shtm. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[19] SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria; CÂNDIDO, Patrícia. *Coleção Matemática de 0 a 6*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

[20] STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos*. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

[21] STEWART, Ian. *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de janeiro: Editora Zahar, 2009.

[22] TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

[23] UNESCO. *Matemáticas Experimentais*. Disponível em: http://www.experiencingmaths.org/pdf/DOCMATH_PT.pdf, Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[24] GARRAFA DE KLEIN. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=E8rifklq5hc. Acesso em 20 de janeiro de 2015.