PROFMAT **Departamento de Matemática**
Universidade Federal do Paraná
81531-980, Curitiba, PR
Brasil

Geometrias Não Euclidianas para sala de aula - Polígonos e Formas Espaciais

por

Katia Regina Caciatori Alves Fontes

Preprint PROFMAT 1 (2015) 26 de Março, 2015

Disponível via INTERNET:
http://www.profmat-sbm.org.br

Geometrias Não Euclidianas para sala de aula - Polígonos e Formas Espaciais

Katia Regina Caciatori Alves Fontes
Departamento de Matemática - UFPR
81531-980, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: katiacaciatori@hotmail.com

Resumo

Este trabalho traz uma coletânea de atividades sobre Geometria Não Euclidiana elaboradas por três autoras, motivadas pela presença da mesma nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná e da carência de materiais didáticos disponíveis atualmente. Buscou-se apresentar uma proposta de material para ser utilizada nas aulas de Matemática, para o que se realizou uma comparação da Geometria Não Euclidiana com a Euclidiana, utilizando materiais didáticos manipuláveis, textos e atividades que despertem o interesse e promovam o envolvimento do aluno para o assunto. Este é o terceiro volume do trabalho que está composto por: volume 1, refere-se ao conteúdo de Linhas, volume 2, Ângulos e Triângulos, volume 3, Polígonos e Formas Espaciais. As atividades estão subdivididas em: Nível Zero - Ensino Fundamental 1 (1º ao 5º ano), Nível 1 - 6º e 7ºano, Nível 2 - 8º e 9º ano do Ensino Fundamental 2 e, Nível 3 - Ensino Médio.
Palavras-Chave: Geometria Não Euclidiana - Atividades - Material manipulativo.

1 Introdução

A experiência profissional das autoras do presente artigo, atuantes no Ensino Básico do Estado do Paraná, revela que há dificuldade em incorporar esse tema no dia a dia de sala de aula, assim sugere-se atividades que possam ser trabalhadas concomitantemente com a Geometria Euclidiana, fazendo um paralelo à mesma.

Logo, este trabalho é uma proposta de ensino de Geometria Não Euclidiana, a ser usada por professores da Educação Básica, para alunos que cursam desde o Ensino Fundamental 1 até o Ensino Médio. Esse tema está contemplado nas Diretrizes Curriculares Estaduais (2008, p. 56), pois segundo elas:

> "Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas Geometrias Não Euclidianas."

Os principais conteúdos abordados nas atividades são: linhas, ângulos, triângulos, polígonos e formas espaciais, esses temas são desenvolvidos a partir de manipulações de objetos concretos, experiências onde o aluno vai percebendo gradativamente as diferenças entre a Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana e construindo suas próprias conclusões. A interação do professor com os alunos no decorrer das atividades, questionando e estimulando, é imprescindível para que esse momento seja de aprendizagem e descoberta, num ambiente propício à experimentação.

Na busca por atividades compatíveis com essa ideia, foram encontrados vários materiais interessantes, dentre os quais destacamos:

- Experimentos de Lénárt (1996): mostra que trabalhar com Geometria Esférica não só é possível, como pode ser uma aventura empolgante tanto para o aluno quanto para o professor;

- Projeto "Matemáticas Experimentais", da UNESCO (2004): propõem aos alunos, segundo os autores *"experimentar, tatear, colocar hipóteses, testá-las, tentar validá-las, procurar demonstrar e debater acerca de propriedades matemáticas"*;

- Os quadrinhos de Petit: de uma maneira simples e divertida, exploram temas instigantes da Geometria Não Euclidiana;

- Os livros de Stewart (2009, 2010): de acordo com o autor *"é uma miscelânea de jogos, quebra-cabeças, histórias e curiosidades matemáticas"* que mostram muitos aspectos divertidos e intrigantes da Matemática;

- Os livros de Coutinho (2001, 2004, 2010): paradidáticos que abrem os olhos a vários pontos das Geometrias Não Euclidianas.

Após as leituras, todas as atividades foram elaboradas de maneira própria das autoras, considerando suas bagagens diversas, pois atuam em todos os níveis sugeridos.

Com isso, o professor terá um guia sobre comparação entre as Geometrias e várias sugestões de atividades e experimentos de Geometria Não Euclidiana que poderá levar para a sala de aula e trabalhar com seus alunos, escolhendo o que mais se adapta à sua turma.

2 Metodologia

Falar em Geometria hoje é falar dos objetos, da tecnologia presente em tudo o que nos cerca, do espaço que estamos ocupando ou que queremos ocupar, é ter um raciocínio lógico e espacial rápido. O professor, ao utilizar esta proposta de material, terá que perceber que o desenvolvimento do conhecimento das Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas tem que se fazer na escola desde muito cedo, pois é desejável que a escola privilegie todos os contextos do mundo em que o ser humano está inserido. A criança deve tomar conhecimento das Geometrias, pois ela está inserida no espaço desde que veio ao mundo, como cita Toledo (1997, p. 221):

> "[...] Através da visão, da audição, do tato, dos seus movimentos, ela vai explorar e interpretar o ambiente que a rodeia e, antes mesmo de dominar as palavras, conhecer o espaço e as formas nele presentes.".

Portanto, procurou-se privilegiar a utilização de materiais didáticos manipuláveis fazendo a observação e a representação dos mesmos, conhecendo os conceitos básicos das formas geométricas para facilitar a formação intelectual do indivíduo.

O que a história revela é que o ser humano, ao descrever o mundo, iniciou fazendo representações por desenhos, que com o passar do tempo foram sendo conceitualizados até adquirirem significados. Foi o que aconteceu com a escrita e possivelmente pode ter ocorrido com a Geometria. Lorenzato, Turrioni e Perez, (2010, p. 5) citam que:

> "Arquimedes revelou o modo pelo qual fazia descobertas matemáticas e confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes."

Logo, é desejável que a Matemática ensinada aos alunos seja apresentada nas mais variadas situações, que sejam instigantes e auxiliem no crescimento intelectual. As situações matemáticas apresentadas se iniciam de maneira intuitiva no Ensino Fundamental 1, quando o aluno passa a perceber as formas do ambiente em que está através da observação. Smole (2005, p. 21), diz:

> “Para que a percepção do espaço torne-se cada vez mais elaborada, a criança precisa ver e apreciar a geometria em seu mundo, descobrir formas, desenhá-las, escrever e falar sobre elas.”

Tendo as situações continuidade nas séries posteriores, até o Ensino Médio, onde os alunos já estão aptos a partir do concreto para o abstrato, ou seja, quando conseguem fragmentar e conceituar os elementos das Geometrias com maior rigor.

Por isso, a importância de outras Geometrias além da Euclidiana e, para isso, tem-se uma coletânea de atividades utilizando objetos e o próprio corpo para que percebam as formas. Conforme Lorenzato, Turrioni e Perez (2010, p. 61):

> “O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.”

Situações em que haja a comparação e também o desenho das formas, pois é o momento de trabalhar com o sensitivo: direita, esquerda, atrás, na frente, longe, perto, dentro, fora, grande, pequeno, em cima, embaixo, no meio, no centro, alto, baixo, vazio, cheio, aberto, fechado, igual e diferente. Momento também de recortar, dobrar, moldar, deformar, montar e decompor.

> “O conhecimento do seu próprio espaço e a capacidade de ler esse espaço pode servir ao indivíduo para uma variedade de finalidades e constituir-se em uma ferramenta útil ao pensamento tanto para captar informações quanto para formular e resolver problemas.” (SMOLE, 2005, p. 16).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, recomenda-se que os conteúdos devam ser articulados de acordo com o conhecimento que os alunos possuem, pois, mesmo que o aluno não tenha frequentado a pré-escola, ele tem noções geométricas empíricas. A partir disso, o professor pode desenvolver conceitos e métodos relativos às Geometrias, fazer atividades exploratórias, manipulativas, trabalhar com representações e o aluno compreender o que está à sua volta. O destaque dado no PCN (1997, p. 55 – 56) é:

> "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.
> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema

> e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente.
> O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.
> Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento."

As propriedades geométricas são mais facilmente aprendidas pelo ser humano quando há uma grande variedade de experiências nas quais, a partir do fazer e do ver, ele faça comparações e assim construa os conceitos.

> "Por isso, é essencial que as atividades que permitem o desenvolvimento da percepção espacial possam ser integradas em um programa de ensino de matemática abrangente, levando em conta o desenvolvimento total da criança." (SMOLE, 2005. p. 19).

Então, as atividades propostas buscam a visualização e manipulação, bases primordiais para o desenvolvimento do pensar geométrico. A partir disso, o indivíduo começa a classificar, ordenar, contar, fazer comparações, tirar conclusões e formar o seu conhecimento teórico. Atividades estas, que se apresentam divididas nos conteúdos já citados: linhas, ângulos, triângulos, polígonos e formas espaciais. Cada conteúdo traz um breve resumo do que será trabalhado, com conceitos e definições. E é subdividido em níveis, que também traz uma breve explanação do que se pode trabalhar e despertar nos alunos.

Estes níveis são:

- Nível zero para os alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental 1, onde os alunos descobrem a Geometria de uma forma intuitiva.
- Nível 1 para 6º e 7º ano e Nível 2 para 8º e 9º ano do Ensino Fundamental 2, onde se faz a descoberta dos conceitos.
- Nível 3, o Ensino Médio, onde ocorre a formalização dos elementos da Geometria e a sua aplicação.

Para o Nível zero as atividades são direcionadas ao professor para que aplique com seus alunos, por eles serem mais dependentes. Para os Níveis 1, 2 e 3 as atividades são direcionadas aos alunos, para que sozinhos façam as descobertas.

As atividades foram construídas com a seguinte estrutura:

- **Título:** de uma maneira interessante, chama a atenção do aluno para a atividade.

- **Objetivos:** especificam resultados esperados observáveis.

- **Agora é com você:** onde inicia-se a tarefa propriamente dita. Esse item contém:

  - Material necessário: explicita-se quais materiais serão utilizados para executar a atividade.
  - Como fazer: De uma maneira bem simples, detalha-se como a tarefa deve ser desenvolvida e na maioria delas está separada em Superfície Plana e Superfície Esférica, podendo haver também Superfície Cilíndrica e Cônica.

  Dependendo da atividade há a presença de:

- **Desafio:** relativos à atividade.

- **Para saber mais:** um texto explicativo sobre algum fato ou assunto compatível com o conteúdo trabalhado na atividade.

- **Conceitos Matemáticos:** relata de uma maneira didática os conteúdos vistos na atividade.

- **Sugestão de Leitura:** esse item indica livros, textos, sites ou vídeos onde o aluno pode explorar um pouco mais os conteúdos vistos.

Para a construção das mesmas, foram realizadas pesquisas nos documentos que norteiam o currículo escolar comparando com os livros didáticos utilizados pelas escolas e verificou-se uma falta de material sobre Geometrias Não Euclidianas.

Assim as atividades propostas neste trabalho podem ser acrescentadas, com a autonomia necessária do professor, em suas aulas de Geometria Euclidiana, realizando comparações e enriquecendo o entendimento das Geometrias.

O presente volume tratará apenas dos conteúdos Polígonos e Formas Espaciais, porém os três volumes elaborados pelas autoras atendem aos seguintes conteúdos:

VOLUME 1 - LINHAS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Linhas retas e curvas - Linhas abertas e fechadas - Paralelas - Perpendiculares	- Linhas retas e curvas - Paralelas - Perpendiculares - Círculo Máximo - Concorrentes	- Geometria Projetiva - Bi e Tridimensionalidade	- Aplicação na Cartografia

VOLUME 2 - ÂNGULOS

Nível 1	Nível 2
- Definição de ângulo - Como medir ângulo na esfera - Construção de ângulos na esfera	- Medida e construção de ângulos

VOLUME 2 - TRIÂNGULOS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Construção de triângulo	- Soma das medidas dos ângulos internos - Triângulos com ângulos retos	- Soma das medidas dos ângulos internos - Congruência e Semelhança	- Relação entre a área de um triângulo e a soma de de seus ângulos internos

VOLUME 3 - POLÍGONOS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Definição de polígonos - Polígonos convexos - Biângulo e Triângulo - Curvatura de superfícies	- Biângulo e Triângulo	- Ladrilhamento	- Aplicação na Cartografia - Comprimento de circunferência - Área de superfície esférica - Faces de poliedros - Truncamento de poliedros

VOLUME 3 - FORMAS ESPACIAIS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Construção de sólidos geométricos: poliedros e não poliedros	- Elementos de poliedros convexos (vértices, arestas e faces) - Planificação de superfície poliédrica	- Ladrilhamento de superfície esférica	- Área de superfície esférica - Poliedros regulares - Poliedros com faces poligonais esféricas

3 Polígonos Planos e Polígonos Esféricos

Um polígono é uma figura geométrica fechada formada por segmentos de reta. Segundo Dolce; Pompeo (2005, v. 9, p. 132):

> Na Geometria Plana, dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, ..., A_n)$ com n $\geq$ 3, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos $A_{n-1}, A_n e A_1$, assim como $A_n, A_1 e A_2$, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_2}$,..., $\overline{A_nA_1}$.

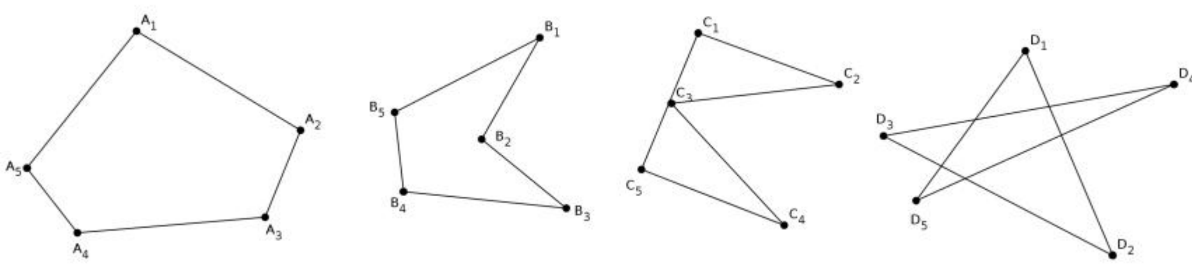


Figura 1: Polígonos Planos

> Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia. Observando a figura acima, tem-se:
>
> $A_1A_2A_3A_4A_5$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$ são polígonos simples,
>
> $C_1C_2C_3C_4C_5$ não é polígono simples (é complexo) e
>
> $D_1D_2D_3D_4D_5$ não é polígono simples (é complexo e ainda, entrelaçado)".

Ainda tem-se que um polígono é convexo quando quaisquer de seus vértices estão sempre de um mesmo lado da reta que contém os outros vértices, das figuras acima apenas o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$ é convexo.

Numa superfície plana tem-se que o polígono com menor número de lados é o triângulo. Dados três pontos não colineares no plano, tem-se apenas uma região limitada e portanto um polígono de três lados, que é o triângulo plano.

Na Geometria Esférica, a porção da superfície esférica, limitada exclusivamente por segmentos esféricos é chamada de Polígono Esférico. (Lembrando a definição: *Segmento Esférico* é a menor distância entre dois pontos, sobre uma superfície esférica, dado por um trecho de reta, denominado arco de circunferência máxima.)

Sem contradizer a definição de Euclides, porém tratando da superfície esférica, tem-se que dados três pontos não colineares, com dois a dois não antípodas, obtém-se um triângulo esférico.

Obs: Nesta definição, caso dois desses três pontos sejam antípodas, existe uma infinidade de segmentos entre esses dois pontos antípodas, que são meridianos da esfera, assim não se tem definido apenas um triângulo, mas uma infinidade de triângulos.

Figura 2: Triângulo Esférico, Região Triangular 1, Complementar da Região Triangular 1

Dados três pontos colineares, tem-se um triângulo "estranho" que na verdade corresponde à semiesfera.

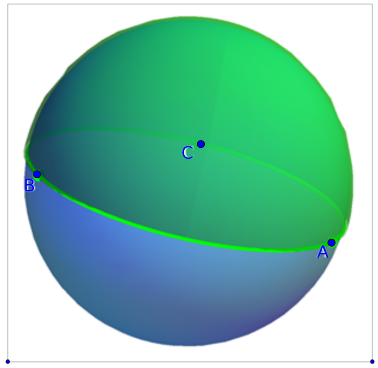


Figura 3: Triângulo "estranho", semiesfera

Veja alguns exemplos de superfícies esféricas totalmente ladrilhadas por polígonos esféricos.

Figura 4: Polígonos Esféricos ladrilhando uma superfície esférica

Considerando apenas dois Círculos Máximos de uma esfera , estes se cruzam em dois pontos opostos (ou antípodas). Cada cruzamento de dois Círculos Máximos divide a superfície esférica em quatro regiões e cada uma dessas regiões é um polígono na superfície esférica. Quantos ângulos e quantos lados têm estes polígonos?

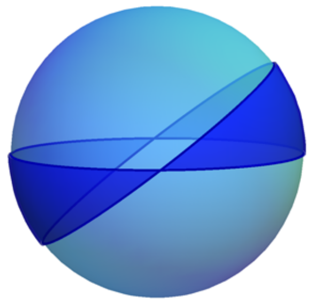


Figura 5: Biângulo ou Lúnula

Assim surge mais uma diferença entre a Geometria Esférica e a Geometria Plana. Na Geometria Esférica pode-se ter um polígono com dois ângulos e dois lados. Esta figura é chamada de biângulo ou lúnula. Um biângulo é formado por dois vértices que são pontos antípodas e dois lados não coincidentes, de medida correspondente à metade do comprimento do Círculo Máximo.

Na Cartografia, o biângulo ou lúnula é cada fuso que compõe o globo, ou seja é a região da superfície esférica limitada por dois meridianos.

Utilizando alfinetes em bola de isopor e fio lastex realiza-se a experiência de obter os segmentos sempre de Círculos Máximos, pois a elasticidade deste fio mostra o menor caminho entre os dois alfinetes. Como exemplo:

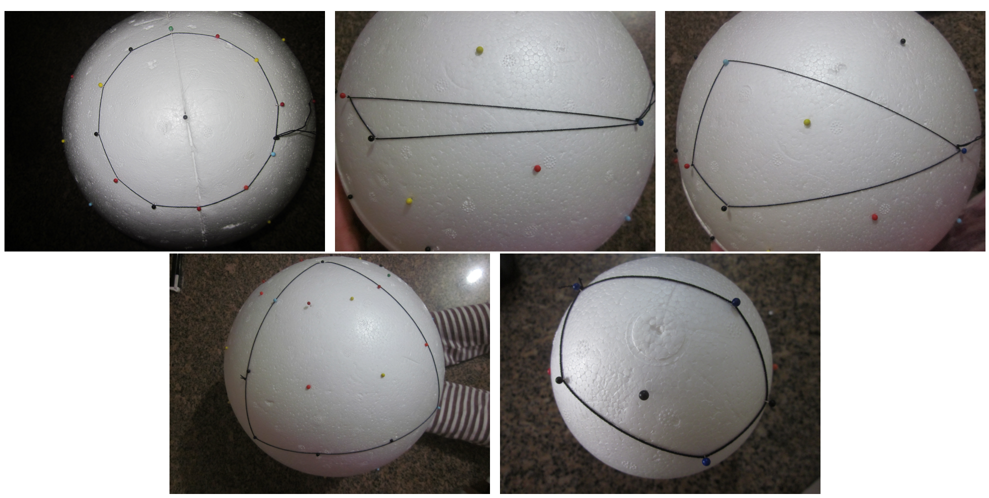


Figura 6: Polígonos convexos na superfície da esfera de isopor utilizando alfinetes e fio lastex.

3.1 Atividades - Nível 0

Nesta seção, as atividades exploram a formação do conceito de figuras geométricas na superfície plana e na superfície esférica de forma manipulativa, relembrando os elementos ponto e reta nas duas superfícies e medindo segmentos de reta e perímetros de polígonos.

3.1.1 Atividade 1 - O que são Polígonos Planos e Polígonos Esféricos?

Objetivos:

- Familiarizar os alunos com o geoplano.
- Desenvolver a percepção visual de formas geométricas na superfície plana e na superfície esférica.
- Identificar o número de lados e vértices e os nomes dos polígonos convexos.

Agora é com você:

Material necessário: Placa de isopor de espessura 20 mm, com dimensões de 40 cm por 40 cm, esfera de isopor com diâmetro de 20 cm, folha de EVA com dimensões de 40 cm por 40 cm , alfinetes de cabeça colorida, tesoura, fita adesiva dupla face, régua, lã colorida e fio lastex colorido.

Como fazer:

Superfície plana:

Os alunos serão orientados a confeccionar um geoplano. Primeiro, eles deverão traçar as linhas formando os quadradinhos de dois por dois centímetros no EVA com o auxílio da régua, obtendo uma malha quadriculada de 20 por 20 quadradinhos. Em seguida vão colar o EVA no isopor com fita dupla face e depois colocarão os alfinetes nos cruzamentos entre as linhas.

Num primeiro momento os alunos ficarão livres para construir as figuras utilizando os fios de lã, poderão formar polígonos convexos ou não-convexos. Nessa fase o professor fará a explicação desses dois tipos de polígonos.

Depois, abre-se o questionamento para o número mínimo de lados necessários para formar um polígono convexo. Inicia-se a análise dos elementos de um polígono convexo, tais como: vértices, lados e classificação quanto ao número de lados.

Em seguida é feita a classificação dos polígonos convexos, fazendo a construção do triângulo, do quadrado, do losango, do paralelogramo, do pentágono, do hexágono, entre outros, de modo que todas fiquem construídas no geoplano, ou seja, uma ao lado da outra.

Os alunos desenham as figuras no caderno colocando o nome do polígono e o número de lados e vértices.

Superfície esférica:

Para a superfície esférica, os alunos primeiro receberão uma esfera de isopor com dois pontos antípodas demarcados por alfinetes. O professor questionará se é possível construir um polígono com apenas dois vértices. E os alunos farão a experiência com o fio lastex e a esfera de isopor.

Obs: Espera-se que os alunos percebam que é possível formar um polígono com dois lados, o chamado biângulo, com dois ângulos iguais e dois lados iguais que são segmentos esféricos.

Na sequência, os alunos ficarão livres para formar as figuras na superfície esférica com o auxílio de mais alfinetes e fio lastex. O professor poderá questioná-los:

- Qual é o número mínimo de lados necessários para formar um polígono na esfera?
- É possível formar os mesmos polígonos construídos no geoplano?
- Que diferenças e semelhanças ocorrem entre os polígonos planos e os polígonos esféricos?

3.1.2 Atividade 2 - Medindo perímetros de polígonos na superfície plana e na superfície esférica

Objetivos:

- Determinar o perímetro de polígonos.
- Medir comprimentos na superfície plana e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: Geoplano, bola de isopor, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex, fio de lã , fita métrica, régua, caderno quadriculado e lápis preto.

Como fazer:

Superfície plana:

Construir no geoplano com elásticos ou fio de lã vários polígonos e registrá-los no caderno quadriculado. Padronizar que cada lado dos quadradinhos do caderno mede 1 e pedir aos alunos que calculem o perímetro dos polígonos.

Depois, propor situações problema nas quais são utilizadas o perímetro, construindo, por exemplo:

- Um quadrado cujo perímetro seja 16 unidades.
- Um retângulo cujo perímetro seja 12 unidades.
- Um retângulo que tenha um lado com a medida igual ao dobro da medida de um outro lado.

Superfície esférica:

Na superfície de uma bola de isopor, os alunos devem espetar alfinetes que servirão de vértices dos polígonos. Com o fio lastex, construir polígonos. Em seguida deverão investigar como calcular o perímetro de uma figura que tem seus lados sobre a superfície esférica e qual é o instrumento de medida que pode ser utilizado para esta descoberta. Questionar se é possível construir uma malha na superfície da esfera, analogamente ao geoplano.

3.1.3 Atividade 3 - Figuras geométricas na superfície plana e superfície esférica (quadrado, retângulo, triângulo e círculo)

Objetivos:

- Observar formas naturais e criadas pelo homem.
- Desenvolver a habilidade de visualização geométrica.
- Exercitar modos de representação, descrição e classificação próprias da Geometria.
- Explorar as características dos polígonos nas superfícies plana e esférica.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, Globo Terrestre, lápis preto e colorido.

Como fazer:

Superfície plana:

Primeiro faz-se uma pequena explanação sobre as figuras planas. Depois, os alunos observam a sala de aula e fazem um passeio pela escola observando as formas dos objetos na natureza e nas construções.

Em seguida, em uma folha de papel sulfite, fazem os desenhos das formas observadas, nomeando-as e colorindo-as. Para finalizar a atividade, os alunos expõem os seus desenhos aos colegas, ocorrendo, assim, uma discussão sobre as semelhanças e diferenças entre as formas encontradas. Questionar os alunos sobre que formas geométricas planas os objetos observados se parecem.

Obs.: Esta atividade foi desenvolvida por Fonseca (2005, p. 72-83) com professores em formação inicial e continuada dos ciclos iniciais do Ensino Fundamental. Pode ser aplicada a qualquer nível de ensino e fica a critério do professor estabelecer regras de como nomear as figuras, pois, nas séries iniciais, os alunos estão descobrindo o espaço, motivo pelo qual eles irão nomear os objetos que estão vendo; a partir do segundo ou terceiro ano a criança já consegue nomear geometricamente as figuras planas e nas séries seguintes nomear os sólidos.

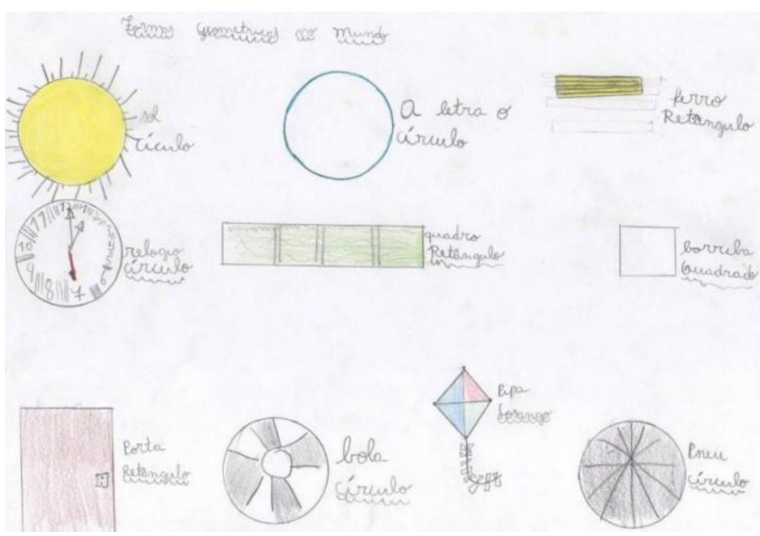


Figura 7: Ilustração da atividade realizada por um aluno

Superfície esférica:

Utilizando o Globo Terrestre como referencial, questionar os alunos:

(a) Como se comportariam as formas planas dos objetos que eles observaram e escolheram no passeio pela escola quando desenhados na superfície do Planeta Terra?

(b) Estes objetos mantém a mesma forma? Explique.

(c) Com que material poderíamos desenhar um triângulo, um retângulo e um círculo na superfície do Planeta Terra?

(d) O que acontece com superfícies poligonais feitas de pano (um triângulo, um quadrado, um retângulo...) quando tentamos "esticar"sobre uma superfície esférica?

Para saber mais:

Curvatura: A curvatura de uma superfície pode ser positiva, negativa ou nula. A superfície plana tem curvatura nula.

Ao tentar revestir uma esfera, que é uma superfície de curvatura positiva, com um elemento plano, aparecem "dobras". Revestir uma superfície de curvatura negativa com um elemento plano, é igualmente impossível, aparecem rasgões. Este é um teste simples para determinar se a curvatura de uma superfície é positiva ou negativa. Veja a seguir imagens dos quadrinhos de Jean-Pierre Petit em *As Aventuras de Anselmo Curioso: OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA*:

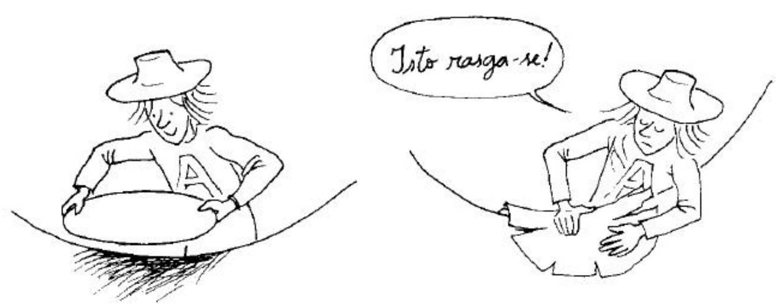


Figura 8: Superfície de curvatura negativa, página 30

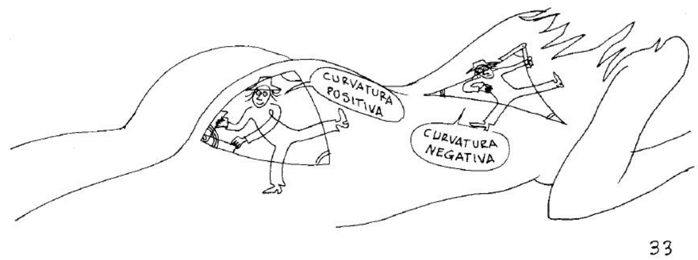


Figura 9: Curvatura positiva e curvatura negativa, página 33

3.1.4 Atividade 4 - Formas geométricas na superfície plana e esférica, desafios com palitos e elásticos

Objetivo:

- Explorar as várias possibilidades de formas geométricas na superfície plana e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: palito de fósforo usado, bola de isopor de 10 cm (100 mm) de diâmetro e elástico de dinheiro.

Como fazer:

Superfície plana:

Construção de figuras: forneça quatro palitos para cada aluno para que eles formem figuras planas fechadas com quatro lados; depois, retire um dos palitos e deixe cada aluno com apenas três palitos; e, por fim, exclua mais um palito para que eles tentem compor figuras planas fechadas com dois palitos (sem quebrá-los). É importante explorar as várias possibilidades de se formar uma figura com quatro palitos, (quadrado, losango, paralelogramos, enfim, quadriláteros), a única possibilidade de se formar uma figura com três palitos (triângulo) e a impossibilidade de se formar figuras com menos de três palitos.

Superfície esférica:

Forneça quatro palitos para cada aluno para que eles espetem na bola de isopor e formem figuras planas fechadas com quatro vértice. Em seguida, peça para que contornem com elástico. Depois, com três palitos, e, por fim, solicite que componham figuras fechadas com dois palitos e um elástico. Deixe que explorem as possibilidades, ou seja, as localizações dos palitos para a obtenção das formas.

Desafios:

- Site de desafios: www.rachacuca.com.br/jogos/palitos/>;
- Puzzles da super-interessante;
- De Ian Stewart em "Incríveis passatempos matemáticos", pág. 225:
  Truque com fósforos: Disponha nove palitos conforme a figura e retirando apenas dois fósforos, forme dois triângulos equiláteros.

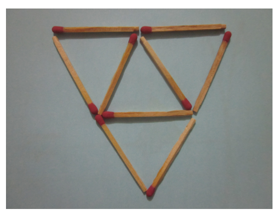


Figura 10: Truque com fósforos

Sugestões de leitura:
ROSSETTO, J. J. *Rivais do Videogame*. Curitiba: Educarte, 2000. v. 1.

3.2 Atividade - Nível 1

Esta atividade apresenta um polígono peculiar da Geometria Esférica, o biângulo. Este polígono aprofunda o entendimento de segmentos esféricos e pontos antípodas. Também pode ser lembrado por diversas formas do cotidiano, como a casca de um gomo de uma laranja ou um fuso do Globo Terrestre.

3.2.1 Atividade 1 - Quantos lados são necessários para formar um polígono?

Objetivos:

- Fazer com que o aluno perceba a diferença entre um polígono na superfície plana e um polígono na superfície esférica.

- Descobrir qual o polígono com o menor número de lados na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, esfera de isopor, alfinetes de cabeça colorida e fio lastex ou elástico.

Como fazer:

Superfície plana:

1. Na folha de papel desenhe alguns polígonos variando o número de lados.

2. Tente desenhar polígonos com dois lados.

(a) É possível desenhar, no plano, um polígono com apenas dois lados?

(b) Quais conclusões sobre o número de lados de polígonos na superfície plana e na superfície esférica você obteve?

Superfície esférica:

1. Na esfera de isopor espete dois alfinetes em dois polos opostos (como Polo Sul e Polo Norte do Planeta).

2. Espete outros alfinetes espalhados pela esfera de isopor.

3. Com fio lastex ou elástico, forme polígonos, utilizando os alfinetes como vértices.

(a) Qual a diferença entre os polígonos no plano (papel) e na esfera?

(b) É possível formar um polígono com apenas dois lados na esfera?

Para saber mais:

Na superfície plana não é possível fazer um polígono de apenas dois lados, mas, na superfície esférica, sim. A explicação é simples: na esfera, os lados dos polígonos são segmentos esféricos, ou seja, arcos menores de Círculo Máximo; dados dois Círculos Máximos, a interseção entre eles terá sempre dois pontos antípodas (polos opostos), dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados, estas regiões são chamadas por biângulos ou lúnulas.

Portanto, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos, cujos vértices são pontos antípodas e cujos lados são semicírculos máximos (meridianos).

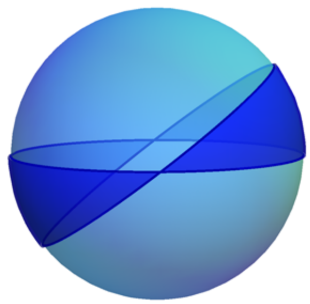


Figura 11: Biângulo

3.3 Atividade - Nível 2

Ladrilhar ou pavimentar o plano é uma tarefa muito realizada em diversas áreas: Artes, Construção, Design de Objetos, Arquitetura, Confecção Têxtil, etc... A pavimentação do plano também é explorada na escola pela disciplina de Artes e os alunos absorvem bem esta ideia. No entanto, o ladrilhamento de uma superfície esférica também é largamente aplicável nestas e em outras áreas, razão pela qual também pode ser explorada no currículo escolar.

3.3.1 Atividade 1 - Vamos pavimentar uma superfície plana?

Objetivos:

- Estudar polígonos regulares e irregulares e descobrir quais deles pode-se utilizar para pavimentação de uma superfície plana.
- Iniciar a ideia de pavimentação numa superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folhas de papel, tesoura e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície plana:

1. Dentre os polígonos abaixo, escolha um de cada vez, recorte vários iguais e tente criar uma pavimentação do plano (numa folha de papel), ou seja, tente cobrir uma área do plano sem que haja espaço entre os polígonos ou que haja sobreposição (um pedaço fique em cima do outro):

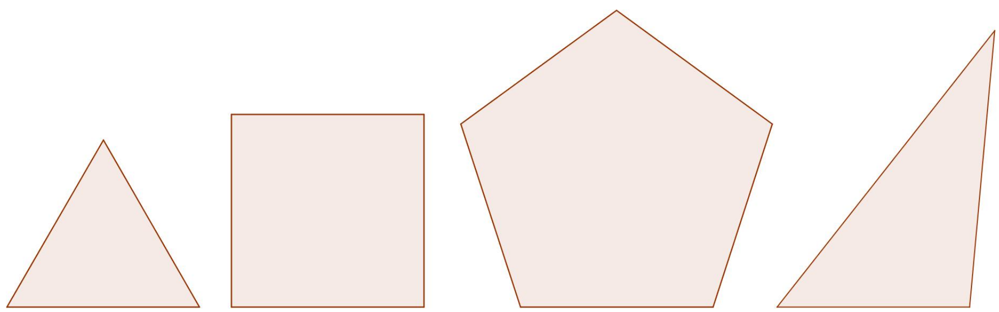


Figura 12: Polígonos

(a) Com quais figuras você conseguiu fazer uma pavimentação? Registre suas conclusões.

(b) Você pode escolher mais de uma forma para pavimentar um plano? Desenhe um exemplo.

(c) Você conhece alguma pavimentação de uma superfície esférica? Quais?

(d) Pesquise sobre confecção de bolas esportivas.

Para saber mais:

- Ladrilhamento ou pavimentação de uma superfície plana é uma coleção de ladrilhos que cobrem o plano Euclidiano de forma que nenhum deles se sobreponha a outro e que não ocoram espaços vazios entre eles.

- Alguns artistas utilizam a pavimentação do plano, como Maurits Cornelis Escher:

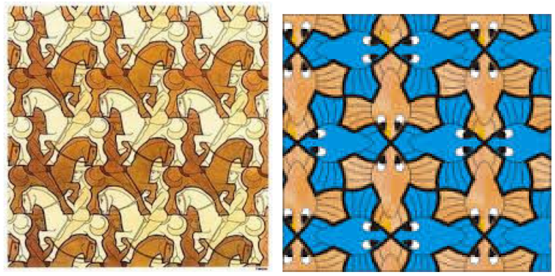


Figura 13: Pavimentações do plano, obras de Escher

Maurits Cornelis Escher também cria numa superfície plana ideias "esféricas", como se representasse uma superfície curva no plano, este é um conceito de uma Geometria Projetiva, em que se representa num plano (papel), uma paisagem ou objeto da terceira dimensão, como a imagem numa fotografia.

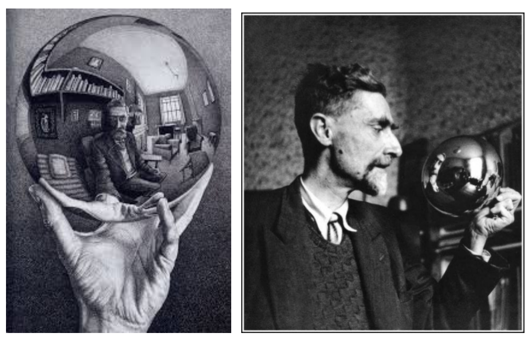


Figura 14: Mão com esfera refletora ; Foto de Escher

Sugestão de leitura:
STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos*: “Bem vindo à toca do réptil”, página 145.

3.4 Atividades - Nível 3

A planificação de uma superfície esférica quando realizada de forma experimental e manipulativa tem imperfeições, e estas darão uma característica peculiar à superfície esférica. Explorar o ladrilhamento esférico e "tentar"planificar uma superfície esférica podem trazer a primeira ideia de polígonos esféricos e do truncamento de sólidos.

3.4.1 Atividade 1 - Como podemos planificar a superfície de uma bola de futebol?

Objetivos:

- Construir a aproximação de uma superfície esférica a partir de polígonos planos.
- Perceber que uma superfície esférica é pavimentável apenas por polígonos esféricos.

Agora é com você:

Material necessário: duas cópias do modelo da planificação aproximada da bola de futebol (icosaedro truncado), tesoura e cola bastão.

Como fazer:

1. Recorte as cópias da planificação do icosaedro (abaixo) , tomando o cuidado de manter as abas que servem para unir os polígonos.
2. Dobrar e colar as abas para construir o formato aproximado de uma superfície esférica.
3. Observando o objeto construído, imagine outras maneiras de planificar a esfera aproximada, utilizando outros polígonos.

(a) Você conhece outras maneiras de pavimentar uma esfera? Desenhe e descreva os polígonos de outros tipos de pavimentações.

(b) A aproximação da esfera que você construiu é uma superfície esférica? Justifique.

(c) Os polígonos utilizados nesta atividade são planos ou esféricos?

(d) Escreva suas conclusões sobre como construir uma superfície esférica utilizando o papel.

(e) De que outra maneira e utilizando outro material, poderíamos transformar esta planificação numa esfera perfeita?

Para saber mais:
Truncar um sólido é substituir, recortar, tirar vértices ou arestas. Quando truncamos um icosaedro, retiramos cada um dos 12 vértices. Ao retirar cada vértice por um corte regular, surge um pentágono em cada vértice. Ou seja, o icosaedro truncado é um sólido geométrico que possui 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.
Ao "inflar"um icosaedro truncado temos o modelo da superfície da bola Adidas Telstar Durlast, a bola de futebol da copa do mundo de 1970.

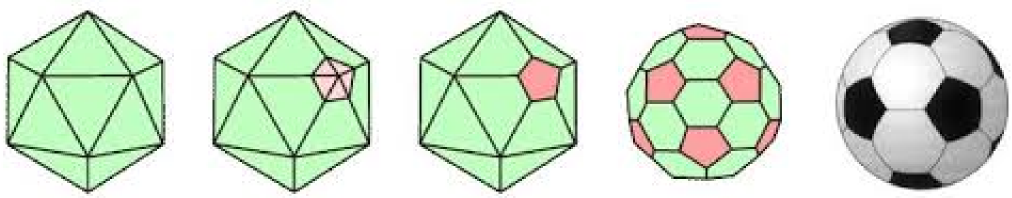


Figura 15: Truncando um Icosaedro

Figura 16: Icosaedro truncado e Bola Telstar

Sugestão de leitura:

https://museudosbrinquedos.wordpress.com/tag/brinquedo-popular/

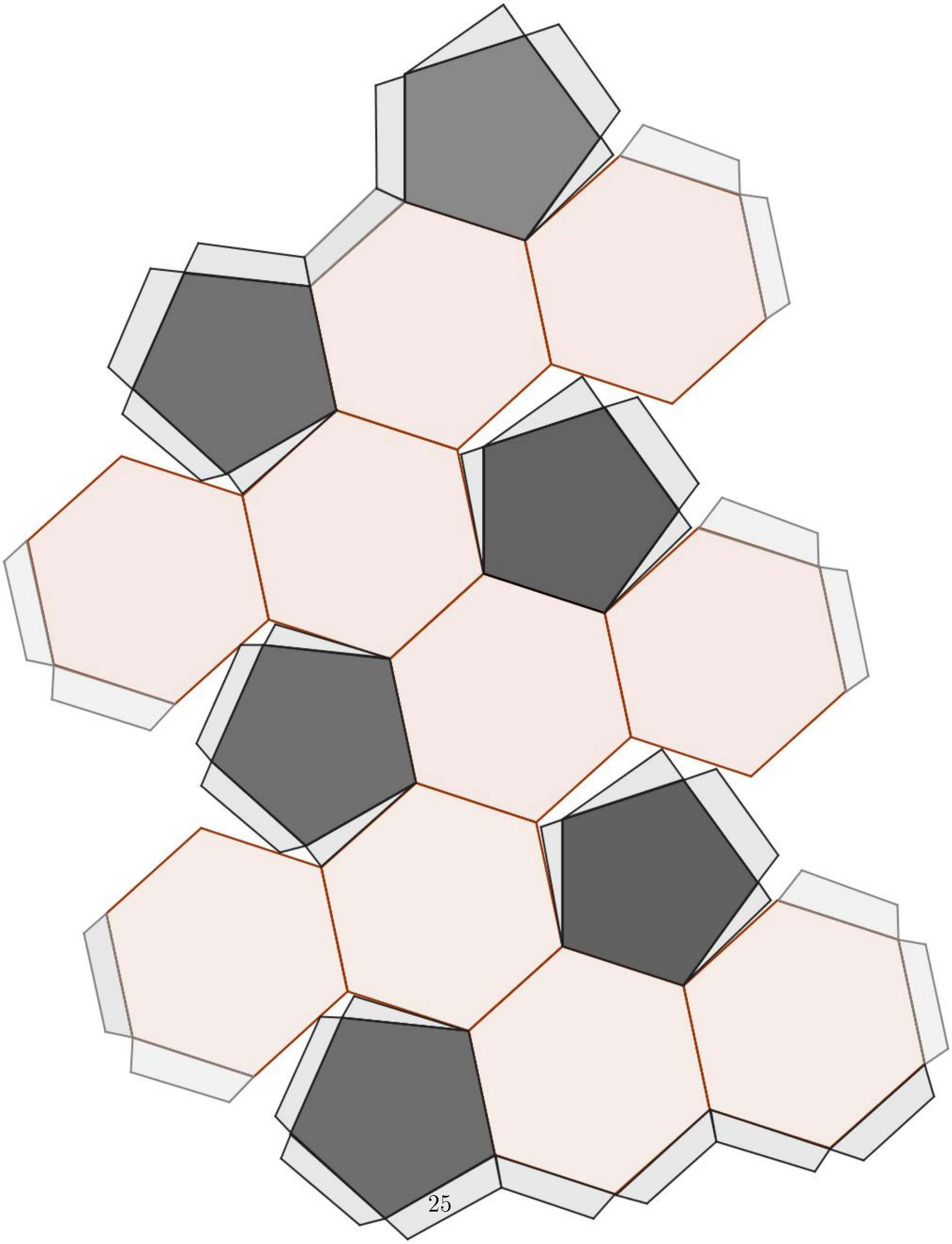


Figura 17: Planificação do icosaedro truncado, modelo plano da superfície da bola Telstar

3.4.2 Atividade 2 - Como recortar a superfície do Globo Terrestre com a tesoura?

Objetivos:

- Entender a planificação da superfície do Globo Terrestre a partir de fusos esféricos.
- Explorar a cartografia do Planeta Terra, entendendo os meridianos, linhas de longitude e latitude e trópicos.
- Aplicar o cálculo do comprimento da circunferência.

Agora é com você:

Material necessário: Esfera de isopor de 7,5 cm (ou 75 mm) de diâmetro, dois alfinetes de cabeça colorida, cópia da planificação da superfície do Globo Terrestre, tesoura, fita dupla face, régua e canetinha hidrocor.

Como fazer:

1. Pinte o mapa do Brasil na planificação.
2. Observe a planificação e identifique a Linha do Equador , os Trópicos de Câncer e Capricórnio, o Meridiano de Greenwich (terceiro meridiano após o término do mapa do Brasil no sentido oeste-leste) e marque cada um destes elementos com cores diferentes.
3. Com a régua, utilize a canetinha para traçar as linhas que dividem os fusos em duas partes iguais. Estas linhas, cada um dos 12 "gomos" da planificação e as linhas do recorte são os meridianos do Globo Terrestre que marcam as longitudes. (Você pode reforçar com canetinha as linhas de recorte com a mesma cor dos meridianos que você traçou à régua).
4. Recortar os 12 gomos da planificação da superfície do Globo Terrestre (o tamanho já está definido exatamente para a esfera de isopor de 7,5 cm de diâmetro).
   (a) Sabendo que o comprimento da circunferência é calculado por $2\pi R$, qual é o comprimento (em cm) da Linha do Equador nesta maquete?
   (b) As linhas que representam os Trópicos de Câncer e de Capricórnio têm a mesma medida de comprimento que a Linha do Equador? Justifique.

(c) Qual é o comprimento (em cm) entre o Polo Norte e o Polo Sul, nesta maquete?

5. No verso dos fusos, cole fita dupla face apenas no sentido da Linha do Equador, escolha um dos gomos para preencher totalmente com fita dupla face.

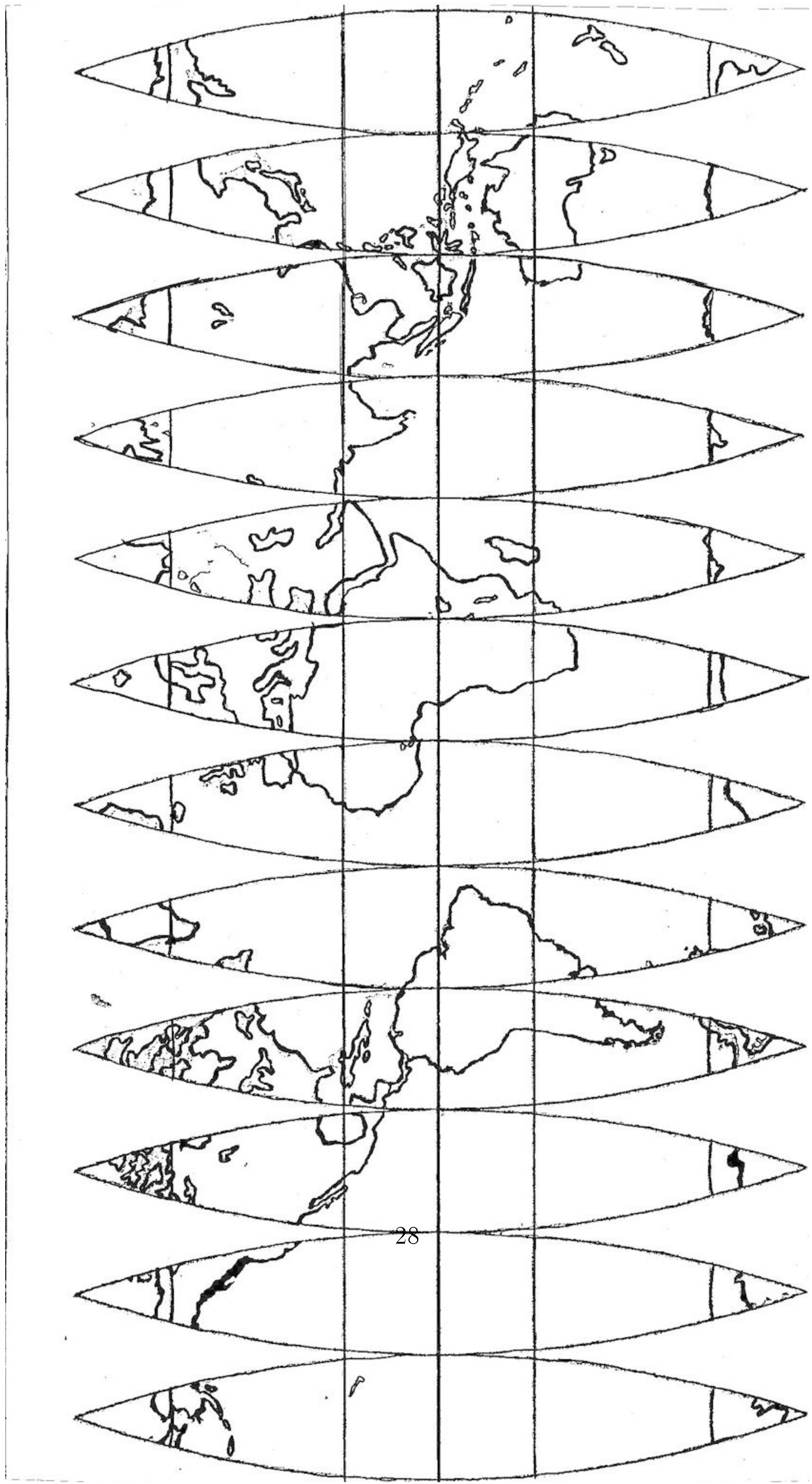
6. Observe a marca da emenda da esfera de isopor. Esta marca será sua guia da Linha do Equador. Prenda o primeiro fuso todo coberto pela fita dupla face na esfera e espete os alfinetes nos polos para servir como guia dos outros fusos.

7. Cole um fuso de cada vez, lado a lado, rente um ao outro apenas com a fita dupla face ao longo da Linha do Equador, deixando as pontas para o final da colagem.

8. Agora, com cola bastão, termine a colagem dos fusos (unindo os meridianos da forma mais perfeita possível).

Sugestão de leitura:

http://revistaescola.abril.com.br/geografia/fundamentos/todo-mundo-seu-globo-426735.shtml



3.4.3 Atividade 3 - Retalhando a esfera com triângulos esféricos

Objetivos:

- Observar como podemos ladrilhar uma superfície esférica.
- Ladrilhar uma esfera com triângulos esféricos.

Agora é com você:

Material necessário: esfera de isopor de 10 cm (100 mm) de diâmetro, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex, canetinha hidrocor ou lápis, corante, conta gotas e fio de costura.

Como fazer:

1. Marque um ponto A com um alfinete na esfera.
2. Amarre no ponto A um fio de costura.
3. Para descobrir o ponto oposto de A, segure a bola por este fio e deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto A e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola. No ponto em que a gota estiver pingando, espete outro alfinete e marque-o como ponto B.
4. Estique um fio lastex preso aos pontos A e B.
5. Com um fio de costura, meça a distância entre A e B e descubra a metade da distância entre A e B. Marcando, neste ponto médio, o ponto C.
6. Amarre no ponto C um fio de costura.
7. Para descobrir o ponto oposto de C, segure a bola pelo fio de costura no ponto C e, deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto C e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola. No ponto onde a gota estiver pingando, espete outro alfinete, marque-o como ponto D.
8. Estique um fio lastex preso aos pontos C e D.
9. Como no item cinco, descubra o ponto médio de C e D e marque-o como ponto E.
10. Descubra o ponto oposto de E e marque-o como F.

11. Complete com fio lastex a divisão da esfera que você obteve.
    (a) Em quantas partes a esfera foi dividida ou ladrilhada?
    (b) De que outras maneiras você já viu uma esfera ser ladrilhada?
12. Desenhe a maneira como ficou dividida a superfície da esfera e outras maneiras de dividir a superfície da esfera com triângulos esféricos.

Desafio:
Qual é a área da superfície de cada triângulo esférico?

Conceitos Matemáticos:
"Círculos Máximos": De acordo com a construção feita nesta atividade, são as linhas que saem de cada ponto marcado (A, B, C, D, E, F) e circulam a esfera retornando ao mesmo ponto.

4 Formas Espaciais

Na Geometria Espacial, um *poliedro convexo* é uma reunião finita de polígonos convexos, satisfazendo algumas exigências específicas:

- A superfície é fechada, não havendo "bordas".
- Quanto aos polígonos que formam a superfície de um poliedro convexo:
    (a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
    (b) cada lado de um polígono é comum a apenas dois polígonos;
    (c) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade).
- Numa superfície poliédrica limitada convexa os polígonos são chamados de faces do poliedro, os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro.

Assim, ficam determinados n semiespaços, a interseção desses semiespaços é chamado poliedro convexo, ou seja, é a reunião da superfície formada por um número finito de polígonos planos ou regiões poligonais planas com o espaço interior limitado por esta superfície.

Como foi visto na seção anterior, pode-se ter polígonos esféricos, o que acontece se uma superfície for uma reunião de polígonos esféricos?

Como explorar superfícies consideradas esféricas tão grandes quanto o nosso planeta?

Não é novidade que a superfície do Planeta Terra seja considerada esférica, assim para mover-se em longas distâncias não seria prudente utilizar apenas os conceitos da Geometria Plana.

A manipulação da esfera torna possível a percepção de elementos geométricos numa superfície não plana, trazendo ao aluno a chance de descobrir e experimentar uma nova geometria.

Para concretizar uma superfície esférica pode-se utilizar pequenas superfícies esféricas como bolas de isopor e bolhas de sabão; para os pontos, alfinetes de cabeça redonda colorida; para as retas e segmentos de reta, o fio lastex cumpre a propriedade de ligar dois pontos com a menor distância, mostrando segmentos de círculos máximos.

4.1 Atividades - Nível 0

Apresentar os sólidos geométricos ao aluno das séries iniciais do Ensino Fundamental completa o entendimento da Geometria de Euclides em sua Geometria Espacial, como também explora a superfície esférica de uma Geometria Não Euclidiana.

Para que a Geometria Esférica seja apresentada, é importante explorar os elementos dos corpos redondos e fazer as comparações com os poliedros. A compreensão de superfícies planas e superfícies curvas pode ser explorada a partir do exercício da planificação, que mostra claramente a diferença entre estas superfícies.

4.1.1 Atividade 1 - Moldando sólidos geométricos: poliédricos e não poliédricos

Objetivos:

- Relacionar alguns sólidos geométricos com objetos usuais do cotidiano.
- Construir representações de sólidos geométricos.
- Classificar e identificar sólidos geométricos em poliédricos e não poliédricos.

Agora é com você:

Material necessário: Massa de modelar ou argila e uma caixinha de fósforo por aluno.
Obs: Receita de massa de modelar: Misture dois copos de farinha de trigo, um copo

de sal, meio copo de água e duas colheres (sopa) de óleo. Amasse tudo até dar consistência. Para colorir a massa, junte pó para suco de fruta, anilina comestível ou gelatina em pó.

Como fazer:

Para o 1^o e 2^o ano:

Inicialmente, com massa de modelar ou argila, confeccione com os alunos os sólidos geométricos: faça uma bola girando a massa na palma da mão ou na mesa até ficar redondinha. Em seguida, construa o paralelepípedo, preenchendo uma caixa de fósforos e faça com que percebam as formas planas. Construa a pirâmide e o cubo e faça com que as crianças descubram as diferenças entre os poliedros e os corpos redondos.

Depois, com a massa de modelar, peça aos alunos que criem novas formas para mostrá-las aos colegas.

Para o 3^o ano:

Com a massa de modelar, o professor e os alunos constroem os sólidos geométricos: paralelepípedo, cubo, cilindro, cone, pirâmide, esfera e boia ou rosquinha (toro).

Na sequência, fazem a classificação dos mesmos, separando em dois grupos: poliédricos e não poliédricos. Finalmente, observam seus elementos: vértices, arestas e faces.

Para saber mais:

Na Matemática, a Garrafa de Klein é um exemplo de uma superfície não orientável; informalmente, ela é uma superfície (uma variedade bidimensional) em que as noções de direita e esquerda não podem ser definidas de maneira consistente.

Entre as estruturas relacionadas que também não são orientáveis está incluído a faixa de Möbius. Enquanto uma faixa de Möbius é uma superfície com borda, uma Garrafa de Klein não possui borda (a título de comparação, uma esfera é uma superfície orientável sem borda).

Uma Garrafa de Klein é um espaço topológico obtido pela colagem de duas fitas de Möbius. O nome se refere ao matemático Felix Klein.

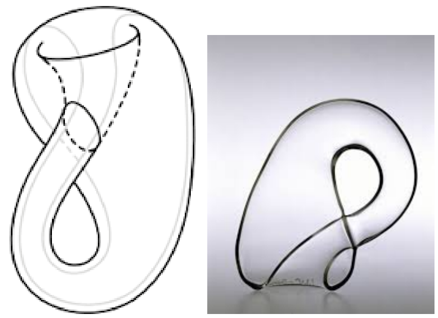


Figura 19: Garrafa de Klein

4.1.2 Atividade 2 - Analisando sólidos geométricos

Objetivos:

- Identificar as formas do sólidos e seus elementos como faces, vértices e arestas.
- Classificar os polígonos contidos nos modelos dos sólidos.
- Explorar os corpos redondos.

.

Agora é com você:

Material necessário: Folha de papel sulfite, lápis e sólidos geométricos em madeira, plástico ou gesso e boia inflável no formato de "rosquinha"(para representar a superfície de Toro).

Como fazer:

Primeiramente os alunos formam duplas, recebem uma folha de papel sulfite e um poliedro. O professor pede que contem o número de faces, vértices e arestas e anotem na folha. Depois, solicita que desenhem o sólido no papel de forma que apareçam todas as faces, ou seja, pede que contornem cada face do sólido de modo que pelo menos uma das arestas de cada face esteja unida a outra. Obter-se-á, então, a planificação dos sólidos. Na sequência, fazem a exploração dos corpos redondos: cilindro, cone, toro e esfera. Como é a planificação dos mesmos e se é possível construí-las.

4.1.3 Atividade 3 - Planificando superfícies de poliedros

Objetivos:

- Descobrir características dos poliedros.
- Identificar a forma do poliedro e os elementos como faces, vértices e arestas.
- Classificar as formas das faces contidas nos modelos dos poliedros.
- Explorar a planificação de uma esfera.

.

Agora é com você:

Material necessário: Caixas de papel vazias, caneta, fita adesiva, tesoura, cópia da planificação da esfera (utilizada na atividade: *Como recortar o planeta Terra com a tesoura* na seção Polígonos), bola de isopor de 75 mm de diâmetro (7,5 cm) e cola bastão.

Como fazer:

<u>Superfície plana:</u>

Pedir para que cada aluno traga uma caixa de papel vazia, por exemplo, uma embalagem de pasta de dente, sabonete ou gelatina. Primeiro faz-se a observação e classificação da forma da caixa fechada. Como ela é chamada na Geometria? Quantas faces ela têm? Que forma têm as faces?

Como são chamadas as linhas que se formam quando as faces se encontram e quantas são? Como se chama o encontro das linhas e quantos são? Essas questões ficam mais interessantes se aparecerem caixas em forma de paralelepípedo e de outros prismas.

Em seguida, os alunos anotam no caderno o número dos elementos da caixa que trouxeram: faces, vértices e arestas. Depois se dá início a tarefa de desmanchar a caixa, eliminando as abas e obtendo, assim, o molde da caixa. Pede-se que abram a caixa sobre a mesa e, pelo lado avesso, passem o lápis ou a caneta nas dobras. Na Figura abaixo foi utilizado como exemplo um caixa com a forma de um paralelepípedo.

Figura 20: Planificação da caixa

Logo após e ainda com a caixa planificada, o professor pede para que os alunos classifiquem as formas obtidas e contem novamente o número de faces e o número de arestas. Na sequência, pede-se que montem a caixa pelo avesso e contem os vértices.

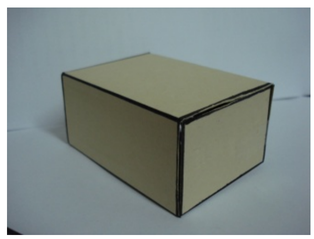


Figura 21: Caixa

Finalmente, os alunos cortam suas caixas separando as faces e observando quais são as formas que as compõem.

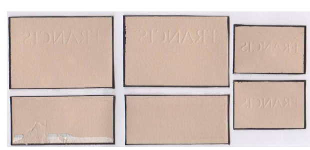


Figura 22: Partes da caixa

Agora tem-se um quebra-cabeça: usando todas as peças e fita adesiva os alunos tentarão montar a caixa novamente e o professor orientará para que busquem novas formas de se montar a planificação da caixa. Um exemplo está na figura abaixo.

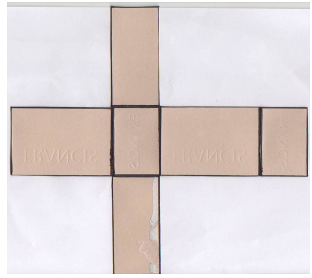


Figura 23: Exemplo

<u>Superfície esférica:</u>

Depois, com a planificação da esfera e a bola de isopor, solicitar aos alunos que recortem os 12 fusos ("gomos") e colem um a um, utilizando como guia a "emenda"da bola de isopor, fazendo esta emenda coincidir com a Linha do Equador, observar e responder:

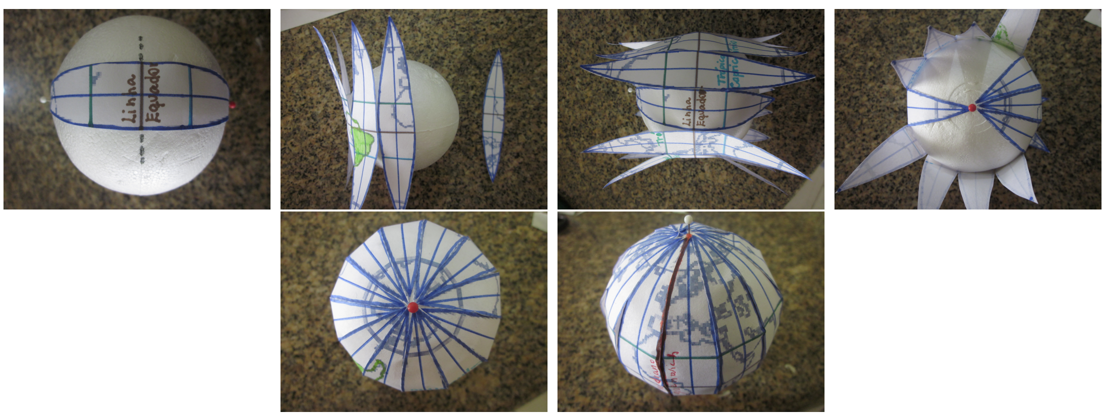


Figura 24: Cobrindo o Globo Terrestre

(a) É possível construir a superfície de uma esfera apenas com papel?

(b) O modelo do Globo Terrestre que você colou na esfera de isopor, fica perfeito?

(c) Por que não conseguimos cobrir a superfície da esfera sem que haja espaços ou dobras no papel?

(d) Podemos dividir o modelo do Globo Terrestre em mais fusos?

4.1.4 Atividade 4 - Elementos dos poliedros e dos não poliedros

Objetivos:

- Classificar e identificar poliedros e não poliedros.
- Classificar embalagens de acordo com as semelhanças e diferenças entre elas.

.

Agora é com você:

Material necessário: Embalagens vazias, bolas diversas, vídeo sobre a Garrafa de Klein (https://www.youtube.com/watch?v=E8rifklq5hc), objeto inflável como boia de piscina (formato câmara de pneu), caderno, lápis preto e lápis de cor.

Como fazer:

Primeiro, os alunos terão a tarefa de trazer vários tipos de embalagens e objetos, tais como: caixas de fósforo, pasta de dente, ou sapato; frascos de perfume, copos de iogurte ou café; e qualquer tipo de bola, podendo ser de futebol, tênis, gude, basquete ou vôlei. Os objetos Garrafa de Klein e inflável (a câmara de um pneu tem o formato de Toro ou Toróide) devem ser responsabilidade do professor, se for possível, pois são objetos que podem iniciar o reconhecimento de superfícies não planas.

A atividade é iniciada pedindo aos alunos para agruparem os objetos de acordo com as semelhanças e classificá-los. O professor pede aos alunos que reflitam sobre a classificação que fizeram e se existem outras possibilidades de separar as embalagens.

(a) Quais rolam?

(b) Quais são arredondadas?

(c) Por que algumas rolam e outras não?

(d) Com que poliedros ou não poliedros as embalagens se parecem?

(e) Quantas arestas, vértices e faces cada embalagem possui?

Depois, como na figura, os alunos deverão desenhar as embalagens no caderno, classificando como poliedros e não poliedros.

Figura 25: Poliedros e não poliedros

Sugestões de leitura:
STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos.* Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2010, página 194.

4.1.5 Atividade 5 - Prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas

Objetivos:

- Identificar as formas dos poliedros e dos não poliedros e suas as planificações de suas superfícies.
- Construir representações dos poliedros e dos não poliedros.
- Classificar e identificar os poliedros e os não poliedros de acordo com o número de faces, arestas e vértices que possuem.

.

Agora é com você:

Material necessário: cópias de planificações dos poliedros e não poliedros (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera), bola de isopor de 75 mm de diâmetro (7,5 cm), lápis preto e de cor, tesoura e cola.

Como fazer:

Dividir a turma em duplas ou pequenos grupos, distribuir aos alunos planificações dos poliedros e dos não poliedros e pedir para colorir, recortar, dobrar, colar e construir os modelos.

Depois de confeccionados os modelos, o professor distribuirá aos alunos a seguinte tabela para que identifiquem o número de faces, vértices e arestas.

Por exemplo:

Poliedros e não poliedros	Nº de vértices	Nº de faces	Nº de arestas
cubo			
paralelepípedo			
prisma de base retangular			
prisma de base pentagonal			
prisma de base hexagonal			
pirâmide de base triangular			
pirâmide de base quadrada			
pirâmide de base pentagonal			
cilindro			
cone			
esfera			

Após completarem a tabela, questionar sobre os resultados dos não poliedros:

(a) O cilindro, o cone e a esfera possuem arestas?

(b) Quais tipos de linhas formam os cantos do cilindro e do cone?

(c) Quais tipos de linhas fecham a esfera?

(d) O cilindro, o cone e a esfera possuem pontas agudas?

4.2 Atividade - Nível 2

Construir um objeto como o proposto a seguir, pode trazer um aprofundamento das possibilidades de ladrilhamento de uma superfície esférica e de outras superfícies curvas.

4.2.1 Atividade 1 - Construindo um objeto de decoração.

Objetivo:

- Verificar a aproximação da planificação da esfera por ladrilhamento construindo o modelo de um objeto de decoração.

Agora é com você:

Material necessário: Capa de encadernação ou folha de acetato e tesoura.

Como fazer:

1. Recorte 30 moldes de mesmo tamanho como a figura abaixo em acetato ou material de capa de encadernação.

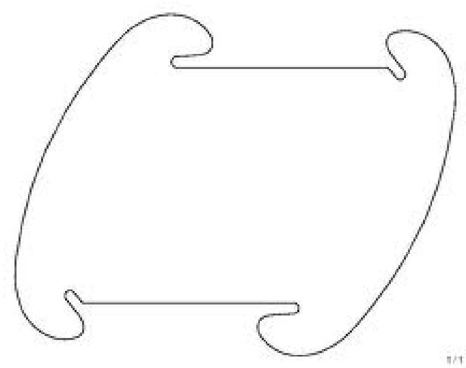


Figura 26: Molde das peças

2. Curve a frente da peça e encaixe, sempre por baixo.
3. Forme um conjunto com cinco peças. (uma estrela).
4. Continue juntando ao redor da estrela, uma peça por vez. (O vértice que possui cinco peças é a estrela, ao redor da estrela os vértices devem ter três peças, a seguir alternar para cinco peças e assim sucessivamente até fechar a superfície esférica da luminária.)

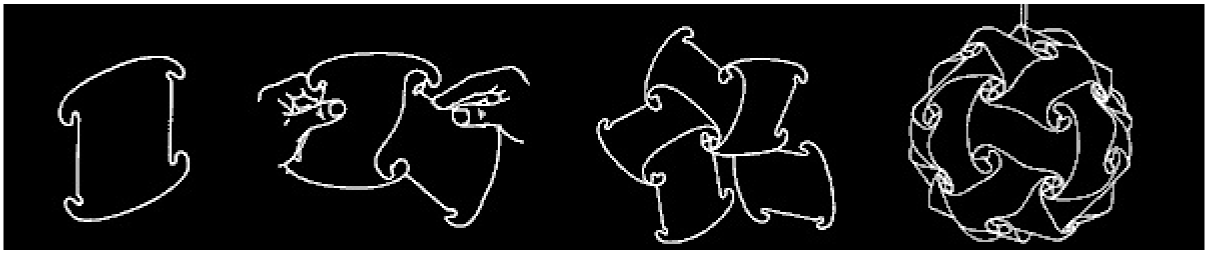


Figura 27: Passos para a montagem da luminária

(a) Você utilizou os 30 moldes. É possível construir outra forma, que não a esfera, utilizando menos ou mais moldes? Tente construir.

Sugestão de leitura:
Visite a página http://www.iqlight.com/

Para saber mais:
Em 1973 Holger projetou o sistema IQlight®, um conceito de iluminação constituída por quadriláteros interligados. Tornando possível a criação de lâmpadas de várias formas e tamanhos reunindo elementos idênticos.

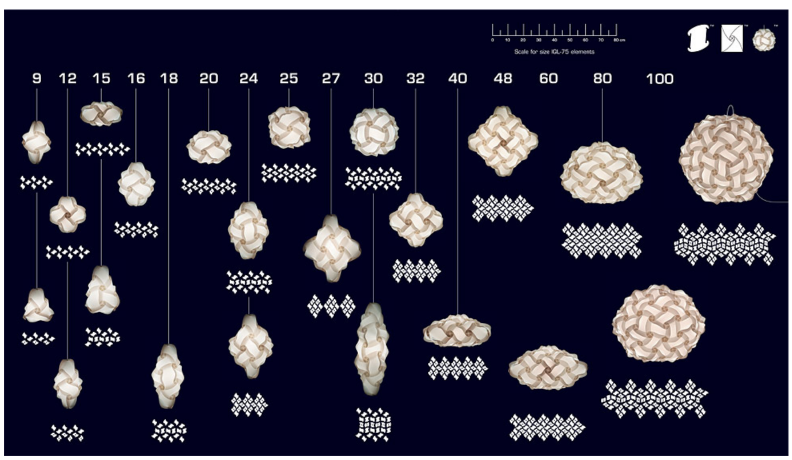


Figura 28: Várias possibilidades de formas

4.3 Atividades - Nível 3

A superfície esférica, quando manipulada, pode trazer resultados inesperados. Os materiais a serem manipulados nestas atividades têm sua importância pela riqueza de ideias sobre medição de superfície esférica que podem surgir no ato da experimentação.

4.3.1 Atividade 1 - Enrolando e desenrolando a superfície esférica

Objetivo:

- Verificar de maneira concreta o cálculo da área de uma superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: compasso, bola de isopor com 50 mm ou 75 mm ou 100 mm de diâmetro , cartolina, tesoura, cola, barbante e régua.

Como fazer:

Superfície plana:

1. Na cartolina, utilizando o compasso, construa um círculo que tenha a medida do raio igual ao da esfera de isopor escolhida.
2. Recorte o círculo.
3. Preencha a superfície deste círculo com o barbante desde o centro até a circunferência em forma de espiral.

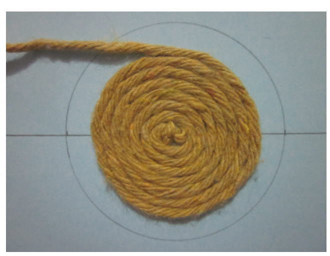


Figura 29: Preenchendo o círculo

4. Recorte exatamente o pedaço de barbante que foi utilizado para preencher o círculo de cartolina.

Superfície esférica:

1. Desenrole o barbante que você utilizou para preencher o círculo de cartolina e recorte quantos pedaços iguais a este barbante julgar necessário para cobrir a superfície da esfera de isopor.

2. Preencha a superfície da esfera de isopor utilizando um pedaço de barbante de cada vez, é necessário ir colando o barbante na superfície da esfera de isopor.

3. Compare o comprimento do barbante que preencheu toda a superfície do círculo e o comprimento do barbante que preencheu toda a superfície da esfera.

4. Escreva suas conclusões sobre a relação entre as áreas da superfície do círculo e da superfície da esfera.

5. Escreva fórmulas utilizadas para o cálculo da superfície de um círculo e da superfície de uma esfera.

4.3.2 Atividade 2 - O que são poliedros com faces esféricas?

Objetivos:

- Identificar os poliedros regulares e seus elementos a partir de um "esqueleto"de poliedro.

- Explorar poliedros que podem ter faces esféricas.

Agora é com você:

Material necessário: Palitos de dente ou de fósforo (os palitos devem ser de mesmo tamanho), massinha de biscuit, xarope de glucose, detergente líquido, água, arame ou soprador de bolha de sabão, recipiente para a mistura.

Obs: A mistura para bolha de sabão deve ser feita da seguinte forma: uma medida de xarope de glucose, duas medidas de detergente e três medidas de água. Primeiramente, misturar (agitar bem) a água com o xarope e depois acrescentar o detergente e misturar novamente. O ideal é que essa mistura seja feita dois dias antes do uso.

Como fazer:

1. Complete a tabela com os elementos dos poliedros regulares.

2. Forme bolinhas com a massinha de biscuit que servirão de vértices para a representação dos "esqueletos"dos poliedros.

3. Utilizando os palitos de dente como arestas e as bolinhas de massa de biscuit, construa os "esqueletos"dos cinco poliedros regulares.

Poliedro Regular	Nº de vértices	Nº de arestas	Nº de faces	Tipo de faces
cubo				
tetraedro regular				
octaedro regular				
dodecaedro regular				
icosaedro regular				

Superfície esférica:

1. Num recipiente em que possa ser mergulhado cada "esqueleto"dos poliedros, despeje a mistura preparada e mergulhe as faces, até que todas tenham a película da mistura.
2. Observe as películas que se formam na superfície ou dentro dos poliedros.
3. Coloque um canudo de refrigerante no interior das formas ou dos poliedros e sopre.
4. Explore as possibilidades de formas da superfície das bolhas de sabão.

(a) Você consegue descrever quais poliedros podem ser inscritos na esfera?

(b) Como seria possível inscrever outros poliedros na esfera?

(c) Descreva objetos esféricos que você conhece, os quais possuem faces esféricas.

Conceitos Matemáticos:

> "Num poliedro convexo os polígonos são chamados de faces do poliedro, os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro.
>
> Um poliedro convexo é Poliedro de Platão quando:
>
> (a) todas as faces têm o mesmo número de arestas;
>
> (b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (n) de arestas;
>
> (c) vale a relação de Euler V - A + F = 2.

Existem apenas cinco classes de Poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Um poliedro convexo é regular quando:

(a) suas faces são polígonos regulares e congruentes;

(b) seus ângulos poliédricos são congruentes.

Existem apenas cinco poliedros regulares : tetraedro regular, hexaedro regular (cubo), octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Obs: Todo poliedro regular é Poliedro de Platão, mas nem todo Poliedro de Platão é poliedro regular."(DOLCE, v. 10, p. 132)

5 Considerações Finais

O caminho percorrido, a fim de construir este trabalho, começou em uma das disciplinas cursadas no Mestrado Profissional em Matemática, Geometria, em que as autoras foram instigadas a refletir sobre os cinco Postulados de Euclides e suas afirmações e contradições em superfícies que não possuem curvatura nula. Com isso, vislumbrou-se um "alerta", uma oportunidade de rever conceitos geométricos e olhar mais atentamente para superfícies facilmente detectadas no cotidiano, as quais podem ser construídas, ou apenas observadas, a partir de imagens que representam superfícies não possíveis na terceira dimensão. Por exemplo, a Garrafa de Klein.

Procurou-se ir além do programa definido pela disciplina e encontrar as Geometrias Não Euclidianas, tão fascinantes quanto a Geometria organizada por Euclides há mais de dois mil anos. Experimentou-se novos ambientes geométricos, que foram iniciados mais fortemente por Riemann (1826 - 1866) em sua Geometria Elíptica e por Lobachevski (1792 - 1856) em sua Geometria Hiperbólica, entre outros matemáticos e outras Geometrias Não Euclidianas.

As leituras para o trabalho indicaram a presença das Geometrias Não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, o que incentivou as autoras a dirigirem este texto à professores do Ensino Fundamental e Médio, para que esses aprofundem suas experiências geométricas e possam juntos aos seus alunos investigarem, experimentarem e surpreenderem-se.

Como alerta ao professor que decidir conhecer e experimentar com seus alunos as atividades, estas devem ser realizadas primeiramente pelo docente, para que tenha suas próprias reflexões. Assim, observará ironicamente, que ainda existe muito a enxergar naquilo que sempre esteve ao alcance de seus olhos. As sugestões de leitura presentes nas atividades complementam o entendimento e fazem perceber que tanto os profissionais da Matemática, quanto qualquer outro profissional, reconhecem e apresentam de muitas formas todas as Geometrias.

As experiências trazidas com a elaboração e realização das atividades ampliou o convencimento das pesquisadoras de que a Geometria é fundamental ao ser humano, logo, indispensável no currículo escolar.

"Caminhar"por diferentes superfícies e reconhecer conceitos geométricos em cada uma delas aprofunda o entendimento da Geometria de Euclides e de outros surpreendentes ambientes geométricos como os não euclidianos, sempre habitados pela humanidade, talvez impensáveis até aqui, mas impossíveis de serem ignorados a partir de agora.

Referências

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[2] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos Tempos*. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Editora Blucher, 2010.

[3] BRASIL. Ministério da Educacão. Secretaria de Educacão Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental)*. Brasília: MEC, 1998. Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[4] CARDOSO, Luiz R. *Dicionário de Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Expressão e Cultura, 2001.

[5] COMMANDINO, Frederico. *Os elementos*. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

[6] COUTINHO, Lázaro; NETTO, Scipione Di Pierro (in memoriam). *A Geometria dos Mares*. Rio de janeiro: Editora Ciência Moderna, 2010.

[7] COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não Euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência,2001.

[8] COUTINHO, Lázaro. *Matemática e Mistério em Baker Street*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2004.

[9] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[10] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial*. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[11] EUCLIDES. *Os elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[12] JORGE, Sonia. *Desenho Geométrico: Idéias e Imagens*. São Paulo: Editora Saraiva, 1998.

[13] LENART, Istvan. *Non-Euclidean Adventures on the LENART SPHERE: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry*. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.

[14] LORENZATO, Sergio. *Coleção formação de professores: O laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. São Paulo: Editora Autores Associados, 2010.

[15] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Coleção PROFMAT: Geometria*. Rio de janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[16] PARANA, Secretaria da Educação do Estado do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[17] PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso: OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA*. Disponível em: http://www.savoir-sans-frontieres.com. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[18] REVISTA ESCOLA. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/geografia/ fundamentos/ todo-mundo-seu-globo-426735.shtm. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[19] SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria; CÂNDIDO, Patrícia. *Coleção Matemática de 0 a 6*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

[20] STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos*. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

[21] STEWART, Ian. *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de janeiro: Editora Zahar, 2009.

[22] TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

[23] UNESCO. *Matemáticas Experimentais*. Disponível em: http://www.experiencingmaths.org/pdf/DOCMATH_PT.pdf, Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[24] GARRAFA DE KLEIN. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=E8rifklq5hc. Acesso em 20 de janeiro de 2015.