PROFMAT **Departamento de Matemática**
Universidade Federal do Paraná
81531-980, Curitiba, PR
Brasil

Geometrias Não Euclidianas para sala de aula - Ângulos e Triângulos

por

Lena Marcia Francheto Mickus

Preprint PROFMAT 1 (2015) 26 de Março, 2015

Disponível via INTERNET:
http://www.profmat-sbm.org.br

Geometrias Não Euclidianas para sala de aula - Ângulos e Triângulos

Lena Marcia Francheto Mickus
Departamento de Matemática - UFPR
81531-980, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: lenamickus@gmail.com

Resumo

Este trabalho traz uma coletânea de atividades sobre Geometria Não Euclidiana elaboradas por três autoras, motivadas pela presença da mesma nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná e da carência de materiais didáticos disponíveis atualmente. Buscou-se apresentar uma proposta de material para ser utilizada nas aulas de Matemática, para o que se realizou uma comparação da Geometria Não Euclidiana com a Euclidiana, utilizando materiais didáticos manipuláveis, textos e atividades que despertem o interesse e promovam o envolvimento do aluno para o assunto. Este é o segundo volume do trabalho que está composto por: volume 1, refere-se ao conteúdo de Linhas, volume 2, Ângulos e Triângulos, volume 3, Polígonos e Formas Espaciais. As atividades estão subdivididas em: Nível Zero - Ensino Fundamental 1 (1º ao 5º ano), Nível 1 - 6º e 7ºano, Nível 2 - 8º e 9º ano do Ensino Fundamental 2 e, Nível 3 - Ensino Médio.
Palavras-Chave: Geometria Não Euclidiana - Atividades - Material manipulativo.

1 Introdução

A experiência profissional das autoras do presente artigo, atuantes no Ensino Básico do Estado do Paraná, revela que há dificuldade em incorporar esse tema no dia a dia de sala de aula, assim sugere-se atividades que possam ser trabalhadas concomitantemente com a Geometria Euclidiana, fazendo um paralelo à mesma.

Logo, este trabalho é uma proposta de ensino de Geometria Não Euclidiana, a ser usada por professores da Educação Básica, para alunos que cursam desde o Ensino Fundamental 1 até o Ensino Médio. Esse tema está contemplado nas Diretrizes Curriculares Estaduais (2008, p. 56), pois segundo elas:

> "Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas Geometrias Não Euclidianas."

Os principais conteúdos abordados nas atividades são: linhas, ângulos, triângulos, polígonos e formas espaciais, esses temas são desenvolvidos a partir de manipulações de objetos concretos, experiências onde o aluno vai percebendo gradativamente as diferenças entre a Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana e construindo suas próprias conclusões. A interação do professor com os alunos no decorrer das atividades, questionando e estimulando, é imprescindível para que esse momento seja de aprendizagem e descoberta, num ambiente propício à experimentação.

Na busca por atividades compatíveis com essa ideia, foram encontrados vários materiais interessantes, dentre os quais destacamos:

- Experimentos de Lénárt (1996): mostra que trabalhar com Geometria Esférica não só é possível, como pode ser uma aventura empolgante tanto para o aluno quanto para o professor;

- Projeto "Matemáticas Experimentais", da UNESCO (2004): propõem aos alunos, segundo os autores *"experimentar, tatear, colocar hipóteses, testá-las, tentar validá-las, procurar demonstrar e debater acerca de propriedades matemáticas"*;

- Os quadrinhos de Petit: de uma maneira simples e divertida, exploram temas instigantes da Geometria Não Euclidiana;

- Os livros de Stewart (2009, 2010): de acordo com o autor *"é uma miscelânea de jogos, quebra-cabeças, histórias e curiosidades matemáticas"* que mostram muitos aspectos divertidos e intrigantes da Matemática;

- Os livros de Coutinho (2001, 2004, 2010): paradidáticos que abrem os olhos a vários pontos das Geometrias Não Euclidianas.

Após as leituras, todas as atividades foram elaboradas de maneira própria das autoras, considerando suas bagagens diversas, pois atuam em todos os níveis sugeridos.

Com isso, o professor terá um guia sobre comparação entre as Geometrias e várias sugestões de atividades e experimentos de Geometria Não Euclidiana que poderá levar para a sala de aula e trabalhar com seus alunos, escolhendo o que mais se adapta à sua turma.

2 Metodologia

Falar em Geometria hoje é falar dos objetos, da tecnologia presente em tudo o que nos cerca, do espaço que estamos ocupando ou que queremos ocupar, é ter um raciocínio lógico e espacial rápido. O professor, ao utilizar esta proposta de material, terá que perceber que o desenvolvimento do conhecimento das Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas tem que se fazer na escola desde muito cedo, pois é desejável que a escola privilegie todos os contextos do mundo em que o ser humano está inserido. A criança deve tomar conhecimento das Geometrias, pois ela está inserida no espaço desde que veio ao mundo, como cita Toledo (1997, p. 221):

> "[...] Através da visão, da audição, do tato, dos seus movimentos, ela vai explorar e interpretar o ambiente que a rodeia e, antes mesmo de dominar as palavras, conhecer o espaço e as formas nele presentes.".

Portanto, procurou-se privilegiar a utilização de materiais didáticos manipuláveis fazendo a observação e a representação dos mesmos, conhecendo os conceitos básicos das formas geométricas para facilitar a formação intelectual do indivíduo.

O que a história revela é que o ser humano, ao descrever o mundo, iniciou fazendo representações por desenhos, que com o passar do tempo foram sendo conceitualizados até adquirirem significados. Foi o que aconteceu com a escrita e possivelmente pode ter ocorrido com a Geometria. Lorenzato, Turrioni e Perez, (2010, p. 5) citam que:

> "Arquimedes revelou o modo pelo qual fazia descobertas matemáticas e confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes."

Logo, é desejável que a Matemática ensinada aos alunos seja apresentada nas mais variadas situações, que sejam instigantes e auxiliem no crescimento intelectual. As situações matemáticas apresentadas se iniciam de maneira intuitiva no Ensino Fundamental 1, quando o aluno passa a perceber as formas do ambiente em que está através da observação. Smole (2005, p. 21), diz:

> “Para que a percepção do espaço torne-se cada vez mais elaborada, a criança precisa ver e apreciar a geometria em seu mundo, descobrir formas, desenhá-las, escrever e falar sobre elas.”

Tendo as situações continuidade nas séries posteriores, até o Ensino Médio, onde os alunos já estão aptos a partir do concreto para o abstrato, ou seja, quando conseguem fragmentar e conceituar os elementos das Geometrias com maior rigor.

Por isso, a importância de outras Geometrias além da Euclidiana e, para isso, tem-se uma coletânea de atividades utilizando objetos e o próprio corpo para que percebam as formas. Conforme Lorenzato, Turrioni e Perez (2010, p. 61):

> “O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.”

Situações em que haja a comparação e também o desenho das formas, pois é o momento de trabalhar com o sensitivo: direita, esquerda, atrás, na frente, longe, perto, dentro, fora, grande, pequeno, em cima, embaixo, no meio, no centro, alto, baixo, vazio, cheio, aberto, fechado, igual e diferente. Momento também de recortar, dobrar, moldar, deformar, montar e decompor.

> “O conhecimento do seu próprio espaço e a capacidade de ler esse espaço pode servir ao indivíduo para uma variedade de finalidades e constituir-se em uma ferramenta útil ao pensamento tanto para captar informações quanto para formular e resolver problemas.” (SMOLE, 2005, p. 16).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, recomenda-se que os conteúdos devam ser articulados de acordo com o conhecimento que os alunos possuem, pois, mesmo que o aluno não tenha frequentado a pré-escola, ele tem noções geométricas empíricas. A partir disso, o professor pode desenvolver conceitos e métodos relativos às Geometrias, fazer atividades exploratórias, manipulativas, trabalhar com representações e o aluno compreender o que está à sua volta. O destaque dado no PCN (1997, p. 55 – 56) é:

> "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.
> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema

> e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.
> Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento."

As propriedades geométricas são mais facilmente aprendidas pelo ser humano quando há uma grande variedade de experiências nas quais, a partir do fazer e do ver, ele faça comparações e assim construa os conceitos.

> "Por isso, é essencial que as atividades que permitem o desenvolvimento da percepção espacial possam ser integradas em um programa de ensino de matemática abrangente, levando em conta o desenvolvimento total da criança." (SMOLE, 2005. p. 19).

Então, as atividades propostas buscam a visualização e manipulação, bases primordiais para o desenvolvimento do pensar geométrico. A partir disso, o indivíduo começa a classificar, ordenar, contar, fazer comparações, tirar conclusões e formar o seu conhecimento teórico. Atividades estas, que se apresentam divididas nos conteúdos já citados: linhas, ângulos, triângulos, polígonos e formas espaciais. Cada conteúdo traz um breve resumo do que será trabalhado, com conceitos e definições. E é subdividido em níveis, que também traz uma breve explanação do que se pode trabalhar e despertar nos alunos.

Estes níveis são:

- Nível zero para os alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental 1, onde os alunos descobrem a Geometria de uma forma intuitiva.
- Nível 1 para 6º e 7º ano e Nível 2 para 8º e 9º ano do Ensino Fundamental 2, onde se faz a descoberta dos conceitos.
- Nível 3, o Ensino Médio, onde ocorre a formalização dos elementos da Geometria e a sua aplicação.

Para o Nível zero as atividades são direcionadas ao professor para que aplique com seus alunos, por eles serem mais dependentes. Para os Níveis 1, 2 e 3 as atividades são direcionadas aos alunos, para que sozinhos façam as descobertas.

As atividades foram construídas com a seguinte estrutura:

- **Título:** de uma maneira interessante, chama a atenção do aluno para a atividade.
- **Objetivos:** especificam resultados esperados observáveis.
- **Agora é com você:** onde inicia-se a tarefa propriamente dita. Esse item contém:
  - Material necessário: explicita-se quais materiais serão utilizados para executar a atividade.
  - Como fazer: De uma maneira bem simples, detalha-se como a tarefa deve ser desenvolvida e na maioria delas está separada em Superfície Plana e Superfície Esférica, podendo haver também Superfície Cilíndrica e Cônica.

  Dependendo da atividade há a presença de:
- **Desafio:** relativos à atividade.
- **Para saber mais:** um texto explicativo sobre algum fato ou assunto compatível com o conteúdo trabalhado na atividade.
- **Conceitos Matemáticos:** relata de uma maneira didática os conteúdos vistos na atividade.
- **Sugestão de Leitura:** esse item indica livros, textos, sites ou vídeos onde o aluno pode explorar um pouco mais os conteúdos vistos.

Para a construção das mesmas, foram realizadas pesquisas nos documentos que norteiam o currículo escolar comparando com os livros didáticos utilizados pelas escolas e verificou-se uma falta de material sobre Geometrias Não Euclidianas.

Assim as atividades propostas neste trabalho podem ser acrescentadas, com a autonomia necessária do professor, em suas aulas de Geometria Euclidiana, realizando comparações e enriquecendo o entendimento das Geometrias.

O presente volume tratará apenas dos conteúdos Ângulos e Triângulos, porém os três volumes elaborados pelas autoras atendem aos seguintes conteúdos:

VOLUME 1 - LINHAS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Linhas retas e curvas - Linhas abertas e fechadas - Paralelas - Perpendiculares	- Linhas retas e curvas - Paralelas - Perpendiculares - Círculo Máximo - Concorrentes	- Geometria Projetiva - Bi e Tridimensionalidade	- Aplicação na Cartografia

VOLUME 2 - ÂNGULOS

Nível 1	Nível 2
- Definição de ângulo - Como medir ângulo na esfera - Construção de ângulos na esfera	- Medida e construção de ângulos

VOLUME 2 - TRIÂNGULOS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Construção de triângulo	- Soma das medidas dos ângulos internos - Triângulos com ângulos retos	- Soma das medidas dos ângulos internos - Congruência e Semelhança	- Relação entre a área de um triângulo e a soma de de seus ângulos internos

VOLUME 3 - POLÍGONOS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Definição de polígonos - Polígonos convexos - Biângulo e Triângulo - Curvatura de superfícies	- Biângulo e Triângulo	- Ladrilhamento	- Aplicação na Cartografia - Comprimento de circunferência - Área de superfície esférica - Faces de poliedros - Truncamento de poliedros

VOLUME 3 - FORMAS ESPACIAIS

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
- Construção de sólidos geométricos: poliedros e não poliedros	- Elementos de poliedros convexos (vértices, arestas e faces) - Planificação de superfície poliédrica	- Ladrilhamento de superfície esférica	- Área de superfície esférica - Poliedros regulares - Poliedros com faces poligonais esféricas

3 Ângulos

Segundo Barbosa (1995, p. 22):

> "[...] chamamos de *ângulo* a figura formada por duas semirretas com a mesma origem.

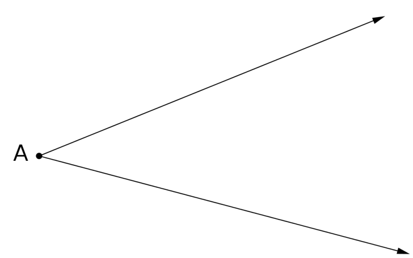

Figura 1: Ângulo

> As semirretas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum, de *vértice* do ângulo."

E ainda na Geometria Plana, Barbosa (1995, p. 4) define semirreta da seguinte maneira:

> "Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C, tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B."

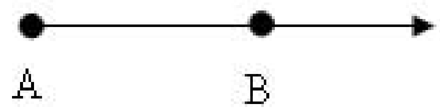

Figura 2: Semirreta

Na Geometria Esférica, quando dois grandes círculos se interceptam num determinado ponto, podemos chamar esse ponto de origem do ângulo na esfera e as semirretas com origem nesse ponto, de lados do ângulo.

Um dos instrumentos usados para medir ângulos na Geometria Plana é o transferidor e podemos também utilizá-lo para medir ângulos na superfície esférica. Ao utilizar o transferidor, os ângulos, tanto no plano, quanto na esfera são medidos em graus. Lénárt, em seu trabalho com a Geometria Esférica, elaborou um transferidor esférico para medir ângulos nessa Geometria, mas, com o intuito de facilitar o acesso aos materiais para as atividades propostas, será usado o transferidor comum, pois o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos que formam o ângulo na superfície esférica tem a mesma medida que o ângulo em questão. Logo o ângulo esférico é medido posicionando o centro do transferidor no vértice do mesmo e um dos lados do ângulo esférico deve coincidir com a linha de fé, isto é, a linha que contém o grau zero e o outro lado do ângulo coincide com o grau que o ângulo mede.

Figura 3: Medindo ângulo esférico com o transferidor.

As atividades propostas a seguir, têm o objetivo de propiciar ao aluno, desde o Ensino Fundamental 1 até o Ensino Médio, noções sobre o conceito de ângulo tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Não Euclidiana. Isso se dá por meio de atividades práticas e experimentais, utilizando materiais concretos para construir e para medir ângulos, buscando sempre fazer com que o aluno perceba a diferença entre as diversas superfícies que podem ser trabalhadas.

3.1 Atividades - Nível 1

Nesse nível, os alunos já conseguem medir e construir ângulos usando transferidor, usar o grau para determinar essa medida e ter noção de que quanto maior a abertura, maior a medida do ângulo. Portanto, nas atividades sugeridas nessa fase, farão um paralelo entre a Geometria Plana e a Esférica, onde o aluno será instruído a realizar as atividades de construção de ângulos, comparar aberturas para visualizar qual ângulo tem maior ou menor medida e medir ângulos tanto na Geometria Euclidiana, quanto na Esférica.

3.1.1 Atividade 1 - As regiões formadas pelo cruzamento de duas linhas retas em diferentes superfícies

Objetivo:

- Observar e comparar a região formada entre duas linhas retas que se cruzam no plano, na superfície cilíndrica e na superfície cônica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, compasso, régua, cilindro de cartolina, cone de cartolina, canetinha hidrocor ou lápis de cor com quatro cores diferentes e lápis.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Utilize uma folha de papel sobre uma mesa plana.
2. Marque dois pontos na folha, afastados um do outro, de modo que um fique próximo à borda superior da folha e o outro próximo à borda inferior da folha. Nomeie-os como pontos A e B e ligue com uma linha reta esses pontos.
3. Marque outros dois pontos, mais ou menos no centro da folha, próximos às bordas direita e esquerda respectivamente e ligue-os formando um segundo segmento que intercepta o primeiro. Nomeie esses novos pontos como C e D e o ponto de intersecção entre os dois segmentos de ponto P.

4. Usando um compasso, desenhe um círculo ao redor do ponto P, onde P é o centro desse círculo.

5. Pinte com cores diferentes os espaços ou regiões formados entre os segmentos.

   (a) Quantas regiões foram formadas?

   (b) Essas regiões tem o mesmo tamanho?

Superfície cilíndrica e superfície cônica:

1. Utilizando um cilindro de cartolina, realize os passos a seguir para cada um deles.

2. Marque sobre cada superfície lateral do cilindro dois pontos e chame-os de A e B.

3. Ligue esses dois pontos, encontrando o segmento $\overline{AB}$.

4. Marque dois outros pontos, C e D e ligue-os, de modo que essa nova linha intercepte o segmento $\overline{AB}$.

5. Nomeie o ponto de intersecção dos segmentos como ponto P.

6. Desenhe a mão livre, um círculo ao redor do ponto P, onde P é o centro desse círculo.

7. Pinte com cores diferentes os espaços ou regiões formados entre os segmentos.

8. Em seguida, abra a superfície cilíndrica, planificando-a.

9. Em relação à superfície planificada, responda às perguntas:

   (a) Quantos espaços foram formados por essas quatro linhas?

   (b) Os espaços formados por essas quatro linhas e no interior do círculo tem o mesmo tamanho?

10. Agora, utilizando o cone repita os procedimentos de 2 a 9.

3.1.2 Atividade 2 - Os ângulos formados por linhas que se cruzam

Objetivo:

- Observar ângulos formados por linhas que se cruzam nas superfícies plana, cúbica, cilíndrica e esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, compasso, transferidor, bola de isopor, canetinha hidrocor, fio de costura, corante, alfinetes de cabeça colorida e fio lastex.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Coloque a folha de papel sobre uma mesa plana e marque dois pontos próximos às extremidades laterais da folha, nomeando-os com A e B.
2. Ligue os pontos A e B, formando o segmento $\overline{AB}$.
3. Trace outro segmento entre outros dois pontos próximos às extremidades laterais da folha que cruze o primeiro segmento desenhado, nomeie os pontos com C e D e o ponto de cruzamento dos caminhos como ponto P.
4. Trace um círculo ao redor do ponto P, usando o compasso e tendo o ponto P como centro desse círculo.
5. Pinte com cores diferentes os espaços ou regiões formados entre os segmentos.
   (a) Se "enrolarmos"este papel para formar um canudo, o que acontece com os segmentos de reta? São ainda linhas retas?
   (b) Se "enrolarmos"este papel e formar um cone, o que acontece com os segmentos de reta? São ainda linhas retas?
6. Recorte a folha de papel utilizando os segmentos desenhados como linhas de corte.
   (a) O número de regiões ou espaços que você contou anteriormente é o mesmo número de pedaços de papel após o recorte?
   (b) As regiões que foram pintadas ao redor do ponto P como são? São todas iguais? Compare as aberturas entre eles.

(c) Compare os ângulos pintados dos recortes com objetos que você tenha, compare com objetos que você tenha por perto e descubra ângulos iguais, maiores ou menores que os ângulos do seu recorte.

Superfície Esférica:

1. Marque um ponto A com um alfinete na esfera.
2. Amarre no ponto A um fio de costura.
3. Segure a bola por este fio e deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto A e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola, no ponto onde a gota estiver pingando espete outro alfinete, marque como ponto B.
4. Estique um fio lastex preso aos pontos A e B.
5. Marque um ponto C com um alfinete na esfera, distante de A e B.
6. Amarre no ponto C um fio de costura.
7. Segure a bola por este fio e deixando-a imóvel, pingue uma gota de corante no ponto C e aguarde que a gota comece a pingar para fora da bola. No ponto onde a gota estiver pingando, espete outro alfinete e marque-o como ponto D.
8. Estique um fio lastex preso aos pontos C e D, cruzando o fio que une A até B.
9. Marque com P o cruzamento dos fios, trace um círculo ao redor de P, usando o compasso e sendo P o centro desse círculo.
10. Observe as regiões ao redor do ponto P e pinte com cores diferentes.
    (a) Como são os cantos que foram pintados ao redor do ponto P? Todos iguais?
    (b) Compare suas aberturas.
11. Recorte num papel o molde aproximado dos ângulos formados ao redor de P.
12. Numa mesa plana junte os ângulos recortados do círculo ao redor de P. É possível formar o círculo novamente?
13. Faça um desenho mostrando os conceitos geométricos que você aprendeu nesta atividade, escrevendo e indicando o que você entendeu.

3.1.3 Atividade 3 - Medindo ângulos na superfície esférica

Objetivos:

- Medir ângulos entre linhas na superfície esférica.
- Utilizar o transferidor para medir ângulo.
- Somar ângulos ao redor do cruzamento entre linhas.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, transferidor, bola de isopor, canetinha hidrocor e alfinetes de cabeça colorida.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Com a régua, desenhe dois segmentos que se cruzem e utilize o transferidor para medir os ângulos formados por elas.
2. Agora, desenhe quatro segmentos que se cruzem no mesmo ponto e utilize o transferidor para medir os ângulos formados.
   (a) Quantos ângulos foram formados?
   (b) Qual é a medida de cada ângulo?
   (c) Qual é a soma de todos os ângulos?
3. Faça o mesmo procedimento para 5, 6 e 10 segmentos que se cruzam no mesmo ponto.
   (a) Qual é a soma dos ângulos nos casos de ter 5, 6 ou 10 segmentos?
   (b) As somas anteriores são iguais ou diferentes?
   (c) Você pode concluir que isto sempre acontecerá? Justifique.
4. Desenhe um segmento de reta. Marque um ponto sobre o segmento e a partir deste ponto desenhe um segmento de reta que não esteja sobre o primeiro segmento.
   (a) Quantos ângulos foram formados?

5. Utilize o transferidor e meça os ângulos.

Superfície Esférica:

1. Espete dois alfinetes na esfera de isopor, relativamente longe um do outro.
2. Amarre um fio lastex unindo os dois alfinetes, formando um segmento na esfera.
3. Espete um alfinete próximo ao segmento e una este a um dos outros dois alfinetes, formando outro segmento de reta.
4. Utilizando um transferidor, meça o ângulo entre os segmentos na esfera.
5. Construa vários ângulos na esfera utilizando alfinetes e fio lastex e meça-os utilizando o transferidor.
6. Construa ângulos de 90^o, 180^o, 270^o, 30^o, 120^o, 150^o e 240^o.

3.2 Atividades - Nível 2

Nesse nível, além de construção e medidas de ângulos, serão trabalhadas, também, as noções de ângulo reto, construção do ângulo reto no plano e na esfera. Para facilitar o entendimento das atividades, faz-se uma comparação da esfera com o Globo Terrestre, onde o equador do Planeta Terra é aproximadamente um grande círculo e como tal, tem dois pontos polos. Mas é necessário ficar atento ao fato de que, o Globo Terrestre, tem apenas dois pontos polos, o Polo Norte e o Polo Sul, mas na Geometria Esférica, qualquer ponto pode ser um ponto polo, isto é, existem infinitos pontos polos.

3.2.1 Atividade 1 - Construir ângulo reto na superfície esférica

Objetivo:

- Ser capaz de construir ângulos retos numa superfície diferente da plana.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, canetinha hidrocor, régua, lastex, bola de isopor e transferidor.

Como fazer:

Superfície Esférica:

1. Marque um ponto na esfera de isopor e considere esse ponto como um ponto polo.

2. Encontre uma maneira de construir o grande círculo correspondente a esse ponto polo.

3. Descreva o método que você utilizou nessa construção.

4. Trace uma linha do ponto polo até a linha do grande círculo.

5. Usando o transferidor, meça o ângulo formado pelo grande círculo e a linha que você traçou do polo até o grande círculo e registre quantos graus ele têm.

6. Desenhe outros ângulos na superfície esférica, usando o mesmo ponto polo e o grande círculo.

7. Use o transferidor para verificar se os ângulos traçados realmente medem 90^o.

8. Registre o que você percebe de diferente entre a superfície plana e a esférica.

Para saber mais:

- Também pode-se medir a distância entre dois pontos na esfera utilizando o grau.
- A distância entre um par de pontos polos mede 180^o.
- A distância entre o ponto polo e o grande círculo mede 90^o.

3.2.2 Atividade 2 - Construindo ângulos retos na superfície plana e esférica

Objetivo:

- Observar a diferença entre um ângulo no plano e um ângulo na esfera.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, canetinha hidrocor, régua, esquadro, bola de isopor e transferidor.

Como fazer:

<u>Superfície Plana:</u>

1. Desenhe duas linhas na folha de papel, de modo que elas se cruzem e dividam o plano em regiões congruentes.

2. Meça os ângulos formados por essas retas.

3. Observe que para que as regiões fiquem congruentes, os ângulos assinalados precisam ser de 90^o.

Superfície Esférica:

1. Na esfera, desenhe dois grandes círculos distintos de modo que dividam a esfera em regiões que sejam congruentes.

2. Meça os ângulos em cada ponto de intersecção desses dois grandes círculos.

3. Os dois grandes círculos construídos são perpendiculares entre si? Justifique.

3.2.3 Atividade 3 - Construindo ângulos na superfície plana e na superfície esférica

Objetivo:

- Construir ângulos quaisquer na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, canetinha hidrocor, régua, esquadro, bola de isopor e transferidor.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Construir ângulos com régua usando medidas quaisquer.

2. A partir de medidas pré definidas, usar o transferidor para construir os ângulos. Como por exemplo, de 30^o, 80^o, 120^o e 230^o.

Superfície Esférica:

1. Na esfera, desenhe dois grandes círculos distintos.

2. Verifique quantos ângulos podem ser formados por esses dois grandes círculos.

3. Use o transferidor para medir os ângulos formados por esses grandes círculos. Registre suas medidas.

4. Numa segunda esfera, trace um grande círculo e a partir dele construa, usando o transferidor, ângulos de 30^o, 80^o, 120^o e 230^o.

4 Triângulos

Na Geometria Plana, de acordo com Dolce (2005, p. 36): *"Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC."*. Mesmo que, a geometria em questão não seja Euclidiana, mas Esférica, a figura formada por três segmentos de grandes círculos continua sendo um triângulo, pois, segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 201): *"[...]seus lados não parecem retos. Mas são. São os caminhos mais curtos entre os vértices sobre a superfície para essa geometria."*, e podemos chamá-los de triângulos não euclidianos, isto é, na Geometria Esférica, um triângulo é constituído por três arcos tomados de três grandes círculos.

Quanto à soma das medidas dos ângulos internos, sabemos que se a Geometria envolvida é a Euclidiana, essa soma é 180^o. Porém isso nem sempre ocorre nas demais Geometrias. Essa soma varia dependendo da Geometria em que o triângulo pertence. Com isso, temos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo:

na Geometria Euclidiana, é *igual a 180º*
na Geometria Esférica, é *maior que 180º*
na Geometria Hiperbólica, é *menor que 180 º*

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo está relacionado com a área do mesmo e a curvatura da superfície em que ele está inserido. Usando como exemplo a Geometria Esférica, quanto maior a região triangular, maior é a soma das medidas dos seus ângulos internos.

Outro fator importante a considerar ainda na Geometria Esférica, são os casos de semelhança e congruência de triângulos. Na Geometria Euclidiana, temos triângulos semelhantes que não são congruentes. Na Geometria Esférica se os triângulos forem semelhantes, então são congruentes.

Logo, as atividades a seguir, exploram o conceito de triângulos na Geometria Esférica, além da Plana, bem como, soma das medidas dos ângulos internos, triângulo retângulo, congruência e semelhança, através de atividades práticas que levam o aluno a construir seu próprio significado dos conceitos abordados.

4.1 Atividade - Nível Zero

Para construir um triângulo na superfície esférica, é necessário termos claro, que os lados do triângulo esférico são segmentos do grande círculo. Portanto, para se ter certeza que o aluno não cometerá o erro de apenas desenhar a mão livre uma figura na esfera com três lados e identificar como sendo um triângulo, todas as atividades nessa sessão serão executadas com fio lastex ou elástico fino, pois, quando esticado na esfera e prolongado, esse segmento com certeza pertencerá ao grande círculo. Na atividade a seguir, o professor pode explorar com os alunos a noção do triângulo em uma superfície esférica, através da construção de triângulos esféricos em bolas de isopor, tornando a atividade uma experiência lúdica em que o aluno pode se familiarizar com o conceito de que uma figura geométrica nem sempre está contida no plano.

4.1.1 Atividade 1 - Construindo triângulos na esfera

Objetivo:

- Observar e construir triângulos na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: canetinha hidrocor, esfera de isopor, barbante ou fio lastex e cola.

Como fazer:

<u>Superfície Esférica:</u>

O professor orienta os alunos para que façam esta atividade em duplas, pois um aluno pode auxiliar o colega na execução da mesma.

Para iniciar esta tarefa, o professor precisa explicar ao aluno como fazer um grande círculo na esfera usando um pedaço de barbante. Em seguida, auxilia os alunos a fazerem o mesmo em suas esferas de isopor. Na sequência, orienta os alunos a fazerem mais dois grandes círculos na esfera e questiona-os alunos sobre qual figura geométrica eles podem observar na superfície, ao utilizar os barbantes.

Pedir aos alunos que pintem os triângulos que eles observaram com canetinha colorida, sendo cada triângulo com uma cor diferente e, comparem com um triângulo na folha de papel e relatem o que observaram.

4.2 Atividades - Nível 1

Nas atividades a seguir, será abordada a construção de triângulos em superfícies planas e não planas, bem como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo tanto no plano quanto na esfera. Também é contemplada a ideia de que na esfera, um triângulo pode ter mais de um ângulo reto, comparando triângulos retângulos em duas superfícies diferentes.

4.2.1 Atividade 1 - Como são os triângulos em superfícies não planas?

Objetivo:

- Observar e construir triângulos em outras superfícies.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, lápis preto, régua, canetinha hidrocor, canudinhos de refrigerante e esfera de isopor, fio lastex e alfinetes de cabeça colorida.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Na folha de papel, trace três linhas retas que se cruzem duas a duas e pinte a figura fechada formada por essas linhas.
   (a) Que polígono se formou no item 1?
2. Agora, pegue três pedaços de canudinho de tamanhos diferentes e tente montar uma figura fechada com eles.
   (a) Que polígono é esse?
   (b) Com quaisquer três segmentos, sempre é possível construir um triângulo?
   (c) Tente montar triângulos com outros tamanhos de pedaços de canudinho.
   (d) Escreva suas conclusões.

Superfície Esférica:

1. Construa três Círculos Máximos diferentes na esfera.
   (a) Quantos triângulos esféricos você encontrou?

2. Pinte os triângulos que você conseguiu encontrar de cores diferentes.

3. Marque com uma cor mais forte, os ângulos internos desses triângulos.

   (a) Qual a diferença entre um triângulo no plano e um triângulo na esfera?

4.2.2 Atividade 2 - Quantos triângulos podemos traçar a partir de três pontos?

Objetivo:

- Observar quantos triângulos podemos traçar a partir de três pontos na superfície plana e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, canetinha hidrocor, régua, bola de isopor, alfinetes de cabeça colorida e fio lastex.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Na folha de papel, desenhe três pontos distintos e não colineares.

2. Ligue os três pontos formando um triângulo.

   (a) Quantos triângulos diferentes você pode desenhar com esses mesmos três pontos?

Superfície Esférica:

1. Coloque três alfinetes em pontos distintos e não colineares na esfera.

2. Marque com a canetinha estes pontos como A, B e C.

3. Ligue estes três pontos usando o fio lastex.

4. Você conseguiu um triângulo. Agora, com fio lastex, forme os três grandes círculos que passam por A e B, B e C e por A e C.

5. Observe que os pontos A, B e C não determinam um único triângulo.

6. Pinte estes triângulos com cores diferentes.

   (a) Quantos triângulos esféricos você obteve?

4.2.3 Atividade 3 - Quantos ângulos retos um triângulo pode ter?

Objetivo:

- Observar que, se mudarmos a superfície, um triângulo pode ter mais de um ângulo reto.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, esquadro ou transferidor, bola de isopor, canetinha hidrocor, alfinetes de cabeça colorida e fio lastex.

Como fazer:

<u>Superfície Plana:</u>

1. Construa um triângulo retângulo na folha de papel, usando o esquadro ou transferidor.
2. Marque seu ângulo reto com cor diferente.
3. Usando ainda o esquadro, tente construir um triângulo, na folha de papel, com mais de um ângulo reto.
   (a) Registre suas conclusões sobre o procedimento do item 3.

<u>Superfície Esférica:</u>

1. Na esfera, construa, usando fio lastex, um grande círculo e marque um ponto polo referente a ele com um alfinete.
2. Em seguida, com o fio lastex, faça uma perpendicular a esse grande círculo até o polo.
3. Faça uma segunda perpendicular ao primeiro grande círculo diferente da que você traçou no item 2, mas seguindo até o mesmo ponto polo.
   (a) O que você observa da figura que encontrou?
   (b) Quantos ângulos retos você obteve no triângulo que desenhou na esfera?
   (c) Compare o triângulo que você desenhou no plano com o triângulo que você desenhou na esfera. O que você pode observar?

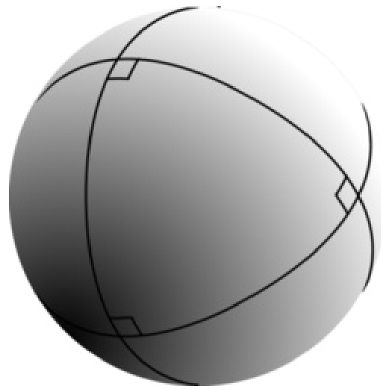

Figura 4: Triângulo com mais de um ângulo reto

4.2.4 Atividade 4 - Vamos brincar com bexiga e verificar os ângulos internos de um triângulo?

Objetivo:

- Visualizar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo nem sempre é 180^o.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, canetinha hidrocor, régua, bexiga e transferidor.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Na bexiga vazia sobre uma mesa, marque com a canetinha três pontos distintos.
2. Utilizando a régua, ligue os três pontos formando um triângulo.

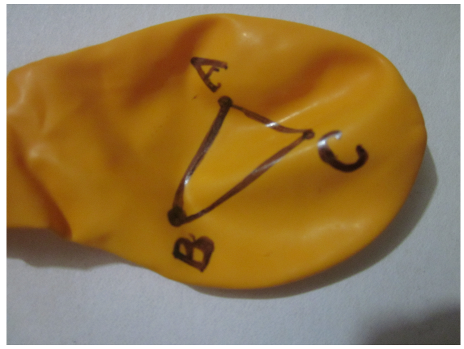

Figura 5: Desenhando triângulo na bexiga

3. Com o transferidor, meça cada um dos ângulos internos desse triângulo.
4. Registre essas medidas.
5. Some as medidas dos ângulos internos desse triângulo.
   (a) Registre o que você observou com essa fase da atividade.

Superfície Esférica:

1. Em seguida, encha a bexiga.
   (a) O que aconteceu com o seu triângulo?
2. Com o transferidor, meça novamente os ângulos internos do triângulo.
3. Registre essas novas medidas.
4. Some as medidas dos ângulos internos obtidas através da bexiga cheia.
   (a) O valor encontrado na bexiga vazia é o mesmo que o encontrado na bexiga cheia?
   (b) Escreva suas conclusões.

4.2.5 Atividade 5 - Um triângulo pode ter a soma das medidas dos ângulos internos igual a 270^o?

Objetivos:

- Perceber que um triângulo pode ter apenas um ângulo reto se a superfície em que ele está inserido é plana.
- Observar que, na superfície esférica, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo não é fixa.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, canetinha hidrocor, régua, bola de isopor, fio lastex, alfinete de cabeça colorida, tesoura e transferidor.

Como fazer:

Superfície Esférica:

1. Na folha de papel, desenhe três ângulos retos e recorte-os.
2. Na esfera, construa um grande círculo e marque um ponto na esfera, na posição em que ele pode ser considerado como um ponto polo deste grande círculo. Chame esse ponto de P.
3. Marque um ponto no grande círculo chamando-o de ponto A.
4. Ligue o ponto A ao ponto P.
5. Marque um segundo ponto no grande círculo, distante de A, e chame-o de ponto B.
6. Ligue o ponto B ao ponto P.
7. Observe o triângulo formado pelos pontos A, B e P.
8. Encaixe os três ângulos que você recortou nos ângulos internos do triângulo esférico ABP.
9. Responda as questões:
   (a) Você conseguiu encaixar os três ângulos internos em um único triângulo? Caso você tenha conseguido encaixar apenas dois dos ângulos recortados, como você deve desenhar o triângulo esférico para que todos os três ângulos possam ser encaixados?
   (b) Quais conclusões você pode escrever sobre ângulos retos num triângulo esférico?

4.3 Atividades - Nível 2

Neste nível, serão contemplados a soma dos ângulos internos de um triângulo na superfície plana e na superfície esférica e congruência e semelhança de triângulos na superfície plana e na esférica. Nesta fase, o aluno irá perceber que semelhança entre triângulos, só existem na superfície plana, e na esférica, existe apenas a relação de congruência.

4.3.1 Atividade 1 - Quanto é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

Objetivo:

- Estudar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo no plano e na superfície esférica.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, transferidor, bola de isopor, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex, lápis de cor e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Usando uma folha de papel, construa um triângulo, que ocupe a maior parte da folha.
2. Marque e pinte cada ângulo com cores diferentes.

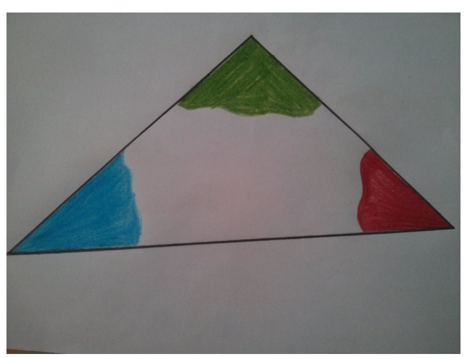

Figura 6: Triângulo com os três ângulos marcados

3. Em seguida, separe esses três ângulos, rasgando ou cortando o triângulo.

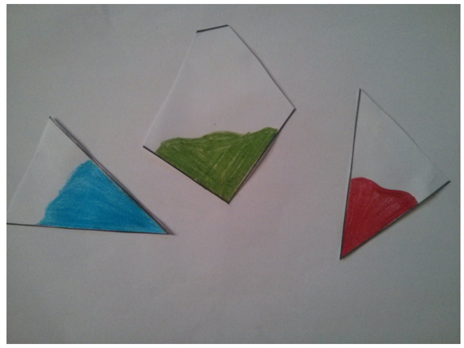

Figura 7: Ângulos do triângulo original

4. Agora, junte as três pontas.

5. Juntando essas três pontas, você conseguiu um ângulo com quantos graus?

6. Observe que os triângulos que os colegas desenharam são diferentes do seu. Verifique se o resultado que eles encontraram é o mesmo ou é diferente do resultado que você encontrou.

7. Escreva suas conclusões.

Superfície Esférica:

1. Agora, usando a esfera, construa um triângulo com fio lastex e meça cada um dos ângulos internos, usando o transferidor.

2. Some os três ângulos do triângulo esférico.

   (a) Qual valor você encontrou?

   (b) Verifique com os seus colegas se o valor que eles encontraram é o mesmo que você encontrou.

   (c) O que você pode concluir com relação ao triângulo no plano e na esfera?

4.3.2 Atividade 2 - Estudando a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Objetivo:

- Calcular e estimar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo em diferentes superfícies.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, transferidor, bola de isopor, lápis de cor, canetinha hidrocor e lápis preto.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Usando a régua, desenhe vários triângulos numa folha de papel.
2. Com um transferidor, meça os ângulos internos de cada triângulo.
3. Some as medidas dos ângulos internos de cada um dos triângulos acima.
   (a) Qual soma você encontrou?
   (b) Essa soma é sempre a mesma? Justifique.

Superfície Esférica:

1. Use fio lastex para construir três triângulos de tamanhos diferentes.
2. Encontre a soma das medidas dos ângulos internos de cada um deles.
   (a) Qual ou quais valores você encontrou?
   (b) Agora, explique por que você encontrou respostas diferentes para cada um deles.

4.3.3 Atividade 3 - Um triângulo pode ter mais de um ângulo reto?

Objetivos:

- Verificar que num triângulo esférico, a soma de suas medidas é maior que 180^o e menor que 540^o.
- Perceber a noção de que a área do triângulo está relacionada com a soma das medidas dos ângulos internos deum triângulo esférico. Isto é, quanto maior a região triangular, maior a soma das medidas dos seus ângulos internos.

Agora é com você:

Material necessário: transferidor, bola de isopor, alfinetes de cabeça colorida, fio lastex e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície Esférica:

1. Construa na esfera, um triângulo com três ângulos retos utilizando o fio lastex.
   (a) Explique como isso é possível.
2. Construa um triângulo na esfera em que a soma de seus ângulos internos seja maior que 270^o.
3. Agora, tente construir um triângulo na esfera, em que a soma de seus ângulos internos seja menor que 180^o.
4. Registre suas conclusões acerca das construções 2 e 3.

Sugestão de Leitura:
Os quadrinhos de: PETIT, Jean-Pierre. *As aventuras de Anselmo Curioso - Os mistérios da Geometria*, página 23.

4.3.4 Atividade 4 - Relação de congruência de triângulos

Objetivo:

- Verificar se as relações de congruência entre triângulos no plano também são válidas para triângulos esféricos.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, transferidor, bola de isopor, fio lastex, alfinetes de cabeça colorida e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Quais são os casos de congruência de triângulo no plano?

2. Represente através de figuras cada caso de congruência de triângulo.

Superfície Esférica:

1. Marque na esfera de isopor um ponto P e considere-o como ponto polo.
2. Construa o grande círculo referente a esse ponto polo P.
3. Construa uma perpendicular de P até o grande círculo. Chame de A o ponto de intersecção da perpendicular com o grande círculo.
4. Construa mais três perpendiculares de P ao grande círculo diferentes da primeira e nomeie os demais pontos de intersecção como B, C e D.
5. Meça os ângulos dos triângulos PAB, PAC e PAD.
6. Meça os lados dos triângulos PAB, PAC e PAD.
7. Registre a soma de seus ângulos internos e seu perímetro.
   (a) Dados dois triângulos planos, se dois pares de ângulos correspondentes forem congruentes e um par de lados correspondentes forem congruentes, esses triângulos também são congruentes. Use o triângulo que você desenhou acima para explicar porque na esfera, esse caso não garante congruência.
   (b) Dois triângulos satisfazem o caso LAL se possuem dois pares de lados correspondentes congruentes e um par de ângulos correspondentes congruentes. Use o mesmo desenho para explicar por que esse caso não garante congruência para triângulos na esfera.

4.3.5 Atividade 5 - Quando os ângulos correspondentes forem congruentes obtem-se triângulos: semelhantes ou congruentes?

Objetivo:

- Analisar a diferença entre congruência e semelhança de triângulos no plano e na esfera.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, tesoura, transferidor, bola de isopor, canetinha para retroprojetor e plástico transparente.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Desenhe um triângulo numa folha de papel e pinte cada ângulo com cores diferentes.

2. Divida esse triângulo em três partes com um ângulo em cada parte.

3. Mova os ângulos para tentar criar um novo triângulo com os mesmos ângulos mas com lados que tenham comprimentos diferentes do primeiro.

   (a) Quantos triângulos diferentes você conseguiu encontrar?

   (b) Se os dois triângulos tem os três ângulos correspondentes congruentes, então eles satisfazem a condição AAA. O que isso significa num triângulo plano?

   (c) Satisfazendo a condição AAA, garante que os triângulos sejam congruentes? Justifique.

Superfície Esférica:

1. Envolva, agora, sua esfera num plástico transparente de maneira que fique o mais perfeito possível.

2. Desenhe um triângulo nessa esfera e marque os ângulos com cores diferentes.

3. Retire o plástico e recorte o triângulo transparente em três partes, cada parte contendo um ângulo.

4. Tente usar o mesmo procedimento que no plano e faça outro triângulo com esses três ângulos.

5. Coloque sobre a esfera novamente e compare com o triângulo original.

   (a) Qual a diferença entre os dois triângulos esféricos?

   (b) Esses triângulos tem os três ângulos correspondentes congruentes, são semelhantes ou congruentes? Justifique.

4.3.6 Atividade 6 - Encontrando as relações de congruência de triângulos na esfera.

Objetivos:

- Comparar triângulos congruentes na esfera e no plano.
- Analisar os casos de congruência de triângulos no plano e na esfera.

Agora é com você:

Material necessário: folha de papel, régua, transferidor, bola de isopor e canetinha hidrocor.

Como fazer:

Superfície Plana:

1. Dos casos abaixo, quais garantem congruência de triângulos no plano?

   LLL, AAA, AAL, LLA, ALA, LAL

2. Para cada condição que você não escolheu, desenhe dois triângulos em que suas partes correspondentes sejam congruentes, mas os triângulos não sejam congruentes.

Superfície Esférica:

Dos casos citados no item 1, verifique quais garantem congruência de triângulos na superfície da esfera.

Desafios:

De István Lénárt, pág. 75:

- Dois botes saem de portos diferentes. Cada bote viaja ao longo do grande círculo por 1000 km. Então, cada bote muda seu curso fazendo um ângulo de 90^o para a direita. Depois, indo 50 km nessa nova direção, cada bote muda o curso novamente e viaja diretamente para seu porto. Os dois botes viajam a mesma distância? Justifique.

- Encontre um par de triângulos esféricos com todas as propriedades listadas a seguir:

  (i) Os triângulos não tem ângulos retos.

  (ii) Os triângulos satisfazem a condição LLA.

  (iii) Os triângulos não são congruentes.

4.4 Atividades - Nível 3

As atividades a seguir abordam o fato de que, num triângulo esférico, quanto maior a região triangular, maior será a soma das medidas dos seus ângulos internos.

4.4.1 Atividade 1 - Qual a relação entre a área de um triângulo e a soma das medidas dos ângulos internos?

Objetivo:

- Verificar se existe relação entre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e sua área.

Agora é com você:

Material necessário: esfera de isopor, transferidor, fio lastex e alfinetes de cabeça colorida.

Como fazer:

1. Marque na esfera de isopor, um ponto P.
2. Desenhe o grande círculo que tem P como um dos polos.
3. Trace uma linha do ponto P até o grande círculo.
4. Trace três outras linhas, também de P até o grande círculo.
5. Nomeie esses pontos de intersecção com o grande círculo como A, B, C e D.
6. Meça os ângulos dos triângulos PAB, PAC e PAD.
7. Meça os lados desses triângulos.
8. Encontre a soma das medidas dos três ângulos de cada um dos triângulos acima.

(a) As somas das medidas encontradas é sempre superior a 180^o?

(b) Você percebeu alguma relação entre as áreas desses triângulos e as somas das medidas de seus ângulos internos? Escreva suas observações.

4.4.2 Atividade 2 - Relação entre perímetro e soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na esfera.

Objetivo:

- Observar que quanto maior o triângulo na esfera, maior será a soma das medidas dos seus ângulos internos.

Agora é com você:

Material necessário: esfera de isopor, transferidor, fio lastex e alfinetes de cabeça colorida.

Como fazer:

1. Construa na esfera, triângulos de tamanhos diferentes, uns maiores e outros menores.
2. Determine as medidas dos ângulos internos desses triângulos.
3. Determine a soma das medidas dos ângulos internos desses triângulos.
4. Meça os lados de cada triângulo que você desenhou.
5. Calcule o perímetro dos triângulos.
6. Compare as medidas das somas dos ângulos internos com a medida do perímetro de cada triângulo com os demais triângulos.
7. Que relação você é capaz de perceber entre o perímetro e a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo na esfera?

5 Considerações Finais

O caminho percorrido, a fim de construir este trabalho, começou em uma das disciplinas cursadas no Mestrado Profissional em Matemática, Geometria, em que as autoras foram instigadas a refletir sobre os cinco Postulados de Euclides e suas afirmações e contradições em superfícies que não possuem curvatura nula. Com isso, vislumbrou-se um "alerta", uma oportunidade de rever conceitos geométricos e olhar mais atentamente para superfícies facilmente detectadas no cotidiano, as quais podem ser construídas, ou apenas observadas, a partir de imagens que representam superfícies não possíveis na terceira dimensão. Por exemplo, a Garrafa de Klein.

Procurou-se ir além do programa definido pela disciplina e encontrar as Geometrias Não Euclidianas, tão fascinantes quanto a Geometria organizada por Euclides há mais de dois mil anos. Experimentou-se novos ambientes geométricos, que foram iniciados mais fortemente por Riemann (1826 - 1866) em sua Geometria Elíptica e por Lobachevski (1792 - 1856) em sua Geometria Hiperbólica, entre outros matemáticos e outras Geometrias Não Euclidianas.

As leituras para o trabalho indicaram a presença das Geometrias Não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, o que incentivou as autoras a dirigirem este texto à professores do Ensino Fundamental e Médio, para que esses aprofundem suas experiências geométricas e possam juntos aos seus alunos investigarem, experimentarem e surpreenderem-se.

Como alerta ao professor que decidir conhecer e experimentar com seus alunos as atividades, estas devem ser realizadas primeiramente pelo docente, para que tenha suas próprias reflexões. Assim, observará ironicamente, que ainda existe muito a enxergar naquilo que sempre esteve ao alcance de seus olhos. As sugestões de leitura presentes nas atividades complementam o entendimento e fazem perceber que tanto os profissionais da Matemática, quanto qualquer outro profissional, reconhecem e apresentam de muitas formas todas as Geometrias.

As experiências trazidas com a elaboração e realização das atividades ampliou o convencimento das pesquisadoras de que a Geometria é fundamental ao ser humano, logo, indispensável no currículo escolar.

"Caminhar"por diferentes superfícies e reconhecer conceitos geométricos em cada uma delas aprofunda o entendimento da Geometria de Euclides e de outros surpreendentes ambientes geométricos como os não euclidianos, sempre habitados pela humanidade, talvez impensáveis até aqui, mas impossíveis de serem ignorados a partir de agora.

Referências

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[2] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos Tempos.* Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Editora Blucher, 2010.

[3] BRASIL. Ministério da Educacão. Secretaria de Educacão Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental).* Brasília: MEC, 1998. Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[4] CARDOSO, Luiz R. *Dicionário de Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Expressão e Cultura, 2001.

[5] COMMANDINO, Frederico. *Os elementos.* São Paulo: Edições Cultura, 1944.

[6] COUTINHO, Lázaro; NETTO, Scipione Di Pierro (in memoriam). *A Geometria dos Mares.* Rio de janeiro: Editora Ciência Moderna, 2010.

[7] COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não Euclidianas.* Rio de Janeiro: Interciência,2001.

[8] COUTINHO, Lázaro. *Matemática e Mistério em Baker Street.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2004.

[9] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana.* São Paulo: Editora Atual, 2005.

[10] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial.* São Paulo: Editora Atual, 2005.

[11] EUCLIDES. *Os elementos.* Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[12] JORGE, Sonia. *Desenho Geométrico: Idéias e Imagens.* São Paulo: Editora Saraiva, 1998.

[13] LENART, Istvan. *Non-Euclidean Adventures on the LENART SPHERE: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry*. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.

[14] LORENZATO, Sergio. *Coleção formação de professores: O laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. São Paulo: Editora Autores Associados, 2010.

[15] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Coleção PROFMAT: Geometria*. Rio de janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[16] PARANA, Secretaria da Educação do Estado do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[17] PETIT, Jean-Pierre. *As Aventuras de Anselmo Curioso: OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA*. Disponível em: http://www.savoir-sans-frontieres.com. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[18] REVISTA ESCOLA. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/geografia/ fundamentos/ todo-mundo-seu-globo-426735.shtm. Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[19] SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria; CÂNDIDO, Patrícia. *Coleção Matemática de 0 a 6*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

[20] STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos*. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

[21] STEWART, Ian. *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de janeiro: Editora Zahar, 2009.

[22] TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

[23] UNESCO. *Matemáticas Experimentais*. Disponível em: http://www.experiencingmaths.org/pdf/DOCMATH_PT.pdf, Acesso em 20 de janeiro de 2015.

[24] GARRAFA DE KLEIN. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=E8rifklq5hc. Acesso em 20 de janeiro de 2015.