2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

RAZÃO ÁUREA: UM RICO TESOURO DE SURPRESAS

Liliane Rezende Anastácio [1]
Francinildo Nobre Ferreira[2]

Resumo: Razão Áurea é uma razão entre dois comprimentos de um segmento específico e cujo o resultado é um número irracional. É um tema interessante, devido às suas diversas aplicações, devendo portanto, ser abordado dentro das salas de aulas de Ensino Básico. Dessa forma o presente trabalho tem o intuito de estimular os professores de matemática a utilizarem a Razão Áurea de maneira adequada e produtiva. O enfoque principal está no fato deste tema poder despertar interesse por parte dos alunos de diferentes anos escolares. A história, os problemas, as propriedades e as diversas aplicações da Razão Áurea podem ter maior destaque dentro do conteúdo da matemática, tal qual é descrito nesse trabalho.

Palavras-chave: Razão Áurea. Fibonacci. Número Φ.

1 Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destaca a importância de se trabalhar conteúdos diversificados na matemática como prática de professores do Ensino Básico.

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.
>
> ([1], 1998, p. 14)

A Razão Áurea pode ser um conteúdo diversificado que pode contribuir para a prática docente do professor de matemática. A Razão Áurea pode ser definida pelo quociente entre as medidas de dois segmentos específicos da seguinte forma: tomemos um segmento AB e um ponto C no seu interior dividindo-o em duas partes no qual a razão entre a maior e a menor parte é igual a razão entre a medida do segmento e a parte maior, ou seja:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

[1] Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: liliane.rezende.lili@gmail.com
[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: francinildonobre@gmail.com

Figura 1: Segmento AB.

O número encontrado neste quociente é irracional denotado por Φ na literatura por diversos autores e pronunciado Fi, seu valor é $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$. A Razão Áurea é conhecida também na literatura como proporção divina, secção áurea, número de ouro e extrema e média razão. Há autores que afirmam que o número de ouro é o inverso de Φ , $\frac{1}{\Phi}$. [2].

Por volta de 300 a.C., Euclides de Alexandria apresentou um dos primeiros registros de Razão Áurea. Não se sabe ao certo se antes dele já se conhecia essa razão, no entanto, a mesma é encontrada em objetos e locais, como em uma maçã, no formato do cartão de crédito, em construções arquitetônicas, no corpo humano, no formato da Via Láctea, e em vários outros ambientes. O tema que contém aplicações em artes, arquitetura, natureza, dentre outras é pouco citada nas salas de aulas,e às vezes nem lembrada. [3] A Razão Áurea também foi apontada por Kepler como um grande tesouro da geometria, tal qual o teorema de Pitágoras. [4]

O presente trabalho tem como objetivo apresentar algumas dessas aplicações e incentivar o aprofundamento desse assunto dentro da sala de aula de matemática, tanto no Ensino Fundamental, quando os alunos aprendem razão, proporção e equações do 2o grau, quanto no Ensino Médio, quando a maturidade matemática permite um melhor entendimento sobre esse conceito. Quando o interesse dos alunos é despertado o aprender se torna mais prazeroso, mais natural e ainda pode resgatar aqueles que já haviam perdido o gosto pela matemática.

Einstein afirma que

> A melhor coisa que podemos vivenciar é o mistério. Ele é a emoção fundamental que está no berço da ciência e da arte verdadeiras. Aquele que não conhece e não mais se maravilha, não sente mais o deslumbramento, vale o mesmo que uma morte, que uma vela apagada.(Lívio em [3], apud Einstein)

2 Razão Áurea

Uma forma de se encontrar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ que satisfazem a Razão Áurea, utilizando construções geometricas (figura 2), serão apresentadas seguindo os seguintes passos:

1º - Constroi-se um quadrado ACED de 4cm por exemplo.

2º - Marca-se o ponto médio M do segmento AC.

3º - Com o auxílio de um compasso, traça-se o arco de circunferência tendo o ponto M como centro e raio $\overline{ME}$.

4º - Prolonga-se o segmento AC. Este intercepta o arco de circunferência traçado no ponto B.

5º - O ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

que é a Razão Áurea, isto é o número irracional Φ (Fi), 1,61803...

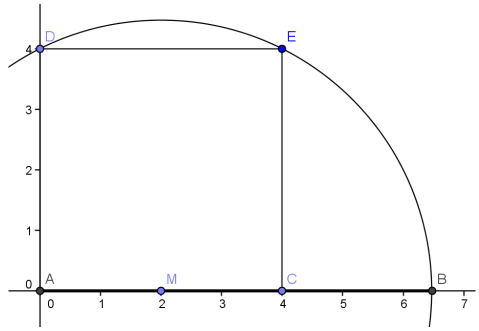

Figura 2: Construção do Segmento AB.

$\overline{AC}$ é maior que $\overline{CB}$.

Como encontrar o valor do número de ouro?

Pode-se construir um segmento áureo já tendo o segmento $\overline{AB}$ e descobrir o ponto C. Para isso é necessário a utilização de régua e compasso e a aplicação do teorema de Pitágoras.

Exemplo 1:

Considere que a medida do segmentos $\overline{AC} = a$, $\overline{CB} = b$ então $\overline{AB} = a + b$. Substituindo esses valores na razão

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

obtemos,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

ou seja,

$$a^2 = \text{ba} + b^2.$$

Fazendo $x = \frac{b}{a}$, substituindo esse valor na equação anterior e ainda dividindo por a^2 obtemos

$$x^2 \text{ - } x \text{ - } 1 = 0.$$

Resolvendo essa equação utilizando Bhaskara ou trinômio quadrado perfeito obtemos a solução

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A solução positiva é $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803... = \Phi$. Quanto mais precisa for a $\sqrt{5}$ mais próxima do número de ouro estará x.

Exemplo 2:

Outra maneira de se encontrar o número de ouro é utilizando-se um pentágono regular. A partir dele calcula-se a razão entre qualquer de uma de suas diagonais e seu lado, utilizando-se semelhança de triângulos, classificações de . Para isso, considere o pentágono regular ABCDE conforme está descrito na figura 3.

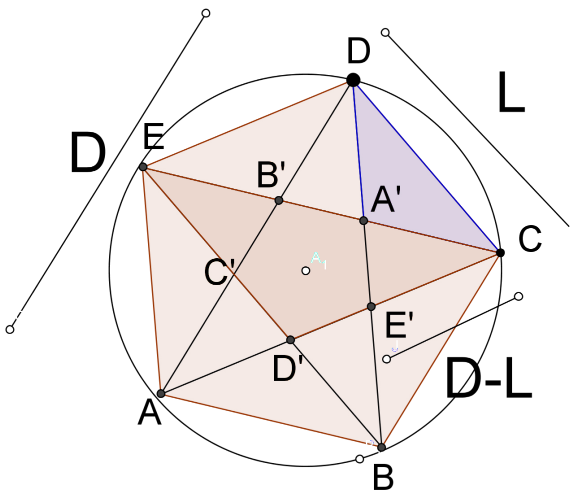

Figura 3: Pentagrama

Como o pentágono é regular seus ângulos internos são congruentes e os triângulos CDA' e CED' da figura 3 são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo.

Assim, fazendo

$\overline{ED'} = \overline{CD} = l$ (lado do pentágono) utilizando o fato de que AED' é isósceles e que os triângulos CDA' e CED' são semelhantes temos que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{DA'}}$$

como,

$$\overline{CD} = \overline{EA} = l \text{ e } \overline{CE} = d \text{ e } \overline{DA'} = \overline{DB} - \overline{BA'} = d - l.$$

Pode-se fazer as substituições na proporção anterior, assim temos

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \text{ então, } l^2 = d^2 - dl.$$

Seja x a razão entre a diagonal e o lado do pentágono, ou seja, $x = \frac{d}{l}$ ainda $d = xl$ então

$$l^2 = (lx)^2 - lxl$$

que dividindo-se por l obtem-se

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Resolvendo-se a equação novamente, obtemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

cuja a solução positiva é o número

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Exemplo 3:

Há outras maneiras de se encontrar o número de ouro a partir de expressões matemáticas, cujo resultado é Razão Áurea. Como é denotado a seguir

considere,

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}}$$

elevando ao quadrado ambos os membros temos

$$1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}} = x^2$$

substituindo na equação anterior

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}} \text{ de x,}$$

obtemos

$$x^2 \text{ - } x \text{ - } 1 = 0.$$

Novamente, temos a equação já resolvida anteriormente, cujo a solução positiva é o número Φ.

Exemplo 4:

Mais um exemplo de como pode ser encontrado o número de ouro é utilizando-se fração contínua que é um conceito de teoria dos números.

Fração contínua é uma expressão obtida a partir de um processo iterativo para a representação de um número.

Considere

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}.$$

Podemos substituir na própria equação e chegaremos a

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

ou seja,

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

E novamente temos a equação que define a Razão Áurea que, segundo alguns autores, é o número mais irracional dos irracionais.

Um dos estudioso sobre Razão Áurea foi Paciole, que em 1509 publicou um livro o qual possuia o título de: "Proporção Divina". Ele acreditava que Razão Áurea era um conteúdo para mentes humanas perpicazes e inquisidoras e todas aquelas que gostam de artes, arquitetura, música, perspectiva, pintura, filosofia e tantas outras. Paciole também afrmava que os estudos sobre Razão Áurea levariam a delicados, sutis e admiráveis ensinamentos e que estes levariam a uma ciência muito secreta. [5]

Lívio, também afirma que Paciole acreditava que a Razão Áurea deveria ser chamada de proporção divina e enumerava razões para isso como: 1- Só existia uma razão como esta, assim como Deus é único; 2- Na Razão Áurea aparece três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ e a existência da santíssima trindade: Pai, Filho e Espírito Santo; 3- Número Φ ser irracional e a impossibilidade de compreeensão de Deus. Dentre outras. [3]

3 Fibonacci

Um conceito que esta relacionado com a Razão Áurea são números de Fibonacci, os quais são definidos como uma sequência cujo os dois primeros valores são 1 e os seguintes são a soma dos dois antecessores consecutivos. A definição em termos matemáticos da sequência de Fibonacci é: F_1=F_2=1 e F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, $\forall$ $n > 2$. Os números da sequência se relacionam com a Razão Áurea e possuem propriedades fascinantes e assustadoras. Há uma lista imensa de relações matemáticas que envolvem os números da sequência de Fibonacci.

Uma interessante propriedade é a relação entre o número Φ e a Sequência de Fibonacci. A medida que calculamos a razão entre dois números consecutivos o quociente aproxima-se de Φ. Dizemos que a divisão entre os termos tende a Φ.

A razão entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tende ao número Φ quando n aumenta, como mostra o gráfico (figura 4).

Se referindo a essa sequência, Paciole [5] afirma que Fibonacci usou coelhos para descobrir um conceito matemático que contempla o mundo.

Fibonacci tem grande contribuição na história da razão áurea, ele expandiu os exemplos e aplicações como o problema que o deixou mais conhecido, o caso dos coelhos.O problema dos coelhos pertence ao livro Liber Abaci de Leonardo de Pisa (1180-1250), popularmente conhecido como Fibonacci, no capítulo XII. *Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos coelhos podem ser gerados a partir deste*

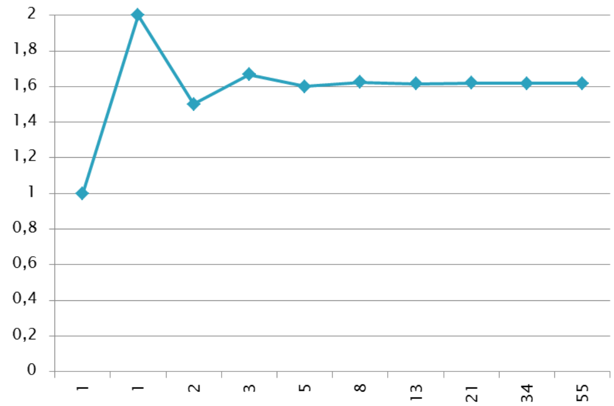

Figura 4: Relaçao Fibonacci e Razão Áurea

par em um ano, se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês. [7]

O problema pode ser facilmente interpretado por meio da tabela 1.

Tabela 1: Pares de Coelhos

Mês	Novo Par	Par Fértil	Total de Pares
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13

A partir da interpretação da tabela temos como resultado final a seguinte sequência 1,1,2,3,5,8,13,... Esta é a sequência de Fibonacci, chamada assim pelo Matemático francês Edouard Lucas no século XIX. [3]

Esses intressantes números poderia ser alternativa para o trabalhos de sequências no ensino básico, uma vez que neste são apenas trabalhados as progressões aritméticas e as geométricas. Uma alternativa para enriquecer o trabalho é apresentar a sequência de Fibonacci e chegar assim a Razão Áurea.

4 Retângulo de Ouro

Um outro conceito relacionando Razão Áurea é o retângulo de ouro ou retângulo áureo, no qual os comprimentos dos lados desse retângulo estão em uma Razão Áurea entre si. É um retângulo bem proporcionado e de grande valor estético.

Se traçarmos um quadrado de lado do tamanho da largura do retângulo de ouro teremos um quadrado e um novo retângulo de ouro e poderia fazer esse procedimento sucessivas vezes, tal qual pode ser observado na figura 4.

Se traçarmos $\frac{1}{4}$ de circunferência com raio de medida do lado dos quadrados formados teremos, quando juntas a espriral (figura 5). A espiral logarítma também pode ser denominada de espiral equiangular. (Lívio [3]) A espiral áurea é uma espiral logarítmica que tem valor especifico de crescimento. Vale salientar que toda espiral dourada é logaritmica mas, nem toda espiral logaritmica é áurea.

A espiral logaritmica é descrita por Rimoldi como a distância do polo a cada volta é definida por uma progressão geométrica, sendo tangenciada por todas as retas situadas em seu plano. Essa espiral é também conhecida como spira mirabilis, de forma que a razão entre as distâncias de voltas sucessivas aproxima-se da proporção áurea. [9]

A forma espiral é encontrada em diversos lugares na natureza como por exemplo na foraminífera celular, no crescimento de sementes de girassol num sentido horário e anti-horário e em moluscos náuticos. A espiral logarítmica também esta presente na orientação de vôo de um falcão e ainda no sistema de estrelas agrupadas por um plano comum as da Via Láctea.

Observando-se essas diferentes aplicações da espiral no cotidiano de cada um, o tema desperta em cada ser o interesse em se aprofundar mais nos estudos sobre a Razão Áurea como parte dos conteúdos matemáticos.

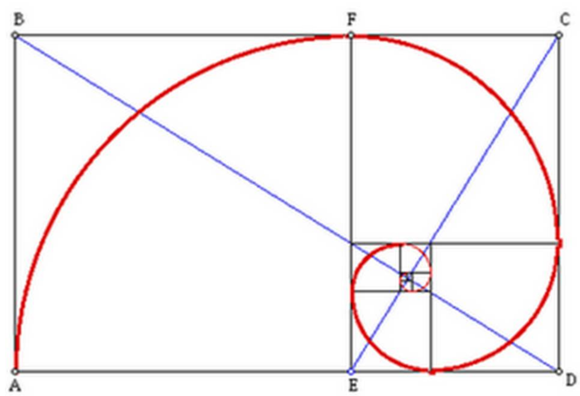

Figura 5: Espiral Logarítmica

5 Pentagrama

O Pentagrama (figura 3) é conhecido desde os pitagóricos que o utilizavam como símbolo de sua seita. Há diversas propriedades aplicadas ao pentagrama que o fazem ser uma figura geométrica intrigante e fascinante, como a intersecção de duas de suas diagonais que as dividem em média e extrema razão: Razão Áurea.

Para sua construção, é necessário um pentágono regular e suas diagonais. Feita as suas diagonais temos formado um pentagrama, uma estrela perfeita de cinco pontas, cujo seu centro é exatamente um novo pentágono regular.

Assim, temos uma característica interessante do pentagrama gerado dentro do pentágono maior, se traçarmos as diagonais do pentágono central do pentagrama formado temos um novo pentagrama menor, repetindo-se o processo, temos infinitos pentagramas formados.

As medidas dos comprimentos em ordem decrescente estão em relação com um fator que é exatamente o número Φ, facilmente provada com a utilização de cálculos e geometria.

Lauro afirma que não se sabe se os pitagóricos já sabiam que os segmentos de extrema razão eram incomensuráveis, existem autores que afirmam que eles já conheciam as soluções geométrica da equação encontrada pelos segmentos. Como cita Lauro em [7].

Na natureza também encontramos exemplos que se relacionam com o pentágono regular. Flores como azaléia, petúnia e jasmim-estrela pode ser inscritas num pentagono regular e a partir daí as relações douradas podem ser observadas.

6 Leonardo Da Vinci

Para alguns autores foi Leonardo Da Vinci que chamou a Razão Áurea de divina proporção. Suas obras contaram com a proporção divina e por isso são tão harmoniosas. Monalisa, sua pintura mais famosa, foi feita sobre as medidas de extrema e média razão. Pode-se construir um retângulo de ouro sobre seu rosto e facilmente descobrimos Φ entre suas medidas.(figura 6)

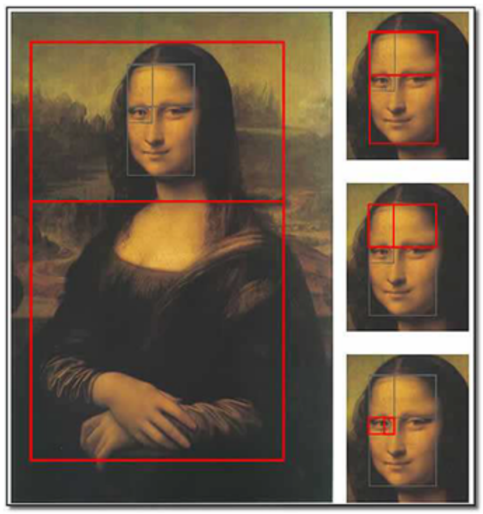

Figura 6: Mona Lisa
Fonte: [13], p. 10

Nos tempos atuais um filme contou uma história fictícia sobre fatos matemáticos reais. O Código de Da Vinci inspirado na obra de Dan Brown trouxe, aos leigos em matemática, a sequência de Fibonacci e o número Φ que Da Vinci tanto representou em suas obras. [10]

O Homem Vitruviano também é um exemplo das aplicações de Razão Áurea. O desenho foi proposto por Marcus Vitruvius Pollio em sua obra *Os Dez Livros da Arquitetura* no século I a. C. (figura 7) A proposta era um modelo ideal do corpo humano em que parte de suas medidas baseavam-se na Razão Áurea.

Em 1492, Leonardo Da Vinci, resolveu desenhar o Homem Vitruviano. O desenho era um problema matemático, já que a proposta era um homem de proporções perfeitas e deveria estar inscrito em um quadrado e em um círculo.

Para a inscrição no quadrado, a altura do corpo deveria ser igual ao comprimento dos braços abertos. Para o círculo os braços deveriam estar abertos na altura do crânio e as pernas abertas o deveriam tocá-lo.

Segundo o modelo perfeito descrito por Vitrúvio e desenhado por Da Vinci, as medidas obedecem a divina proporção. A altura do chão até o umbigo é a secção áurea da altura do homem. O mesmo acontece com o cotovelo que divide o braço em segmentos de média e extrema razão.

Proporções como estas podem ser exploradas pelos alunos de matemática do Ensino Básico. Este tipo de análise, torna interdisciplinar o estudo, uma vez que explora conhecimentos da ciências, artes, história e da matemática.

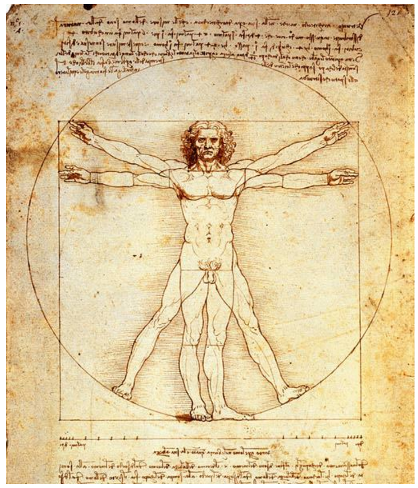

Figura 7: Homem Vitruviano
Fonte: [7], p.71

7 Arquitetura

A proposta arquitetônica é sempre promover a beleza e harmonia perfeitas. Uma vez que não se pode falar em harmonia sem citar Razão Áurea.

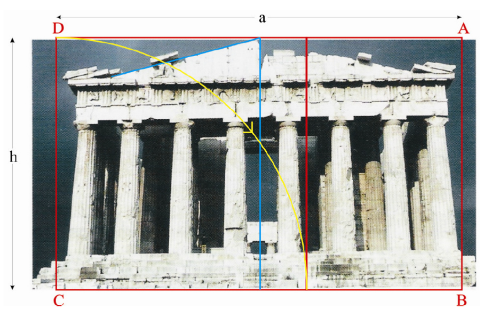

Figura 8: Paternon
Fonte: [7] p.76

O Partenon, uma obra arquitetônica conhecida, forma um quase retângulo de ouro e outras de suas medidas também atendem a proposta da Razão Áurea.(figura 8) Porém, não há evidências históricas de que foi utilizada a média e extrema razão em sua criação. Os estudos para comprovação do uso do número Φ nessas obras se arrastam até os dias atuais.

Como ocorre nas pirâmides de Quéops em Giné. A construção da pirâmide é enigma da humanidade, ela apresenta Razão Áurea entre a altura da face lateral e a metade do lado da base. Além disso os blocos utilizados são 1,618... vezes maiores que os blocos do nível a cima. (figura 9)

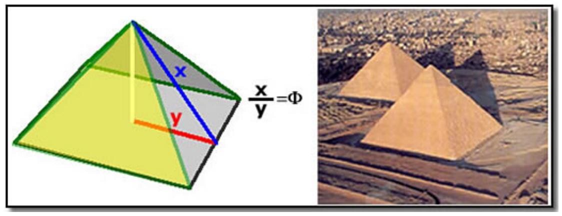

Figura 9: Pirâmides
Fonte: [14]

Nos dias atuais, utiliza-se a Razão Áurea com clareza e estudos na arquitetura. Como por exemplo as obras de obras de Le Corbusier que seguem as medidas proporcionais ao retângulo de ouro. (figura 10)

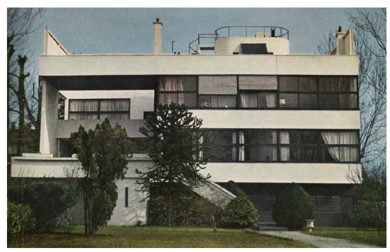

Figura 10: Obra de Le Corbusier nos subúrbios de Paris
Fonte: [7] p.75.

8 Estética

A estética é um assunto muito presente nos tempos atuais e desperta interesse em várias pessoas de diferentes faixas etárias, especialmente, de adolescentes. A mídia e o meio influênciam a aparência das pessoas e elas estão buscando cada vez mais a perfeição estética.

A Razão Áurea está relacionada com a estética. A razão é a ligação entre a base orgânica e a geometria da beleza, um rosto é cada vez mais perfeito se simétrico e se as razões entre as suas medidas estão próximas de Φ.

De acordo com observações realizadas a sombrancelha feminina poderia ser feita dentro do retângulo de ouro, como mostra a figura 11 construída a partir de uma imagem de um rosto de mulher. Os designers de sombrancelhas poderiam desenhá-las sobre o retângulo de ouro e a perfeição seria alcançada. É notório que as pessoas não tem conhecimento sobre isso. Nem clientes e nem esteticistas, um assunto que poderia ser abordado em disciplinas do Ensino Superior do curso de estética.

Outro assunto que contém a divina proporção na estética é a arcada dentária. A Razão Áurea está presente dentro dos consultórios de ortodentia. Se for respeitada a proporção áurea é possível obter-se um posicionamento correto dos dentes.

O tema é utilizado em diversos trabalhos de dentistas que buscam cada vez mais a perfeição. Como nos estudos feitos em [11] e [12]. A discusão maior, dentro do assunto, é que os quatro dentes frontais de cada lado da arcada superior estão numa relação de razão áurea uns com os outros como menciona Lauro [7].

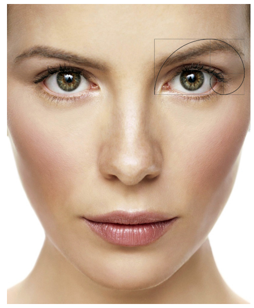

Figura 11: Designer de Sombrancelha utilizando o retângulo de ouro

9 Considerações Finais

O facínio pelo aprofundamento do estudo sobre este tema não para de ser alimentado. A Razão Áurea é, sem dúvida, um conteúdo que desperta interesse até mesmo daqueles que se dizem mentes bloqueadas para a matemática. Mesmo não aprofundando o tema, matemáticamente falando, a história que o rodeia já tem grande valor acadêmico.

A abordagem sobre Razão Áurea deve ser realizada no Ensino Fundamental e Médio pelos professores a fim de que esta possa ajudar na abstração de conhecimentos matemáticos, históricos, artísticos e tantos outros. Razão Áurea é interdisciplinar.

Há possibilidade de desenvolver um trabalho dentro do conteúdo de matemática que envolva noções de medida, razões e estimativas, números irracionais e operações com radicais além de construções geométricas e cálculos. O trabalho com Razão Áurea é uma oportunidade de aprendizagem mais significativa, atraente, diferenciada e aplicada.

O professor de matemática pode optar pelo modo de apresentar o número de ouro para seus alunos utilizando os exemplos descritos no item 2 - Razão Áurea. A escolha deve ser feita de acordo com os interesses do professor e turma. O tema poderia ser abordado, dentro do planejamento do professor, nas aulas de matemática como parte das curiosidades matemáticas.

A matemática pela "visão platônica"é universal, eterna e algo que existe independente de nós seres humanos. É como se ela já existisse e apenas fossemos descobrimos cada vez mais. Essa concepção faz sentido analizando-se a Razão Áurea, uma vez que seria possível encontrar o número Φ em diversas relações diferentes, desde caramujos ao crescimento das folhas de alface.

É preciso cuidado e muito estudo sobre as relações com a Razão Áurea. Pelo fato do assunto ser bastante místico e surpreendente, às vezes, o número Φ aparece em certas relações apenas como uma coincidência, sem conhecimento prévio de que seria usado. Como por exemplo, nas pirâmides do Egito, nas quais não se sabe se a razão áurea foi utillizada antes de sua construção ou se por uma questão de harmonia e beleza ela foi descoberta posteriormente.

Razão Áurea desperta emoções, misticismo e até mesmo surpresas. O assunto é cheio de surpresas que merece ser conhecido, estudado e até mesmo aplicado pelos alunos em todos os níveis de ensino.

10 Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus diante de um tema que ele foi presença em tempo integral.

Agradeço a minha mãe, que já não se encontra em meio de nós mas, foi a minha pedagoga da vida e certamente tem grande contribuição para a realização deste.

Ao meu pai Lúcio, a Cila, a Aline e Daniel que compõe minha família núcleo, que tiveram paciência, amor e carinho nessa etapa, em especial a Lucilene, minha irmã que me inspira a ir mais longe nos estudos.

Ao meu orientador e professor Francinildo Nobre Ferreira que acreditou no meu trabalho, me ajudou muito e é exemplo de profissional matemático que tenho hoje.

Aos meus professores do mestrado, da graduação e da minha vida, cada um teve sua participação particular. Aos colegas do mestrado em especial Ana Carolina, temos história para contar!

Agradeço aos meus colegas de trabalho que diversas vezes cederam para que houvesse a concretização de meu sonho. Aos meus alunos que foram também mestres.

Aos meus tios e tias que sempre estavam presentes. Em especial Nívia, Lena, Dôra e Izabel, as orações foram válidas! Aos primos e toda minha família. Priscila foi irmã, colega de trabalho e amiga. Lidi até assistiu aula.

Aos meus amigos que foram fonte de vida e força para que eu não pudesse desanimar em nenhum momento. Em especial Cristiane, Gabriela, Érika, Natalie, Joyce, Alyne, Janaina, Viviane, Ângela, Rita, Michelle, Renata, Eunice, Raquel, Graziela e todos que não citei, vocês sabem o quanto são especiais.

Agradeço também à Walquiria que foi um apoio indispensável.

E finalmente ao Carlos que na reta final foi paciente e amoroso comigo, esteve presente em momentos decisivos e me fez bem. Quero estar com você para sempre!

Muito Obrigada!

Referências

[1] Parâmetros curriculares nacionais : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

[2] Dolce, O. e Pompeo, J.N. *Fundamentos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana* 8 ed., São Paulo, 2005.

[3] Livio, M. *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente.*. 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 2007.

[4] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci, *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v.6, p-9-14, 1985.

[5] Paciole, L.*Divine Proportion*, Paris: Librairie du Compagnonnage, 1988.

[6] Pereira, L. D. C. e Ferreira, M. V. Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea *Santa Maria*, v.9, n.1, p.67-81, 2008.

[7] Lauro, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquiteura. *Exacta*, São Paulo, v.3, p.35-48, 2005.

[8] Oliveira E. e Ferreira, T. E.O número de ouro e suas manifestações na natureza e arte. *Revista Complexus. Instituto Superior De Engenharia Arquitetura E Design. Ceunsp*, São Paulo, Ano. 1, N.2, P. 64-81, 2010.

[9] Rimoldi G., Schaub, S. *Espaços convergentes: som e espacialização em Terretektorh de Iannis Xenakis* Porto Alegre, v. 18, n. 2, p. 9-32, dez. 2012.

[10] Brow, Dan *O Código Da Vinci* Editora Sextante, 2004.

[11] Pagani, C.; Bottino, M.C. Proporção áurea e a Odontologia estética. *J Bras Dent Estet*, Curitiba, v.2, n.5, p.80-85, jan./mar.

[12] Oliveira, V. L. R. Estudos de Proporção áurea entre incisivos centrais *Sotau R. virtual Odontol*, v.5, n.2, p.2-6.

[13] Estudos de Proporção áurea entre incisivos centrais *Sotau R. virtual Odontol*, v.5, n.2, p.2-6.

[14] Camargo, N. M. A utilização da Razão Áurea no design de websites p.1-15.

[15] Fi e as artes, 2007. Disponível em http://http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm. Acesso em fevereiro de 2015.