PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS RENATO ALMEIDA MENDES

O uso da arte de Maurits Cornelis Escher para ensinar geometria

Rio de Janeiro - RJ

1º semestre/2015

CARLOS RENATO ALMEIDA MENDES

O uso da arte de
Maurits Cornelis Escher para ensinar geometria

Dissertação apresentada pelo aluno Carlos Renato Almeida Mendes, à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro - RJ
1º semestre/2015

CARLOS RENATO ALMEIDA MENDES

O uso da arte de
Maurits Cornelis Escher para ensinar geometria

Dissertação apresentada pelo aluno Carlos Renato Almeida Mendes, à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em ___________________________ de 2015.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho – IMPA
Orientador

____

Prof. Dr. _____________________________ – _______

____

Prof. Dr. _____________________________ – _______

Rio de Janeiro - RJ
1º semestre/2015

Dedicatória

Ao Senhor JESUS por ter me sustentado até aqui.

Ao meu pai Carlos Gregório Mendes (*in memorium*) e a minha mãe Lêda Maria Almeida Mendes .

A minha esposa Tatiana Lima da Rosa Mendes cujo apoio foi incondicional.

Ao meu filho João Pedro da Rosa Mendes que sempre será meu estímulo na caminhada acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai, comerciante de profissão, onde todas às vezes quando criança pedia para jogar bola, tomava-me a tabuada antes do seu sim. A uma pessoa que para muitas é conhecida como *tia Lêda* eu orgulhosamente tenho o prazer de chamar de MÃE, que me defendeu em todos os momentos da minha vida. Marcelo, meu irmão, que mesmo sem saber, sempre me motivou através de sua coragem de encarar novos desafios.

Agradeço a minha esposa Tatiana (quem fala que Amélia é a mulher de verdade, está perdoado, pois não conheceram minha mulher!). Sem ela ao meu lado eu não conseguiria chegar aonde cheguei. Sou privilegiado!

Agradeço aos meus tios Marco e Zé que estavam presentes em muitos momentos difíceis e foram incansáveis para me ajudar. Devo muito a eles!

Agradeço a Evandro, meu sogro, e a Miriam, minha sogra, pelos conselhos dados. As tias Solange, Raquel, Lídia que me adotaram, bem como Emanuel e Rodmar. Ao meu cunhado Rodrigo, peça importantíssima nesta minha caminhada.

Agradeço ao meu vizinho e amigo Márcio (*Marcinho*) que sempre torceu por mim e me ajudou em momentos marcantes (lembra a roupa da formatura? Eu nunca esquecerei!)

Agradeço aos excelentes professores que tive o prazer de conviver no decorrer dos ensinos fundamental e médio, principalmente a Professora Euza do Nascimento Monteiro.

Ao orientador Professor Paulo Cezar P. Carvalho pela orientação, sugestões e esclarecimentos.

Aos membros da banca, _______________ por terem aceitado participar desta banca de avaliação e pelas valiosas sugestões e correções.

Aos amigos de turma, todos importantes nesta jornada.

A minha amiga Claudia Fiuza que dividiu comigo este trabalho.

A minha amiga Daiana Kelli pelas intervenções sempre oportunas.

Aos professores e monitores que nos acompanharam.

Aos meus amigos particulares representados por Edney Dantas de Oliveira que é, foi e sempre será a pessoa que ao meu lado direito aparecerá.

Agradeço a CAPES pela bolsa de estudo concedida.

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo, mostrar para o alunado uma das inúmeras aplicações que se pode encontrar envolvendo a matemática. A arte de Mauritz Cournelis Escher ajuda a “humanizar” o estudo da geometria através de suas simetrias e acaba funcionando como ponte entre as duas ciências. Sendo assim, algumas atividades foram sugeridas para que sejam consolidados os conceitos geométricos fazendo uso das artes.

Palavras-chave: arte, matemática, Escher.

Abstract

This dissertation aims to show the student body one of the many applications that can be found involving math. The art of Maurits Cournelis Escher helps to " humanize " the study of geometry through their symmetries and works as a connection between two sciences. Therefore some activities were suggested to consolidate some geometric concepts using arts.

Keywords: art, math, Escher.

Sumário

1. Introdução

Atualmente, professores estão diante de um alunado que está acostumado a receber informações de forma muito prática e rápida. Tal fato os obriga, a todo momento, trazer motivações para prender a atenção deste grupo. Tanto é, que se for proposta uma atividade que exija desta plateia o mínimo de esforço e/ou criatividade, ocorrerá uma resistência significativa para a realização da tarefa.

O apelo visual torna-se uma boa estratégia para atraí-los e sendo o foco principal a apresentação das simetrias, temos as obras de Escher como grande aliada nesta construção do conhecimento.

Para que os alunos entendam melhor as criações de Escher, faz-se necessário explicá-los o significado de tesselação. Naturalmente, espera-se que esta clientela, tão acostumada ao imediato, comece a indagar o porquê de estar olhando estas obras já que a aula é de matemática. Neste momento, deve-se mostrar que a maioria de seus desenhos são baseados em formas geométricas bem definidas e conhecidas.

Não se pode deixar de informá-los o quão importante é a escolha das cores, para que a arte tenha o destaque necessário e simplesmente não se mostre como um monte de traços sem significados.

As turmas observadas foram do 2° ano do Ensino Médio de um colégio particular, pois todos os conceitos geométricos básicos necessários para o entendimento do projeto, já haviam sido trabalhados previamente.

A princípio, este trabalho teve a contribuição da agora mestra Claudia Fiuza, com prazerosa convivência e troca de experiências, de modo que algumas das seções citadas aqui terão maiores informações em seu trabalho[14].

2. Falando sobre simetria

Segundo o dicionário, simetria é qualidade de simétrico. Correspondência em tamanho, forma ou arranjo, de partes em lados opostos de um plano, seta ou ponto, tendo cada parte em um lado a sua contraparte, em ordem reversa, no outro lado.

Para a maioria das pessoas, a ideia de simetria está ligada mais a pensamentos sobre Arte e Natureza do que sobre Matemática. De fato, nossas ideias de beleza estão intimamente relacionadas a princípios de simetria e simetrias são encontradas por toda a parte no mundo que nos rodeia. Simetrias são encontradas, frequentemente, na natureza, olhe as asas de uma borboleta (figura 1), as pétalas de uma flor (figura 2).

Figura 1

Figura 2

Simetrias também podem ser achadas na arte, por exemplo, a obra Desenhando-se de M.C. Escher – 1948 (figura 3) e na arquitetura (figura 4)

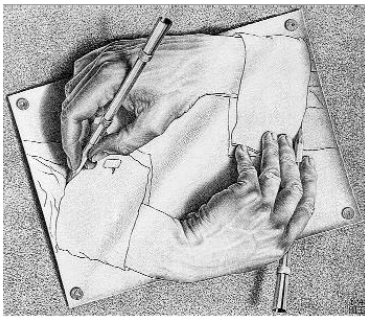


Figura 3

Figura 4

2.1 Tipos de simetria

2.1.1 Simetria axial

Simetrias axiais ou em relação a retas são aquelas onde pontos, objetos ou partes de objetos são a imagem espelhada um do outro em relação à reta dada, chamada eixo de simetria. O eixo de simetria é a mediatriz do segmento que une os pontos correspondentes.

Figura 5

2.1.2 Simetria rotacional

Simetrias centrais ou rotacionais são aquelas em que um ponto, objeto ou parte de um objeto pode ser girado em relação a um ponto fixo, central, chamado centro da simetria, de tal maneira que essas partes ou objetos coincidam um com o outro um determinado número de vezes. A distância ao centro de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamada ângulo de rotação α, que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{360°}{quantidade\ de\ figuras\ em\ torno\ do\ centro}$$

Limite circular I (M.C.Escher- 1958)

2.1.3 - Simetria de reflexão

É a simetria relacionada à reflexão. Refletir um objeto significa produzir sua imagem no espelho. No plano, existe um eixo de simetria, em 3D existe um plano de simetria.

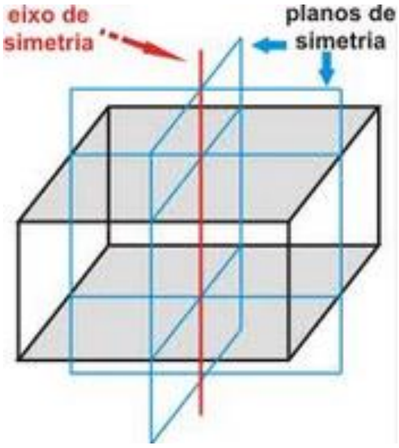


Figura 7

2.1.4 - Simetria Translacional

Transladar um objeto significa movê-lo, sem girá-lo ou refleti-lo. A simetria translacional é uma correspondência entre pontos no plano de tal modo que a diferença entre eles é sempre um vetor fixo.

Figura 8

Figura 9

É importante percebermos que a simetria translacional não modifica o formato nem tamanho da figura original. A figura 8 poderia levar a esta conclusão errada, já que temos a presença de pássaros e peixes. Daí, cabe o entendimento da simetria como uma a função, função translação, cuja propriedade é associar cada ponto pertencente à figura original com um único outro ponto do plano de tal maneira que a distância, a direção e o sentido entre esses pontos sejam preservados. Portanto, não podemos pensar que a simetria translacional levará um pássaro ser transformado em peixe ou qualquer outra figura diferente da original.

3. Falando sobre tesselação

Tesselar ou pavimentar são os nomes dados à técnica que consiste em cobrir uma superfície com um padrão de figuras planas, de modo que não existam nem espaços entre elas, nem sobreposições, ou seja, que o seu tamanho total seja igual ao espaço particionado.

A respeito dos nomes dados a essa técnica, pavimentar é o mesmo que cobrir o solo de uma superfície, segundo o dicionário Aurélio. Já na língua inglesa, a palavra é tesselation; embora não se encontre em nossos dicionários a palavra tesselação, acredito ser razoável seu uso no que diz respeito à cobertura de uma superfície qualquer. Usaremos a palavra ladrilho para representar cada peça da pavimetação.

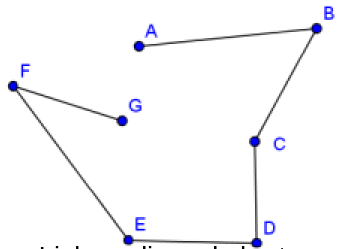
Tesselação na natureza: a figura da esquerda apresenta a epiderme de um réptil e a da direita, uma colméia de abelhas

As tesselações são empregadas nas mais diversas áreas e pode-se dizer que foram primeiramente aplicadas nas artes. O principal objetivo do artista, ao fazer uso dessa técnica, é o de encontrar uma simetria ornamental com o emprego de figuras cuja repetição forme um todo harmonioso e estético

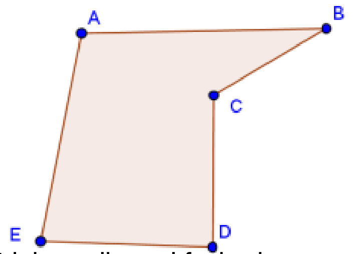
3.1 Conceitos básicos

3.1.1 Linha poligonal

É a união de uma quantidade finita de segmentos de reta $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}, \ldots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$, tais que quaisquer três pontos consecutivos P_{i-1}, P_i e P_{i+1} , para todo $2 \leq i \leq n-1$ não sejam colineares. Os pontos P_i serão os vértices da linha poligonal. Quando o último vértice coincide com o primeiro de uma linha poligonal dizemos que esta é fechada. Caso não coincida, será aberta.



Linha poligonal aberta



Linha poligonal fechada

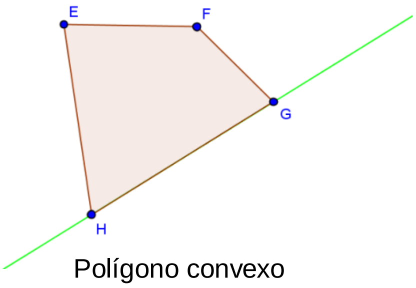
Não havendo ponto de interseção entre quaisquer dois segmentos da linha poligonal, esta será chamada linha poligonal simples.

3.1.2 Polígono

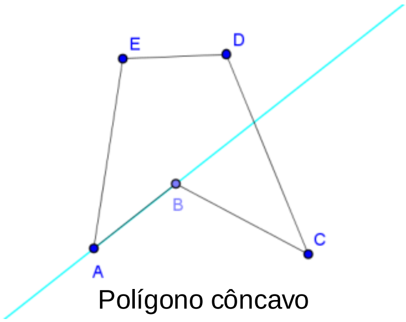
Definimos como polígono toda linha poligonal simples e fechada. Os pontos no interior desta linha poligonal formam a região poligonal P. Sem perda de generalidade, usaremos a palavra polígono para representar tanto uma linha poligonal quanto a região poligonal que esta limita. Portanto, a terminologia hexágono será usada para indicar uma linha poligonal de seis lados ou para indicar uma região hexagonal.

Linha poligonal de seis lados = Região hexagonal = hexágono

Neste momento, vale lembrar que uma reta divide um plano em dois semiplanos. Um polígono é chamado <u>convexo</u> quando a reta que contém qualquer um de seus lados o deixa num único semiplano. Caso o polígono fique particionado pela reta que contém um de seus lados, será chamado <u>côncavo</u>.



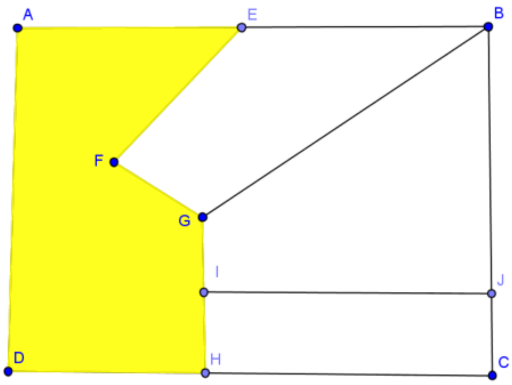
Polígono convexo



Polígono côncavo

3.2 Elementos de uma tesselação

Numa pavimentação constituída de polígonos, definimos como <u>nó</u> de um ladrilho cada vértice presente em seus lados. Chamamos de <u>aresta</u> de um ladrilho o segmento que une dois nós consecutivos Sendo assim, podemos quantizar mais nós e arestas que vértices e lados num único ladrilho, respectivamente. Perceba:



O ladrilho AEFGHDA possui 6 vértices e 7 nós (*o ponto* I *pertence ao lado* GH). As arestas GI e IH formam o lado GH

3.3 Tipos de tesselação

3.3.1 - Monoédrica , Pura ou Demirregular

Quando é formada apenas por ladrilhos congruentes entre si

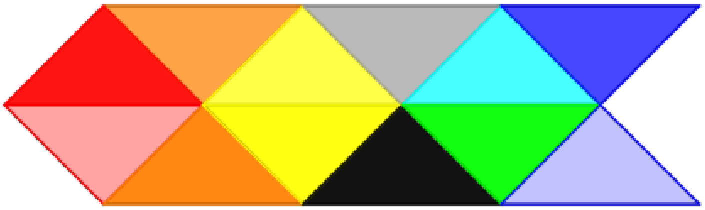


Figura 16

3.3.2 - Lado-lado ou Semirregular

Quando temos mais de um tipo de ladrilho formando a pavimentação, com a característica de apresentar todas as arestas de mesmo tamanho.

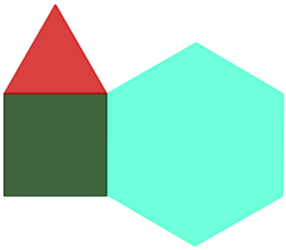


Figura 17

3.3.3 - Regular

Quando a pavimentação é formada por um único tipo de ladrilho, sendo este regular.

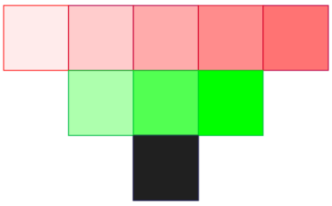


Figura 18

Só existem três tipos de tesselações regulares: as de três, quatro e seis lados. Vejamos:

Sabemos que a soma S_i dos ângulos internos de um polígono é dada por $S_i = 180°.(n-2)$, sendo n o número de lados desse polígono. Consequentemente, cada ângulo interno a_i medirá $a_i = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Tomando uma tesselação regular num plano, temos que em cada nó da pavimentação a mesma quantidade de ladrilho. Logo, de um nó qualquer, a soma de todos os ângulos internos cujo vértice é este nó vale 360°. Supondo a existência de l ladrilhos que contenham este nó, teremos:

$$l.\frac{180°(n-2)}{n} = 360°$$

$$l.\frac{n-2}{n} = 2$$

$$l.(n-2) = 2n$$

$$l = \frac{2n}{n-2}$$

Vale lembrar que n é natural, já que representa o número de lados de um polígono e maior que 2, pela condição de existência da equação citada . Por outro lado, só faz sentido falarmos de pavimentação de um plano, quando este é fragmentado em ladrilhos, ou seja, l deve ser maior que 2. Vejamos:

- Para $l = 1 \Rightarrow \frac{2n}{n-2} = 1$. Resolvendo a equação, encontramos $n = -2$ (não satisfaz !)
- Para $l = 2 \Rightarrow \frac{2n}{n-2} = 2$. Resolvendo a equação, encontramos $0 = -2$ (absurdo!)

Daí vem a seguinte desigualdade,

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3$$

Resolvendo a inequação, encontramos $n \leq 6$. Pelo exposto, os candidatos são $\{3,4,5,6\}$.

Voltando a equação que relaciona as variáveis, tiramos o seguinte resultado:

$$n = 3 \Rightarrow l = 6$$

$$n = 4 \Rightarrow l = 4$$

$n = 5 \Rightarrow \ l = \frac{10}{3}$, não satisfaz!

$$n = 6 \Rightarrow l = 3$$

Portanto, concluímos que apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono poderão servir de ladrilhos numa pavimentação.

4. Falando um pouco sobre Escher

Maurits Cornelis Escher (Leeuwarden, Países Baixos, 17 de junho de 1898 - Hilversum, Países Baixos, 27 de março de 1972) é um dos mais conhecidos e celebrados artistas gráficos modernos. Além do trabalho como artista gráfico, ele desenvolveu livros ilustrados, tapeçarias, selos postais e murais.

M.C. Escher

Filho caçula de um engenheiro civil, muda-se com a família aos 5 anos de idade para Arnhem, onde passa a maior parte de sua juventude. Após reprovação em seu exame do Ensino Médio, Escher decide matricular-se na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas, em Haarlem, no curso de arquitetura. Após uma semana apenas, informou ao seu pai que preferia estudar artes gráficas em vez de arquitetura. Foi aluno de Samuel Jesserun de Mesquita, a quem havia mostrado seus desenhos e litogravuras (variação da xilogravura utilizando linóleo), e que o encorajou a continuar com tal trabalho. É com este mesmo professor que Escher aprenderia as técnicas de desenho e se apaixonaria pela arte da gravura.

Litografia: escrita sobre pedra

Samuel J. de Mesquita

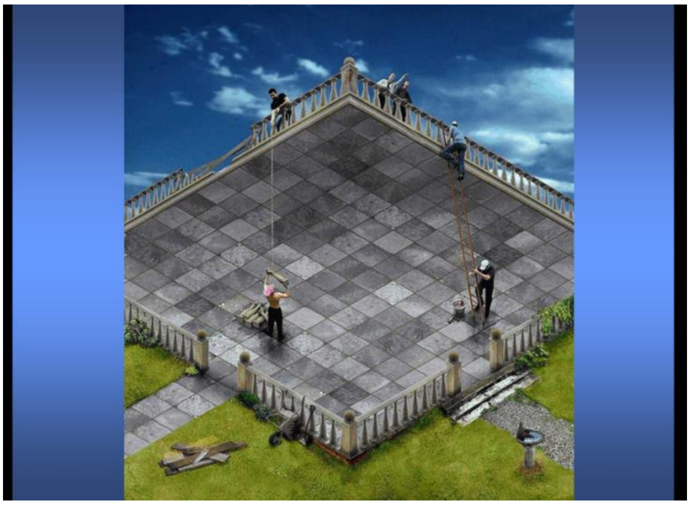
Ao terminar os seus estudos, Escher decide viajar, conhecer o mundo, passando por Espanha, Itália e fixando-se em Roma, onde se dedicou ao trabalho gráfico. Pressionado pelas circunstâncias políticas da época (ascensão do fascismo), Escher muda-se para a Suíça, e logo depois para a Bélgica, e finalmente em 1941 regressa aos Países Baixos. As passagens por todos esses lugares, experimentando diferentes culturas, influenciaram a mente criativa de Escher, em especial a visita ao complexo de Alhambra, em Granada, na Espanha, onde foi apresentado à arte geométrica muçulmana aplicada nos azulejos. Este contato com a arte árabe está na base do interesse e da paixão de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, se repetem e refletem a partir das pavimentações.

Adorno de uma das paredes internas do museu

Ao preencher as superfícies, porém, Escher substituía as figuras abstrato-geométricas comum na arte árabe, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza (apesar de altamente estilizadas), como pássaros, peixes, pessoas, répteis, etc.

Figura 23

Durante o período em que esteve em atividade, Escher fez 448 litografias, xilogravuras e gravuras em madeira, além de mais de 2000 desenhos e esboços. Como alguns dos seus antecessores famosos (Michelangelo, Leonardo da Vinci, Dürer e Holbein), Escher era canhoto. Seu trabalho lida com a arquitetura, a perspectiva e os espaços impossíveis, continuando ainda hoje a surpreender e admirar milhões de pessoas em todo o mundo. Em seu trabalho, reconhecemos uma minuciosa observação do mundo que nos rodeia e as expressões de suas próprias fantasias. Escher mostra-nos que a realidade é maravilhosa, compreensível e fascinante.



Pontos de vista

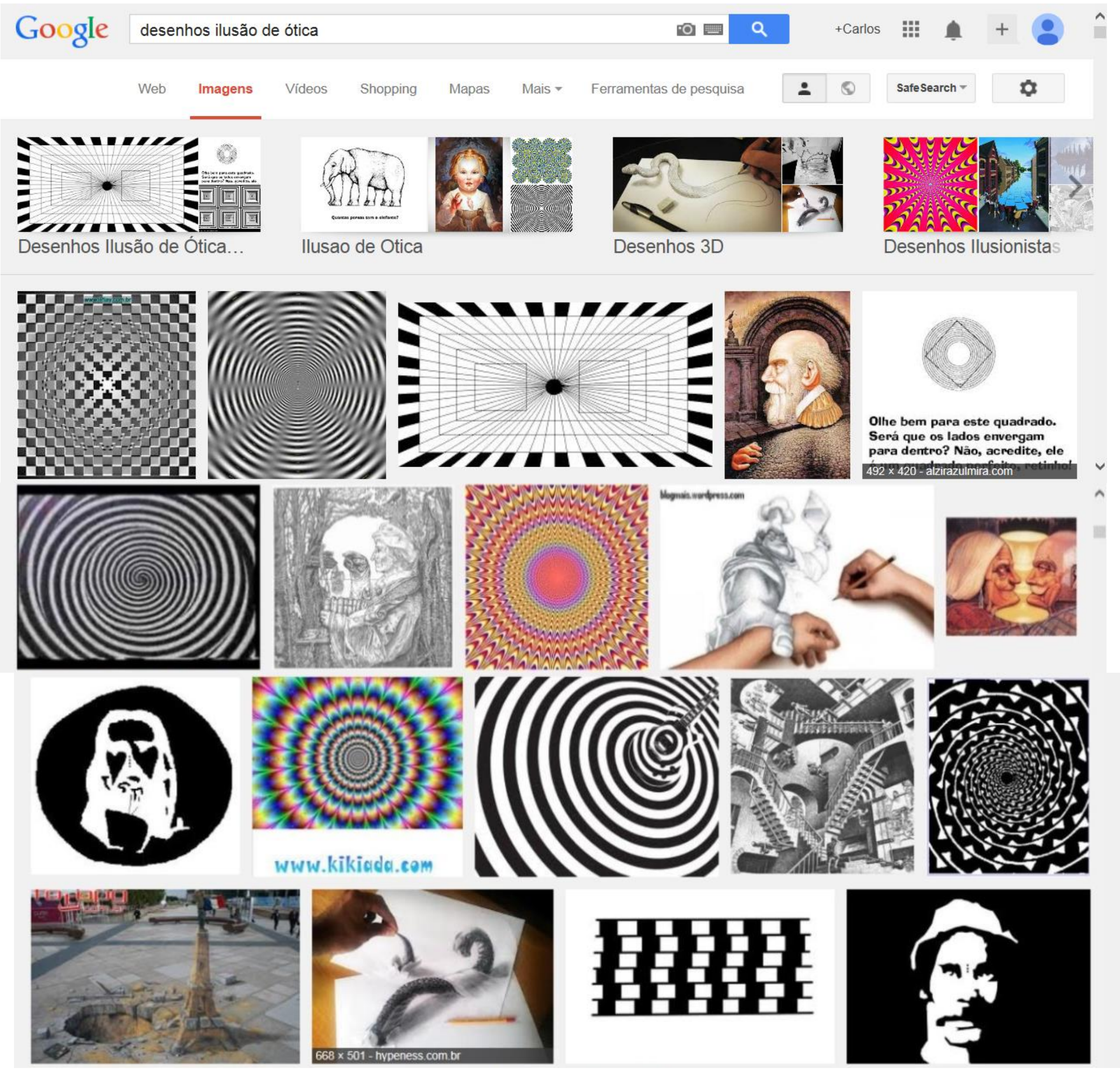
Segundo o próprio, "***Aquele que se maravilha com a minha obra, tem ele mesmo a consciência da maravilha.***"

5. Plano de aula

De acordo com o planejamento dessa escola, o assunto foi trabalhado em quatro aulas, cada uma com dois tempos de cinquenta minutos, distribuídas como se segue.

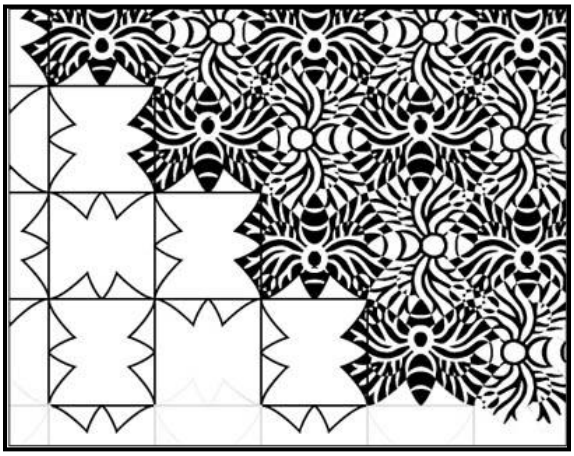
5.1 Realização das aulas

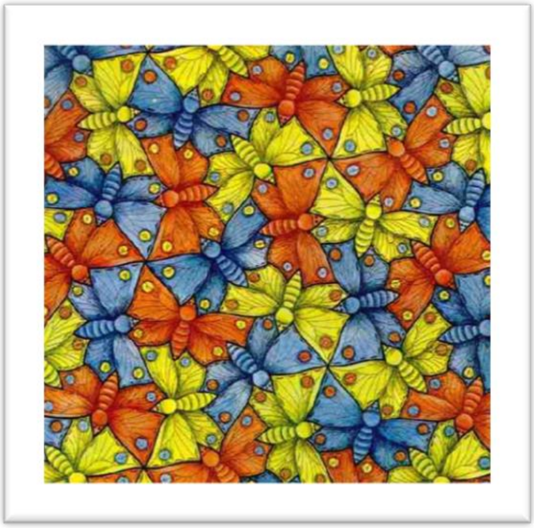
Na primeira aula, apresentei alguns slides de desenhos ilusionistas através de um site de buscas, pois sabia que tais obras gerariam uma curiosidade e despertariam o interesse deles em saber o motivo de estar mostrando aqueles desenhos.



Passado este momento, perguntei se algum aluno já tinha ouvido falar em Escher. Poucos alunos responderam que sim, porém não sabiam muito a respeito dele. Decidi então a falar sobre o Maurits Cornelis Escher de forma muito superficial e pedi para que trouxessem imagens das obras do referido artista na nossa próxima aula.

Na segunda aula, fiz uma exposição das pesquisas através do Datashow e, após os comentários do exposto, perguntei se algum aluno conseguia enxergar a matemática nas imagens mostradas. Como já era esperado, a resposta foi não. Então, comecei a falar sobre a simetria e a tesselação nas quais muita das obras de Escher são baseadas. Nesse momento, as reações dos alunos eram das mais diversas. Alguns não acreditavam que "tinha matemática ali", outros curiosos em saber onde encontrar realmente os conceitos matemáticos nas obras. Diante da incredulidade de uns e curiosidade de outros, tomei uma das obras como base e mostrei, passo a passo, como foi feita.





Figuras 25 e 26: Borboletas de Maurits Cornelis Escher

Vale ressaltar a importância que a escolha das cores tem em destacar o resultado desejado. Encontraremos com riqueza de informações no trabalho apresentado pela mestra Claudia Fiuza [14].

Na terceira aula, consolidei o conceito da tesselação e os tipos de simetrias que poderíamos encontrar nas obras de Escher, já que nesse momento, os alunos sabiam que tais desenhos ou pavimentações surgem de conceitos geométricos. Ao final da aula, pedi para que se formassem grupos, com o objetivo de reproduzirem algumas obras do Escher. Mesmo sem acreditarem que poderiam realizar tal feito, encararam o trabalho com seriedade, pois existiam dois objetivos muito claros; uns por se sentirem desafiados a reproduzir uma obra que aparentemente tem um grau de complexidade elevado e outros por estarem precisando da nota e viam o trabalho como uma sobrevida.

Na quarta aula, foram exibidos os trabalhos realizados, e abri uma discussão para saber o nível de dificuldade encontrado pelos grupos.

6. Resultados obtidos

A disposição dos alunos em tentar realizar a tarefa, foi um fato que me surpreendeu positivamente. Infelizmente, não foram apresentados trabalhos que mostrassem a simetria de rotação, considerada por eles, mais difícil.

6.1 Trabalhos com problemas

Neste item, faremos uma análise minuciosa dos trabalhos e um breve comentário sobre os problemas encontrados, abordando os motivos de terem ocorrido e o que poderia ser feito para reparar o erro.

6.1.1 Construção de bandeirinhas

A falta de cuidado de ter um corte para servir de molde, teve por consequência, sobreposições das peças.

Figura 27: Obra do grupo representado por Louise

6.1.2 Construção dos gatinhos

O grupo da Marcela acabou por deixar espaços vazios fugindo da proposta da tesselação.


Figura 28: Obra do grupo da Marcela.

6.1.3 Construção de um “picachu”

Pelo exposto, acredito que o grupo do Carlos não conseguiu entender a proposta do trabalho.


Figura 21: Obra do grupo do Carlos

6.1.4 Construção do “observador”

O grupo da Clara não aproveitou a retirada dos triângulos em momento algum, não sendo considerada uma pavimentação correta.

Figura 30: Obra do grupo da Clara

6.1.5 Reprodução da obra de Escher

O grupo do Guilherme acabou fazendo uma reprodução de uma obra do Escher, não entendendo a proposta do trabalho. Poderiam, ao menos, ter pintado.

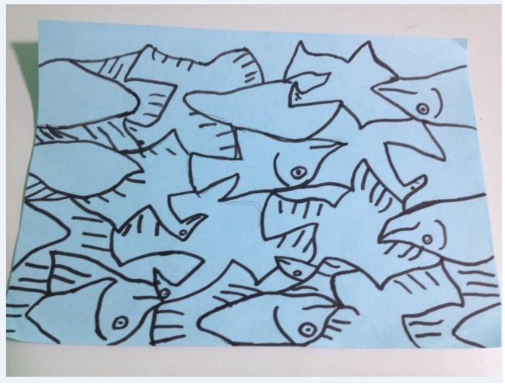


Figura 31: Obra do grupo do Guilherme

6.1.6 Construção de um mosaico

O grupo da Flora não deixou claro em seu trabalho o corte feito na peça original e apresenta espaços vazios o que não poderia ocorrer.

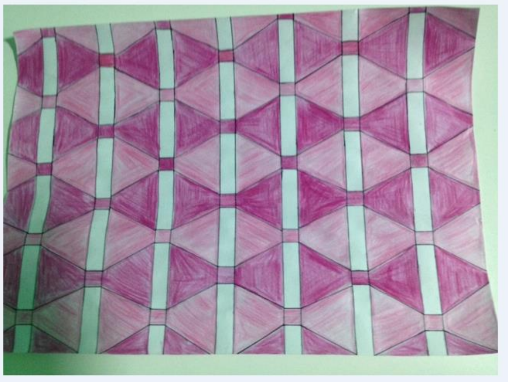


Figura 32: Obra do grupo da Flora

6.2 Trabalhos sem problemas

6.2.1 Construção da obra "o tempo não para"

O trabalho apresentado pelo grupo da Gabriella apresentou uma motivação, respeitando os quesitos necessários para uma tesselação.

Figura 33: Obra "O tempo não para"

6.2.2 Construção dos pássaros

O grupo do João Pedro também respeitou todos os passos de uma tesselação.

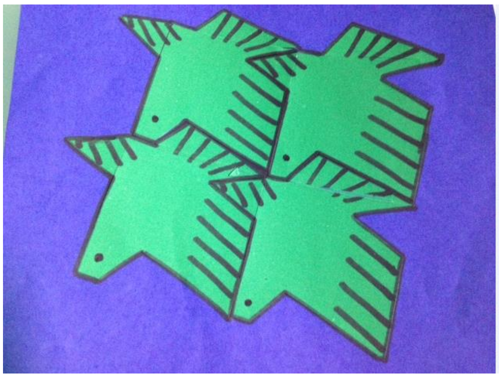


Figura 34: Obra : "Os pássaros"

6.2.3 Construção de uma raposa

O grupo da Ana Beatriz também foi muito feliz na escolha da motivação de sua obra. Muito bom trabalho!

Figura 35: Obra " A raposa"

As próximas obras apresentaram a mesma estrutura, com motivações distintas. Todas não apresentaram problemas.

Figura 36: Obra do grupo da Andreia

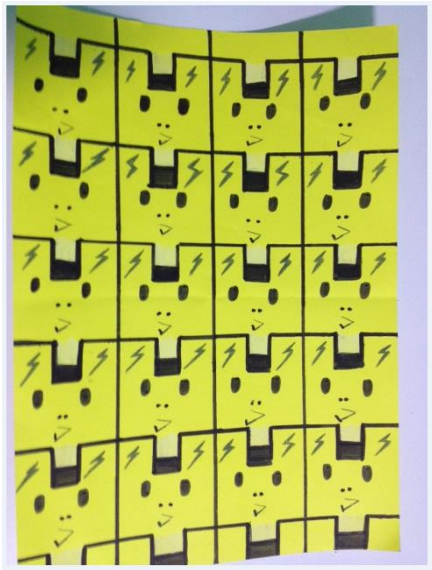
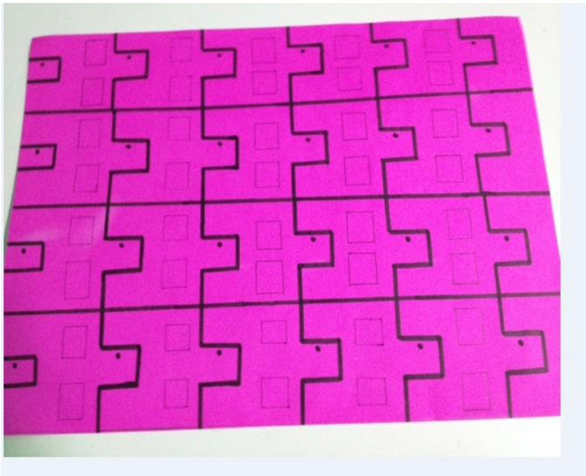


Figura 37: Obra da Juliana



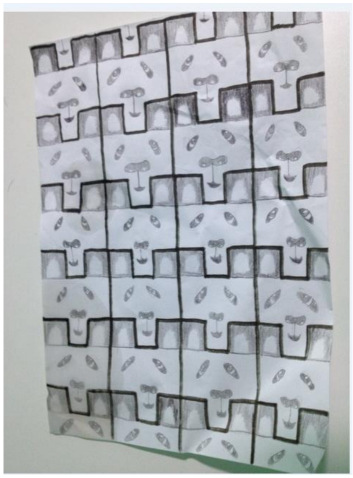


Figura 38 : Obra do grupo da Amanda Figura 39: Obra" ursos"

Vale ressaltar que a obra apresentada pelo grupo do Leandro poderia ter outro destaque se tivessem pintado, de forma diferenciada, os ursos.

7. Considerações Finais

Quando se dá a oportunidade para os alunos mostrarem suas habilidades, descobrem-se talentos e faz com que a relação aluno-professor fique mais estreita, fortalecida e verdadeira. Mesmo apresentando uma quantidade de erros significativos, a experiência que tive com este trabalho, deixou claro o quão produtivo e interessante foi realizar o casamento entre a matemática e outras disciplinas. Acabei consolidando o pensamento de que fazer diferente do esperado pelo nosso público, traz um fôlego que nem mesmo o aluno sabia que existia dentro de si. Sei que nem sempre será possível, por motivos já conhecidos, adequar um projeto deste a todo momento, porém a semente que foi plantada e que gerou esses frutos, será o meu combustível para, ao menos, tentar um próximo.

.

8. Referencias Bibliográficas

[1] M. C. Escher Company, B. V. *Biography of M. C. Escher*. Disponível em http://www.mcescher.com/. Acesso em: 21 dez. 2013;

[2] Tjabbes, Pieter (Curador). *O mundo Mágico de Escher*. Centro Cultural Banco do Brasil. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/ img/EscherCatalogo.pdf. Acesso em: 21 dez. 2013;

[3] Murari, Claudemir e Santos, Marli Regina dos. *Aprendendo Tesselações de forma Lúdica*. Universidade Estadual Paulista. VIII ENEM. São Paulo, 2004. Disponível em http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/CC25102738844.pdf. Acesso em: 21 dez. 2013;

[4] Gomes, Carlos Daniel Lopez. *Isometria*. Disponível em http://pt.slideshare.net/ carlosdaniellopezgomes/isometrias-ficha-de-reviso. Rio de Janeiro, 2013. Acesso em: 21 dez. 2013;

[5] Boavida, Ana Maria Roque. *O "mundo" da simetria reflectindo sobre desafios do PMEB*. PFCM da ESE/IPS, 2011. Disponível em: http://pt.slideshare.net/3zamar/o-mundo-da-simetria-reflectindo-sobre-desafios-do-pmeb-ana-maria-boavida-pfcm-da-eseips. Acesso em: 21 dez. 2013;

[6] Watermann, I.; Franco, V. S., *Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática*. Artigo produzido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE), Universidade de Maringá, 2008/2009. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf.Acesso em: 06 Jan. 2014;

[7] http://www.nazariviajes.com/laalhambradegranada/Alhambrapt.aspx. Acesso em: 03 Jan. 2014;

[8] http://pt.wikipedia.org/wiki/Alhambra. Acesso em: 03 Jan. 2014;

[9] http://comjeitoearte.blogspot.com.br/2012/06/m-c-escher-era-um-fascinado-pela.html. Acesso em: 03 Jan. 2014;

[10] http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/. Acesso em: 21 dez. 2013;

[11] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 21 dez. 2013;

[12] http://www.escher.eng.br/index_arquivos/Page345.htm

[13] http://pt.slideshare.net/solanisregina/aula-simetria-com-escher

[14] Alves, Claudia Maria Fiuza.*O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher,*

Índice de Figuras