INSTITUTO NACIONAL DE MATEMATICA PURA E APLICADA

MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ANDRE LUIZ GOMES AUGUSTO

UMA INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE E À ESTATÍSTICA NO EJA (Educação de Jovens e Adultos) - Em busca da democratização do ensino.

Rio de Janeiro - RJ

2015

ANDRE LUIZ GOMES AUGUSTO

UMA INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE E À ESTATÍSTICA NO EJA (Educação de Jovens e Adultos) - Em busca da democratização do ensino.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA

Rio de Janeiro - RJ

2015

ANDRE LUIZ GOMES AUGUSTO

UMA INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE E À ESTATÍSTICA NO EJA (Educação de Jovens e Adultos) – Em busca da democratização do ensino.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em _______________ de 2015

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA - IMPA

____

____

Rio de Janeiro - RJ

2015

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, razão de toda a minha existência; a minha mãe, por todo o apoio; à minha esposa, por sua compreensão; e aos meus filhos, por serem minha motivação para enfrentar as dificuldades durante o curso.

Agradecimentos

A todos os professores que tive ao longo de minha trajetória neste curso de mestrado. São eles: Elon Lages Lima, da disciplina Números, Conjuntos e Funções Elementares; Paulo Cezar Pinto Carvalho, das disciplinas Matemática Discreta e Preparação para o TCC; Eduardo Wagner, da disciplina Geometria; Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, da disciplina Aritmética e Polinômios; Roberto Imbuzeiro, da disciplina Resolução de Problemas; Marcelo Vianna, da disciplina Cálculo I e Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva, da disciplina Geometria Analítica, por contribuírem fortemente para a minha formação e qualificação profissional.

Ao professor Roberto Imbuzeiro, por sua orientação segura, dedicada e atenciosa.

A todos os meus colegas de curso, especialmente aos amigos Sergio Serrano e Fabio, por serem verdadeiros companheiros.

A Ana Cristina da Silva, Isabel Cherques, Andrea Nascimento, Kenia Rosa e Josenildo Pedro, da Divisão de Ensino, por serem sempre tão solícitos aos meus pedidos.

A toda minha família, especialmente a minha mãe, Maria Isabel; a minha esposa, Guaraciara de Oliveira Augusto e a meus filhos Raphael, Matheus e Isabela de Oliveira Augusto, por me apoiarem, torcerem por mim e, principalmente, compreenderem os momentos de ausência em virtude dos estudos.

Finalmente, agradeço a Deus por me prover, sustentar-me e conduzir-me até aqui.

Resumo

Este trabalho realiza uma discussão dos principais conceitos de Probabilidade e Estatística em nível de Ensino Médio, buscando uma forma mais acessível de ensinar esses conteúdos no EJA (Educação de Jovens e Adultos - Ensino Médio), com o objetivo de ajudar sua ascensão ao nível superior. As atividades propostas para sala de aula envolvem a resolução de problemas do ENEM dos últimos cinco anos.

Palavras chave: Probabilidade, Estatística, EJA Ensino Médio e ENEM

Abstract

This paper presents the main concepts of probability and statistics at the high school level, seeking a more affordable way to teach these contents to EJA (Youth and Adult Education - High School), in order to help her rise to the top level . The proposed activities for the classroom involve solving ENEM problems from the last 5 years of exams.

Sumário

CAPITULO 1 - Introdução

Sempre que ensinamos um conteúdo, o aluno nos pergunta qual seria a real aplicação desse novo conhecimento. Probabilidade e Estatística não são diferentes, mas quando se trata desses dois conteúdos, a resposta está a nossa volta. Quando abrimos um jornal, ou mesmo assistimos a um programa político, temos nada mais, nada menos que exposições de dados, sejam eles estatísticos ou probabilísticos. É quando surge um grande problema, que é interpretarmos esses dados e assim tirarmos nossas conclusões. Essa dificuldade é detectada nos alunos do ensino noturno: perceber que há muita informação contida num gráfico, num resultado de média ou também na possibilidade de certo evento ocorrer. Levar os alunos a interpretar tais informações sempre foi um grande desafio para os professores de EJA na rede pública estadual. Se ainda considerarmos o fato de que o currículo desse segmento é reduzido, por ter como objetivo recuperar o tempo perdido do aluno que se afastou da escola pelos mais variados motivos, temos a noção exata das barreiras a serem ultrapassadas.

Além de revermos os fundamentos conceituais destes dois assuntos relataremos algumas atividades didáticas realizadas em agosto de 2014 na Escola Estadual Professor Ubiratan Reis Barbosa na turma 301 do turno noturno. A turma era um grupo de 20 alunos cujas idades eram bem heterogêneas (entre 18 e 54 anos) e cujos motivos para estar retornando aos estudos no supletivo eram diversos, variando entre a busca por uma colocação melhor no mercado de trabalho, o desejo de fazer uma faculdade ou, para os mais velhos, simplesmente uma realização pessoal. Justamente esses fatores foram os responsáveis por tornar o projeto tão interessante. Partiu-se do princípio que o primeiro passo seria mostrar aos estudantes a importância dos conteúdos com os materiais apresentados nos capítulos 2 e 3. Dessa forma, a motivação surgiria ao perceberem que, ao contrário do que sempre escutaram, era possível dominar esses conteúdos. Paralelamente, a realização de atividades do capítulo 4, com as questões do ENEM dos últimos cinco anos, visou proporcionar-lhes a devida preparação para o referido exame, esmiuçando as questões com discussão e anotações.

Com a realização deste trabalho, deseja-se demonstrar que é possível aplicar esses conteúdos ao Ensino de Jovens e Adultos, respeitando as diferenças e limitações. Esses pontos são discutidos com mais detalhes no capítulo 6.

CAPITULO 2 - Introdução a Probabilidade

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão conceitual dos conteúdos de Probabilidade relevantes para o Ensino Médio. Nossa Discussão é baseada na referência - Análise Combinatória e Probabilidade - 6ª edição – 2004.

Introdução

Diremos que um experimento é **determinístico** quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados de experimentos **aleatórios**. Fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nossa vida diária. São frequentes perguntas tais como: choverá amanhã? Qual será a temperatura máxima no próximo domingo?

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa **modelos** que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

O modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado. Mas todos esses modelos têm ingredientes básicos comuns. O que vamos fazer agora e estudar uma série de fenômenos aleatórios relativamente simples e interessantes, e fixar uma serie de ideias e noções que são totalmente gerais.

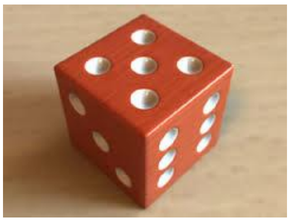
Espaço Amostral e Probabilidades de Laplace.

Vamos tratar de um caso particular da situação geral que será desenvolvida no tópico a seguir. Este caso particular é muito importante, porque a maior parte dos exemplos e exercícios deste trabalho são relativos a este tópico.

A definição de probabilidade como quociente do número de “casos favoráveis” sobre o número de “casos possíveis” foi a primeira definição formal de probabilidade. A probabilidade introduzida nesta seção tem, como veremos, várias propriedades. Elas serão tomadas como definição de uma função de conjunto que também chamaremos de probabilidade no tópico seguinte.

Consideremos o seguinte experimento aleatório: Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.

A primeira tarefa consiste em descrever todos os resultados do experimento e calcular o seu número. De outra forma: **explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele**. Este conjunto é chamado de **Espaço Amostral**. É fácil descrevê-lo em nosso exemplo:



Ω={1, 2, 3, 4, 5 e 6}

Os Elementos do espaço amostral são chamados **eventos elementares**. Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados **eventos**. Por exemplo, o sub conjunto A={2, 4, 6} é evento que acontece se número mostrado na face de cima é par.

Passamos agora a segunda etapa: a de calcular a probabilidade de um evento A. Consideremos o caso do evento A= {2, 4, 6} de nosso exemplo. É claro intuitivamente que se repetimos o experimento um grande número de vezes obteremos um número par aproximadamente metade dos casos; ou seja o evento A vai ocorrer mais ou menos a metade das vezes. O que esta por trás dessa intuição é o seguinte:

a) Os eventos elementares são todos igualmente "prováveis";
b) O número de elementos de A(#(A)=3) é justamente a metade dos elementos de Ω(#(Ω)=6).

Estas considerações motivam a definição de probabilidade de um evento como A, da seguinte forma.

$$\text{Probabilidade de A} = \frac{\#(\text{A})}{\#(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Laplace referia-se aos elementos de A (ou elementos que compõem A) como os casos **favoráveis**. Os elementos do espaço amostral Ω eram chamados **casos possíveis**. Defina então

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possiveis}}$$

Vamos então resumir as condições feitas até agora, que permitem a utilização desta definição de probabilidade.

Suponha que os experimentos aleatórios têm as seguintes características:

a) Há um número finito (digamos n) de eventos elementares(casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral Ω.
b) Os eventos elementares são igualmente prováveis.
c) Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde m ≤ n.

Definimos então probabilidade A = P(A) = $\frac{\textbf{número de casos favoraveis}}{\textbf{número de casos possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{m}{n}$

Consequência imediata desta definição são as seguintes propriedades:

a) para todo evento A, 0≤ P(A) ≤1
b) P(Ω)=1
c) P(Ø)=0 (porque #(Ø)=0);
d) Se A∩B= Ø então p(A∪B)=P(A)+P(B)

Exemplo: Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?

Vamos indicar como C, cara e com K coroa. O espaço amostral é então

Ω={(CCC),(CCK),(CKC),(KCC),(CKK),(KCK),(KKC),(KKK)}

Donde: # (Ω) = casos possíveis = 8

Se A indica o evento " obter 2 caras" temos que

A=(CCK),(CKC),(KCC)

Assim #(A)=3 e portanto

$$P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

Se B denota o evento "obter pelo menos duas caras" temos

B={(CCK),(CKC),(KCC),(CCC)}

Resulta que #(B)=4 e P(B) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Espaços de Probabilidade

Vamos introduzir agora a noção geral de **probabilidade** e provar várias propriedades que são consequências mais ou menos imediatas da definição

Seja Ω um espaço amostral (conjunto não vazio). Uma função P definida para todos os subconjuntos de Ω (chamados eventos) é chamada uma **probabilidade** se**:**

1) para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A

2) $P(\Omega)= 1$;

3) $P(\varnothing) = 0$;

4) Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Pelo que observamos acima, as probabilidades de Laplace satisfazem estas três propriedades. Portanto, elas são um caso particular desta definição mais geral que acabamos de dar. Este caso particular aparecerá na maior parte deste trabalho. No entanto, existem muitas probabilidades (ou seja, funções com as propriedades 1, 2, 3 e 4 mostradas acima) que não são desta forma particular. Um exemplo simples se obtém tomando $\Omega = \{0,1\}$ e definindo

$$P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1,\ P(\{0\})=2/3,\ P(\{1\})=1/3.$$

Em geral, sejam Ω um conjunto com n elementos, $\Omega = \{w_1,w_2,...,w_n\}$, e p_1, $p_2,...,p_n$ n números não negativos e tais que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$; Definamos $P(\{w_i\})=p_i$,

$i = 1, 2, ..., n$ e, em geral, para $A \subset \Omega$, P(A) = soma das probabilidades dos elementos pertencentes a A). A função P assim obtida é uma probabilidade sobre Ω. Em geral ela é diferente da probabilidade de Laplace introduzida no tópico anterior. Se $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n$ obtemos a probabilidade de Laplace como caso particular.

Várias consequências simples e úteis da definição de probabilidade estão contidas nas seguintes proposições.

Eventos Complementares

São os eventos que se completam em relação ao espaço amostral. O evento complementar A, associado a uma experiência aleatória e denotado por, só ocorre se A deixar de ocorrer, isto é, é o evento formado por todos os elementos do espaço amostral que não pertencem a A. $\bar{A}$ é o complementar, lê-se não A.

Proposição 1- (Probabilidade complementar)

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Demonstração;

seja $P(\Omega)= 1$, como $\Omega = E \cup \bar{E}$ e $E \cap \bar{E}= \varnothing$,

temos que $P(\Omega)= P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E}) = 1$

portanto $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Proposição 2 - Se $A \subset B$ então $P(A) = P(B) - P(B-A)$.

Demonstração:

Como $B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \varnothing$,

$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) +P(B - A)$,

e Portanto $P(A) = P(B) - P(B - A)$

Proposição 3 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração:

Temos que

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(B - A) +P (A \cap B)$.

Somando:

$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) +P(A \cap B)$.

Portanto

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemplo: Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

Sejam A e B os eventos que acontecem se o número escolhido for divisível por 3 e por 5 respectivamente Temos que calcular P(A∪B). Os números entre 1 e 300 divisíveis por 3 são 100; os divisíveis por 5 são 300/5=60, e os divisíveis por 3 e 5 simultaneamente são 300/15=20.

temos portanto

P(A) = 100/300 = 1/3

P(B) = 60/300 = 1/5,

P(A ∩ B) = 20/300 =1/15

Assim,

P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) = 1/3 + 1/5 - 1/15 = 7/15

PROBABILIDADES CONDICIONAIS

Consideremos o experimento que consiste em jogar um dado não viciado. Sejam Ω = {1, 2, 3, ..., 6}, A = {2, 4 e 6} e B = {1,2 e 4}. Temos que P(B)=#(B)/#(Ω)=3/6 = ½. Esta é a probabilidade de B a Priori, quer dizer, antes que o experimento se realize. Suponhamos que, uma vez realizado o experimento, alguém nos informe que o resultado do mesmo é um número par, Isto é, que A ocorreu. Nossa opinião sobre a ocorrência de B se modifica com esta informação, já que, então, somente poderá ter ocorrido B se o resultado do experimento tiver sido 2. Esta opinião quantificada com a introdução de uma “probabilidade a posteriori” ou, como vamos chamá-la doravante, **probabilidade condicional** de B dado A, definida por

$$\frac{\#(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\#(\boldsymbol{B})} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é número P(A ∩ B) / P(A). Representaremos este número pelo símbolo P(B | A). Temos então simbolicamente

$$\mathbf{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

De modo geral, se A e B são eventos de um espaço amostral S, a Probabilidade de o evento A ocorrer, dado que o evento B tenha ocorrido, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{\#(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\#(\boldsymbol{B})}$$

Exemplo

Uma pesquisa com 80 mulheres classificou as participantes conforme a cor do cabelo e dos olhos. quadro seguinte mostra o resultado dessa pesquisa:

		Cor dos olhos	
		Azuis	castanhos
Cor dos cabelos	Loira	25	12
	Morena	5	20
	Ruiva	10	8

Escolhida uma moça ruiva, qual a probabilidade de ela ter olhos azuis?

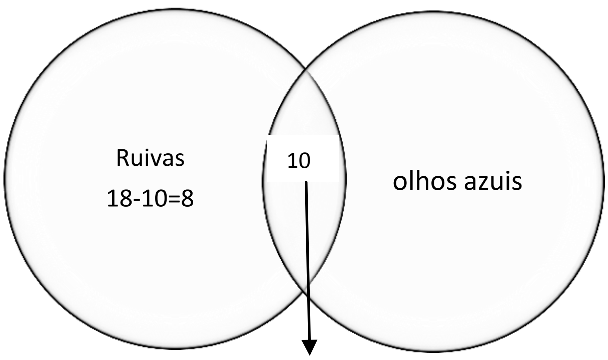
Sejam os eventos:

B, a moça escolhida é ruiva;

a, a moça escolhida tem olhos azuis.

Note que, ao ser dada a informação "escolhida uma moça ruiva" o espaço amostral fica reduzido. O espaço amostral passa a ser $\#(\Omega) = \#(B) = 18$

visualizando em diagrama, temos



$\#(A \cap B) \longrightarrow$ ruivas com olhos azuis

O evento A só poderá acontecer na interseção de A e B.

A Probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B tenha ocorrido, é denominada **probabilidade condicional** e será indicada por **P(A|B)**.

no exemplo em questão, temos **P(A|B)=** $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{18}}$ **=** $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$ **.**

Eventos independentes

Quando os eventos A e B são independentes, isto é, a Probabilidade de um deles ocorrer não depende de ter ou não ocorrido o outro, temos P(B|A)=P(B) ou P(A|B)=P(A), como $P(A|B) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$. , temos $P(A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(B)}$ Então:

$$P(A \cap B) = P(A)\;.\;P(B)$$

Distribuição Binominal

Consideramos agora um experimento com apenas dois resultados possíveis, que chamaremos de sucesso e fracasso.

Por exemplo:

1) Jogamos uma moeda não viciada e pomos sucesso = cara e fracasso = coroa.

2) Jogamos um dado não viciado e pomos sucesso= o resultado é 5 ou 6; fracasso = o resultado é 1, 2, 3 ou 4.

3) De uma urna que contém 6 bolas brancas e 4 bolas pretas, sacamos um bola e pomos sucesso = a bola é preta ; fracasso = a bola branca.

Chamaremos de p a probabilidade de sucesso e q= 1- p a probabilidade de fracasso. Nos nossos exemplos os valores de p são 1/2, 2/6 e 4/10, respectivamente.

Suponhamos agora que façamos repetições do nosso experimento, realizando-o um número fixo n de vezes.

Assim, por exemplo, no caso n=5 jogamos a moeda cinco vezes, jogamos o dado cinco vezes, sacamos sucessivamente, com reposição, 5 bolas da urna.

Suponhamos ainda que a probabilidade p de sucesso mantenha-se constante ao longo das repetições. Isso, no exemplo 1), significa que a probabilidade de se obter cara em qualquer lançamento é 1/2.

Suponhamos finalmente que as repetições sejam independentes, isto é, que o conhecimento dos resultados de algumas provas não altere as probabilidades dos resultados das demais. Isso no exemplo 3), significa que as bolas são sacadas com reposição.

Logo, o problema que queremos resolver é "Qual seria a probabilidade de obtermos k sucessos nessas n repetições?"

A probabilidade de nessas n repetições obtermos k sucessos e, em consequência, n-k fracassos em um ordem predeterminada, por exemplo, os sucessos nas K primeiras repetições e os fracassos nas demais;

$$\frac{\mathrm{SS\ldots\ldots..SFF\ldots\ldots\ldots\ldots..F}}{\mathrm{k\ vezes\quad n-k\ vezes}}$$

$$\mathbf{ppp\ldots\ldots\ldots.(1-p)\ldots(1-p) = p^k(1-p)^{n-k}}$$
$$\mathbf{k\ fatores\quad n-k\ fatores}$$

Pois as repetições são independentes.

É claro que, em outra ordem, a probabilidade seria a mesma, pois apenas a ordem dos fatores alteraria. A probabilidade de obtermos k sucessos n-k fracassos em qualquer ordem é $p^k(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordem possíveis que é $\binom{n}{k}$(para escolher uma ordem basta escolher em quais das n repetições ocorrerão os k sucessos). Acabamos de provar o

Teorema Binomial: A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada repetição e p, é igual a

$$\binom{n}{k}.\mathrm{p^k(1-p)^{n-k}}$$

Exemplo: Jogamos um moeda não viciada 10 vezes. Qual a probabilidade de obtermos exatamente 5 caras?

Pondo sucesso=cara, temos p=1/2 cada repetição e as repetições são independentes. queremos achar a probabilidade de k=5 sucessos em n=10 repetições. Pelo teorema binomial, a resposta é

$$\binom{10}{5}.(\frac{1}{2})^5.(1-\frac{1}{2})^5 = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

Capitulo 3 - Introdução a Estatística

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão conceitual dos conteúdos de Estatística relevantes para o Ensino Médio. Nossa discussão é baseada na referência - Paiva, Manoel - Matemática Paiva volume 3, São Paulo , Moderna, 2009

A Estatística é um instrumento de leitura da informação e da transformação em conhecimento e também uma ciência que se ocupa de estratégias e decisões num contexto de variabilidade e incerteza, isto é, das generalizações de características observadas em uma parte da coletividade que se deseja conhecer. Detalhando***,*** a Estatística e um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que abrangem, entre outros temas: planejamento de experimento, coleta de dados, representação de dados numéricos por meio de tabelas e gráficos, análise de dados, previsões e tomadas de decisões com base na análise de dados.

Temos contato com essa ciência quando vemos, por exemplo, a previsão do tempo nos noticiários, os resultados de pesquisas eleitorais, a porcentagem de eficácia de um medicamento ou as previsões de inflação para o ano seguinte. Vivemos em um mundo de números e saber relacionar números com fatos facilita o acompanhamento das rápidas transformações do dia a dia, assim como dificulta o engano induzido por resultados falseados.

Conceitos preliminares

Universo estatístico (ou população estatística)

Na coleta de dados sobre determinado assunto, chama-se universo estatístico o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados relativos ao assunto em questão.

Exemplo: o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) divulga, periodicamente, um estudo sobre o salário médio do trabalhador brasileiro. O universo estatístico é, nesse caso, o conjunto de todos os assalariados brasileiros.

Amostra

Quando o universo estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os elementos desse universo, seleciona-se um subconjunto dele, chamado **amostra**, do qual os dados para pesquisa são coletados.

Para que a amostra seja representativa, isto é, para que ela não apresente tendências distintas das do universo estatístico, devem ser adotados alguns critérios para torná-la imparcial.

Amplitude de uma amostra de dados numéricos

Observe a situação:

Uma amostra de barras de ferro para construção civil apresenta os seguintes comprimentos, em metro:

6,28 6,35 6,26 6,30 6,20 6,38 6,28 6,29 6,30 6,25 6,26 6,32

Observando que o maior e o menor comprimento dessa amostra são, respectivamente, 6,38 e 6,20, dizemos que a amplitude da amostra é (6,38 - 6,20) m, ou seja 0,18m. Assim, podemos definir: sendo a e b, respectivamente, o menor e o maior elemento de uma amostra de dados numéricos, chama-se amplitude da amostra o número b - a.

Rol

Os dados coletados em uma amostra podem ser organizados em tabelas ou gráficos. Quando esses dados são numéricos, podemos ainda organizá-los em sequência chamadas de **rol**.

Rol é toda sequência de dados numéricos (a_1, a_2, a_3,..., a_n) tal que cada elemento, a partir do segundo é maior ou igual a seu antecessor, ou é menor ou igual a seu sucessor.

Distribuição de frequência

A análise de dados numéricos de uma amostra é facilitada pela organização dos dados em uma tabela ou em um gráfico. Para isso, os elementos da amostra são separados em **classes.**

- Classes unitárias - uma classe representada por um único número**.**

Exemplos: uma amostra de pares de sapatos produzidos por uma indústria em determinado período pode ser agrupada em classes representadas por um único número referente ao tamanho do sapato (38, 39, 40, 41, 42 e 43).

- intervalos reais - quando se tem uma variedade grande de valores, como por exemplo uma amostra das estaturas em centímetros de pessoas adultas de um determinada região, essas estaturas podem ser representadas por intervalos reais.

Exemplos: Uma amostra de alturas de moradores de uma determinada região [140,150[, [150,160[, [160,170[, [170,180[, [180,190[, [190,200]

Distribuição de frequência em classes unitárias

Tabela

Para uma pré-avaliação do desempenho dos candidatos em um exame vestibular, foi selecionada uma amostra de 80 provas.

Depois de corrigidas esses provas, as notas foram organizadas, obedecendo-se aos seguintes critérios:

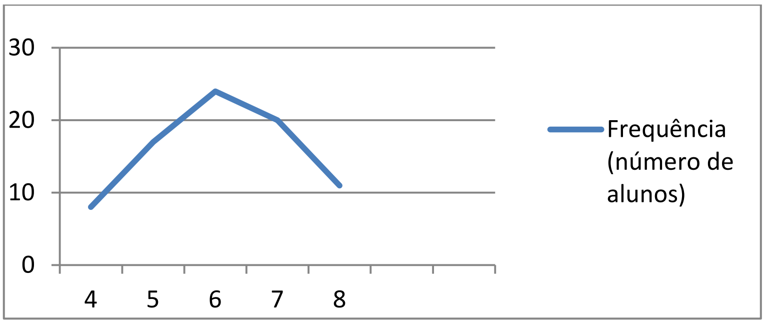
- A amostra foi separada em classes determinadas pelas notas das provas;
- A quantidade de notas de uma mesma classe é chamada de **frequência (F)** dessa classe;
- A soma das frequências de todas as classes é chamada de **frequência total (F_t)** da amostra;
- Dividindo-se a frequência F de uma classe pela frequência total F_t, obtém-se um número chamado de **frequência relativa ($F_{\%}$)** da classe.

Com os resultados construiu-se a tabela a seguir, chamada **de tabela de distribuição de frequências**.

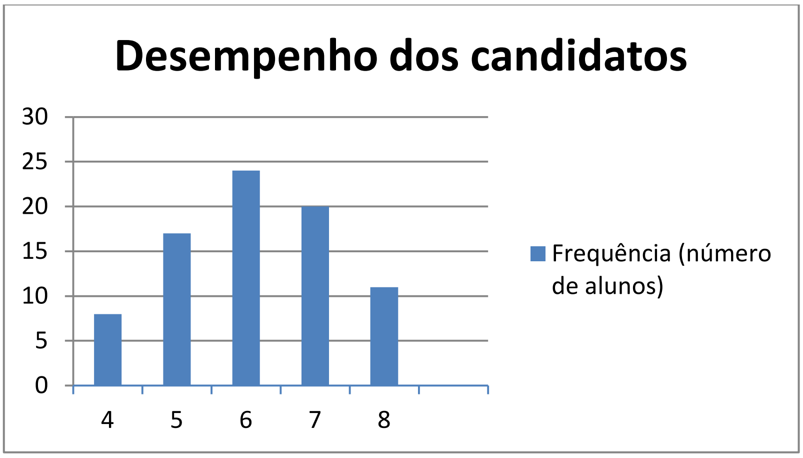
Desempenho dos candidatos		
Classe (nota)	**Frequência (número de alunos)**	**Frequência relativa**
4	8	10%
5	17	21,25%
6	24	30%
7	20	25%
8	11	13,75%
	Frequência total: F_T=80	

Os dados da tabela anterior podem também ser descritos por gráficos de diferentes tipos, conforme é mostrado a seguir.

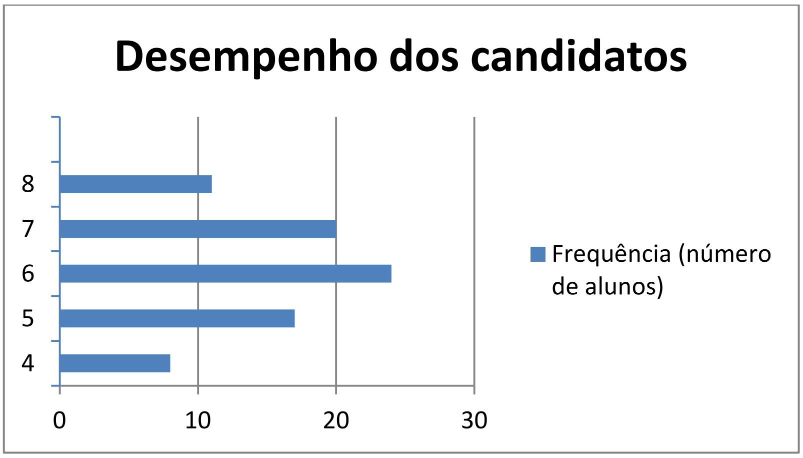
Gráficos de linha



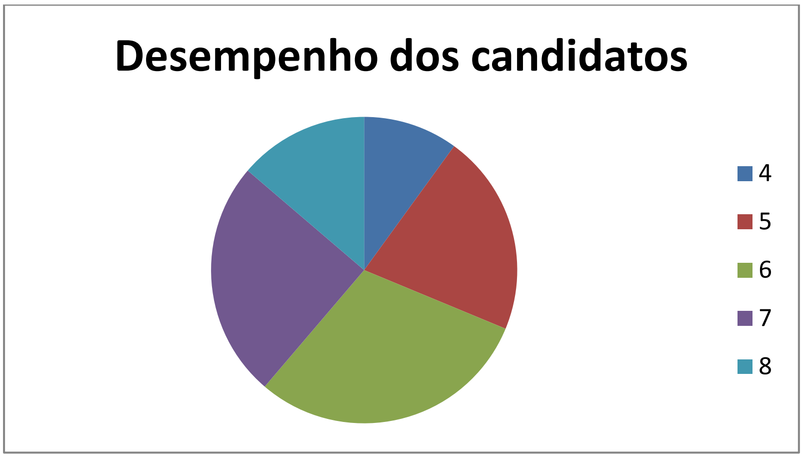
Gráficos de barras verticais



Gráficos de barras horizontais



Gráficos de setores



Observação: Todos os gráficos acima foram construídos em sala passo a passo com alunos. Vale ressaltar que o gráfico de setores nesse caso foi colocado apenas como ilustração pois ele pede informação por se tratar de dados ordenados. Os alunos nos exercícios de fixação construíram os gráficos usando papel quadriculado e calculadora.

Distribuição de frequência em classes representadas por intervalos reais

Para avaliar o tamanho de seus peixes, um piscicultor retirou dos açudes uma amostra de vinte carpas e mediu o comprimento delas, em centímetros, obtendo os seguintes resultados:

[49, 52, 56, 52, 50, 54, 57, 60, 48, 59, 48, 49, 57, 53, 55, 51, 53, 52, 55, 57]

Para representar esses dados em uma tabela de distribuição de frequências, com classes não unitárias, os procedimentos usuais são:

I –Determinar a amplitude da amostra.

$$(60 - 48)\text{cm} = 12\text{cm}$$

II - Escolher um intervalo fechado, de comprimento maior ou igual à amplitude da amostra, que contenha a amostra, ou seja, [48,60].

III **-** Dividir o intervalo escolhido no item II em subintervalos**,** fechados à esquerda e abertos à direita, exceto do último subintervalo. Como o quociente de 12 por 3 é igual a 4, vamos dividir o intervalo do item II em 4 subintervalos de comprimento igual a 3:

[48,51[, [51,54[, [54,57[, [57,60]. Esses subintervalos são chamados de **classes,** e o comprimento de cada um é chamado de **amplitude** da respectiva classe.

IV - Agrupar os elementos da amostra de modo que cada agrupamento seja formado por elementos que pertençam a uma mesma classe.

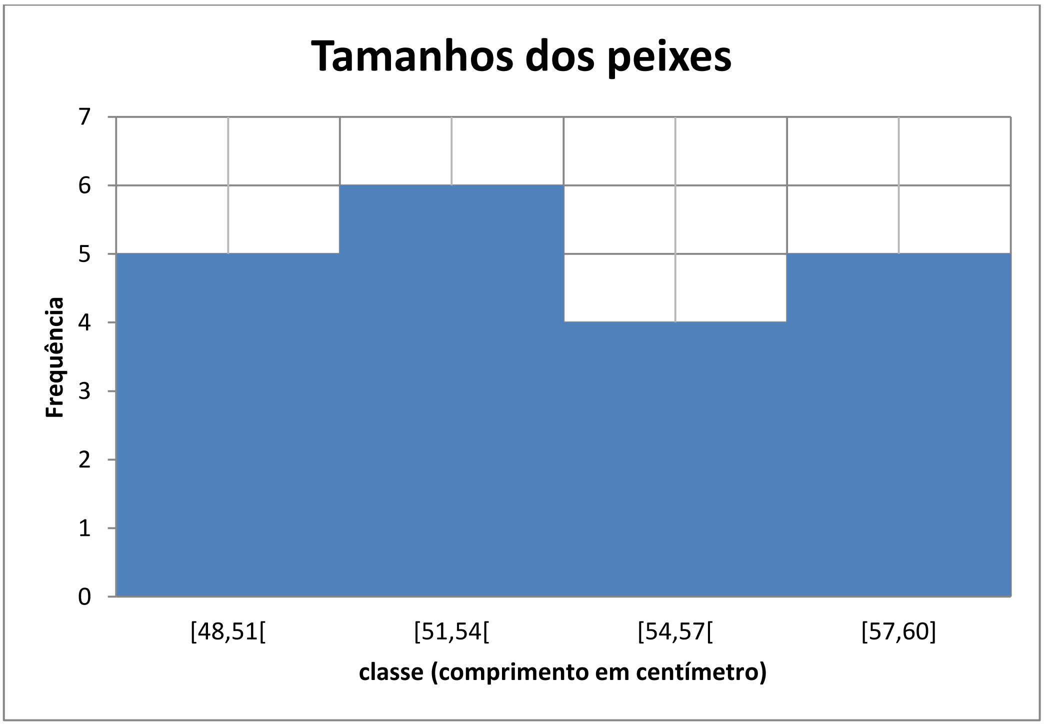
- 48, 48, 49 e 50 pertencem à classe [48,51[;
- 51, 52, 52, 52, 53 e 53 pertencem à classe [51,54[;
- 54, 55, 55 e 56 pertencem à classe [54,57[;
- 57, 57, 57, 59 e 60 pertencem à classe [57,60];

Assim, podemos construir a seguinte tabela de distribuição de frequência:

Tamanho dos peixes

Classe (comprimento em centímetros)	F	F%
[48,51[	5	25%
[51,53[	6	30%
[54,57[	4	20%
[57,60]	5	25%
	F_T=20	

Histograma



Medidas estatísticas

Dividindo a renda nacional anual de um país pelo número de habitantes, obtém-se a renda per capita, isto é, a renda por pessoa. Supondo que a renda per capita de um país seja 5000 dólares, pode-se concluir que a distribuição de renda nesse país é equitativa? É claro que não, pois pode-se ter, por exemplo, metade da população não ganhando nada e cada cidadão da outra metade ganhando 10.000 dólares; a renda per capita continuaria sendo de 5.000 dólares. Esse exemplo ajuda a entender que é necessário mais de um parâmetro para avaliar a distribuição dos valores de uma amostra de números. Alguns desses parâmetros são as medidas estatísticas, classificadas como **medidas de posição e medidas de dispersão**.

Medidas de posição

São medidas que indicam o posicionamento dos elementos de uma amostra de números quando está representada num rol.

Média aritmética:

Os conteúdos de quatro baldes de água são 3L, 5L, 2L e 1L. Se toda água fosse igualmente distribuída entre os baldes, com quantos litros ficaria cada um?

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{3+5+2+1}{4} = 2{,}75$$

Ou seja,

a média aritmética de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, e indicada por $\overline{\mathrm{x}}$, é dada por :

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{x1+x2+x3+\cdots+xn}{n}$$

Média aritmética ponderada:

Considere agora dez baldes de água, tal que cinco deles contêm 4l cada um, três outros contêm 2L cada um, e os dois restantes contêm 5L cada um. Se toda essa água fosse igualmente distribuída entre esses baldes, com quantos litros ficaria cada um?

$$\bar{x} = \frac{\mathbf{4.5 + 2.3 + 5.2}}{\mathbf{10}} = \mathbf{3,6}$$

O resultado 3,6L é chamado de média aritmética ponderada dos volumes 4L, 2L e 5L, com pesos (fatores de ponderação) 5, 3 e 2, respectivamente. Genericamente, definimos:

A média aritmética ponderada dos n números x_1, x_2, x_3, ... x_n, com pesos p_1,p_2, p_3, ... p_n, respectivamente, e o número x tal que:

$$\bar{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

Moda

O elemento de maior frequência em uma amostra é chamado de moda (M_o) da amostra. Nem sempre a média aritmética é o melhor elemento para a representação de uma amostra. Dependendo da situação, é possível que outro elemento seja a melhor escolha ou, até mesmo que não exista média aritmética. É o caso de amostras cujos elementos não são números.

Como exemplo, observamos a tabela a seguir:

Teste dos medicamentos contra insônia

Medicamentos	Números de resultados positivos
A	12
B	14
C	11
D	12
E	16

Observe que o medicamento E corresponde à maior frequência na amostra de resultados positivos. Portanto, se não houver contraindicação médica, a escolha do medicamento E é a melhor opção contra insônia.

Mediana - É o termo central de um rol.

Em um escritório de contabilidade, trabalham cinco pessoas com salário médio de 2.460,00, isto é, a média aritmética entre os cinco salários é de 2.460,00. Essa informação pode dar a falsa ideia de que os cinco trabalhadores desse escritório têm salários próximos de 2.460,00. Para perceber que apenas a média aritmética não é representativa dessa amostra, observe os salários dos cinco funcionários apresentados em rol:

R$ 450,00 R$500,00 R$520,00 R$4.550,00 R$ 6.280,00

Por isso, nesse caso, além da média aritmética, convém informar o valor do centro do rol (R$ 520,00), que é chamado de **mediana** da amostra. Podemos definir mediana, genericamente, assim:

Considerando n número x1, x2, x3, ..., xn, dispostos em rol:

Sendo n ímpar, chama-se **mediana**, indicada por **Md** o termo central do rol, isto é, o termo x_i com $i = \frac{n+1}{2}$

Sendo n par, chama-se **mediana**, indicada por **Md** a média aritmética entre os termos centrais desse rol, isto é, a média entre os termos x_i e x_{i+1} com $i = \frac{n}{2}$.

Medidas de dispersão

As medidas de posição, como média aritmética, a mediana e a moda de um conjunto de dados numéricos não são suficientes para uma análise conclusiva sobre como variam os valores desse conjunto; por exemplo, o quanto esses valores estão próximos ou distantes de uma medida previamente fixada. Esse fato pode ser percebido pela tabela abaixo, que apresenta os salários mensais dos funcionários de dois escritórios, A e B.

Salários mensais

Escritórios	**A**	**B**
Salários	**(número de funcionários)**	**(número de funcionários)**
R$ 4.900,00	0	2
R$ 4.500,00	1	0
R$ 2.700,00	1	0
R$ 1.600,00	2	0
R$ 500,00	2	0
R$ 400,00	0	4

Apesar de a média salarial nos dois escritórios ser a mesma, RS 1900,00, as distribuições são muito diferentes. Por exemplo, os salários no escritório A estão mais próximos da média aritmética do que os salários no escritório B.

Por isso, precisamos de outras medidas para avaliar a distribuição de uma amostra de números. Neste item, vamos estudar algumas dessas medidas, chamadas de **medidas de dispersão**, que podem ser entendidas a partir do problema a seguir.

Para preencher uma vaga de gerente de produção, o departamento de recursos humanos de uma empresa, após realizar vários testes, selecionou dois candidatos: Ana e Felipe. A tabela abaixo mostra o desempenho dos dois nas provas a que se submeteram.

Notas de Ana e Felipe

Candidato	**Ana**	**Felipe**
Assunto		
Conhecimentos de Informática	8,5	9,5
Língua Portuguesa	9,5	9,0
Língua inglesa	8,0	8,5
Matemática	7,0	8,0
Conhecimentos de economia	7,0	5,0
	Média = 8,0	Média = 8,0

Os dois candidatos obtiveram a mesma média. Como proceder, cientificamente, para estabelecer um critério de desempate na avaliação?

A comparação entre os desempenhos desses dois candidatos pode ser feita por meio de medidas estatísticas, como o desvio **absoluto médio**, a **variância** ou o **desvio padrão**. Essas medidas, chamadas de medidas de dispersão, indicam o quanto os elementos de uma amostra estão afastados da média aritmética. Será considerada menos dispersa e, portanto, mais regular, a amostra que se apresentar a menor medida. No caso de Felipe e Ana, um critério de desempate pode ser a regularidade, isto é, o candidato escolhido será o que apresentar a amostra de notas menos dispersa.

Desvio Absoluto Médio

Nas cinco provas realizadas, Ana obteve 8,0 de média aritmética, e suas notas foram 85; 9,5; 8,0; 7,0; 7,0 conforme tabela anterior. Para determinar o quanto cada nota está afastada da média aritmética, basta efetuar a diferença entre a nota e a média, nessa ordem; essa diferença é chamada de desvio da nota. Esses desvios são:

8,5 - 8,0 = 0,5

9,5 - 8,0 = 1,5

8,0 - 8,0 = 0

7,0 - 8,0 = -1,0

O módulo de cada um desses desvios é chamado de desvio absoluto da nota correspondente:

- O desvio absoluto da nota 8,5 é I0,5I = 0,5
- O desvio absoluto da nota 9,5 é I1,5I = 1,5
- O desvio absoluto da nota 8,0 é I0,0I = 0,0
- O desvio absoluto de cada uma das duas notas 7,0 é I-1,0I = 1,0

A média aritmética entre esses desvios absolutos é chamada de **desvio absoluto médio** e se indica por **Dam**

$$\mathbf{Dam} = \frac{\mathbf{0,5+1,5+0,0+1,0+1,0}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,8}$$

De maneira análoga, tem-se o desvio absoluto médio das notas obtidas por Felipe, Dam', no conjunto de provas;

Dam' = 1,2

Assim verificamos que as notas de Ana estão, em média 0,8 acima ou abaixo da média aritmética 8, e as notas de Felipe estão, em média, 1,2 acima ou abaixo da média aritmética 8, como **Dam< Dam'**, conclui-se que Ana teve um desempenho mais regular que Felipe e, por isso, merece a vaga.

Para uma amostra qualquer, definimos:

Sendo $\overline{x}$ a média aritmética de uma amostra e de números x1, x2, x3, ..., xn, chama-se **desvio absoluto médio**, e se indica por Dam, o número:

$$\boldsymbol{Dam} = \frac{|\mathbf{x_1} - \bar{\mathbf{x}}| + |\mathbf{x_2} - \bar{\mathbf{x}}| + |\mathbf{x_3} - \bar{\mathbf{x}}| + \ldots + |\mathbf{x_n} - \bar{\mathbf{x}}|}{\boldsymbol{n}}$$

Variância

Outra medida que indica o afastamento dos valores dos elementos de uma amostra, em relação à medida aritmética, é a variância, que se representa por $\boldsymbol{\sigma^2}$ (σ é a letra grega "sigma").

Chama-se **variância** a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos de uma amostra, isto é:

$$\boldsymbol{\sigma 2} = \frac{(\mathbf{x_1} - \bar{\mathbf{x}})^2 + (\mathbf{x_2} - \bar{\mathbf{x}})^2 + (\mathbf{x_3} - \bar{\mathbf{x}})^2 + \ldots + (\mathbf{x_n} - \bar{\mathbf{x}})^2}{\boldsymbol{n}}$$

Calculando as variâncias dos conjuntos de notas de Ana σ^2_A e Felipe σ^2_F, citados anteriormente, temos:

$$\sigma 2\mathrm{A} = \frac{(\mathbf{0{,}5})^2 + (\mathbf{1{,}5})^2 + (\mathbf{0{,}0})^2 + (-\mathbf{1{,}0})^2 + (-\mathbf{1{,}0})^2}{\mathbf{5}} = 0{,}9$$

$$\sigma 2\mathrm{F} = \frac{(\mathbf{1{,}5})^2 + (\mathbf{1{,}0})^2 + (\mathbf{0{,}5})^2 + (\mathbf{0{,}0})^2 + (-\mathbf{3{,}0})^2}{\mathbf{5}} = 2{,}5$$

Como $\sigma^2_A < \sigma^2_F$, concluímos que Ana obteve nas provas um desempenho mais regular que Felipe.

Desvio padrão

Na interpretação da variância podem surgir algumas dificuldades em relação à unidade de medida dos elementos da amostra. Por exemplo, quando os elementos da amostra indicam capacidade em litros(L), a variância representa um resultado em L^2. Como essa unidade não tem significado físico, não é conveniente utilizar as variâncias nesse caso. Por causa de dificuldades como essa, foi criado o desvio padrão, representado por $\boldsymbol{\sigma}$, definido como a raiz quadrada da variância.

Calculando o desvio padrão do conjunto de notas de Ana , $\boldsymbol{\sigma}_A$, e de Felipe, $\boldsymbol{\sigma}_F$, citados anteriormente, temos:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{0{,}9}} \cong \mathbf{0{,}949} \; \boldsymbol{e} \;\; \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{F}} = \sqrt{\mathbf{2{,}5}} \cong \mathbf{1{,}58}$$

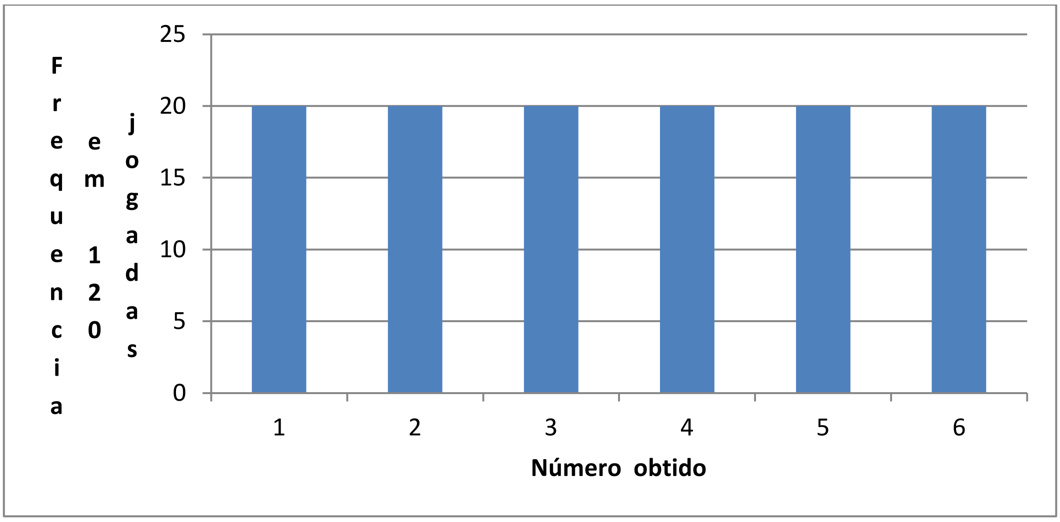
Como $\boldsymbol{\sigma}_A < \boldsymbol{\sigma}_F$ que Ana teve nas provas um desempenho mais regular que Felipe.

O uso da Probabilidade na Estatística

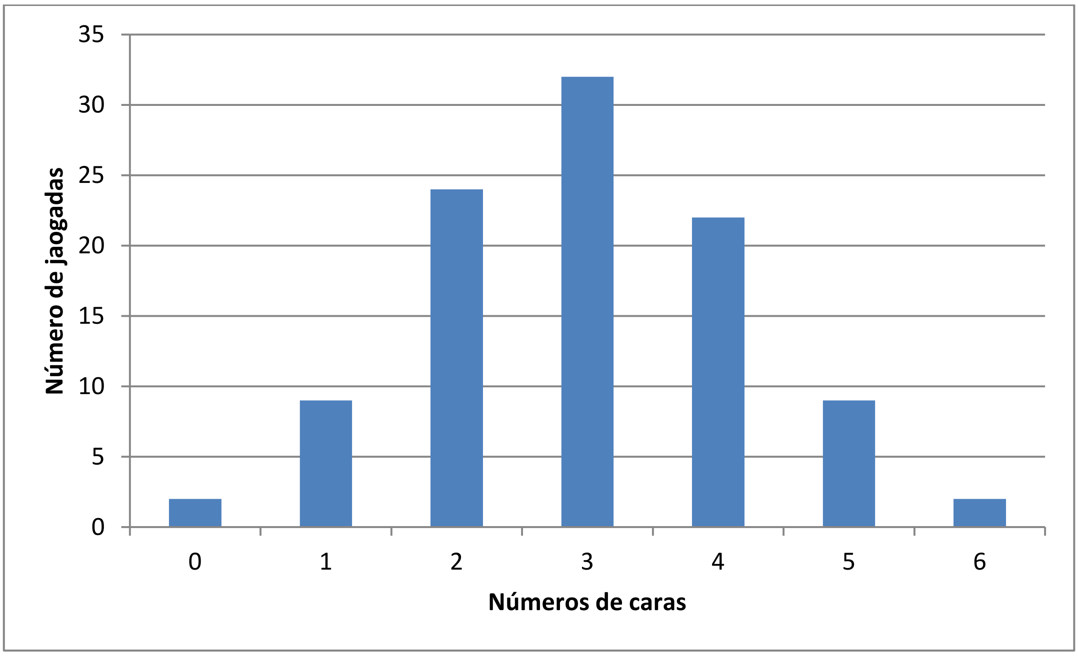
O uso da probabilidade em Estatística esta relacionado à predição de eventos futuros. O meteorologista prediz que há 8% de chance de chover em determinada região; o setor de controle de qualidade de uma fábrica faz uma pesquisa estatística e prediz que apenas 3 em cada 1000 peças produzidas apresentarão defeitos; um médico sanitarista analisa as últimas pesquisas sobre uma epidemia em certa região do país e conclui que a probabilidade de infecção nas condições observadas é de 50%...

Para fazermos predições, muitas vezes precisamos examinar o padrão dos eventos, analisar com que frequência eles ocorrem e qual é a média de ocorrência.

Alguns eventos, como o resultado obtido no lançamento de um dado, têm frequências iguais



Outros eventos, como obter cara ou coroa ao jogar moeda, geram gráficos simétricos. O gráfico abaixo é um registro do número de caras quando jogamos 6 moedas, em 100 jogadas.



Esse gráfico mostra que a probabilidade maior é ocorrerem 3 caras quando 6 moedas são lançadas, e que sair 6 caras, ou nenhuma cara, é a ocorrência de menor probabilidade.

CAPÍTULO 4 - Descrição das atividades e constatações

Neste capítulo relatamos o contexto geral e formatado das atividades que desenvolvemos em sala.

Este trabalho na Escola Estadual Ubiratan Reis Barbosa, situada no município de Nilópolis - RJ. A turma participante do trabalho foi uma turma de Módulo 3 – EJA, que possui um quantitativo de 25 alunos, sendo que tendo em todos os encontros uma média de 17 alunos, sua faixa de idade ficava entre 18 e 55 anos aproximadamente. Com podemos ver, um grupo bastante heterogêneo.

Este trabalho envolveu uma longa experiência em sala de aula num total de 14 encontros onde cada encontro teve duração de dois tempos de 50 minutos conforme mostram as tabelas de plano de aula.

Os encontros foram desenvolvidos utilizando os materiais teóricos contidos nos capítulos 2 e 3. A cada tópico eram realizados exercícios de fixação e, ao final de cada conteúdo, foram resolvidas as questões do ENEM correspondentes aos conteúdos trabalhados. Estas questões vieram dos exames de 2010 a 2014 e cada questão foi comentada junto com a turma com o objetivo de sanar as dúvidas e identificar as dificuldades. Uma descrição mais detalhada das atividades é dada nas duas tabelas abaixo.

A seguir relatamos as questões do ENEM abordadas e como os alunos responderam a cada problema proposto.

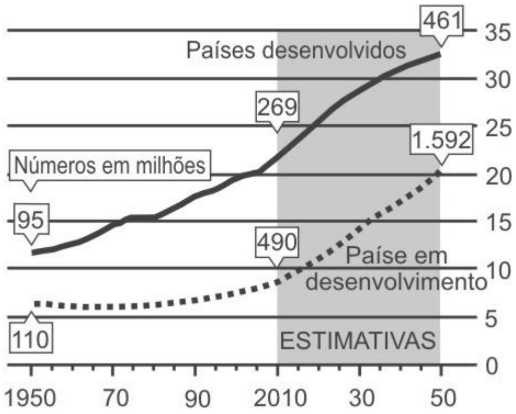
PLANO DE AULA: INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE			
	1ª AULA	**2ª AULA**	**3ª AULA**
ASSUNTO	Introdução à probabilidade	Probabilidade Conceitos básicos	Probabilidade condicional
OBJETIVOS	Apresentar a existência da probabilidade no dia a dia do aluno, as definições de evento e espaços, amostras, evento complementar, certo e impossível.	Definição de probabilidade e suas propriedades, probabilidade complementar e propriedades.	Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicional.
METODOLOGIA	Aula expositiva com resolução de exercícios fáceis, médios e algumas questões de vestibular.	Aula expositiva com resolução de exercícios fáceis, médios e algumas questões de vestibular.	Aula expositiva com resolução de exercícios fáceis, médios e algumas questões de vestibular.
TEMPO	Dois tempos de 50 minutos.	Dois tempos de 50 minutos.	Dois tempos de 50 minutos.
	4ª AULA	5ª AULA	6ª AULA e 7ª aula
ASSUNTO	DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL	REVISÃO DOS CONTEÚDOS	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
OBJETIVOS	Desenvolvimento do conceito de distribuição binomial a partir de um exercício, utilizando os conceitos definidos anteriormente.	Revisão dos conteúdos apresentados.	Resolução das questões desse tema presente nos últimos cinco anos no ENEM.
METODOLOGIA	Aula expositiva com resolução de exercícios fáceis, médios e algumas questões de vestibular.	Resolução de exercícios com objetivo de tirar dúvidas, de obter uma ideia quantitativa e qualitativa do aproveitamento da turma e de prepará-los para os próximos encontros em que haveria resolução de questões do ENEM.	Resolução das atividades propostas no capítulo 4 (questões do ENEM dos últimos cinco anos) e realização de avaliação diagnóstica de pontos positivos e negativos com colaboração da turma.
TEMPO	Dois tempos de 50 minutos.	Dois tempos de 50 minutos.	Quatro tempos de 50 minutos.

PLANO DE AULA: INTRODUÇÃO A ESTATÍSTICA			
	1ª AULA	**2ª AULA**	**3ª AULA**
ASSUNTO	Introdução à Estatística	Estatística - Construção de gráficos	Estatística e alguns conceitos básicos
OBJETIVOS	Apresentar a existência da estatística no dia a dia do aluno, as definições de amostra, amplitude, rol e distribuição de frequência em classes unitárias.	Construção de gráficos de linha, barras verticais, barras horizontais e de setores.	Distribuição de frequência em classes, construção de um histograma e resoluções de exercícios.
METODOLOGIA	Aula expositiva e exercícios de fixação com tratamento dos dados e construção das tabelas para melhor assimilar os tópicos apresentados.	Aula expositiva e exercícios de fixação nessa parte, aproveitando as tabelas construídas nas aulas anteriores para a construção dos gráficos.	Aula expositiva e exercícios de fixação. Construção das tabelas e dos histogramas.
TEMPO	Dois tempos de 50 minutos.	Dois tempos de 50 minutos.	Dois tempos de 50 minutos.
	4ª AULA	**5ª AULA**	**6ª AULA**
ASSUNTO	Medidas estatísticas	Medidas estatísticas	Resolução das atividades propostas
OBJETIVOS	Medidas estatísticas de posição (média, mediana e moda) e resoluções de exercícios.	Medidas estatísticas de dispersão (desvio absoluto médio, variância e desvio padrão) e resoluções de exercícios.	Resolução das questões desse tema presente nos últimos cinco anos no ENEM.
METODOLOGIA	Aula expositiva, exercícios de fixação para melhor assimilar os novos conceitos.	Aula expositiva e exercícios de fixação. Nesse caso, para os alunos perceberem a utilidade dos novos conceitos em relação aos anteriores.	Resolução das atividades propostas No capítulo 4 (questões do ENEM dos últimos cinco anos) e realização de avaliação diagnóstica de pontos positivos e negativos com colaboração da turma.
TEMPO	Dois tempos de 50 minutos.	Dois tempos de 50 minutos.	Quatro tempos de 50 minutos.

QUESTÕES DO ENEM DOS ÚLTIMOS CINCO ANOS - PROBABILIDADE.

Atividade - 1

(ENEM - 2009) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos,
número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de:

A)1/2 B) 7/20 **C) 8/25** D) 1/5 E) 3/25

Como proposta de trabalho em resolver questões dos cinco últimos anos de ENEM, a resolução dessa primeira atividade foi bastante simples. Após 15 min. praticamente toda turma conseguiu resolvê-la utilizando conceitos básicos de probabilidades como evento e espaço amostral em conjunto com a interpretação de gráficos. A grande discussão foi de qual seria o melhor valor para o ano de 2050 no gráfico. O grupo concluiu que o bom senso seria 32%, mas que independente disso, qualquer valor dentro do intervalo 30% a 35% levaria à resposta C como a mais próxima.

Atividade 2

(ENEM-2009) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59,60}, custava R$ 1,50.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

A) 1 1/2 vez menor.
B) 2 1/2vezes menor.
C) 4 vezes menor.
D) 9 vezes menor.
E) 14 vezes menor.

Nesta atividade, ficou clara a dificuldade da turma em lidar com combinação, mesmo tendo sido dada uma aula de reforço para relembrar os conceitos de combinação. No geral, levaram bem mais tempo para resolver o exercício. Mas quando relembrados os conceitos de combinação, mesmo com alguma dificuldade, a turma em sua maioria conseguiu realizar mais essa tarefa. O tema suscitou interesse por se tratar de assunto comum em rodas de conversa, embora eles nunca tivessem olhado para o mesmo sob a perspectiva de um problema matemático. Cabe ressaltar que a partir daquele momento ficou claro que para o trabalho ficar mais completo seria necessário um estudo mais apurado, tratando o assunto de análise combinatória (Princípio multiplicativo, Permutação e Combinação). No entanto, fugia do objetivo inicial e esses tópicos foram abordados, ou melhor, relembrados, de acordo com a necessidade.

Atividade 3

(ENEM-2010) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

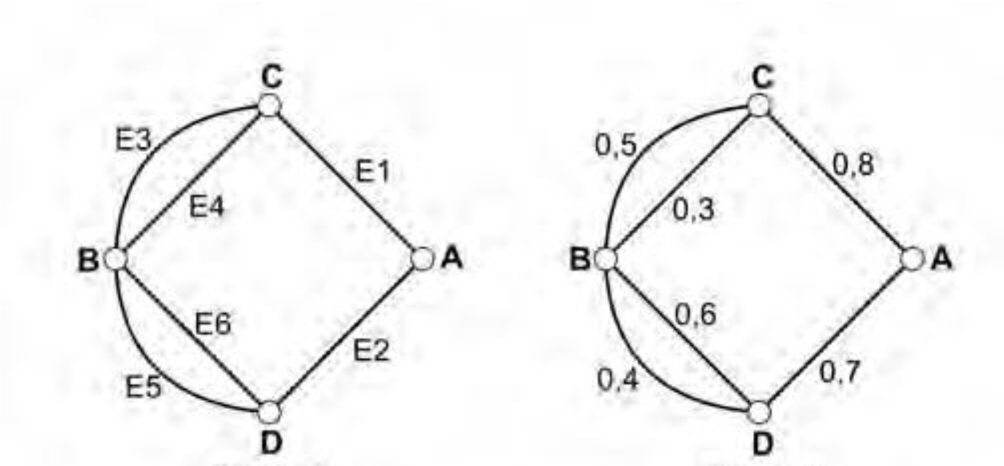


Figura I Figura II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é:

A)E1E3. B) E1E4. C) E2E4. **D) E2E5.** E)E2E6.

Nessa atividade, a turma teve uma dificuldade acentuada. A questão trabalhava claramente com probabilidades independentes e foi perceptível que a maior dificuldade na verdade foi a de interpretar o problema. Com isso, mais da metade teve problemas em trabalhar com a ideia de probabilidade complementar. Logo assim que foram feitas certas colocações, a turma percebeu que o grande problema residia em interpretar, pois a resolução em si foi bastante simples.

Atividade 4

(ENEM 2010) - O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DO CALÇADO	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

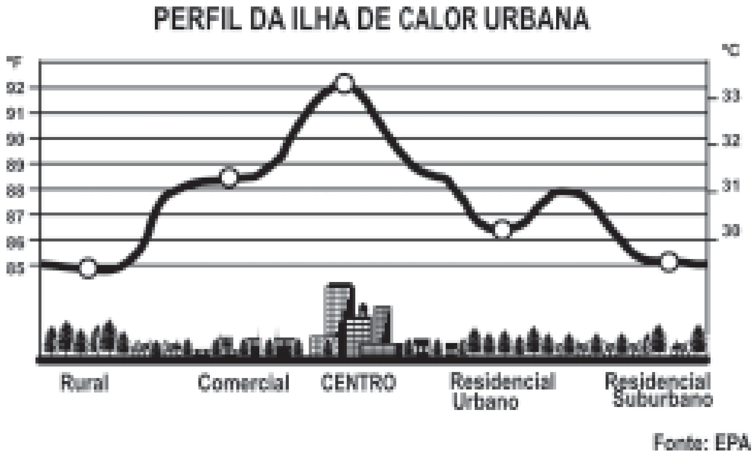
Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

a) 1/3 b) 1/5 c) 2/5 **d) 5/7** e) 5/14

A atividade em questão foi muito interessante. Um grupo significativo de alunos surpreenderam, fugindo da fórmula em questão de probabilidade condicional. Resolveram a questão com a redução do espaço amostral de forma simples, com uma "probabilidade simples", como eles mesmos falaram. Foi observado ainda, que a escolha das questões mexe com a energia da turma, que ao conseguir resolvê-las sente-se mais motivada e confiante. Por isso, as questões foram ordenadas por ano e por grau de dificuldade, pois para uma turma meio desacreditada como a do EJA faz-se necessário primeiro que os alunos ganhem confiança, para poder avançar em direção a exercícios mais complexos.

Atividade 5

(ENEM 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



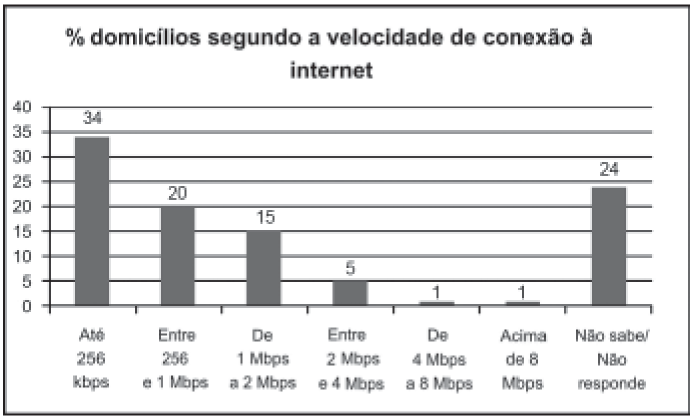
Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

A) 1/5
B) 1/4
C) 2/5
D) 3/5
E) 3/4

A atividade no geral não parecia acrescentar muito às outras. Contudo, como a proposta era analisar todas as questões apresentadas no ENEM nos últimos cinco anos, a mesma não foi omitida do trabalho. Surpreendentemente, um número expressivo de alunos não acertou a resposta por um problema de leitura e interpretação. Indubitavelmente, foi um ganho muito grande conversar com a turma a esse respeito. Alegaram ser uma "pegadinha", já que a grande maioria escolheu a alternativa D. Veio assim à tona um problema grande para os alunos em avaliações de matemática: a interpretação cuidadosa dos problemas propostos.

Atividade 6

(ENEM 2011) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo 1Mbps neste domicílio?

A) 0,45 B) 0,42 C) 0,30 **D) 0,22** E) 0,15

A atividade em si possui o mesmo entrave que a anterior, mas sem muito a acrescentar, pois os alunos já haviam resolvido uma questão semelhante anteriormente. No caso, a "**atividade 4**" ajudou sim em mostrar que o conteúdo foi absorvido e a turma resolveu bem rapidamente. O grupo inteiro levou no máximo 4 minutos.

Atividade 7

(ENEM 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra gripe suína

Datas da vacinação	Público - alvo	Quantidades de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

A) 8%. B) 9%. **C)11%.** D)12%. E) 22%.

A atividade em questão ficou dentro do raciocínio trabalhado nas atividades 4 e 6. A turma a resolveu com muita facilidade e tempo muito curto, aproximadamente 4 minutos.

Atividade 8

(ENEM 2011) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

A) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
B) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
C) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
D) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
E) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Novamente se mostrou a necessidade de reforçar os conteúdos de análise combinatória. Os alunos conseguiram resolver de forma bem mais tranquila, então. Um grupo utilizou os conteúdos relembrados na atividade 2, mas mesmo assim ficou claro que existe uma dificuldade que precisa ser trabalhada e mais ainda a dificuldade em trabalhar com os números em si, simplificar uma expressão, evitando contas desnecessárias. Ao obter essas explicações, eles sem dúvida acham mais fácil a resolução. Porém, ainda falta prática na utilização desses artifícios.

Atividade 9

(ENEM 2012) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	**4**	**0**
Azul	**3**	**1**
Branca	**2**	**2**
Verde	**1**	**3**
Vermelha	**0**	**4**

Uma jogada consiste em: 1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2; 2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão; 3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2; 4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo. Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

A) Azul.
B) Amarela.
C) Branca.
D) Verde.
E) Vermelha.

A forma como a turma lidou com a atividade 9 foi admirável. Eles trabalharam de forma bem prática, o que criou uma discussão bem interessante sobre o resultado correto. Imaginaram cada caso. Qual bola seria colocada na 2ª urna e de que forma isso influenciaria no espaço amostral e assim no resultado procurado. O mais gratificante foi eles perceberem que independente da primeira escolha, a melhor chance na segunda urna seria sempre a bola vermelha. O tempo de resolução foi longo já que a questão acabou sendo resolvida em grupo. Decidiu-se que era preferível deixar correr a discussão que tratava de espaço amostral porque influenciaria no resultado, o que ganhou mais importância do que a resolução da questão em si.

Atividade 10

(ENEM 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

A atividade 10 foi resolvida com bastante tranquilidade pelos alunos. Nada de relevante foi observado a não ser o estudo das possibilidades, ou melhor, do conjunto evento. Cabe ressaltar a insegurança do aluno em perguntar se a questão seria somente aquilo mesmo, ainda que tenha descoberto a resposta certa.

Atividade 11

(ENEM 2013) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) 1/2
B) 5/8
C) 1/4
D) 5/6
E) 5/14

A Atividade 11 em si mais uma vez teve uma quantidade muito pequena de acertos. Na verdade um único aluno conseguiu acertar a resposta. Os alunos interpretaram muito bem a questão, o que faltou foi o domínio do conteúdo extra, teoria de conjuntos. Ele foi trabalhado no início, entretanto houve por parte dos alunos problema em reconhecer a necessidade da aplicação dessa teoria na questão, ou seja, mais uma vez estava presente o problema de interpretação do exercício. Interessantemente, um grupo achou a resposta 5/8 e outro questionou que essa não seria a resposta certa, pois o aluno poderia falar inglês e não somente inglês e o mesmo para os que falavam espanhol. Tal raciocínio foi um grande ganho, pois mesmo não sabendo como resolver, sabiam que a resposta não era a opção B. Daí ficou muito interessante apresentar a eles com diagrama de Venn, álgebra simples e uma probabilidade simples, que a resposta era a letra A.

Atividade 12

(ENEM 2013) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu 54/100 do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, 25/1000 eram defeituosos. Por sua vez, 38/1000 dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < 2/100$ Excelente

$2/100 \leq P < 4/100$ Bom

$4/100 \leq P < 6/100$ Regular

$6/100 \leq P < 8/100$ Ruim

$8/100 \leq P \leq 1$ Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

A) excelente.
B) bom.
C) regular.
D) ruim.
E) péssimo.

Essa questão foi muito difícil para turma. Apenas dois alunos conseguiram resolvê-la. Levou um bom tempo para o entendimento de o parafuso pertencer à máquina I ou pertencer à maquina II. Trabalhar com o conectivo "ou" em probabilidade foi no final uma experiência muito positiva, ainda que a insegurança em resolver questões do tipo ao final da explicação permanecesse. Na resolução em conjunto, o raciocínio do grupo em sua maioria acompanhou o do mestre, embora o grau de dificuldade da atividade se fizesse claro. Diferentemente da anterior, notou-se que era um tipo de atividade a ser mais trabalhada com a turma.

Atividade 13

(ENEM 2013) Considere o seguinte jogo de apostas: Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	**Preço da cartela (R$)**
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções: Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos; Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos; Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos; Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos; Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos. Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são:

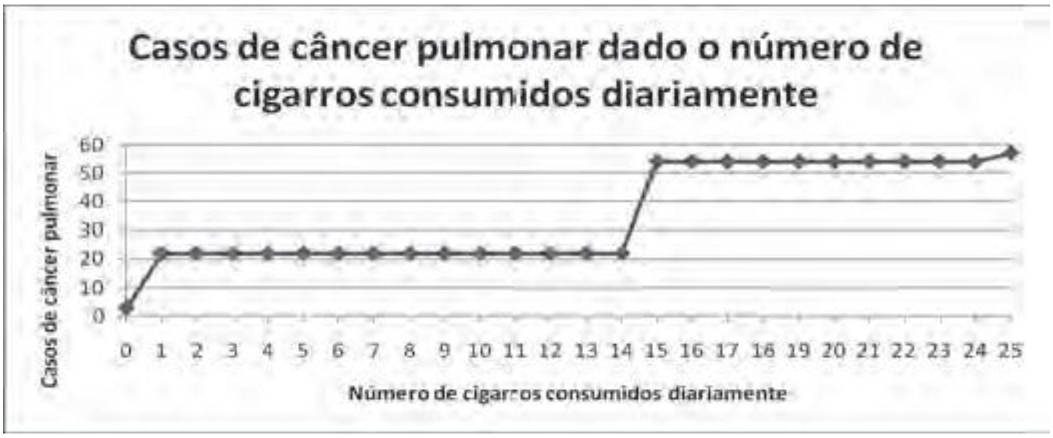
A) Caio e Eduardo.
B) Arthur e Eduardo.
C) Bruno e Caio.
D) Arthur e Bruno.
E) Douglas e Eduardo

A atividade 13 apesar de ser trabalhosa, foi resolvida pela maioria da turma por basicamente se tratar de combinações e por esse assunto já ter aparecido em atividades anteriores. Persistia, entretanto, a dificuldade em lidar com os números, em procurar uma forma mais simples de realizar contas, simplificar um problema. Verificou-se então a necessidade de desenvolver esse tipo de habilidade nas séries iniciais do ensino noturno e mais ainda no diurno, já que muitos desses alunos concluíram seu ensino fundamental no turno da manhã, ficando claro que há uma deficiência geral, não somente nos alunos do ensino noturno.

QUESTÕES DO ENEM DOS ÚLTIMOS CINCO ANOS – ESTATÍSTICA

Atividade 1

(ENEM - 2009) A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



De acordo com as informações do gráfico,

A) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

B) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

C) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

D) Uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

E) O consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

A atividade 1 foi resolvida rapidamente pela turma, já que ser tratava basicamente de uma interpretação do gráfico, mas foi aproveitado o questionamento sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Foi dada uma pausa nas atividades para relembrar esses conteúdos e assim ficou claro para toda turma a não existência de proporcionalidade entre os eixos do gráfico.

Atividade 2

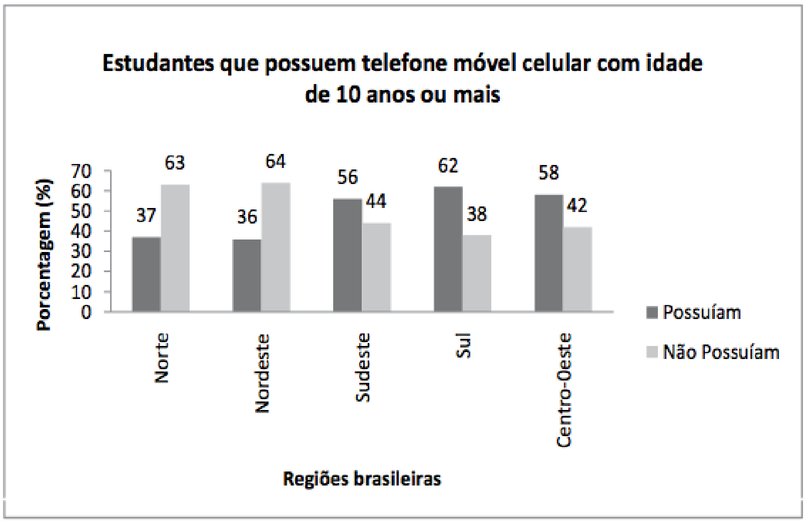
(ENEM - 2009) - Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7;8; 6; 0. Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

A) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
B) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
C) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
D) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
E) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

A atividade 2 foi resolvida rapidamente por toda turma, pois trabalhava apenas com o conceito de mediana, este plenamente apreendido pela turma.

Atividade 3

(ENEM 2010) Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.



Supondo-se que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

A) 5 513

B) 6 556

C) 7 450

D) 8 344

E) 9 536

A Atividade 3 Foi realizada pela maioria da turma dentro de um pequeno intervalo de tempo. Houve grande satisfação em constatar que todos interpretaram bem os dados do gráfico. Os alunos que demoraram um pouco mais, foi devido ao cálculo das porcentagens. Eles se apresentaram mais independentes na realização da atividade.

Atividade 4

(ENEM 2010) O gráfico a seguir apresenta o gasto militar dos Estados Unidos, no período de 1988 a 2006.

Com base no gráfico, o gasto militar no início da guerra no Iraque foi de:

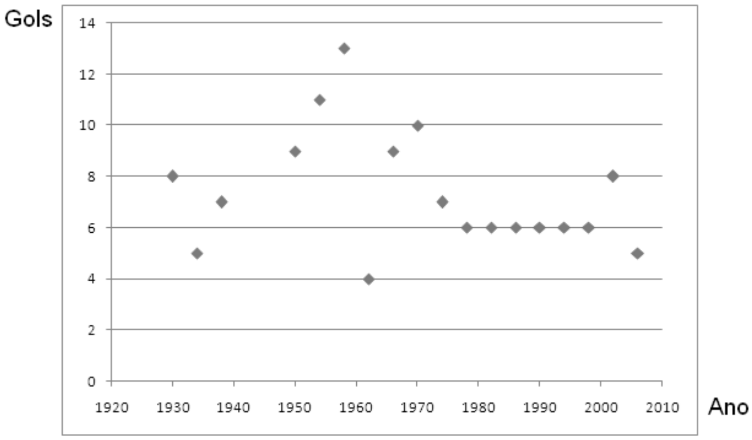
A) U$ 4.174.000,00.
B) U$ 41.740.000,00.
C) U$ 417.400.000,00.
D) U$ 41.740.000.000,00.
E) U$ 417.400.000.000,00.

A atividade 4 foi muito fácil de ser realizada pois se tratava apenas de interpretação do gráfico e entender que 417,4 bilhões = 417.400.000.000,00. Satisfatoriamente todos os alunos entenderam a atividade.

Atividade 5

(ENEM 2010) O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

Quantidades de Gols dos Artilheiros das Copas do Mundo



Disponível em: http://www.suapesquisa.com. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

A) 6 gols **B) 6,5 gols** C) 7 gols D)7,3 gols E)8,5 gols

A atividade 5 foi facilmente resolvida pelos alunos, já que os mesmos já tinham resolvido uma questão parecida. Levou um pouco de tempo, mas todos eles chegaram à mesma resposta.

Atividade 6

(ENEM 2010) Marcos e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
MARCOS	14	15	16	15	15	0,32
PAULO	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

D) Paulo, pois obteve maior mediana.

E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

A atividade 6 foi resolvida facilmente pelos alunos pois se tratava apenas de interpretar a tabela e ter domínio dos conceitos de média , mediana e desvio padrão que foram facilmente entendidos através do material de apoio no capítulo IV.

Atividade 7

(ENEM 2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

GOLS MARCADOS	QUANTIDADES DE PARTIDAS
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

a) X = Y < Z.
b) Z < X = Y.
c) Y < Z < X.
d) Z < X < Y.
e) Z < Y < X.

Como na atividade 6, a atividade 7, apesar de ser um pouco demorada foi realizada por todos os alunos. Assim como na atividade anterior, tratava-se apenas do domínio dos conceitos.

Atividade 8

(ENEM 2011) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificações de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

GOLS MARCADOS	QUANTIDADES DE PARTIDAS
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, Respectivamente, iguais a

a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

A como as duas últimas atividades, a atividade 8 foi resolvida facilmente pelos alunos servindo apenas como reforço.

Atividade 9

(ENEM 2011) A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009.

REGIÃO	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região nordeste?

A) 14,6%
B) 18,2%
C) 18,4%
D) 19,0%
E) 21,0%

A atividade 9 foi resolvida com muita facilidade por toda a turma, por ser uma questão simples sobre o conteúdo de média aritmética.

Atividade 10

(ENEM 2012) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o Caged, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

BRASIL - Comportamento de Emprego Formal no período de janeiro a outubro de 2010 - CAGED

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

A) 212 952.

B) 229 913.

C) 240 621.

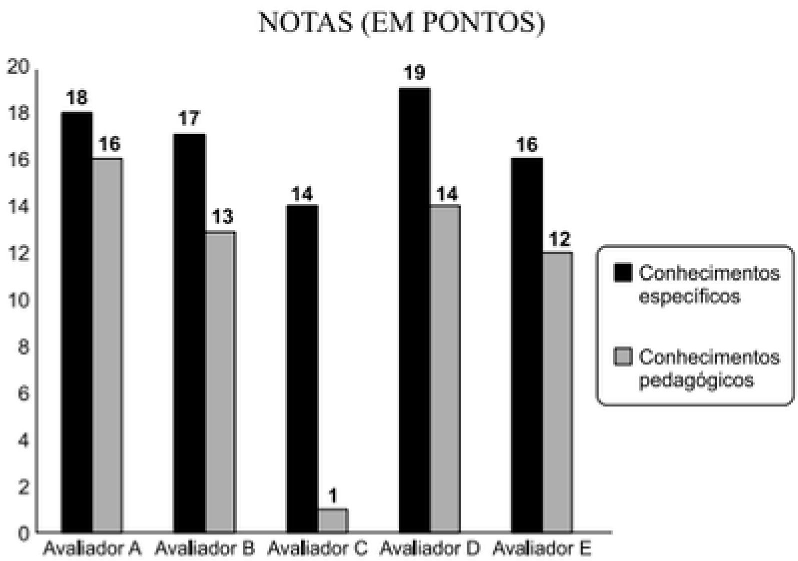
D) 255 496.

E) 298 041.

Atividade 10 foi realizada com muita facilidade pela turma, pois se tratava apenas do conteúdo de mediana com números pares de elementos.

Atividade 11

(ENEM 2013) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor. A nova média, em relação à média anterior, é

A) 0,25 ponto maior.
B) 1,00 ponto maior.
C) 1,00 ponto menor.
D) 1,25 ponto maior.
E) 2,00 pontos menor

A atividade 11 foi realizada com bastante facilidade pela turma, não tendo nada a acrescentar. Sem dúvida, o material de estatística foi muito melhor recebido pela turma do que o material de probabilidade. A turma colocou que isso se deve ao fato de ser um conteúdo mais prático.

CAPÍTULO V - Conclusão

Este Trabalho de Conclusão de Curso assumiu como objetivo procurar entender de que forma o tópico de Probabilidade e Introdução à Estatística pode ser levado para a sala de aula em nível de ensino médio na modalidade EJA (Educação de Jovens e Adultos). Propôs também mostrar as principais dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos face ao conteúdo novo com uma abordagem mais completa, com objetivo de prepará-los para a prova do ENEM.

Foi utilizado em um primeiro momento um material de apoio de probabilidade e Introdução à Estatística, contidos nos capítulos 2 e 4, visando formar nesses alunos uma base consistente para que eles consigam tranquilamente resolver questões básicas de probabilidade e de estatística.

Ficou clara a carência do domínio, ou até pior, do não conhecimento da teoria de conjuntos necessária no conteúdo de probabilidade, como por exemplo relação de pertinência, de inclusão, diagrama de Venn. Para prosseguirmos foi necessário um apoio extra, o positivo em face dessas dificuldades e das destacadas no início da conclusão. Foi fundamental os alunos estarem sempre abertos a apreender esses conteúdos básicos e cientes de sua necessidade para o entendimento do todo. Esse reforço foi feito dentro de um controle para não fugir do objetivo.

Deste estudo foram obtidos alguns resultados. Em um primeiro momento, ficou clara a falta de continuidade de conteúdo, seja entre os mais novos que vieram do ensino diurno, seja dos mais velhos que se encontravam no ensino noturno há bastante tempo. A principal dificuldade foi a falta de conteúdos básicos como potenciação, racionalização, porcentagem, números fracionários e habilidade insuficiente na resolução de equações. Em diversos momentos, para criar um ambiente onde os alunos se sentissem mais seguros, trabalhamos bastante com a calculadora, principalmente na construção de tabelas de distribuição para o cálculo das porcentagens.

Por mais que o material de apoio de probabilidade englobasse todos os conceitos iniciais necessários para que o objetivo ENEM fosse alcançado e mesmo considerando que a maioria dos alunos conseguiram se sair satisfatoriamente bem no conteúdo de probabilidade, ficou evidente a dificuldade de abstração dos alunos em questões de probabilidades mais elaboradas. Por sorte foram poucas nesse nível nos anos do ENEM analisados. Verificou-se que no caso do conteúdo de probabilidade foi necessária uma revisão dos conteúdos de permutação e combinação e que esse conteúdo necessita ser dividido em uma quantidade maior de aulas para que seja melhor aproveitado e absorvido pelos alunos. Isso se deve às carências de conteúdos básicos. Estes vão aparecer e são de vital importância para o melhor entendimento do material.

Depreende-se que o conteúdo de estatística foi muito melhor aproveitado pelo seu perfil mais prático e por suas fórmulas prontas. Os alunos se mostraram mais seguros com fórmulas prontas e se sentiram mais à vontade com a construção dos gráficos, incluídos os de setores. Foi bastante positivo que em alguns momentos essa construção foi sem o auxílio da calculadora, passo esse decidido com o grupo, não imposto, até porque nosso objetivo final eram as atividades com questões do ENEM e houve ciência de que nessa parte do trabalho não seria possível nenhuma consulta. E ao final do estudo desse material e a realização das atividades ficou claro que o conteúdo Introdução à Estatística pode ser tranquilamente apresentado em turma do ensino médio noturno na modalidade EJA, pois mesmo com seu tempo reduzido, seus conceitos foram recebidos muito bem com excelentes resultados.

Este trabalho buscou mostrar a possibilidade de se ensinar os conteúdos de Probabilidade e Introdução à Estatística no EJA. Conclui-se tal possibilidade como realidade. É um dever proporcionar a esses alunos condições iguais, não importando as situações adversas, como tempo reduzido e defasagem de conteúdos. É preciso um estudo para que se determine o que se deve omitir e o que se deve ministrar, o que não constitui negar a eles um currículo relevante. Seriedade é demandada a fim esses alunos tenham condições de prosseguir seus estudos em pé de igualdade com os alunos do ensino regular. Espera-se que este trabalho sirva de incentivo para outros trabalhos e projetos que privilegiem esse segmento tão esquecido e que merece sua devida atenção.

Referências Bibliográficas

PAIVA, M. - Matemática Paiva volume 3, São Paulo , Moderna, 2009

BUCCHI, P. - Matemática 2, São Paulo , Escala educacional, 2011

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C., Wagner, E. – A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2 e 4, Rio de Janeiro. SBM, 2002;

MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P, Pitombeira, J. B. C, Fernadez, P. - Analise Combinatória e Probabilidade.Rio de Janeiro . SBM 1991

SMOLE, K. C. S. - Matemática - Ensino Médio - Volume 3 - ed. São Paulo : Saraiva , 2005