



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE - DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Noções de Topologia e o Teorema de Euler

LUCIANA RODRIGUES CAMPOS

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes

Maringá-PR

2015

LUCIANA RODRIGUES CAMPOS

Noções de Topologia e o Teorema de Euler

Trabalho de Conclusão de Curso em forma de Dissertação, apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes

Maringá - PR

2015

Agradecimentos

À minha família por todo apoio e paciência no decorrer desses dois anos de estudos.

Aos professores que nos acompanharam nessa caminhada, acreditando no PROFMAT e nos proporcionando um maior aprofundamento dos conhecimentos obtidos na graduação.

À Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes, por toda dedicação nessa conclusão do mestrado.

Aos colegas de turma, que num grande esforço e abdicção da família, enfrentaram o desafio de voltar a estudar.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho vamos apresentar um Teorema, que por sua simplicidade de enunciado pode ser abordado, dentro da Geometria, em quase todas as séries do Ensino Fundamental e Médio. Mas que esconde uma fascinante história que percorreu vários séculos até ser completamente compreendido. Esse Teorema ficou conhecido como Teorema de Euler. Faremos um breve relato histórico deste Teorema e dos principais matemáticos que o estudaram, de modo a descobrir que de fato este é um problema topológico. Para tanto vamos apresentar conceitos básicos de Topologia, num enfoque bem intuitivo e aplicado ao estudo de superfícies. Ao final, vamos apresentar uma demonstração do Teorema de Euler para o caso particular de poliedros convexos.

Palavras-chaves: poliedros, superfícies, Fórmula de Euler, Característica de Euler-Poincaré.

Abstract

In this work we present a Theorem, which in its simplicity can be approached in the geometry, in almost all grades of elementary and high school. But that hides a fascinating story for several centuries to be fully understood. This Theorem was known as Euler's Theorem. We will make a brief historical account of this Theorem, and of leading mathematicians who have studied in order to find that in fact, this is a topological problem. For that, we will present concepts and basic results of Topology, with an well-intuitive approach and applied to the study of surfaces. And at the end, we present a proof of Euler's Theorem, for the particular case of convex polyhedron.

Keywords: polyhedron, surface, Euler's Theorem, Euler-Poincaré Characteristic.

SUMÁRIO

Introdução	v
1 A Fórmula de Euler	1
1.1 Vida e Obra de Leonhard Euler	1
1.2 A Fórmula de Euler (Descartes)	3
2 Introdução à Topologia	12
2.1 História da Topologia	13
2.2 Espaços Métricos	15
2.2.1 Funções Contínuas e Homeomorfismos	21
3 A Característica de Euler-Poincaré para Superfícies	24
3.1 Superfícies	24
3.2 A Característica de Euler-Poincaré	29
4 O Teorema de Euler para Poliedros (Revisitado)	37
4.1 Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos	44
Considerações Finais	50
Bibliografia	51

Introdução

Neste trabalho vamos apresentar um fascinante Teorema, hoje estudado por alunos de quase todos os níveis de ensino, devido sua simplicidade e clareza de enunciado, mas que percorreu vários séculos até ser completamente compreendido pelos mais célebres matemáticos da história. Esse Teorema ficou conhecido como Teorema de Euler ou Teorema de Euler-Descartes, e afirma que para um dado poliedro com V vértices, A arestas e F faces é válida a igualdade $V - A + F = 2$.

Este Teorema, proposto por Euler, em 1752, já havia sido relatado, em 1639, num manuscrito de Descartes, onde a fórmula $V - A + F = 2$ poderia ser obtida como consequência imediata, mas ao que tudo indica, Descartes parece não ter notado isso.

Em 1752, Euler propõe uma demonstração em [E2] para o Teorema. Mais tarde, em 1813, em [C1] e [C2], Cauchy apresenta uma prova até hoje a mais divulgada para o Teorema de Euler. A demonstração de Cauchy foi aceita, por muitos matemáticos ilustres, como verdadeira. Contudo, como era comum no século XVIII, Cauchy utilizou alguns conceitos sem a devida preocupação com o formalismo e sem colocar todas as hipóteses para a validade do resultado.

A medida que foram surgindo vários contra-exemplos do Teorema de Euler, muitos pesquisadores importantes ficaram intrigados com este resultado. Na verdade ele esconde em sua essência uma matemática avançada de alto nível, pois trata-se de um problema de Topologia e não de Geometria, como inicialmente era abordado.

Somente em 1895, com a publicação do artigo *Analysis Situs*, do matemático francês Jules Henri Poincaré, no qual Poincaré introduz conceitos topológicos, tais como a teoria da Homologia em dimensão n , é que o Teorema de Euler começa a ser desvendado.

Nosso objetivo, neste trabalho, é dar subsídios intuitivos de Topologia, para que os professores do Ensino Fundamental e Médio, possam explorar melhor este tema em suas aulas, levando seu aluno a um conhecimento significativo desse fascinante Teorema e de sua importância na história da Matemática.

No primeiro capítulo vamos abordar um pouco da história deste Teorema e dos principais matemáticos envolvidos neste problema, tais como, Euler, Descartes, Cauchy, Poincaré, entre outros. Apresentaremos alguns exemplos de poliedros convexos que satisfazem a Fórmula de Euler, dentre eles os famosos Poliedros de Platão e de Arquimedes e de

poliedros não convexos que são contra-exemplos para a Fórmula de Euler.

No segundo capítulo apresentaremos uma breve história da Topologia, introduzindo conceitos básicos, que levam o leitor ao conhecimento intuitivo da Topologia, o qual as propriedades das figuras geométricas não se alteram quando realizamos determinadas deformações do nosso objeto, como esticar, encolher ou inflar. Mais formalmente, Topologia é o estudo das figuras geométricas que são invariantes por transformações topológicas ou homeomorfismos.

Embora o Teorema de Euler tenha sido originalmente proposto para poliedros, ele pode ser estendido, por exemplo, para superfícies. E este será o nosso foco no terceiro capítulo. Vamos definir os conceitos de superfícies compactas, triangulação de superfícies, Característica de Euler-Poincaré e dar uma noção de superfícies orientáveis. Vamos calcular a Característica de Euler-Poincaré de algumas superfícies compactas e orientáveis e neste contexto a Característica de Euler-Poincaré será uma ferramenta para distinguir superfícies não homeomorfas.

No quarto capítulo vamos abordar as ideias de Cauchy para o Teorema de Euler, apontando algumas hipóteses necessárias para que um poliedro satisfaça a Fórmula de Euler, uma vez que em sua demonstração ele menciona que ela é válida para qualquer poliedro e como já é sabido, ele demonstrou o Teorema apenas para poliedros homeomorfos a esfera. Apresentaremos também uma demonstração do Teorema de Euler no caso particular de poliedros convexos, abordada de forma acessível, pelo Professor Azambuja em [F].

A Fórmula de Euler

Nosso objetivo neste trabalho é o de apresentar um Teorema conhecido na literatura por Fórmula de Euler ou Fórmula de Euler-Descartes. Um tema, que por sua simplicidade de enunciado, é apresentado inclusive no Ensino Médio, mas que esconde toda uma história que percorreu vários séculos até ser completamente compreendido.

Vamos descrever brevemente um pouco sobre a história deste Teorema e dos principais matemáticos envolvidos neste problema, dentre os quais destacamos: Euler, Descartes, Cauchy, Poincaré, entre outros.

Iniciamos este capítulo fazendo uma descrição sucinta sobre a vida e a obra de Leonhard Euler, para em seguida aprofundar sobre a história da Fórmula de Euler e seus desdobramentos.

1.1 Vida e Obra de Leonhard Euler



Leonhard Paul Euler foi um dos mais célebres matemáticos do século XVIII. Nasceu no dia 15 de abril de 1707, na Basileia, ao norte da Suíça quase na fronteira com a França. Filho primogênito de Paul Euler, um pastor protestante Calvinista de poucos recursos, e

Margarete Brucker.

Inicialmente Euler foi educado pelo próprio pai, ex-estudante de Jacob Bernoulli, em 1720 começou a estudar Teologia na Universidade da Basileia e em seguida passou a estudar Matemática, tendo como tutor Johann Bernoulli, o que foi de fundamental importância para que Euler seguisse a carreira de matemático e não a de pastor.

Em 1727, Euler conseguiu uma posição na recém criada Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, ocasião em que se casou em 1734 e teve 13 filhos, dos quais apenas 5 sobreviveram.

Em 1738 perdeu a visão do olho direito e em 1741 assumiu uma posição na Academia de Ciências de Berlim, na Alemanha, onde permaneceu até retornar a São Petersburgo, em 1766. Em São Petersburgo, perdeu a visão do seu olho esquerdo devido a uma catarata, e lá permaneceu até a sua morte em 18 de setembro de 1783, aos 76 anos. Apesar da cegueira, foi nesse período de 17 anos, entre 1766 e 1783, que Euler escreveu quase metade de suas 866 obras.

Euler era dotado de uma memória excepcional e capaz de fazer enormes cálculos de cabeça. Ele se preparou para sua iminente cegueira aprendendo a escrever fórmulas em uma tábua e ditar Matemática ao seu filho.

Euler é um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Absorveu e expandiu todos os ramos que eram cultivados em seu tempo; retomou assuntos antigos e negligenciados e traçou novos cursos de pensamento que vieram a florescer nos séculos posteriores.

Suas obras abrangeram as mais diversas áreas do conhecimento, entre as quais destacamos:

- Matemática - cálculo de variações e infinitesimal, geometria diferencial, álgebra, topologia, lógica, teoria dos números;
- Física - física experimental, óptica, astronomia, teoria lunar (marés), hidráulica;
- Engenharia - construção de navios, mecânica e artilharia;
- Química;
- Geografia e demografia;
- Economia;

- Fisiologia;
- Filosofia, música e religião.

Fato esse que não nos surpreende encontrarmos na literatura matemática várias invenções, fórmulas e teoremas associados ao nome de Euler, dentre eles podemos citar: Fórmula de Euler para Poliedros, Problema das 7 pontes de Königsberg, Equação de Euler-Lagrange, Equações de Euler na mecânica dos fluidos, Densidade dos números primos, Integrais de Euler: funções beta e gama, Equação de Euler da dinâmica dos corpos rígidos, Problema dos 3 corpos de Euler, Constante de Euler-Mascheroni, A Fórmula de Euler, entre tantos outros.

Euler foi também o criador de notações que se estabeleceram na literatura, dentre estas destacamos:

- (i) e para base do sistema para logaritmos naturais.
- (ii) i para a unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$).
- (iii) π para a razão entre a circunferência e seu diâmetro (neste caso, foi apenas o divulgador, pois essa notação já tinha sido usada).
- (iv) \sum para somatórios.
- (v) $f(x)$ para função de x .

1.2 A Fórmula de Euler (Descartes)

Neste trabalho vamos apresentar um dos grandes Teoremas de Euler, de 1758, cujo enunciado é extremamente simples de ser apresentado, tanto que é um tema ensinado em cursos de geometria nas escolas, no que hoje denominamos Ensino Médio. Todavia é um resultado que esconde em sua essência, matemática avançada de alto nível, que na época não tinha sido desenvolvida. E por isso despertou o interesse e dúvidas de muitos pesquisadores importantes que levaram muitos anos até compreender por completo esse problema.

Claramente não vamos adentrar toda matemática abstrata necessária para compreender totalmente este problema, mas tentaremos justificar cada novo conceito e resultado, do modo mais intuitivo possível e sustentando com exemplos.

Iniciemos apresentando de uma maneira informal o seguinte Teorema de Euler.

Considere um poliedro de V vértices, A arestas e F faces, então

$$V - A + F = 2.$$

Segundo Lakatos (ver [La]), Euler apresenta o resultado acima pela primeira vez em [E1]. O problema original de Euler era a classificação de poliedros, cuja dificuldade ele destaca no sumário de [E1]:

“Enquanto em geometria plana os polígonos (*figurae rectilineae*) podiam ser classificados muito facilmente de acordo com o número de lados, o qual é evidentemente sempre igual ao número de ângulos, em estereometria a classificação dos poliedros (*corpora hedris planis inclusa*) representa problema muito mais difícil, visto que somente o número de faces é insuficiente para esse fim.”

A palavra estereometria é denominado ao ramo da geometria que estuda a medição dos sólidos. Ou mais precisamente, ao cálculo do volume dos sólidos. Esta palavra provém do grego: *stereós* (sólidos) + *métron* (medida) + *-ia*.

Conceitos chaves para o resultado de Euler foram o de vértice e aresta. Euler observou que além do número de faces, o número de vértices e arestas na superfície do poliedro, determina a sua estrutura (“topológica”). Euler criou o termo “*acies*” para aresta, distinguindo do antigo “*latus*” (lado), que era um conceito para polígonos.

O grande filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650), por volta de 1639, registra em um manuscrito resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula acima como consequência imediata, mas ao que tudo indica, Descartes parece não ter notado isso. Segundo Lakatos ([La], pág. 20): “Mas Descartes não chegou a este ponto, visto que pensava ainda em termos de ângulos (planos e sólidos) e faces, e não fez uma alteração revolucionária consciente dos conceitos de vértices não dimensionais,

arestas unidimensionais e faces bidimensionais como base necessária e suficiente para a plena caracterização topológica de poliedros”.

O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) encontrou este manuscrito de Descartes em 1675, mas ele se perdeu e apenas foi reencontrado em 1860. Passados 113 anos desde a publicação deste manuscrito, Euler em 1752, apresenta seu Teorema e propõe uma prova do mesmo em [E2], que ficou mais popularmente conhecida como Fórmula de Euler ou Fórmula de Euler-Descartes.

O grande francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), em 1813 ([C1], [C2]), apresenta uma demonstração, até hoje a mais divulgada do Teorema de Euler. E para muitos matemáticos importantes do século XIX, como por exemplo, Crelle, Mathiessen, Jonquières, Poinson, entre outros, eles não tinham a menor dúvida de que a prova de Cauchy para o Teorema de Euler era válido para todos os tipos de poliedros, como Euler tinha declarado em 1752.

Contudo, como era comum no século XVIII, alguns conceitos eram utilizados sem a devida preocupação com o formalismo, sem colocar muitas vezes todas as hipóteses necessárias para a validade do resultado. E foi exatamente isto que se passou com Euler. O Teorema de Euler, enunciado com toda a generalidade como acima não é verdadeiro.

Certamente isto não desmerece de maneira nenhuma o mérito deste gênio, uma vez que a construção da teoria para responder todos os mistérios envolvidos neste problema ainda estavam por ser desvendados. Uma nova área da matemática estava surgindo, que posteriormente foi chamada de topologia, o qual o próprio Euler deu contribuições.

Para que possamos compreender a problemática em torno do Teorema de Euler, vamos definir o que se entende por poliedro.

Definição 1.2.1 *Um Poliedro é um sólido em 3 dimensões delimitado por um número finito de regiões planas poligonais, denominadas **faces**. A interseção de duas faces são chamadas **arestas** do poliedro e a interseção de duas arestas são os **vértices** do poliedro.*

A palavra poliedro deriva do grego clássico: *poli* (muitos) + *hedro* (faces).

Ao definirmos poliedro como sendo um sólido, estamos a princípio considerando todos os pontos do seu interior, juntamente com os pontos da superfície do sólido (ou seja, “a casca”). Para o estudo do Teorema de Euler nos interessa apenas os pontos da superfície.

Definição 1.2.2 *Um poliedro é dito convexo se sua superfície não se auto-intercepta e se qualquer segmento de reta ligando quaisquer dois pontos do poliedro está contido em seu interior ou na superfície.*

Euler fez inúmeras verificações de sua conjectura para vários tipos de sólidos. Abaixo apresentamos alguns exemplos clássicos destes poliedros.

Exemplo 1.2.3 Poliedros de Platão:

Um poliedro de Platão é um poliedro convexo, cujas faces são polígonos idênticos, com lados de comprimentos iguais e ângulos congruentes. Ele também possui o mesmo número de faces que se encontram em cada vértice.

Os gregos antigos reconheceram e provaram que apenas cinco sólidos platônicos podem ser determinados:

Tetraedro - 4 triângulos equiláteros,

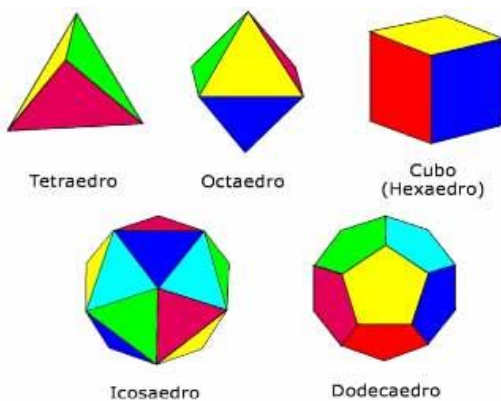
Hexaedro ou Cubo - 6 quadrados,

Octaedro - 8 triângulos equiláteros,

Dodecaedro - 12 pentágonos regulares,

Icosaedro - 20 triângulos equiláteros.

Algumas fontes atribuem sua descoberta à Pitágoras (572 a.C. - 497 a.C.) que teria descoberto o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. E a Teeteto (417 a.C. - 369 a.C.) que teria descoberto o octaedro e o icosaedro.



Os nomes sólidos Platônicos foram dados devido a forma pela qual Platão, em um diálogo intitulado Timeu, os empregou para explicar a Natureza. Platão ficou espantado

com a sua beleza e simetria, e acreditava que as formas descreviam as estruturas dos quatro elementos básicos que, conforme se pensava, compunham o Cosmos:

Fogo (tetraedro), **Ar** (octaedro), **Água** (icosaedro) e **Terra** (cubo).

Platão decidiu que Deus usava o dodecaedro para organizar as constelações nos céus.

Observe que os Poliedros de Platão obedecem ao Teorema de Euler:

POLIEDRO	V	A	F	$V - A + F$
Tetraedro	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$
Hexaedro	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$
Octaedro	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$
Dodecaedro	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$
Icosaedro	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$

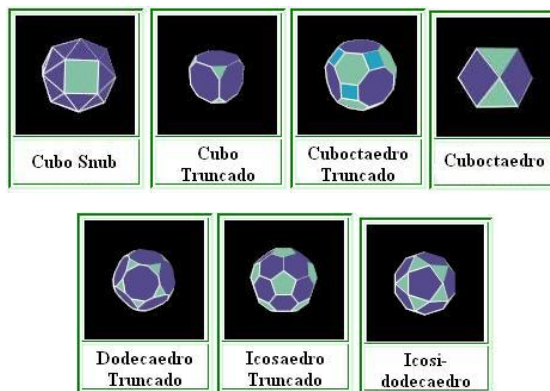
Exemplo 1.2.4 Poliedros de Arquimedes:

Os poliedros semirregulares de Arquimedes são poliedros convexos, cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo.

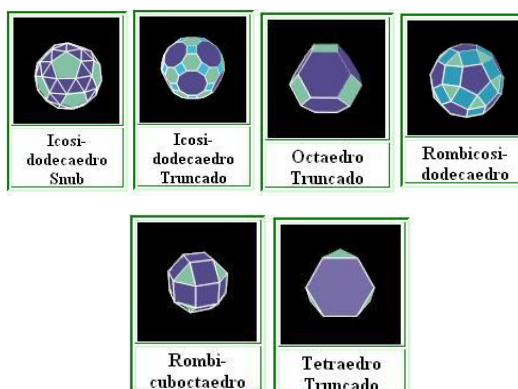
Os escritos originais de Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) que descreviam 13 poliedros semirregulares perderam-se, sendo conhecidos apenas por outras fontes.

Durante o período renascentista, os artistas redescobriram estes poliedros, exceto sobre um. Em 1619, Kepler apresentou o conjunto inteiro no seu livro *Harmonices Mundi* (*A Harmonia do Mundo*).

Segue abaixo os 13 poliedros semirregulares de Arquimedes:



Note que estes poliedros também obedecem ao Teorema de Euler:



POLIEDROS	V	A	F	TIPOS DE FACE	$V - A + F$
Cubo Snub	24	60	38	6 quadrados, 32 triângulos e 12 quadrados	$24 - 60 + 38 = 2$
Cubo Truncado	24	36	14	6 octógonos e 8 triângulos	$24 - 36 + 14 = 2$
Cuboctaedro Truncado	48	72	26	6 octógonos, 8 hexágonos e 12 quadrados	$48 - 72 + 26 = 2$
Cuboctaedro	12	24	14	6 quadrados e 8 triângulos	$12 - 24 + 14 = 2$
Dodecaedro Truncado	60	90	32	12 decágonos e 20 triângulos	$60 - 90 + 32 = 2$
Icosaedro Truncado	60	90	32	12 pentágonos e 20 hexágonos	$60 - 90 + 32 = 2$
Icosidodecaedro	30	60	32	12 pentágonos e 20 triângulos	$30 - 60 + 32 = 2$
Icosidodecaedro Snub	60	150	92	12 pentágonos e 80 triângulos	$60 - 150 + 92 = 2$
Icosidodecaedro Truncado	120	180	62	12 decágonos, 20 hexágonos e 30 quadrados	$120 - 180 + 62 = 2$
Octaedro Truncado	24	36	14	6 quadrados e 8 hexágonos	$24 - 36 + 14 = 2$
Rombicosidodecaedro	60	120	62	12 pentágonos, 30 quadrados e 20 triângulos	$60 - 120 + 62 = 2$
Rombicuboctaedro	24	48	26	8 triângulos e 18 quadrados	$24 - 48 + 26 = 2$
Tetraedro Truncado	12	18	8	4 triângulos e 4 hexágonos	$12 - 18 + 8 = 2$

Observação 1.2.5 *O Icosaedro Truncado é um sólido particularmente interessante considerando que,*

(a) *durante muito tempo foi utilizado como modelo da bola de futebol.*



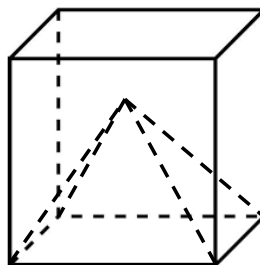
(b) *Foi a configuração usada para a disposição das lentes que focaram as ondas de choque explosivas dos detonadores, provocadas pelas bombas atômicas sobre Nagasaki (Japão) na Segunda Guerra Mundial.*

(c) *Nos anos 80 do século XX, os químicos conseguiram criar uma molécula de carbono com 60 átomos nos vértices de um icosaedro truncado. As chamadas Buckyballs possuem propriedades químicas e físicas fascinantes que estão a ser exploradas em lubrificantes e no tratamento contra a SIDA (Síndrome da Imunodeficiência Adquirida, AIDS).*

Todavia, a fórmula de Euler não está restrita a poliedros convexos. Como podemos observar nos exemplos abaixo:

Exemplo 1.2.6 *Poliedro não-convexo:*

A figura abaixo possui uma pirâmide em seu interior, mas não possui a face do fundo.



Note que o poliedro acima possui 9 vértices, 16 arestas e 9 faces, logo

$$V - A + F = 9 - 16 + 9 = 2.$$

Portanto satisfaz o Teorema de Euler.

Exemplo 1.2.7 Observe agora, os seguintes poliedros não convexos:

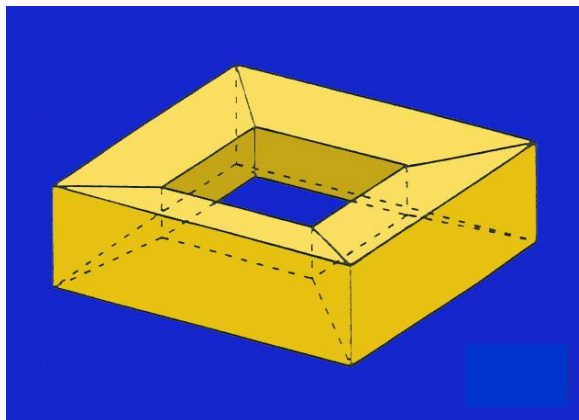


Figura 1.1: Caixa com um buraco

No caso em que o poliedro possui um buraco, podemos verificar que ele possui 16 vértices, 32 arestas e 16 faces, logo

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Ou seja, este poliedro não obedece ao Teorema de Euler.

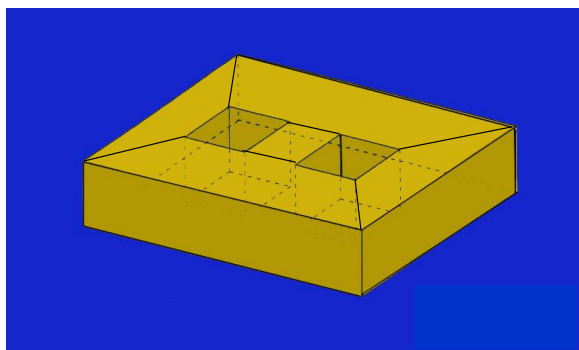


Figura 1.2: Caixa com dois buracos

No caso do poliedro com dois buracos, verificamos que ele possui 24 vértices, 48 arestas e 22 faces, logo

$$V - A + F = 24 - 48 + 22 = -2.$$

Ou seja, este poliedro também não obedece ao Teorema de Euler. E o mais intrigante é que $V - A + F$ é um número inteiro negativo!!

Diante dos poliedros observados nos exemplos notamos uma contradição no enunciado do Teorema de Euler, ou seja, a relação

$$V - A + F = 2$$

não é verdadeira para qualquer tipo de poliedro.

Os contra-exemplos para a Fórmula de Euler, a medida que surgiam, provocaram na comunidade matemática uma polêmica sobre para que classe de poliedros a Fórmula de Euler era verdadeira. O que estava faltando na demonstração dada por Cauchy? Apenas no final do século XVIII e no século XIX estas questões foram aos poucos sendo esclarecidas. Na verdade, foi necessário muito tempo para se compreender que este problema de Euler não é um problema de Geometria Euclidiana e sim um problema de Topologia. Uma área que na época ainda não tinha sido explorada, ou estava nos seus primórdios.

Neste sentido, focamos em responder às seguintes questões:

1. Para que classe de poliedros o Teorema de Euler é verdadeiro?
2. O teorema de Euler pode ser generalizado para outra classe de objetos?

Como veremos a Fórmula de Euler não está restrita a poliedros. Podemos aplicá-la, em particular, para superfícies. E é isso que faremos posteriormente.

Introdução à Topologia

Neste capítulo vamos apresentar uma breve história da Topologia, bem como introduzir conceitos básicos, necessários para compreender os propósitos desta teoria, entre eles destacamos continuidade e homeomorfismo.

Dado um conjunto não vazio qualquer, podemos estudá-lo do ponto de vista matemático, sob vários aspectos. Numa abordagem algébrica, outras vezes de um ponto de vista geométrico ou analítico. De modo que sob a ótica estabelecida, queremos que determinadas propriedades sejam preservadas. Ou ainda, queremos num certo sentido, classificar os objetos que satisfazem determinada propriedade.

Em matemática, os elementos ponto, reta e plano são considerados primitivos, ou seja, são conceitos aceitos sem definição. Intuitivamente, uma superfície é um objeto geométrico bi-dimensional, em que localmente numa pequena vizinhança, é como se estivéssemos em um pedaço do plano. Uma definição mais formal será dada posteriormente.

Por exemplo, se estamos estudando superfícies sob a ótica da geometria, não seria interessante que meu objeto sofresse uma deformação, pois propriedades geométricas como ângulo, área, distância entre dois pontos, curvatura, entre outras, não seriam preservadas após esta deformação, ou seja, estas propriedades não são invariantes por deformação. Entretanto tais propriedades são preservadas, por exemplo, quando efetuamos um movimento rígido da superfície, como uma translação ou uma rotação.

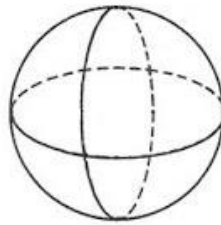
Por outro lado, poderíamos agora estar interessados em estudar propriedades das superfícies que não se alteram quando esticamos ou encolhemos um pouco a superfície.

Intuitivamente a Topologia é o ramo da Matemática que estuda propriedades das figuras geométricas que não se alteram quando realizamos determinadas deformações do nosso objeto, como esticar, encolher ou inflar. Formalmente a Topologia estuda propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob transformações topológicas ou

homeomorfismos. Estes conceitos serão definidos na próxima seção.

Exemplo 2.0.8 *A esfera é um exemplo de superfície. Intuitivamente, um objeto que se assemelha com o conceito de esfera é a bola de futebol (mas na verdade o conceito matemático de superfície é um objeto que não existe na realidade).*

Suponhamos uma decomposição da esfera como abaixo, em que cada pedaço pode ser visto como um triângulo na superfície da esfera, mesmo que o conceito de triângulos numa superfície ainda não tenha sido definido.



Neste caso podemos verificar que $V = 6$, $A = 12$ e $F = 8$, logo

$$V - A + F = 2.$$

Observe que o exemplo acima ilustra apenas que com esta “triangulação” da esfera, o resultado de Euler é verdadeiro. Mas seria verdade para uma outra dada triangulação?

Agora imagine que pudéssemos inflar a esfera ou que ela estivesse murcha. Neste caso a decomposição em triângulos que fizemos não seria alterada, tampouco o resultado de Euler. Este portanto é um conceito topológico.

A seguir, vamos descrever sucintamente um pouco sobre a história da Topologia.

2.1 História da Topologia

Grandes matemáticos como Euler, Descartes, Cauchy, Gauss, Möbius, Riemann, Poincaré, entre outros, abordaram problemas de Topologia.

No final do século XVII, Leibniz utilizou o termo *Geometria Situs* para designar uma espécie de matemática qualitativa, que hoje poderia ser considerada como fazendo parte da Topologia. Euler em 1736 abordou, no problema das pontes de Königsberg, uma questão de topologia de grafos lineares. Todavia Euler não deve ter observado que a Fórmula de Euler também era um problema desta natureza.

Outro matemático fantástico foi o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ele se utilizou muitas vezes de técnicas topológicas. Inclusive das diversas demonstrações que apresentou do Teorema Fundamental da Álgebra (que é um teorema puramente algébrico), duas delas foram dadas utilizando conceitos topológicos. Neste período, a Topologia era conhecida por *Analysis Situs*.

Topologia vem do grego

Topos (local) + *logos* (estudo).

O termo Topologia apareceu em 1847, no livro *Vorstudien zur Topologie* de J. B. Listing (1808-1882), que foi discípulo de Gauss. Mas foi o matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), dos discípulos de Gauss, o que mais contribuiu para a Topologia, introduzindo conceitos topológicos no estudo da teoria das funções de uma variável complexa, além da famosa superfície de Riemann.

Outro matemático que teve seu nome gravado na história da Topologia foi August Ferdinand Möbius (1790-1868). Em 1858 ele recebeu um prêmio da Academia de Paris sobre a teoria geométrica dos poliedros. A este matemático alemão temos associado a superfície chamada faixa de Möbius, objeto que possui uma única face e um único bordo. Möbius introduziu também a noção de triangulação no estudo de objetos geométricos do ponto de vista topológico. Möbius também foi aluno de Gauss e deve-se a ele a definição precisa de transformação topológica.

Todavia, o primeiro artigo significativo totalmente dedicado à Topologia deve-se ao grande matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912). Sob o título de *Analysis Situs* este artigo foi publicado em 1895, e nele Poincaré introduziu a teoria da Homologia em dimensão n .



Poincaré foi matemático, físico e filósofo da ciência. Se doutorou em matemática em 1879, orientado por Charles Hermite. Foi nomeado professor de física e matemática na Sorbonne (1881), posto que manteve até sua morte.

No âmbito das matemáticas aplicadas estudou numerosos problemas sobre óptica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, mecânica quântica, teoria da relatividade e cosmologia.

Poincaré foi considerado o último universalista da matemática, ele notou que o Teorema de Euler não era um problema de Geometria e sim de Topologia. Ele observou também que $V - A + F$ é um invariante topológico, conforme veremos a seguir.

2.2 Espaços Métricos

No que segue, vamos introduzir alguns conceitos básicos de Topologia necessários para compreender o Teorema de Euler.

Um conceito fundamental é o de continuidade, e para tanto precisamos considerar uma vizinhança de um dado ponto. Estes conceitos são bastantes intuitivos quando o espaço em que se está trabalhando possui uma métrica, ou seja, existe uma maneira de se medir distância entre dois pontos deste espaço. Mas isto não é necessário para a Topologia, onde a noção de continuidade pode ser definida num espaço mais abstrato.

Contudo, como o nosso propósito é ser o mais intuitivo possível, vamos nos restringir ao caso em que temos um espaço métrico.

Definição 2.2.1 *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(i) $d(x, x) = 0$;

(ii) se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica para M .

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2.2 *A métrica “zero-um”.*

Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico definindo a seguinte aplicação:
 $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d(x, x) = 0 \quad e \quad d(x, y) = 1,$$

se $x \neq y$.

De fato, as condições acima são verdadeiras:

(i) pela definição;

(ii) se $x \neq y$, temos, pela definição que $d(x, y) = 1 > 0$;

(iii) se $x = y$ então $d(x, y) = d(x, x) = 0 = d(y, y) = d(y, x)$.

Mas se $x \neq y$ então $d(x, y) = 1$ e $d(y, x) = 1$, logo $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) se $x = y = z$ então $d(x, z) = 0 = 0 + 0 = d(x, y) + d(y, z)$.

Se $x = y \neq z$ então $d(x, z) = 1 = 0 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.

Mas se $x \neq y \neq z$ então $d(x, z) = 1$, $d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 1$, logo $d(x, z) = 1 < 1 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.

Portanto, a função d acima é uma métrica.

Exemplo 2.2.3 *O conjunto \mathbb{R} dos números reais é um espaço métrico. De fato, vamos definir uma distância (ou métrica) entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$. Seja*

$$d(x, y) = |x - y|,$$

onde $|\cdot|$ representa o módulo de um número real.

As condições (i) a (iv) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais, de fato

(i) $d(x, x) = |x - x| = 0$;

(ii) se $x \neq y$ então $d(x, y) = |x - y| > 0$;

(iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Esta é a chamada “métrica usual” da reta.

Exemplo 2.2.4 O Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço métrico.

Denotemos por \mathbb{R}^n o conjunto das n -uplas ordenadas de números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, definimos a função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Vamos provar que a função d define uma distância entre x e y .

(i) $d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0 + \dots + 0} = 0;$

(ii) se $x \neq y$ então

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} > 0;$$

(iii) como $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2; \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, então

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d(y, x);$$

(iv) esta condição segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver por exemplo [Li1]).

Observação 2.2.5 É fácil verificar que as funções

$$d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

dadas por

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

e

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

também são métricas do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Para formalizar o conceito de vizinhança de um ponto num espaço métrico vamos definir o conceito de bolas.

Definição 2.2.6 *Seja a um ponto num espaço métrico M com uma métrica d . Dado um número real $r > 0$, definimos:*

(i) *a bola aberta de centro a e raio r como sendo o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M , cuja distância ao ponto a é menor do que r , ou seja,*

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

(ii) *a bola fechada de centro a e raio r , como sendo o conjunto $B[a; r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor ou igual que r , isto é,*

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

(iii) *a esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a; r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x, a) = r$. Assim,*

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Exemplo 2.2.7 *Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, pois $x \in B(a; r)$ se, e somente se,*

$$|x - a| < r \Leftrightarrow -r < x - a < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r.$$

Analogamente, $B[a; r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$.

E a esfera $S(a; r)$ tem apenas dois pontos, que são os extremos do intervalo $[a - r, a + r]$, ou seja,

$$S(a; r) = \{a - r, a + r\}.$$

Exemplo 2.2.8 *Considere \mathbb{R}^2 com a métrica usual dada por*

$$d((x, y), (z, w)) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2}.$$

Assim, a bola aberta de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r é

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; d((x, y), (a_1, a_2)) < r\},$$

ou seja,

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r \iff (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2.$$

Assim, a bola aberta $B(a; r)$ em \mathbb{R}^2 é o interior de uma circunferência de centro a e raio r . A bola fechada é dada por

$$B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r),$$

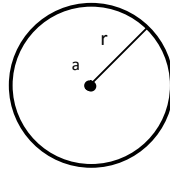
onde a esfera

$$S(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2\}$$

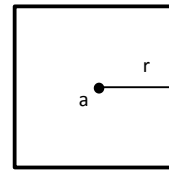
é a circunferência de centro a e raio r .

Se considerarmos as métricas d'' e d' é fácil observar que a bola aberta de centro a e raio r é o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos ambas de comprimento $2r$, respectivamente.

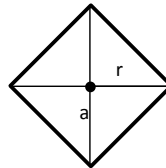
A esfera $S(a; r)$ é o bordo da figura correspondente.



$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2$$



$$|x - a_1| \leq r \text{ e } |y - a_2| \leq r$$



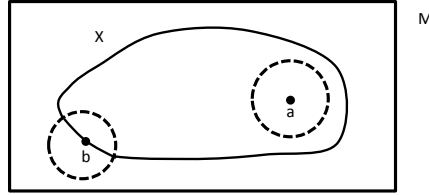
$$|x - a_1| + |y - a_2| \leq r$$

Estabelecido as noções de bola aberta, bola fechada e esfera, podemos definir mais geralmente os conceitos de conjunto aberto, conjunto fechado e fronteira de um conjunto.

Definição 2.2.9 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $a \in X$ diz-se um ponto interior a X quando é centro de uma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r$ implica que $x \in X$.*

Definição 2.2.10 *Um conjunto A de um espaço métrico M diz-se aberto em M quando todos os seus pontos são interiores.*

Definição 2.2.11 A fronteira de X em M é o conjunto ∂X , formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.



Na figura acima a é um ponto interior a X e b pertence a fronteira de X .

Proposição 2.2.12 Dado um espaço métrico M , uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração: Seja $x \in B(a; r)$. Então $d(a, x) < r$ e portanto $s = r - d(a, x)$ é um número positivo.

Vamos provar que $B(x; s) \subset B(a; r)$. De fato, se $y \in B(x; s)$ então $d(x, y) < s$ e portanto

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r.$$

Logo $y \in B(a; r)$. ■

Definição 2.2.13 Num espaço métrico M um conjunto V é dito uma vizinhança de um ponto $a \in M$ se, e somente se, V contém um aberto que contém a .

Ou seja, fixada uma métrica, as vizinhanças estão determinadas. Se não estivermos num espaço métrico, basta definir quais propriedades são necessárias para termos um sistema de vizinhanças bem definido.

Definição 2.2.14 Um conjunto F de um espaço métrico M é dito fechado em M quando seu complementar $M - F$ é aberto em M .

Exemplo 2.2.15 Num espaço métrico M , toda bola fechada $B[a; r]$ é um subconjunto fechado de M , pois seu complementar é aberto (ver [Li1]).

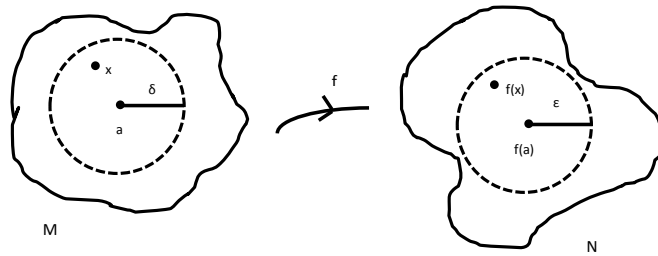
2.2.1 Funções Contínuas e Homeomorfismos

A continuidade é um conceito muito importante na matemática, que apresentamos abaixo:

Definição 2.2.16 *Sejam M, N espaços métricos, com as métricas d_M e d_N , respectivamente. Dizemos que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos de M .*

Equivalentemente, podemos definir que $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$, quando para qualquer bola $B' = B(f(a), \epsilon)$ de centro $f(a)$ e raio ϵ , pode-se encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$ de centro a e raio δ , tal que $f(B) \subset B'$.

No caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implica $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$, ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.



Proposição 2.2.17 *A composta de aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a e $g : N \rightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então,*

$$g \circ f : M \rightarrow P$$

é contínua no ponto a .

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, a continuidade de g no ponto $f(a)$ nos permite obter $\lambda > 0$ tal que $y \in N$,

$$d(y, f(a)) < \lambda \implies d(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ tal que $x \in M$,

$$d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \lambda \implies d(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon.$$

■

Definição 2.2.18 Dizemos que $f : M \longrightarrow N$ admite inversa se existe $f^{-1} : N \longrightarrow M$ tal que

$$f \circ f^{-1} = Id_N \quad e \quad f^{-1} \circ f = Id_M,$$

onde Id_M e Id_N são as aplicações identidades de M e N , respectivamente.

Apresentamos no início deste capítulo uma noção intuitiva de Topologia, que não distingue dois objetos ao esticar ou inflar, ou mais formalmente, do ponto de vista da topologia, não distinguimos dois objetos que são homeomorfos, conceito que definiremos abaixo:

Definição 2.2.19 Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N , ou uma transformação topológica, é uma bijeção contínua $f : M \longrightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.

Com o intuito de darmos alguns exemplos, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.20 Seja $f : M \longrightarrow N$ contínua. Então $Graf(f)$ é homeomorfo a M .

Demonstração: O gráfico de f é definido por:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)); x \in M\} \subset M \times N.$$

Sejam $h : M \longrightarrow Graf(f)$ dada por $h(x) = (x, f(x))$ e $g : Graf(f) \longrightarrow M$ definida por $g(x, f(x)) = x$.

Claramente g é contínua, pois é uma projeção. E h é contínua pois f o é, e é possível provar que uma aplicação é contínua se, e somente se, cada coordenada é contínua. E ainda,

$$h \circ g(y, f(y)) = h(y) = (y, f(y)) = Id_{Graf(f)}(y, f(y))$$

e

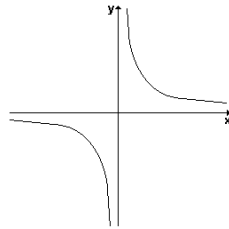
$$g \circ h(x) = g(x, f(x)) = x = Id_M(x).$$

Ou seja, g é a inversa de h . ■

O resultado acima garante que se temos uma aplicação contínua f , seu domínio pode ser deformado continuamente no gráfico de f e vice-versa.

Exemplo 2.2.21 O espaço $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é homeomorfo à hipérbole

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}.$$



De fato, $H = \text{Graf}(f)$, onde $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

E sabemos que f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Logo, pela proposição anterior, o domínio de f que é \mathbb{R}^* é homeomorfo à $\text{Graf}(f) = H$. Ou seja, é como se imaginássemos que cada ramo da hipérbole pode ser esticado de modo a cobrir a reta, exceto a origem.

Exemplo 2.2.22 Todo intervalo aberto da reta é homeomorfo a \mathbb{R} .

Considere as funções contínuas

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (a, +\infty) \quad e \quad g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a + e^x \quad y \mapsto \log(y - a).$$

Notemos que

$$f \circ g(y) = f(\log(y - a)) = a + e^{\log(y - a)} = a + y - a = y,$$

$$g \circ f(x) = g(a + e^x) = \log(e^x) = x.$$

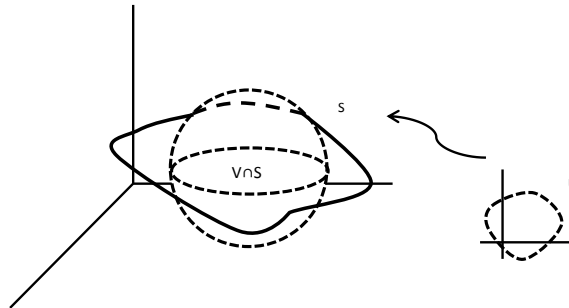
Logo f é a inversa de g e vice-versa, portanto existe um homeomorfismo entre o intervalo $(a, +\infty)$ e a reta \mathbb{R} . Analogamente, provamos o homeomorfismo para intervalos do tipo $(-\infty, b)$ e a reta \mathbb{R} .

A Característica de Euler-Poincaré para Superfícies

Neste capítulo vamos estender a Fórmula de Euler para poliedros, para uma classe mais geral que são as superfícies. Iremos abordar na verdade alguns exemplos da classe das superfícies compactas orientáveis. Não temos a pretensão de apresentar todos os conceitos abstratos e resultados avançados de Topologia, que foram de fundamental importância para resolver uma série de problemas, em particular o problema proposto por Euler, mas o de motivar o leitor a descobrir o quanto a topologia revolucionou o pensamento matemático.

3.1 Superfícies

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície se, para cada $p \in S$ existe uma vizinhança V em \mathbb{R}^3 e um homeomorfismo $h : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$.

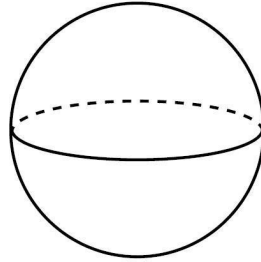


Intuitivamente, superfície é uma colagem de subconjuntos abertos do plano. Ou seja, numa superfície, localmente estamos num pedaço do plano.

Para nossos propósitos vamos considerar superfícies que não se auto-interceptam. Na verdade são as chamadas superfícies regulares (para mais detalhes ver [Ca]).

Abaixo apresentamos alguns exemplos de superfícies:

Exemplo 3.1.1 *Considere \mathbb{R}^3 com a métrica usual. Definimos o que significa uma esfera de centro a e raio r .*



No caso particular da esfera de centro na origem $O = (0, 0, 0)$ e raio igual a 1, denotamos usualmente por

$$S^2 = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; d(P, O) = 1\},$$

ou ainda,

$$d(P, O) = d((x, y, z), (0, 0, 0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Assim, $d(P, O) = 1$ se, e somente se, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$, ou ainda,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Portanto,

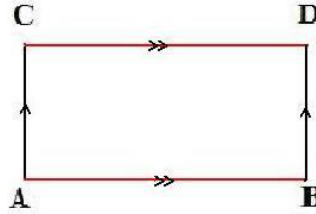
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Mais geralmente, a esfera de centro no ponto $C = (a, b, c)$ e raio r é dada por

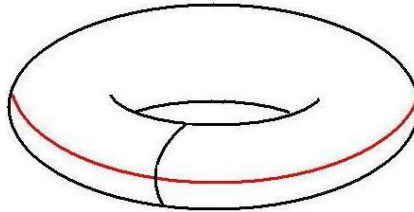
$$S(C; r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}.$$

Exemplo 3.1.2 O Toro, denotado por T , pode ser construído a partir de colagens dos lados de um retângulo.¹

Seja um retângulo de lados $ABDC$ com a seguinte regra de colagem.

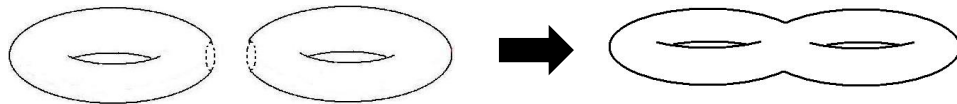


Primeiro cole o segmento AB com o segmento CD , em seguida cole AC com BD . A figura obtida em \mathbb{R}^3 é o que chamamos de Toro.



Exemplo 3.1.3 Dados duas superfícies M e N podemos construir uma nova superfície por um processo denominado soma conexa de M e N , que consiste em remover uma pequena região circular de cada uma das superfícies e em seguida colar o bordo circular de uma no bordo circular da outra.

Por exemplo, a soma conexa de dois toros é chamado de bitoro.



Mais geralmente, fazendo a soma conexa de n toros obtemos o chamado n -toro.

Exemplo 3.1.4 O parabolóide elíptico

Na forma canônica as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

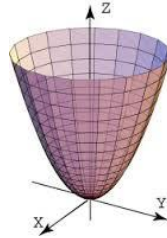
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax,$$

¹A formalização do conceito de colagem é dada pela Topologia quociente (para detalhes ver [Li3]).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

onde a, b, c são números reais não nulos, são denominadas parabolóides elípticos.



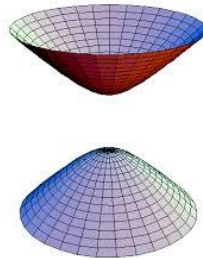
A equação que representa o parabolóide elíptico da figura acima é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

Definição 3.1.5 Um subconjunto V de um espaço métrico é dito conexo se V admite somente a decomposição trivial, ou seja, se $V = V_1 \cup V_2$ então $V_1 = V$ e $V_2 = \emptyset$ ou $V_1 = \emptyset$ e $V_2 = V$. Quando V admite uma decomposição não trivial $V = V_1 \cup V_2$, dizemos que V é desconexo e cada V_i , $i = 1, 2$ é chamado de componente conexa de V .

Os exemplos acima são superfícies conexas. Abaixo veremos uma superfície com duas componentes conexas.

Exemplo 3.1.6 O hiperbolóide de duas folhas



Na forma canônica as superfícies definidas, respectivamente, pelas seguintes equações do segundo grau:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde a, b, c são números reais positivos, são denominadas hiperbolóides de duas folhas.

A classe de superfícies que nos interessam são as chamadas superfícies compactas. Para definirmos corretamente compacidade seria necessário introduzir diversos conceitos. Mas para o espaço \mathbb{R}^n , a definição feita via propriedades de conjunto compacto é na verdade um resultado. Todavia este conceito não se estende para espaços mais gerais.

Definição 3.1.7 *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita limitada se ela está contida em alguma bola em \mathbb{R}^3 .*

Definição 3.1.8 *Dizemos que uma superfície em \mathbb{R}^3 é compacta se é fechada e limitada.*

Para o conceito de conjunto fechado ver Definição (2.2.14).

Das superfícies citadas acima, notemos que a esfera, o toro e o bitoro são superfícies compactas, enquanto que o parabolóide elíptico e o hiperbolóide de duas folhas não o são.

Na próxima proposição, vamos provar que se consideramos o hemisfério norte da esfera S^2 , sem o equador, e o achatamos no plano, vamos obter a bola aberta de centro na origem e raio 1. Mas se retirarmos apenas um ponto da esfera ela fica homeomorfa ao plano.

Proposição 3.1.9 *O hemisfério norte de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, denotado por S_+^2 é homeomorfo a bola aberta $B((0, 0); 1) \subset \mathbb{R}^2$.*

Demonstração: Seja $B((0, 0); 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ a bola aberta de centro $(0, 0)$ e raio 1. E considere $g : B((0, 0); 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Note que

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2; z > 0\} = \{(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}; x^2 + y^2 < 1\} = \text{Graf}(g).$$

De fato,

$$u = (x, y, z) \in S_+^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z > 0.$$

Se $v = (x, y)$, então $x^2 + y^2 < 1$ e $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. Logo

$$u = (v, z) \in S_+^2 \iff u = \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right) \iff u \in \text{Graf}(g).$$

Pela Proposição (2.2.20) temos que $S_+^2 = \text{Graf}(g)$ é homeomorfo à $B((0, 0); 1)$. ■

Proposição 3.1.10 *A esfera $S^2 \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa à \mathbb{R}^2 , ou seja, a esfera menos o pólo norte é homeomorfo ao espaço \mathbb{R}^2 .*

Demonstração: Consideremos uma imersão \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 associando $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$. Temos uma aplicação injetiva de \mathbb{R}^2 no plano $z = 0$ em \mathbb{R}^3 .

Considere $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e a aplicação

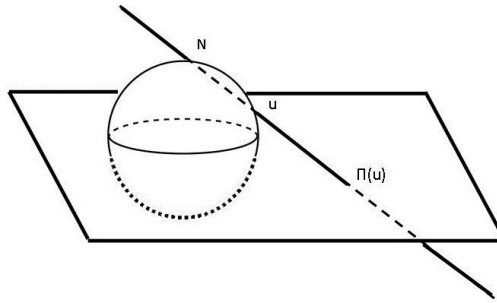
$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

que associa a cada ponto $u = (x, y, z)$ da esfera, um ponto no plano $z = 0$ obtido da interseção da reta que passa por N e u com o plano, onde N é o pólo norte $(0, 0, 1)$. É fácil verificar que

$$\pi(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y, 0),$$

cuja inversa é

$$\pi^{-1}(x, y, 0) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$



Note que $\pi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$ são contínuas nos seus respectivos domínios. Logo π é um homeomorfismo. Para mais detalhes ver [Li2].

A aplicação π é chamada de projeção estereográfica. ■

3.2 A Característica de Euler-Poincaré

Com o propósito de estendermos a Fórmula de Euler para superfícies, precisamos definir o que significa vértices, arestas e faces de uma superfície.

Definição 3.2.1 *Uma região R contida numa superfície S é dita regular se R é conexo, compacto e sua fronteira ∂R é a união disjunta finita de curvas simples fechadas regulares por partes.*

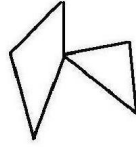


Figura 3.1: Figura não Regular

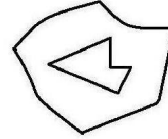


Figura Regular

Uma curva simples significa que ela não se auto-intercepta e regular por partes quer dizer que ela apenas deixa de ter uma reta tangente à curva, num número finito de pontos. Os pontos onde a curva deixa de ser regular são chamados vértices da curva.

Definição 3.2.2 *Uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S é simples se ela é homeomorfa a uma bola fechada.*

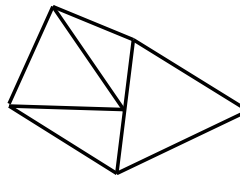
Uma região simples que possui apenas três vértices com ângulos externos $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ é chamado um triângulo.

Definição 3.2.3 *Uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita de triângulos $T_i = 1, \dots, n$ tais que*

$$(i) \bigcup_{i=1}^n T_i = R$$

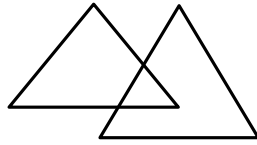
(ii) *Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, então $T_i \cap T_j$ é um lado comum de T_i e T_j ou é um vértice comum de T_i e T_j .*

Observe a triangulação a seguir:



Note que se trata de uma triangulação não permitida, uma vez que um vértice encontra na metade da aresta.

Assim como não é permitida a seguinte triangulação:



pois os triângulos estão sobrepostos.

Um Teorema importante neste contexto é garantir que é possível uma tal triangulação. O primeiro a provar que uma superfície conexa, compacta pode ser triangulada foi Tibor Radó (1895-1965) em [R]. Uma prova deste resultado também pode ser encontrada em [AS].

Teorema 3.2.4 *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície S . Então, existe uma triangulação T de R .*

Dada uma triangulação T de uma região regular R de uma superfície S , vamos denotar por V o número de vértices, A o número de arestas e por F o número de faces triangulares da triangulação.

Definição 3.2.5 *Dada S uma superfície compacta, com uma triangulação T , o número*

$$\chi(S) = V - A + F$$

é chamado de Característica de Euler-Poincaré da triangulação.

A princípio este conceito dependeria da triangulação escolhida. Mas o mais interessante é que de fato, a Característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação. Este é um resultado altamente não trivial de demonstrar. Os resultados abaixo serão apresentados sem demonstração devido ao grau de complexidade do problema (ver por exemplo [H]).

Teorema 3.2.6 *Se $R \subset S$ é uma região regular de uma superfície S , a Característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de R .*

Teorema 3.2.7 *Se S_1 e S_2 são superfícies compactas homeomorfas, então*

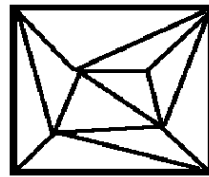
$$\chi(S_1) = \chi(S_2).$$

O resultado acima mostra que a Característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico da superfície, ou seja, a Característica de Euler-Poincaré é preservada por homeomorfismo. Em seguida, vamos apresentar alguns exemplos.

Proposição 3.2.8 *Seja Q um quadrado. Então*

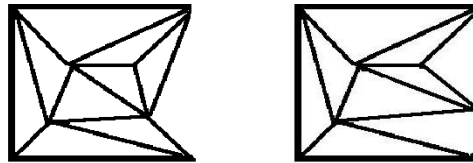
$$\chi(Q) = 1.$$

Demonstração: Considere uma triangulação qualquer de Q .



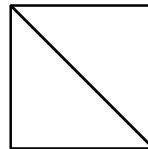
Sejam V , A e F o número de vértices, arestas e faces da triangulação, respectivamente. Vamos retirar um dos triângulos adjacentes ao bordo do quadrado. Note que, do ponto de vista topológico, podemos esticar os lados dos triângulos, de modo a deformar a figura num novo quadrado Q_1 que possui uma triangulação com V vértices, $A - 1$ arestas e $F - 1$ faces. Logo

$$\chi(Q_1) = V - (A - 1) + F - 1 = V - A + F = \chi(Q).$$



Note que, podemos continuar este processo retirando triângulos adjacentes ao bordo e reobtendo um novo quadrado cuja característica de Euler-Poincaré permanece invariante.

Portanto, continuando este processo vamos obter a seguinte triangulação para o quadrado:



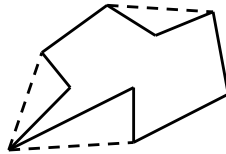
Logo,

$$\chi(Q) = V - A + F = 4 - 5 + 2 = 1.$$

■

Corolário 3.2.9 *A Característica de Euler-Poincaré para um polígono qualquer é igual a 1.*

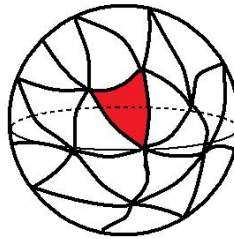
Demonstração: Considere uma triangulação para um polígono qualquer. Acrescente alguns triângulos, se necessário, de modo a termos um polígono convexo. Analogamente ao que argumentamos no resultado anterior, se retiramos ou acrescentamos triângulos adjacentes ao bordo, a Característica de Euler-Poincaré não se altera. De posse agora de um polígono convexo, vamos deformá-lo num quadrado. Note que, todos estes procedimentos não alteram a Característica de Euler-Poincaré, que é um invariante por homeomorfismo.



Como o polígono original foi deformado continuamente num quadrado cuja característica de Euler-Poincaré é igual a 1, temos o resultado. ■

Proposição 3.2.10 $\chi(S^2) = 2$, onde S^2 é a esfera.

Demonstração: Considere uma triangulação qualquer da esfera. Remova um dos triângulos.



Vimos na Proposição (3.1.9) que o hemisfério norte da esfera é um homeomorfo à bola aberta do plano. Analogamente, se retiramos um triângulo, então a figura resultante (ou seja, a esfera faltando um pedaço homeomorfo a um triângulo) é homeomorfo a um subconjunto K do plano. Tal figura K é homeomorfa a um polígono, que continuaremos denotando por K , portanto pelo corolário anterior possui Característica de Euler-Poincaré igual a 1.

Entretanto, considerando a triangulação de K e da esfera observamos que o número de arestas e vértices não foi alterado, apenas K possui uma face a menos que a esfera.

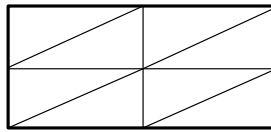
Portanto,

$$\chi(S^2) = \chi(K) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

■

Proposição 3.2.11 $\chi(T) = 0$, em que T é o toro.

Demonstração: Sabemos que a Característica de Euler-Poincaré independe da triangulação. Consideremos uma triangulação para o toro visto como a colagem dos lados do retângulo R .



Sabe-se que a Característica de Euler-Poincaré de um retângulo é igual a 1. Sejam V_R , A_R e F_R o número de vértices, arestas e faces de uma triangulação do retângulo R , respectivamente.

Identificando os lados opostos de R , como na figura, para obter o toro concluímos que

$$\chi(T) = V_R - 5 - (A_R - 4) + F_R = (V_R - A_R + F_R) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

■

Observação 3.2.12 Como $\chi(S^2) = 2$ e $\chi(T) = 0$, segue do Teorema 3.2.7 que S^2 e T não podem ser homeomorfos. Ou seja, não é possível deformar (continuamente) a esfera de modo a se tornar toro.

Se tivermos duas superfícies cuja Característica de Euler-Poincaré são diferentes então elas não são homeomorfos. Todavia se elas tiverem a mesma Característica de Euler-Poincaré, elas podem ser homeomorfos ou não. Ou seja, este invariante não é suficiente para distinguir duas superfícies com respeito a homeomorfismo. Então que invariantes são suficientes para distinguir duas superfícies conexas e compactas?

Se tivermos, por exemplo, uma condição de orientabilidade mais a Característica de Euler-Poincaré isso é possível. De uma maneira intuitiva, uma superfície é orientável se ela possui um lado de dentro e fora bem definidos (para uma definição mais formal, ver ([Ca])).

A faixa de Möbius é um exemplo clássico de superfície que não é orientável. Ela possui um único lado.



Se começarmos caminhando por fora dela, num dado momento já estamos por dentro, sem tirarmos os pés da faixa. O mesmo não ocorre com a esfera, o toro e o n -toro em geral, que são superfícies orientáveis.

O importante teorema abaixo apresenta uma fórmula para a Característica de Euler-Poincaré de superfícies compactas, conexas e orientáveis, em termos do que chamamos o gênero da superfície. No caso de superfícies orientáveis, o gênero g é o número de buracos que a superfície possui.

Teorema 3.2.13 (*Theorem 3.5 [H]*) *Seja S uma superfície conexa, compacta e orientável. Então*

$$\chi(S) = 2 - 2g,$$

onde g é o gênero de S .

Superfície	Gênero	Característica de Euler-Poincaré
Esfera	0	2
Toro	1	0
Bitoro	2	-2
Tritoro	3	-4

Observe que exceto o toro que possui Característica de Euler-Poincaré igual a zero, para o n -toro em geral este invariante é sempre um inteiro negativo. Para detalhes sobre estes resultados de um ponto de vista mais geral, veja por exemplo ([H]).

Mesmo sem apresentar as demonstrações de vários Teoremas muito importantes que mencionamos neste capítulo, o que seria inviável pela nossa proposta, tivemos a intenção de apresentar de um modo intuitivo, o quanto este resultado tão conhecido de Euler foi generalizado para objetos mais gerais como as superfícies, e que mesmo que seja apenas

através de exemplos, eles podem ser explorados em sala de aula. Levando figuras da esfera e do toro, por exemplo, é possível fazer uma triangulação destas superfícies, e descobrir com os alunos o que este grande Teorema de Euler e Poincaré nos reserva.

O Teorema de Euler para Poliedros (Revisitado)

Iniciamos este trabalho comentando o quanto a Fórmula de Euler para poliedros é interessante para motivar os estudantes, por sua simplicidade de enunciado e beleza, mas que esconde por trás deste véu conceitos avançados de Geometria e Topologia, como vimos brevemente no capítulo anterior. Assim sendo, como poderíamos justificar este teorema para estudantes e profissionais do ensino, que nunca tiveram contato com Topologia, mesmo que intuitivamente?

Uma maneira seria apresentar uma demonstração no caso particular de poliedros convexos, o qual faremos posteriormente, e cuja literatura apresenta diversas demonstrações. Claramente, como vimos em alguns exemplos, um poliedro pode ser não convexo e satisfazer o Teorema de Euler.

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy ([C1], [C2]) apresenta uma demonstração da Fórmula de Euler, que a princípio seria válida para quaisquer poliedros. As hipóteses não foram claramente estabelecidas, mas certamente ele estava pensando em poliedros homeomorfos à esfera.

Entretanto, quais são as hipóteses que o poliedro deve satisfazer para que o Teorema de Euler seja verdadeiro, sem introduzir formalmente os conceitos de Topologia? Isto certamente não é um problema trivial.

Imre Lakatos em [La] apresenta em seu livro, que essencialmente é um livro de filosofia, um diálogo em que os personagens discutem o Teorema de Euler e seus contra-exemplos. Ele apresenta também notas históricas no rodapé, contextualizando esta problemática.

Elon Lages Lima [Li2] discute a demonstração de Cauchy, apresentando passo a passo, quais são as hipóteses necessárias sobre o poliedro para que seja válido o Teorema de

Euler. Esta discussão não exige conhecimentos prévios de Topologia, mas obtém como consequência que tais hipóteses garantem que de fato o poliedro considerado é homeomorfo à esfera, complementando assim a análise crítica da demonstração de Cauchy apresentada por Lakatos. Ele também comenta sobre as demonstrações apresentadas por [CH] e [CR] para a prova de Cauchy.

Não vamos apresentar esta versão do Teorema de Euler para poliedros, dada por Elon Lima em [Li2], mas vamos dar uma ideia da discussão que ele apresenta para a prova de Cauchy, para compreendermos melhor este problema.

Num primeiro momento, a primeira coisa a se fazer é definir poliedros, de modo que o Teorema de Cauchy seja válido.

Recordemos que para calcular a Característica de Euler-Poincaré para superfícies, considerávamos uma triangulação que deveria respeitar determinadas regras (ver Definição (3.2.3)).

Analogamente vamos definir:

Definição 4.0.14 *Um poliedro P é uma reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados de faces de P . Os lados desses polígonos são chamados arestas de P e os vértices do poliedro são os vértices de suas faces. Vamos supor ainda que a interseção de duas faces distintas de P seja uma aresta comum, um vértice comum às duas faces ou vazia. Condição esta que é análoga ao que exigimos na triangulação de uma superfície (ver Definição (3.2.3)).*

Exemplo 4.0.15 *Considere o paralelepípedo como na figura*

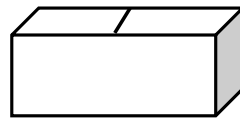


Figura 4.1: Paralelepípedo

Observe que ele não satisfaz a definição acima, pois temos interseções de faces que não são nem uma aresta, nem um vértice.

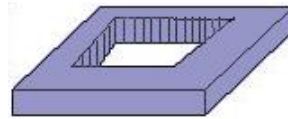
No entanto, se V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces, ainda temos que

$$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2.$$

Ou seja exigir esta regra de colagem entre faces não significa que necessariamente a Fórmula de Euler vai falhar. É simplesmente para conseguirmos ter uma regra geral que nos permita demonstrar o Teorema. Na verdade não é necessário excluir o caso da Figura (4.1), basta notar que podemos decompor este paralelepípedo em triângulos, por exemplo, de modo a respeitar as condições de triangulação.

Observação 4.0.16 *Claramente não é necessário que as faces sejam triangulares para que a Fórmula de Euler seja verdadeira. Nos exemplos dos poliedros de Platão (Exemplo (1.2.3)) e os poliedros semirregulares de Arquimedes (Exemplo (1.2.4)) as faces não são necessariamente triangulares, mas respeitam as regras da Definição (4.0.14).*

Exemplo 4.0.17 *Considere o poliedro*



Observe que neste caso $V = 16$, $A = 24$ e $F = 10$. Assim

$$V - A + F = 16 - 24 + 10 = 2.$$

Poderíamos então ser levados a acreditar que este poliedro satisfaz à Fórmula de Euler. Mas no Exemplo (1.2.7) tínhamos visto que $V - A + F = 0$. Qual resposta está correta?

Intuitivamente sabemos qual é a resposta correta. Pois se pudéssemos inflar este poliedro veríamos que ele é homeomorfo ao toro, o qual sabemos que possui Característica de Euler-Poincaré igual a zero (ver Proposição (3.2.11)).

A questão é que não podemos considerar os polígonos não convexos da tampa e do fundo como faces. Por isso na definição de poliedros pedimos faces convexas.

Observação 4.0.18 *Elon em [Li2] afirma que não é necessário pedir que as faces sejam polígonos convexas, basta pedir que os polígonos sejam simples, ou seja, que seu bordo seja uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente, sem que se passe duas vezes pelo mesmo vértice.*

Abaixo descrevemos os passos para a demonstração da Fórmula de Euler segundo Cauchy, que são exatamente as que utilizamos na demonstração topológica do cálculo da Característica Euler-Poincaré da esfera. Ou seja, ele estava pensando na verdade em poliedros homeomorfos à esfera.

Para o que segue vamos introduzir a seguinte definição:

Definição 4.0.19 *Dizemos que uma aresta de um poliedro P é livre quando a mesma é lado de apenas uma face desse poliedro. Dizemos que um vértice é livre, quando todas as arestas que se encontram nesse vértice, são arestas livres.*

Os passos são os seguintes:

1. Considerar um poliedro P como na Definição (4.0.14), com V vértices, A arestas e F faces;
2. Retira-se uma face do poliedro P , obtendo assim um novo poliedro P_1 . Observe que tal procedimento não alterou o número de arestas nem de vértices de P , entretanto diminuiu o número de faces de uma unidade;
3. Esticando P_1 a partir da face retirada, podemos projetá-lo sobre o plano. Vamos continuar denotando por P_1 a figura plana obtida;
4. O objetivo é provar que para P_1 cujos vértices, arestas e faces são V , A e F_{P_1} , respectivamente, temos $V - A + F_{P_1} = 1$, pois daí concluímos que o poliedro P satisfaz

$$V - A + F = V - A + F_{P_1} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Analisemos algumas das hipóteses necessárias sobre o poliedro para que os argumentos acima apresentados sejam válidos.

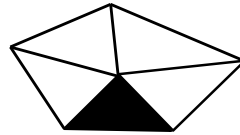
Seja P um poliedro como na Definição (4.0.14).

No passo (2), queremos retirar uma face de P . Este procedimento sempre é possível se supusermos que P possua pelo menos uma face que possa ser retirada. Seja P_1 o subpoliedro de P obtido quando retiramos uma face de P , o qual possui V vértices, A arestas e $F - 1$ faces. Neste passo vamos esticar P_1 a partir das arestas livres e projetá-lo sobre o plano. Vamos continuar denotando a figura plana obtida por P_1 e claramente não

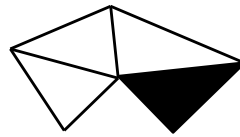
alteramos V , A e F_{P_1} , onde $F_{P_1} = F - 1$. Podemos supor então que todas as faces do poliedro são triângulos, senão basta triangular conforme a definição de poliedro.

Em seguida começa-se a “despetalar” o poliedro plano (cujas faces agora são triângulos) retirando-se uma a uma as faces que tem alguma aresta livre. Analisemos as seguintes possibilidades:

- (a) Se o triângulo retirado possui uma aresta livre, o número $V - A + F$ não altera, pois sua retirada não muda V , mas faz com que A e F diminuam ambos de uma unidade, o que deixa $V - A + F$ constante.

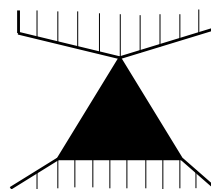


- (b) Se o triângulo retirado possui duas arestas livres, V e F diminuem uma unidade e A diminui duas unidades, o que também não altera $V - A + F$.

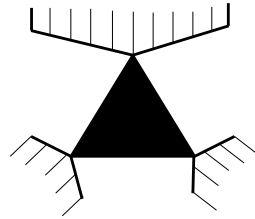


Cauchy, nesse momento da demonstração, não considerou as demais possibilidades, como descreve Elon em [Li2].

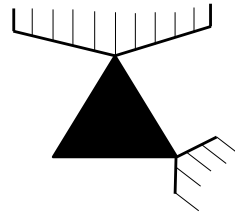
- (c) Se o triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices são livres, ao retirá-lo V não se altera, A diminui duas unidades e F diminui uma unidade, logo $V - A + F$ aumenta uma unidade. No entanto, o número de componentes conexas aumenta de uma unidade. Assim continuamos despetalando em cada componente conexa e o resultado vai seguir como antes.



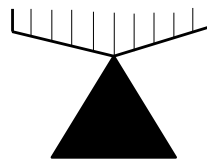
- (d) Se o triângulo a ser retirado tem três arestas livres mas nenhum dos seus vértices são livres, ao retirá-lo V não se altera, A diminui três unidades e F diminui uma unidade, logo $V - A + F$ aumenta duas unidades. Mas temos mais duas componentes conexas.



- (e) Se o triângulo a ser retirado tem três arestas livres e um vértice livre, ao retirá-lo V e F diminuem uma unidade, A diminui três unidades, logo, $V - A + F$ aumenta uma unidade, com um aumento também de mais uma componente conexa.

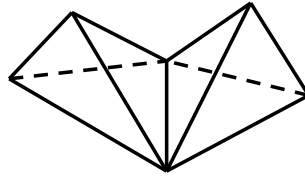


- (f) Se o triângulo a ser retirado tem três arestas livres e dois vértices livres, ao retirá-lo V diminui duas unidades, A diminui três unidades e F diminui uma unidade, o que não altera $V - A + F$.



Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.0.20 *Considere o poliedro a seguir que é a reunião de dois tetraedros com uma aresta comum:*



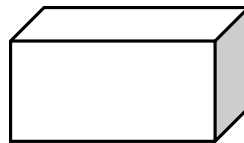
Ao retirarmos uma face do poliedro acima, conseguimos projetar no plano, os dois triângulos que sobram, mas o outro tetraedro não conseguimos projetar. Logo este é um exemplo de poliedro que contraria este procedimento que queremos adotar.

Observe que $V = 6$, $A = 11$ e $F = 8$, ou seja

$$V - A + F = 6 - 11 + 8 = 3$$

e de fato não satisfaz a Fórmula de Euler.

Exemplo 4.0.21 *Considere o paralelepípedo abaixo:*



É fácil ver que este poliedro satisfaz

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Por outro lado considere o mesmo paralelepípedo sem a tampa, que chamaremos de P_1 , o qual podemos considerar como um poliedro pois satisfaz a Definição (4.0.14).

Neste caso, temos apenas uma face a menos que no caso anterior, assim

$$V - A + F_{P_1} = V - A + F - 1 = 2 - 1 = 1.$$

O que já sabíamos, pois se o poliedro não possui tampa, podemos achatá-lo no plano, obtendo um polígono, do qual já provamos que a Característica de Euler-Poincaré é igual a 1.

Veja que poderíamos tranquilamente seguir os passos de Cauchy. Todavia, a Fórmula de Euler não vale para este poliedro.

Assim, uma hipótese necessária para a validade do Teorema de Euler, de modo a excluir casos como do exemplo anterior é pedir que:

- Toda aresta do poliedro seja lado exatamente de duas faces deste poliedro.

Veja que o paralelepípedo sem tampa não satisfaz esta hipótese.

Todavia para garantir que os procedimentos (a), (b), (c), (d), (e) e (f) são possíveis e que em cada caso o Teorema de Euler é verdadeiro, é necessário outras definições e hipóteses não tão elementares e que são exploradas em [Li2].

4.1 Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos

A demonstração a seguir se baseia no artigo do Professor Zoroastro Azambuja Filho, publicado na Revista do Professor de Matemática [F]. Azambuja acreditava que era necessário divulgar amplamente uma demonstração do Teorema de Euler que fosse ao mesmo tempo correta e acessível aos professores e alunos do Ensino Médio de nossas escolas.

Vamos definir novamente o conceito de poliedro convexo.

Definição 4.1.1 *Um conjunto C , do plano ou espaço, é dito convexo, se qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contida em C .*

Como para nossos propósitos poliedro não representa o sólido e sim apenas a superfície (“casca”), definimos:

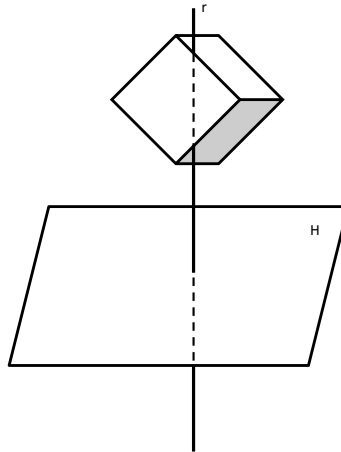
Definição 4.1.2 *Um poliedro é dito convexo se ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima.*

Nesta seção vamos considerar P um poliedro como na Definição (1.2.2), satisfazendo:

- (i) P é um poliedro convexo.
- (ii) A interseção de duas faces quaisquer de P é uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou é vazia.

(iii) Cada aresta de P é lado exatamente de duas faces de P .

Nesta abordagem é preciso estabelecer um novo ambiente. Com efeito, consideremos uma reta r qualquer que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P , e um plano H que não intercepta P e que seja perpendicular à reta r .



O plano H será chamado plano horizontal e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) são chamadas retas verticais.

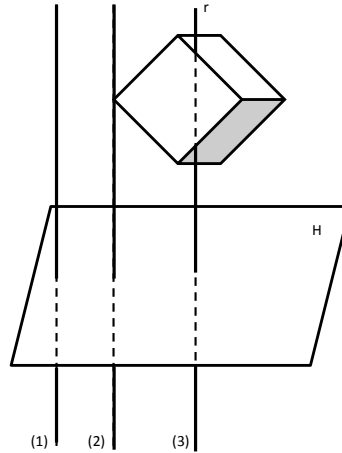
O plano H divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contém o poliedro P . Este será chamado semiespaço superior.

Para melhor ilustrar nosso raciocínio, Azambuja convida o leitor a imaginar o sol brilhando a pino sobre o semiespaço superior de modo que seus raios sejam retas verticais.

A cada ponto a do poliedro P contido no semiespaço superior corresponde um ponto a' em H , chamado sombra de a , obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por a .

A sombra de qualquer conjunto X contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto X' em H , formado pelas sombras dos pontos de X .

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo delimitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo ele pode ser vazio (1), pode ser um único ponto de P (2) ou pode ser um segmento de reta cujos extremos pertencem a P (3), conforme podemos observar na figura a seguir.



Assim, uma reta vertical qualquer somente pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P , ou ainda, cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou dois pontos de P .

A sombra P' do poliedro P é um polígono convexo no plano horizontal cujo contorno γ' é a sombra de uma poligonal fechada γ , formada pelas arestas de P . Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a γ).

A poligonal γ é chamada o contorno aparente do poliedro P . Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a γ') é sombra de dois pontos de P . Dados dois pontos de P que tem a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto iluminado; o mais baixo será chamado ponto sombrio.

Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente γ .

Azambuja ilustra com o seguinte exemplo: seja P o cubo que tem os quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces

$$AA'B'B, AA'D'D \text{ e } ABCD$$

ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal

$$A'B'BCDD'A',$$

conforme observamos nas figuras a seguir:

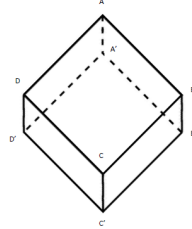


Figura: Cubo P

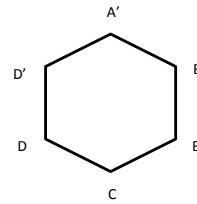


Figura: Contorno Aparente

Denotamos por P_I o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente γ . Cada ponto de P' é sombra de um único ponto de P_I , em outras palavras, existe uma correspondência biunívoca entre P_I e P' .

Denotaremos por P'_I a sombra das faces contidas em P_I , ou seja, das faces iluminadas. Observemos que se tomarmos o conjunto P_S , formado pelos pontos sombrios de P mais o contorno aparente γ , também existe uma correspondência biunívoca entre P_S e P' . Denotaremos por P'_S a sombra de P_S expressa como a reunião das sombras das faces sombrias de P , isto é, contidas em P_S .

Já observamos anteriormente que ao decompor cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteramos os números V , A e F , mas a expressão $V - A + F$ permanece constante.

Feitas as considerações anteriores, apresentamos uma demonstração do Teorema de Euler nesse novo contexto.

Teorema 4.1.3 (*Teorema de Euler*) *Seja P um poliedro convexo como na Definição (4.0.14) com F faces, A arestas e V vértices, satisfazendo as condições (ii) e (iii) acima. Então*

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que todas as faces do poliedro P são triângulos. E como cada face possui 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, temos que

$$3F = 2A. \tag{4.1}$$

Iremos calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro.

Uma vez que a soma dos ângulos internos de cada face triangular é π *radianos* e temos F faces, então

$$S = \pi \cdot F.$$

Como $F = 3F - 2F$, segue por (4.1) que

$$F = 3F - 2F = 2A - 2F.$$

Portanto,

$$S = \pi \cdot F = \pi \cdot (2A - 2F) = 2\pi A - 2\pi F. \quad (4.2)$$

Por outro lado, temos

$$S = S_I + S_S,$$

onde S_I é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_S é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

Notemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual a soma dos ângulos internos de sua sombra T' , logo S_I é igual a soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo P'_I , sombra de P_I .

Para obtermos a soma dos ângulos internos dos triângulos do polígono convexo P'_I , somaremos os ângulos vértice a vértice em vez de somá-los triângulo a triângulo.

Sejam V_I o número de vértices iluminados, V_S o número de vértices sombrios e V_γ o número de vértices do contorno aparente γ , logo

$$V = V_\gamma + V_I + V_S.$$

Notemos ainda que V_γ é também o número de vértices (e de lados) da poligonal γ' , contorno do polígono convexo P' . Em P'_I temos V_I vértices interiores (sombra dos vértices iluminados) mais V_γ vértices do contorno γ' .

Mas a soma dos ângulos de um vértice interior é 2π e a soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno γ' (que é um polígono) é dada por $\pi(V_\gamma - 2)$, pois esta é a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo com V_γ lados. Portanto

$$S_I = 2\pi \cdot V_I + \pi(V_\gamma - 2). \quad (4.3)$$

Analogamente, temos

$$S_S = 2\pi \cdot V_S + \pi(V_\gamma - 2). \quad (4.4)$$

Somando-se (4.3) e (4.4), temos

$$\begin{aligned} S &= S_I + S_S \\ &= 2\pi V_I + \pi V_\gamma - 2\pi + 2\pi V_S + \pi V_\gamma - 2\pi \\ &= 2\pi(V_\gamma + V_I + V_S) - 4\pi \\ &= 2\pi V - 4\pi. \end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.2) e (4.5), temos

$$2\pi A - 2\pi F = 2\pi V - 4\pi \implies A - F - V = -2.$$

Donde concluímos que

$$V - A + F = 2.$$

■

Esta é uma bela demonstração que pode plenamente ser compreendida pelos estudantes do Ensino Médio, justificando pelo menos no caso de poliedros convexos este Teorema de Euler que motivou inúmeros progressos na Matemática.

Considerações Finais

Neste trabalho abordamos o Teorema de Euler, mostrando que um problema aparentemente fácil, de enunciado acessível aos estudantes do Ensino Médio, por exemplo, intrigou por vários séculos os grandes matemáticos que buscavam uma solução para este problema.

Até que, com o surgimento de novos ramos da Matemática, houve um entendimento de que a Geometria não dava conta da teoria que envolvia o Teorema de Euler, uma vez que se tratava de um problema topológico.

Diante desses novos conceitos topológicos, foi possível demonstrar o Teorema de Euler e o que é mais importante entender quais são as condições necessárias para que determinado objeto geométrico o satisfaça.

Dessa forma, esse trabalho pode auxiliar professores e alunos, mais essencialmente professores, a conhecer um pouco mais sobre a história do Teorema de Euler, uma vez que procuramos fazer uma abordagem intuitiva dos conceitos avançados da Topologia, tornando esses conceitos acessíveis ao entendimento de todos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AS] Ahlfors, L. V. and Sario, L., *Riemann surfaces*. Princeton University Press, 1960.
- [Ca] Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 2010.
- [C1] Cauchy, A. L., *Recherches sur les Polyèdres*. Journal de l'École Polytechnique, 9, pp. 68-86, 1813. (Lida em fevereiro de 1811.)
- [C2] Cauchy, A. L., *Oeuvres*. 2me. partie, pp. 7-38, 1813.
- [CH] Cohen-Vossen, S. and Hilbert, D., *Geometry and the Imagination*. Chelsea, 1956.
- [CR] Courant, R. and Robbins, H., *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford Univ. Press, 1996.
- [E1] Euler, L., *Elementa Doctrinae Solidorum*. Idem, 4, pp. 109-40, 1758. (Lida em novembro de 1750.)
- [E2] Euler, L., *Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris Planis Inclusa sunt Praedita*. Idem, 4, pp. 140-60, 1758. (Lida em setembro de 1751.)
- [F] Filho, Z. A., *Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos*. Revista do Professor de Matemática, nº 3, 15-17, 1983.
- [H] Hirsch, M. W., *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1976.
- [La] Lakatos, I., *A Lógica do Descobrimento Matemático. Provas e refutações*. Cultura Científica, Zahar, 1978.
- [Li1] Lima, E. L., *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 2003.
- [Li2] Lima, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. SBM, 1997.

-
- [Li3] Lima, E. L., *Elementos de Topologia Geral*. Editora Ao Livro Técnico, 1970.
- [R] Radó, T., *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*. Acts. Litt. Sci. Szeged, 2, 101-121, 1925.
- [S] Sampaio, J., *Topologia das Superfícies: uma Introdução Intuitiva*. UFSCar.
- [SS] Semada, T. and Shiga, K., *A Mathematical Gift III. The interplay between topology, functions, geometry, and algebra*. AMS, 2003.