



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE - DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



VALÉRIA MUNIZ LIMA DE SOUSA

**CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DAS NOÇÕES DE DISCRETO
E CONTÍNUO NO AMBIENTE DA MODELAGEM MATEMÁTICA**

MARINGÁ – PR
2015

VALÉRIA MUNIZ LIMA DE SOUSA

CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DAS NOÇÕES DE DISCRETO E
CONTÍNUO NO AMBIENTE DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Lilian Akemi Kato


MARINGÁ – PR
2015

VALÉRIA MUNIZ LIMA DE SOUSA

**CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DAS NOÇÕES DE
DISCRETO E CONTÍNUO NO AMBIENTE DA MODELAGEM
MATEMÁTICA**

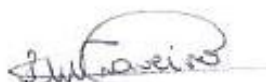
Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



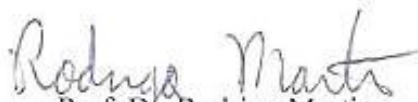
Profa. Dra. Lillian Akemi Kato

DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro

Universidade Federal da Grande Dourados – Dourados - MS



Prof. Dr. Rodrigo Martins

DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 5 de fevereiro de 2015.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Ao concluir mais uma etapa de minha carreira acadêmica, agradeço a todos que estiveram ao meu lado contribuindo direta ou indiretamente para que pudesse alcançar meus objetivos. Em especial:

A Deus, pelo dom da vida e pela graça de mais uma conquista.

Ao meu amado Anderson, companheiro de todas as horas, pelo apoio, carinho e paciência dedicados durante toda nossa vida e intensificados nesses dois anos. Pelas horas de espera, pelo caminho percorrido ao meu lado, enfim, por seu amor.

À minha família, principalmente aos meus pais, pela dedicação em me conduzir por caminhos de dignidade, pela minha formação enquanto pessoa e pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida.

À Professora Dr^a Lilian Akemi Kato, cuja orientação foi essencial para que esse trabalho se concretizasse.

Aos professores Dr. Rodrigo Martins e Dr^a Irene Magalhães Craveiro, pelas contribuições para a elaboração final do trabalho.

Aos professores e colegas com os quais convivi durante os dois anos de mestrado, por partilharem o conhecimento e as experiências no ensino de Matemática.

Às amigas e companheiras de trabalho, carinhosamente denominadas “Princesas”, pelo apoio e incentivo em minha carreira profissional e acadêmica, por transformarem nossa difícil missão de ensinar em um prazeroso exercício de aprender todos os dias.

Aos meus queridos alunos, por preencherem os meus dias com sua alegria, seu entusiasmo, sua curiosidade, seu carinho. Por serem a razão do meu empenho na busca de novos conhecimentos.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

Resumo

A presente pesquisa está dirigida à investigação da construção do pensamento matemático acerca das noções de discreto e contínuo em crianças, envolvidas em ambiente de Modelagem Matemática. O objetivo foi de ressaltar a importância da abordagem da complementaridade do par discreto/contínuo, desde os primeiros anos de escolarização, a fim de contribuir para o desenvolvimento do pensamento abstrato, necessário para a ampliação do campo numérico dos alunos. A população investigada consistiu em uma turma composta por vinte e um alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, com idades entre nove e doze anos, em uma instituição pública de ensino do município de Peabiru – Pr. Considerando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino, abordamos o conceito de Equações de Diferenças por serem muito utilizadas na formulação de modelos matemáticos de fenômenos biológicos, que constituem processos contínuos, mas são analisados sob o ponto de vista discreto, assim como a abordagem das atividades realizadas pelos alunos. A análise dos dados aponta que as crianças utilizam-se do pensamento discreto na organização do raciocínio matemático sobre problemas concretos, sendo que a ideia de continuidade deverá ser formalizada ao longo do percurso escolar em paralelo a outros conceitos da Ciência. Neste sentido, proporcionar situações nas quais essas duas ideias sejam exploradas, de maneira intuitiva, deve contribuir para o desenvolvimento de conceitos mais complexos futuramente como, o que tem ênfase em nosso estudo, a noção de números reais. Ressaltamos ainda as contribuições da Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental, buscando promover discussões e reflexões a respeito da grandeza numérica, bem como desenvolver a autonomia e o interesse dos estudantes na abordagem de problemas com referência na realidade.

Palavras-chave: Discreto e Contínuo; Equações de Diferenças; Anos Iniciais; Modelagem Matemática.

Abstract

This research is aimed at investigating the construction of mathematical thinking about the notions of discrete and continuous in children involved in Mathematical Modelling environment. The objective was to emphasize the importance of approach the complementarity of discrete/continuous pair, since the first years of schooling in order to contribute to the development of abstract thought, necessary to expand the number field of the students. The population studied consisted of a group composed of twenty-one students of the 5th year of Elementary School, aged between nine and twelve, in a public institution of education in the city of Peabiru - Pr. Considering the Mathematical Modelling as a teaching strategy, we approach the concept of Difference Equations because they are widely used in the formulation of mathematical models of biological phenomena, which are continuous processes, but are analyzed under the discrete point of view, as well as the approach of the activities developed by the students. The data analysis indicates that children use discrete thinking in the organization of mathematical reasoning about concrete problems, and the idea of continuity should be formalized during the school career in parallel to other concepts of science. In this sense, provide situations in which these two ideas are explored, intuitively, should contribute to the development of more complex concepts in the future, with emphasis in our study, the notion of real numbers. Also we emphasize the contributions of Mathematical Modelling as a learning environment in the early years of Elementary School, seeking to promote discussions and reflections about the numerical magnitude, and to develop students' autonomy and interest in problems with reference in reality.

Keywords: Discrete and Continuous; Difference Equations; Early Years; Mathematical Modelling.

Lista de Ilustrações

Figura 1: Composição dos números na tribo Tamanacs de Orinoco	28
Figura 2: Informações sobre a superpopulação de coelhos na Austrália	53
Figura 3: Simulação da reprodução dos coelhos	56
Figura 4: Representação Atividade 1 pela Equipe 1	56
Figura 5: Representação da Atividade 1 pela Equipe 2	57
Figura 6: Representação da Atividade 1 pela Equipe 3	58
Figura 7: Boneco ecológico.....	61
Figura 8: Crescimento do alpiste em cada intervalo	62
Figura 9: Processo de realização da Atividade 2	66
Quadro 1: Principais convenções empregadas em transcrições no Brasil	47

Lista de Tabelas

Tabela 1: Crescimento de uma planta	15
Tabela 2: Solução do problema da reprodução dos coelhos	24
Tabela 3: Crescimento do alpiste em centímetros	61

Sumário

Introdução	10
1 Equações de Diferenças.....	13
1.1 Variáveis Discretas e Contínuas	13
1.2 Tipos de Variação	14
1.2.1 Variações Discretas.....	14
1.2.2 Variações Contínuas	16
1.3 Equações de Diferenças	17
1.3.1 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem.....	18
1.3.2 Equações de Diferenças Lineares de Segunda Ordem.....	21
2 O Discreto e o Contínuo na Construção do Conceito de Número Real.....	27
2.1 O Conceito de Número Real e os Cortes de Dedekind.....	29
2.2 O Ponto de Tensão entre o Discreto e o Contínuo.....	33
3 A Modelagem Matemática nos Anos Iniciais	37
3.1 Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática.....	37
3.2 Práticas de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais	40
4 Aspectos Metodológicos da Pesquisa	44
4.1 Problema de Pesquisa	44
4.2 Escolha Metodológica.....	45
4.3 Descrição das Atividades Desenvolvidas.....	48

5	Análise das Atividades	51
5.1	Atividade 1: O Problema da Reprodução dos Coelhos.....	51
5.2	Atividade 2: Observação do desenvolvimento de uma planta	60
	Considerações Finais.....	67
	Referências	69

Introdução

Esta pesquisa aborda algumas noções intuitivas do conceito de discreto e contínuo numa perspectiva do ensino de matemática na Educação Básica. Por sua complexidade e necessidade de raciocínio abstrato, a noção de continuidade é pouco explorada neste nível de ensino. Ainda mais, se considerarmos os anos iniciais do Ensino Fundamental.

O interesse por esse nível de ensino se deu pelo fato da autora deste trabalho ser professora atuante nos anos iniciais, porém o objetivo é contribuir para o ensino de matemática na Educação Básica, em geral, proporcionando uma abordagem mais completa a respeito do conceito de número e das noções de discreto e contínuo.

Nosso propósito consistiu em investigar sobre a construção do pensamento matemático de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental a respeito das noções de discreto e contínuo, em ambiente de Modelagem Matemática.

Considerando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino, abordamos o conceito de Equações de Diferenças por serem muito utilizadas na formulação de modelos matemáticos de fenômenos biológicos, que constituem processos contínuos, mas são analisados sob o ponto de vista discreto, assim como a abordagem das atividades realizadas pelos alunos.

Neste sentido, foram propostas duas atividades, tomando dois caminhos diferentes, com o objetivo de explorar a complementaridade entre o par discreto/contínuo.

A primeira, intitulada “O Problema da Reprodução dos Coelhos”, teve como objetivo principal levar os alunos a obter um conjunto discreto com “muitos” elementos, revelando suas noções sobre o infinito. Explorando a ideia de um conjunto infinitamente grande, cujos elementos são limitados em determinado espaço, aproxima-se da noção de continuidade.

A segunda, relacionada à “Observação do crescimento de uma planta”, destinou-se a estimular o desenvolvimento da noção de continuidade do tempo, considerando-o inicialmente como variável discreta e sucessivamente dividindo-o em intervalos cada vez menores.

Ressaltamos neste trabalho, as contribuições da Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem nos anos iniciais, buscando promover discussões e reflexões a respeito da grandeza numérica, bem como desenvolver a autonomia e o interesse dos estudantes na abordagem de problemas com referência na realidade.

Com relação à estrutura, este texto contempla cinco capítulos destinados à abordagem dos aspectos teóricos e metodológicos que tomamos como base para realização da pesquisa, bem como as análises e discussões das atividades desenvolvidas pelos alunos. Em seguida, apresentamos algumas considerações a respeito da pesquisa realizada.

No capítulo 1, cujo objetivo é apresentar um breve estudo das *Equações de Diferenças*, iniciamos com as definições e exemplos de variações discretas e contínuas. Apresentamos uma introdução sobre as equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem, como instrumentos para a formulação de modelos matemáticos que envolvem variáveis discretas.

O capítulo 2 aborda *O Discreto e o Contínuo na Construção do Conceito de Número Real*, ressaltando a importância de se considerar a complementaridade entre esses dois aspectos para a ampliação do campo numérico dos alunos. Neste sentido, discorreremos sobre a construção do conjunto dos números reais pelo conceito de cortes, apresentada por Dedekind, e uma breve abordagem histórica do par discreto/contínuo e sua relação com as noções de infinito e infinitésimos.

No capítulo 3, intitulado *A Modelagem Matemática nos Anos Iniciais*, dedicamos uma seção à trajetória da Modelagem Matemática, desde sua utilização no campo da Matemática Aplicada até sua implementação no Ensino de Matemática. Em seguida, direcionamos nossos olhares aos anos iniciais do Ensino Fundamental, nos quais o trabalho é ainda mais específico. Destacamos algumas práticas de Modelagem realizadas e compartilhadas por outros autores nesse contexto.

Os *Aspectos Metodológicos da Pesquisa* são explicitados no capítulo 4, no qual ressaltamos o problema de pesquisa, os procedimentos metodológicos utilizados na obtenção e análise dos dados, inspirados na metodologia de pesquisa qualitativa, e uma breve descrição das conduções das atividades desenvolvidas com os alunos.

O capítulo 5, é destinado à *Análise das Atividades*. Nesse texto, apresentamos com detalhes as atividades desenvolvidas e buscamos uma compreensão da construção do

pensamento matemático dos alunos envolvidos, a respeito dos conceitos de discreto e contínuo, por meio das contribuições do ambiente de Modelagem Matemática.

Em seguida, apresentamos as *Considerações Finais* a respeito da investigação realizada, bem como das possibilidades de contribuição desse estudo.

1 Equações de Diferenças

Como o desenvolvimento do trabalho permeia um ambiente de Modelagem Matemática, e a criação de modelos¹ muitas vezes se dá por meio da observação da variação das grandezas envolvidas, iniciamos este capítulo com as definições e exemplos de variações contínuas e discretas. O enfoque é dado às variáveis discretas, pois são a base do conceito de equações de diferenças. Procuramos abordar de forma breve, porém didática, as equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem, observando que esta teoria possui inúmeras aplicações em diversas áreas científicas.

1.1 Variáveis Discretas e Contínuas

A utilização da modelagem matemática em diversas situações ou áreas requer a determinação e clareza das grandezas envolvidas. Na formulação do modelo, deve-se considerar o tipo de variáveis envolvidas para que seja possível a escolha e aplicação de métodos ou conhecimentos matemáticos já desenvolvidos.

Apoiamo-nos em Bassanezi (2012, p.18) ao considerar que “variáveis são grandezas que se modificam durante o processo”. Estas podem ser discretas ou contínuas. A observação da continuidade ou não das variáveis é o que determina a escolha do método a ser utilizado.

Entendemos por *variáveis discretas* aquelas que assumem valores isolados, não admitindo valores intermediários entre dois consecutivos, podendo ser contados ou enumerados. Por exemplo, se temos um conjunto finito de dados observados, dizemos que esse conjunto corresponde a uma sequência finita de valores reais $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, na qual a variável $x \in X$ é considerada discreta.

Uma sequência de números reais é um conjunto de pontos (portanto, discreto) denotado por $\{x_n\}$, definidos por uma função cujo domínio é um subconjunto A dos números naturais \mathbb{N} ,

¹ Um Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o objeto em estudo de maneira clara, com linguagem concisa (BASSANEZI, 2011).

$$\begin{cases} f: A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto f(n) = x_n \end{cases}$$

Assim, relacionando à definição de sequência de números reais, dizemos que um conjunto é discreto se existe uma correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto e um subconjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Se a variável x pode assumir quaisquer valores reais compreendidos entre os valores discretos da sequência, então x é uma *variável contínua*. Ou seja, se a função f pode ser estendida ao intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ no qual, $a = \min\{x \in A\}$ e $b = \max\{x \in A\}$, dizemos que a variável x é contínua.

1.2 Tipos de Variação

No processo de modelagem matemática, quando se tem um conjunto de dados observados que representam os valores da variável y_n , o que se busca essencialmente é descrever a função f de modo que $y_n = f(n)$. Para isso, um dos procedimentos mais utilizados é a análise das variações de y_n .

Para cada situação, é necessário identificar o tipo mais apropriado de variação a ser utilizado, pois o termo *variação* pode ter diversas formulações em matemática, considerando-se as variáveis n e y_n discretas ou contínuas.

1.2.1 Variações Discretas

Seja $D = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ um conjunto discreto de modo que y_i seja uma variável discreta relacionada à grandeza x_i por meio da função $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $y_i = f(x_i)$, $\forall x_i \in A$.

Variação total: Também chamada de *variação simples ou absoluta*, é dada pela diferença

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

e indica o comportamento de y em relação ao intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Tomemos como exemplo os dados obtidos pelos alunos do 5º ano ao observarem o crescimento de uma planta durante o período de 25 dias (os dados são relativos à realização da Atividade 2, pela Equipe 1, desenvolvida como implementação deste trabalho, descrita no capítulo 5). Sabemos que o desenvolvimento de uma planta ocorre continuamente, porém não é perceptível instantaneamente. Assim, considerando intervalos regulares de cinco dias, observamos:

Dias	5	10	15	20	25
Altura (cm)	1,1	6,3	10,2	11,5	13

Tabela 1: Crescimento de uma planta

Sejam as variáveis

x_i : tempo em dias

y_i : altura em centímetros

Considerando o intervalo entre o 5º e o 10º dia de desenvolvimento, por exemplo, a variação total da altura da planta é

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 6,3 - 1,1 = 5,2.$$

Logo, nesse período a planta cresceu 5,2 cm.

Varição média: Também conhecida como *taxa média de variação*, mostra quanto variou y por unidade de x e é obtida pela razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Se quisermos estimar quanto a planta cresceu por dia, no período entre os dias 5 e 10, calculamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{10 - 5} = 1,04.$$

Ou seja, no período estudado a altura da planta aumentou, em média, 1,04 cm ao dia.

Varição relativa: Mostra a variação de y por unidade de x , relativa ao estágio inicial $y = y_i$. É dada por:

$$\frac{1}{y_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{1}{y_i} \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right).$$

Ainda com as informações da Tabela 1, se calcularmos

$$\frac{1}{y_1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,04}{1,1} \cong 0,945$$

estaremos determinando que a taxa de crescimento da planta entre o 5º e o 10º dia foi de, aproximadamente, 94,5% ao dia, relativamente à medida que possuía no primeiro dia do intervalo.

1.2.2 Variações Contínuas

Uma variável contínua pode assumir valores em um conjunto discreto, assim as definições de variações dadas para o caso discreto (variação total, média e relativa) podem ser generalizadas para o caso contínuo.

Além disso, quando o processo envolve variáveis contínuas, emprega-se a *variação instantânea*, uma medida de variação que nos permite informar em “tempo real” o comportamento da função (CHUQUIPOMA, 2012). A variação instantânea é obtida por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

desde que o limite exista.

A taxa de variação instantânea $f'(x)$, chamada de *derivada* da função f no ponto x , é o limite das taxas médias de variação, considerando-se os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ cada vez menores. Ou seja, se $\Delta x \rightarrow 0$, significa que x_i está infinitamente próximo de x_{i+1} , apoiando-se na continuidade dos números reais.

Na formulação de modelos matemáticos para representar situações provenientes de outras áreas científicas, como biologia, física, economia, geralmente o tempo é a variável independente. Mas, é a natureza da variável dependente que determina os conceitos matemáticos a serem utilizados.

Em se tratando de variáveis contínuas, em muitos casos, é possível utilizar equações diferenciais, obtendo modelos a *tempo contínuo*, que permitem prever o valor da variável em estudo em qualquer tempo t , num intervalo aberto de números reais. Esse enfoque é muito comum e tem a vantagem de admitir soluções analíticas para descrever a situação.

Porém, em muitos casos o cálculo de integrais analiticamente pode ser difícil ou até impossível. Para contornar esse problema, utiliza-se modelos a *tempo discreto*, ou seja, no lugar de considerar o tempo como uma variável contínua, o vemos como “uma sequência

t_0, t_1, t_2, \dots de “instantâneos” regulares, em que $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ é um incremento fixo de tempo” (HUNTER, 2011, p. 201). Dessa forma, quanto menor for Δt , mais o modelo se aproxima de um modelo a tempo contínuo. Nos aproximamos então do ponto de tensão entre os conceitos de discreto e contínuo, o qual será abordado posteriormente. Por ora, discorreremos a respeito das equações de diferenças, por meio das quais são formulados modelos que envolvem variações discretas.

1.3 Equações de Diferenças

A teoria de Equações de Diferenças possui inúmeras aplicações em diversas áreas científicas. Em geral, essas equações são utilizadas para descrever fenômenos ao longo do tempo, em situações nas quais não é possível, ou mesmo não interessa obter valores instantâneos das variáveis dependentes. Por exemplo, para se determinar a variação do crescimento de uma planta é necessário considerar um intervalo de tempo adequado. Ou ainda, quando se deseja estudar a variação populacional de um país. Seria muito difícil ou impossível determinar o número de habitantes no Brasil em um dia ou horário específico, devido à extensão do país e à quantidade de nascimentos e mortes que ocorrem todos os dias. Nesses casos, a evolução do tempo (variável independente) é medida em intervalos regulares, permitindo que seja considerada como uma variável discreta.

A cada grandeza em estudo corresponde uma unidade de tempo, seja ela 1 hora, se estivermos observando o desenvolvimento de uma população de bactérias; ou 5 dias, se formos analisar o crescimento de uma planta, ou 10 anos, para se ter noção da variação populacional de um país ou do mundo. Essa unidade de tempo deve tornar possível a observação da variação da grandeza por meio dos valores obtidos nos instantes $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, considerando-se a extensão dos intervalos $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_{n+1} - t_n$ sempre igual.

Assim, estabelecemos relações entre os elementos de cada etapa com a anterior. Essas relações, baseadas no conceito de diferenças, denominam-se Equações de Diferenças ou Fórmulas Recursivas.

Uma equação de diferenças é uma relação de recorrência, ou seja, uma fórmula que expressa cada termo y_t de uma sequência em função do(s) termo(s) anterior(es) e do estágio t .

De modo geral, uma equação de diferenças de ordem $n < t$ pode ser expressa da seguinte forma

$$y_{t+1} - y_t = F(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, t)$$

ou simplesmente,

$$y_{t+1} = f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, t)$$

onde $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e t varia discretamente.

Assim, a ordem da equação é dada pela diferença entre o maior e o menor índice de y .

Neste estudo, abordaremos as equações de diferenças lineares com coeficientes constantes, ou seja, nas quais a função f é linear na variável y_t . Por exemplo, as equações $y_{t+1} = 5y_t - t^2$ e $y_{t+1} = (t+1)y_t$ são lineares, sendo apenas a primeira de coeficientes constantes, enquanto $y_{t+1} = y_t^2$ não é linear.

Determinar a solução de uma equação de diferenças é encontrar uma sequência de números y_0, y_1, y_2, \dots que satisfaçam a equação para cada t . Para isso, em muitos casos é possível encontrar uma expressão que fornece o valor da variável em um estágio t em função apenas de t e das condições iniciais dadas.

1.3.1 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Quando $t - n = 1$, dizemos que a equação de diferenças é de primeira ordem. Nesse caso, o valor da variável y_{t+1} depende apenas do termo imediatamente anterior y_t e de t e a forma geral da equação pode ser expressa por

$$\begin{cases} y_{t+1} = f(y_t, t) \\ y_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (1.1)$$

Uma equação de diferenças na qual o termo y_{t+1} dependa somente de y_t é dita autônoma e pode ser expressa da seguinte forma

$$y_{t+1} = \alpha y_t$$

Utilizando o processo recursivo obtemos a solução:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \alpha y_0 \\
 y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\
 &\vdots \\
 y_t &= \alpha y_{t-1} = \alpha^t y_0
 \end{aligned}$$

Como α é constante e y_0 é a condição inicial dada, o valor de y_t dado por

$$y_t = \alpha^t y_0 \quad (1.2)$$

pode ser facilmente determinado para qualquer valor de t .

Uma equação de diferenças linear não autônoma pode ser expressa por

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta_t.$$

Utilizando novamente o processo de iterações, obtemos

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \alpha y_0 + \beta_0 \\
 y_2 &= \alpha(\alpha y_0 + \beta_0) + \beta_1 = \alpha^2 y_0 + \alpha \beta_0 + \beta_1 \\
 y_3 &= \alpha(\alpha^2 y_0 + \alpha \beta_0 + \beta_1) + \beta_2 = \alpha^3 y_0 + \alpha^2 \beta_0 + \alpha \beta_1 + \beta_2 \\
 &\vdots \\
 y_t &= \alpha^t y_0 + \alpha^{t-1} \beta_0 + \alpha^{t-2} \beta_1 + \dots + \alpha \beta_{t-2} + \beta_{t-1} = \alpha^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^{t-1-j} \beta_j \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

No caso em que $\beta_t = \beta \neq 0$ para todo t , a equação de diferenças se torna

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta$$

e sua solução, pela equação (1.3), é

$$y_t = \alpha^t y_0 + (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{t-1}) \beta$$

Se $\alpha = 1$, segue que $y_t = y_0 + t\beta$.

Se $\alpha \neq 1$, então $y_t = \alpha^t y_0 + \frac{1 - \alpha^t}{1 - \alpha} \beta$.

Como exemplo da obtenção de equações de diferenças de primeira ordem, citamos a dinâmica populacional de uma colmeia, apresentada por Bald (1993), considerando os seguintes dados:

- * Postura da rainha: 2 000 ovos/dia
- * Período entre a postura e o nascimento da abelha: 21 dias

- * Quantidade inicial de abelhas: 10 000
- * Vida média de uma operária: 40 dias
- * A taxa de mortalidade das abelhas operárias é $1/40 = 0,025$ e, portanto a taxa de sobrevivência é $1 - 0,025 = 0,975$.

Podemos obter uma expressão de recorrência para o número de operárias num dia t , enquanto $t < 21$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 10\,000 \\
 y_1 &= 0,975y_0 \\
 y_2 &= 0,975y_1 = 0,975^2y_0 \\
 &\vdots \\
 y_t &= 0,975y_{t-1} = 0,975^ty_0
 \end{aligned}$$

Para $y_0 = 10\,000$ e $t = 20$ obtemos $y_{20} = 6\,026$.

O modelo matemático para o período de desenvolvimento da nova colmeia leva em consideração que a partir do 21º dia nascem 2 000 abelhas por dia. Assim,

$$y_{21} = 0,975^{21}y_0 + 2\,000 = 7\,876.$$

Indicando por A_0 a quantidade remanescente de abelhas velhas, então no 21º dia teremos:

$$y_1 = y_{21} = A_0 + 2\,000.$$

Levando em conta que a taxa de sobrevivência é igual a 0,975, podemos estabelecermos uma fórmula de recorrência dependendo do valor de A_0 e do tempo discreto t .

$$\begin{aligned}
 y_2 &= 0,975y_1 + 2\,000 = 0,975(A_0 + 2\,000) + 2\,000 \\
 y_2 &= 0,975A_0 + 2\,000(0,975 + 1) \\
 y_3 &= 0,975y_2 + 2\,000 \\
 y_3 &= 0,975^2A_0 + 2\,000(0,975^2 + 0,975 + 1) \\
 &\vdots \\
 y_t &= 0,975y_{t-1} + 2\,000 \\
 y_t &= 0,975^{t-1}A_0 + 2\,000(0,975^{t-1} + 0,975^{t-2} + \dots + 0,975 + 1)
 \end{aligned}$$

O termo entre parênteses corresponde à soma dos t primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 0,975. Logo,

$$\begin{aligned}
y_t &= 0,975^{t-1}A_0 + 2\,000\frac{1 - 0,975^t}{1 - 0,975} \\
&= 0,975^{t-1}A_0 + 80\,000(1 - 0,975^t) \\
&= (A_0 - 78\,000)0,975^{t-1} + 80\,000
\end{aligned}$$

Como $t \geq 21$, temos:

$$y_t = (A_0 - 78\,000)0,975^{t-21} + 80\,000$$

Portanto, as soluções das equações de diferenças de primeira ordem

$$\begin{aligned}
y_t &= 0,975y_{t-1}, & \text{para } 0 < t < 21 \\
y_t &= 0,975y_{t-1} + 2\,000, & \text{para } t \geq 21
\end{aligned}$$

dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
y_t &= 0,975^t y_0, & \text{para } 0 < t < 21 \\
y_t &= (A_0 - 78\,000)0,975^{t-21} + 80\,000, & \text{para } t \geq 21
\end{aligned}$$

onde $A_0 = 0,975^{21}y_0$, formam um modelo matemático discreto para a quantidade de abelhas operárias de uma colmeia.

1.3.2 Equações de Diferenças Lineares de Segunda Ordem

Uma equação de diferenças de segunda ordem é do tipo

$$y_{t+2} = f(y_{t+1}, y_t, t).$$

Nesse caso, cada termo da sequência depende dos dois termos imediatamente anteriores, por isso, devem ser conhecidas duas condições iniciais. Podemos escrever uma equação de diferenças autônoma de segunda ordem na forma:

$$\begin{cases} y_{t+2} = ay_{t+1} + by_t \\ y_0 \text{ e } y_1 \text{ dados} \end{cases} \quad (1.4)$$

Modificando a notação da solução (1.2) da equação de diferenças de primeira ordem autônoma, obtemos $y_t = k\lambda^t$, onde k representa a condição inicial dada e λ é constante. Substituindo essa expressão na equação (1.4), temos

$$\begin{aligned}
 k\lambda^{t+2} - ak\lambda^{t+1} - bk\lambda^t &= 0 \\
 \Rightarrow k\lambda^t[\lambda^2 - a\lambda - b] &= 0
 \end{aligned}$$

Logo, $k\lambda^t = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$.

No primeiro caso, $\lambda = 0 \Rightarrow y_t = 0$ para todo t , temos a solução trivial que só tem sentido se $y_0 = y_1 = 0$.

No segundo caso, $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ é chamada *equação característica* de (1.4) e suas soluções $\lambda_{1,2}$ são denominadas *autovalores*,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Os valores de $\lambda_{1,2}$ são univocamente determinados pelos coeficientes a e b e suas propriedades indicam comportamento das soluções da equação (1.4).

Como nos referimos a equações lineares, o princípio da superposição linear é válido, ou seja, se várias soluções são conhecidas, então a combinação linear entre elas também é uma solução. Portanto, se $k\lambda_1^t$ e $k\lambda_2^t$ são duas soluções de (1.4), então a solução geral da referida equação é

$$y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t. \quad (1.5)$$

Esta solução é válida para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, isto é, $a^2 + 4b \neq 0$. As constantes A_1 e A_2 , podem ser determinadas considerando-se as condições iniciais dadas.

- Para $t = 0 \Rightarrow y_0 = A_1 + A_2$.
- Para $t = 1 \Rightarrow y_1 = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2$.

Dessa forma, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 &= y_0 \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 &= y_1 \end{cases}$$

que admite como soluções

$$A_1 = y_0 - \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Quando $a^2 + 4b = 0$, ocorre $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2} = \lambda$. Nesse caso, a solução geral de (1.4) é dada por

$$y_t = (A_1 + tA_2)\lambda^t.$$

Para demonstrar esta afirmação, verificamos que, como $y_t = \lambda^t$ é solução da equação (1.4) então $y_t = t\lambda^t$ também é solução. Substituindo esta última na equação (1.4) e reagrupando os termos, obtemos

$$(t+2)\lambda^{t+2} - a(t+1)\lambda^{t+1} - bt\lambda^t = (\lambda^2 - a\lambda - b)t\lambda^t + (2\lambda - a)\lambda^{t+1} = 0$$

A igualdade se confirma, pois os termos entre parênteses são iguais a zero. O primeiro porque λ é solução da equação característica e o segundo porque esta solução é justamente $\lambda = \frac{a}{2}$. Logo, $y_t = t\lambda^t$ é solução da equação de diferenças de segunda ordem.

A solução geral é uma combinação linear das duas soluções particulares,

$$y_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t.$$

As constantes A_1 e A_2 são também determinadas a partir dos valores das condições iniciais y_0 e y_1 :

$$\begin{cases} y_0 = A_1 \\ y_1 = (A_1 + A_2)\frac{a}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{2y_1}{a} - y_0 \end{cases}.$$

Consideremos um terceiro caso, no qual os autovalores λ_1 e λ_2 sejam complexos. A solução expressa em (1.5) pode ser reescrita de modo a evitar cálculos com números complexos. Escrevendo $\lambda_{1,2}$ na forma trigonométrica, temos:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i = r e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i = r e^{-i\theta}$$

onde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ e $\theta = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$.

Assim,

$$\lambda_1^t = (\alpha + \beta i)^t = (r e^{i\theta})^t = r^t e^{it\theta} = r^t (\cos t\theta + i \sin t\theta).$$

Analogamente, $\lambda_2^t = r^t (\cos t\theta - i \sin t\theta)$.

Pela solução (1.5),

$$\begin{aligned} y_t &= A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t \\ &= A_1 r^t (\cos t\theta + i \sin t\theta) + A_2 r^t (\cos t\theta - i \sin t\theta) \\ &= r^t [(A_1 + A_2) \cos t\theta + i(A_1 - A_2) \sin t\theta] \end{aligned}$$

Escrevendo $A_1 + A_2$ e $A_1 - A_2$ como novas constantes B_1 e B_2 , respectivamente, temos

$$y_t = r^t [B_1 \cos t\theta + iB_2 \sin t\theta]$$

Como a equação é linear, tanto a parte real quanto a parte imaginária da solução também são soluções (BASSANEZI, 2011). Para efeito de simplificação, vamos escrever $u_t = B_1 \cos t\theta$ e $v_t = B_2 \sin t\theta$. Utilizando o princípio da superposição descrevemos a solução geral como combinação linear entre u_t e v_t :

$$y_t = C_1 u_t + C_2 v_t = C_1 r^t \cos t\theta + C_2 r^t \sin t\theta.$$

Para ilustrar a resolução de equações de diferenças de segunda ordem, consideremos o problema proposto e resolvido pelo matemático Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em seu *Liber Abacci*, no ano de 1202. Trata-se do famoso problema da reprodução dos coelhos, cuja solução gera, por recorrência, uma sequência de números naturais conhecida como Sequência de Fibonacci. Segundo Hefez (2009, p. 40), o problema estaria assim formulado em latim:

“Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.”

Propõe-se determinar quantos pares de coelhos são gerados em um ano, a partir de um par, supondo que a cada mês cada casal de coelhos gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida.

A Tabela 2 mostra o processo de reprodução dos coelhos em cada mês:

<i>Mês</i>	<i>Nº de casais do mês anterior</i>	<i>Nº de casais recém-nascidos</i>	<i>Total</i>
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 2: Solução do problema da reprodução dos coelhos

Considerando que não ocorrem mortes nem migração de coelhos na situação proposta, podemos notar que o número de casais existentes num determinado mês é obtido pela soma da quantidade de casais do mês anterior e a quantidade existente no mês anterior ao anterior, pois estes últimos serão os que contribuirão com o acréscimo de novos pares de filhotes. Assim, a quantidade de casais existente em cada mês (y_{t+2}) depende dos dois estágios imediatamente anteriores (y_{t+1} e y_t), dadas as duas condições iniciais ($y_0 = y_1 = 1$).

Representamos, então, o problema por meio da equação:

$$\begin{cases} y_{t+2} = y_{t+1} + y_t \\ y_0 = y_1 = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

cuja equação característica associada é

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

As soluções da equação característica são

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Logo, pela solução (1.5),

$$y_t = A_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + A_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t.$$

Para determinar A_1 e A_2 , basta usar as condições iniciais,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + A_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}.$$

O sistema fornece $A_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{5}}$. Logo, a solução geral da equação (1.6) é

$$y_t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t$$

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}$$

Dessa forma, podemos determinar o número de pares de coelhos existentes em qualquer estágio t , sem necessariamente conhecer os estágios anteriores.

O problema da reprodução dos coelhos é um bom exemplo para instigar as crianças quanto à noção de sequência infinita de números naturais, que leva ao questionamento sobre

número infinitamente grande. Ainda, por ser um problema envolvendo um fenômeno da natureza, por elas conhecido, ele será utilizado como tema de uma atividade de modelagem matemática com o objetivo de investigar essas noções de número infinitamente grande nas crianças.

2 O Discreto e o Contínuo na Construção do Conceito de Número Real

*A sucessão dos números naturais, $1, 2, 3, \dots$, é a representação matemática para o discreto, enquanto o arquétipo para a continuidade matemática é encontrado na reta real \mathbb{R} .
(DA COSTA e DORIA, 1991/2, p. 123, tradução nossa)*

Não só na formulação de modelos, mas no ensino de matemática em si há uma separação entre temas relacionados à matemática discreta e à matemática contínua.

Com vista à educação básica, em geral, há um grande predomínio de conteúdos relacionados à matemática contínua, podemos citar o estudo das funções, dos gráficos, da geometria, das medidas. Porém, a essência da continuidade dificilmente é explorada nesse nível de ensino, sendo atribuída essa tarefa aos estudos de nível superior.

Já o início da formalização matemática na escola privilegia, em muitos casos, uma abordagem discreta do conceito fundamental da matemática: os números.

Na maior parte das escolas, a introdução do conceito de número se dá pela via do discreto, utilizando-se o processo da contagem, da correspondência um-a-um e das regras de formação da sequência dos números naturais. O que induz essa abordagem pode estar relacionado à maneira como a história da origem dos números é contada nos livros didáticos, com referência apenas à contagem e valorizando a correspondência entre elementos de dois conjuntos. Geralmente, os livros apresentam o surgimento dos números a partir da necessidade de comparar a quantidade de objetos de um conjunto, como pedras ou riscos em ossos, com a quantidade de elementos de outro conjunto que se desejasse contar, em geral, animais. Dessa forma, “dizer como surgiram os números seria o mesmo, então, que dizer como surgiu a contagem” (BROLEZZI, 1996, p. 5).

Pesquisas desenvolvidas com enfoque no par discreto/contínuo (BROLEZZI, 1996; MOURA, 2003) apontam a importância de se trabalhar os dois conceitos durante toda a escolarização básica, sem que haja o predomínio de um sobre o outro.

Em sua tese, Brolezzi (1996) aborda o par discreto/contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática e estuda o problema pedagógico que surge ao se considerar o discreto e o contínuo isoladamente, sem explorar a interação entre eles.

Com relação ao ensino de números, o autor se apoia em indícios históricos e afirma que as propostas de ensino que tomam por base apenas a *contagem* (relacionada ao aspecto discreto) como caminho para se estabelecer o conceito de número, poderiam ser complementadas, considerando-se também a noção de *medidas* (que representam o contínuo). Segundo aponta em seu estudo,

contar e medir são operações através das quais se constrói a idéia de número, e que portanto é conveniente trabalhar a compreensão da relação entre o discreto e o contínuo para ensinar números naturais, racionais e reais. (BROLEZZI, 1996, p.5)

As pesquisas acerca da origem da ideia de número vão além dos vestígios de registros em objetos deixados pelas primeiras civilizações, elas devem levar em conta a linguagem falada como fonte de informações a respeito das concepções numéricas. Segundo Brolezzi (1996), os numerais falados apontam vestígios interessantes sobre a dualidade contagem/medida. Em muitas tribos indígenas, por exemplo, cuja linguagem não sofreu grandes mudanças desde sua criação, o conceito de números não se revela apenas em situações de contagem, mas também como expressão de medidas, não havendo motivos para supor que a contagem tenha surgido primeiro.

Ao contrário, devido à utilização do conceito de *muitos* para indicar quantidades maiores ou iguais a três, podemos inferir que não havia inicialmente a intenção de fazer corresponder elementos um-a-um. Ifrah apud Brolezzi (1996, p. 8) destaca que “desde a noite dos tempos o número 3 foi, assim, sinônimo de pluralidade, de multidão, de amontoado, de além, e constituiu, conseqüentemente, uma espécie de limite impossível de conceber ou precisar”. Em algumas tribos existem representações para números maiores que três, mas que são obtidas a partir da combinação do “um” e “dois”, por serem estes de fácil manipulação, como é o caso dos Tamanacs de Orinoco:

a	oa	ua	oa-oa	oa-oa-a	oa-oa-oa	...
1	2	3	4	5	6	...

Figura 1: Composição dos números na tribo Tamanacs de Orinoco

Fonte: (BROLEZZI, 1996, p. 8)

A não utilização do “ua” para compor os números maiores pode ser atribuída ao fato de em alguma época anterior o número três ter se apropriado do aspecto de número muito grande e ser difícil de manipular. Assim, pela composição apenas de unidades ou pares obtinham números cada vez maiores para representar quantidades discretas ou medidas de distância, peso ou volume.

Brolezzi (1996) ainda ressalta a ideia de que conjuntos com uma quantidade muito grande de elementos tendem a ser vistos como contínuos. E esta será a ideia na qual vamos nos apoiar na análise da primeira atividade desenvolvida, descrita no capítulo 5.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também sugerem que o ensino de Matemática no 1º ciclo do Ensino Fundamental explore tanto a abordagem discreta quanto a contínua. Entre os conteúdos conceituais e procedimentais referentes aos números naturais e sistema de numeração decimal, destacamos:

- * Reconhecimento de números no contexto diário.
- * Utilização de diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção: contagem, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos.
- * Utilização de diferentes estratégias para identificar números em situações que envolvem contagens e medidas.
- * Comparação e ordenação de coleções pela quantidade de elementos e ordenação de grandezas pelo aspecto da medida. (BRASIL, 1997, p. 50)

A abordagem proposta nos PCN destaca situações que envolvem tanto a contagem quanto as medidas na construção do conceito de número, viabilizando ao aluno uma visão mais completa sobre os números.

2.1 O Conceito de Número Real e os Cortes de Dedekind

Uma situação em que o discreto e o contínuo se complementam é a construção do conjunto dos números reais apresentada por Richard Dedekind.

Enquanto a ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, pois foi sendo formalizada a partir de experiências sobre quantidades discretas, o conceito de número real é sim uma conquista do pensamento.

Inicialmente, a ideia de número era usada em correspondência com objetos ou situações reais, na contagem, na comparação, nas medidas. Com a evolução das civilizações,

o número tornou-se um ser independente das coisas reais. A evolução do trabalho mental do ser humano permite-nos generalizar e estender as aquisições do pensamento, segundo certas normas ou princípios (CARAÇA, 1951). O *princípio da extensão*, por exemplo, nos revela a noção de infinito no campo dos números naturais por meio de uma operação mental adquirida por experiências com números pequenos: passamos de um número ao seguinte adicionando-lhe uma unidade. Assim, passamos do 1 ao 2, do 2 ao 3, e uma vez internalizada essa operação mental – adicionar uma unidade – dado um número qualquer n , por maior que seja, sempre podemos obter o próximo, $n + 1$. E a essa altura, não importa se não existam conjuntos com quantidades tão grandes de objetos reais para serem contados e representados por esses números, o que se explora são as consequências dessa ideia e da possibilidade de repetição ilimitada do ato mental de adicionar uma unidade para obter o número seguinte.

Até o campo dos números racionais ainda podemos supor o seu desenvolvimento inicial estar relacionado com necessidades práticas, quando os números inteiros tornaram-se insuficientes para expressar medidas, no sentido de comparação de grandezas de mesma espécie.

Porém, com os números irracionais é diferente. Embora os primeiros indícios de números irracionais datem de 2000 a.C., com os egípcios, babilônicos e gregos, sua formalização ocorreu somente no século XIX.

Uma das ideias mais difundidas até os dias atuais que envolve tanto a formalização do conjunto dos números irracionais, e conseqüentemente dos reais, quanto a questão da continuidade da reta numérica, é atribuída ao matemático alemão Richard Dedekind (1831 - 1916).

Segundo Lopes (2006, p. 15), “A forma como Dedekind respondeu à pergunta orientadora da sua obra: *Qual a essência da continuidade?* levou-o à construção do seu conceito de número irracional e permitiu que as suas ideias fossem difundidas por todo o mundo”.

Em sua obra *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, publicada em 1872 e traduzida para diversas línguas a partir de 1901 (LOPES, 2006), Dedekind compara o domínio dos números racionais com os pontos de uma reta. Esta analogia entre o conjunto dos números racionais, denotado pelo autor por R , e os pontos de uma linha reta L , faz sentido quando selecionamos sobre a reta uma origem definida ou ponto-zero o e uma unidade definitiva de comprimento para a medição de segmentos. Assim, a cada número racional a constrói-se um comprimento

correspondente e transfere-se este comprimento sobre a reta, partindo do ponto o , em sentido para a direita ou para a esquerda de acordo com o que é positivo ou negativo. Obtém-se então um ponto final p , que pode ser considerado como o ponto correspondente ao número a ; o número racional *zero* corresponde ao ponto o . Desta forma, para cada número racional $a \in R$ corresponde um e apenas um ponto $p \in L$.

Porém, o domínio dos racionais R deixa lacunas sobre a reta L , ou seja, existem pontos – e infinitos pontos – que não correspondem a nenhum número racional. Fundamentado na descoberta dos gregos antigos, Dedekind (1924) toma como exemplo a incomensurabilidade da diagonal do quadrado cujo lado é a unidade de comprimento.

Se transportarmos tal comprimento [da diagonal] a partir do ponto o sobre a linha, obtemos um ponto final que não corresponde a nenhum número racional. Além disso, pode ser facilmente demonstrado que há uma infinidade de comprimentos que são incomensuráveis com a unidade de comprimento, pode-se afirmar: A linha reta L é infinitamente mais rica em elementos pontuais do que o domínio dos números racionais R em elementos numéricos (p. 9, tradução nossa).

A comparação do domínio dos números racionais com a reta levou ao reconhecimento da existência de uma certa “imperfeição” ou descontinuidade do primeiro, enquanto à reta são atribuídas características como a completude, a ausência de lacunas, ou continuidade. Diante disso, Dedekind (1994) adverte a necessidade da criação de outros números – os irracionais – a fim de atingir a continuidade da reta numérica, porém que essa criação fosse por meio dos números racionais.

Para explicar a essência da continuidade o autor ressalta que não basta uma vaga propriedade de união ininterrupta de partes muito pequenas, mas ao contrário, propõe a divisão da reta em duas partes por um ponto dado, introduzindo a noção de *cortes*.

Se todos os pontos de uma reta se dividem em duas classes de tal modo que todos os pontos da primeira classe encontram-se à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e somente um, ponto que realiza essa divisão em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes.

Analogamente, cada número racional a divide o sistema R em duas classes de modo que cada número a_1 da primeira classe A_1 é menor do que cada número a_2 da segunda classe A_2 ; o número a ou é o maior número da classe A_1 ou o menor da classe A_2 . Esta separação é o que Dedekind define como *corte*, designando-o por (A_1, A_2) .

Porém, existem cortes em que nem a classe A_1 possui maior elemento nem a classe A_2 possui menor elemento, ou seja, existem infinitos cortes no conjunto dos racionais que não têm um número racional como elemento de separação das classes.

Para se ter exemplo disso, basta considerar o número D , inteiro positivo, mas que não seja um quadrado perfeito. Se atribuirmos à segunda classe A_2 , cada número a_2 racional positivo cuja raiz quadrada é maior que D , e à primeira classe A_1 todos os outros números a_1 racionais, essa separação forma um corte (A_1, A_2) , isto é, cada número a_1 é menor do que cada número a_2 . Se $a_1 = 0$, ou é negativo, então a_1 é inferior a qualquer número a_2 , porque, por definição, este último é positivo; se a_1 é positivo, então sua raiz quadrada é *menor ou igual* a D , e, portanto, a_1 é menor que qualquer número a_2 positivo cujo quadrado é *maior* que D . Porém, este corte não é produzido por nenhum número racional, pois não existe tal número no domínio dos racionais cujo quadrado seja *igual* a D .

Nesta propriedade de nem todos os cortes serem produzidos por números racionais consiste a incompletude ou descontinuidade do domínio dos números racionais. Diante disso,

Sempre que com um corte (A_1, A_2) não for produzido por número racional, criamos um novo, um número irracional α , que consideramos completamente definido por este corte (A_1, A_2) ; diremos que o número α corresponde a este corte, ou que produz este corte. De agora em diante, todo Corte determinado corresponde a um e somente um número, racional ou irracional, e consideramos dois números como diferentes ou desiguais se e, somente se, eles correspondem a dois Cortes essencialmente diferentes. (DEDEKIND, 1924, p. 16, tradução nossa)

Ao elemento de separação (racional ou irracional) de duas classes de um corte qualquer, no conjunto dos racionais, denomina-se *número real*.

A própria natureza do problema revela como os novos números, os irracionais, não possuem um caráter tão elementar quanto os números racionais: enquanto para definir um número racional, bastam dois números inteiros – o numerador e o denominador – para definir um número real são necessários dois conjuntos infinitos de números racionais, pois os elementos constitutivos da definição são as classes A_1 e A_2 , contendo cada uma delas infinitos números.

Assim, Dedekind mostrou que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um continuum de números reais se considerarmos que os pontos sobre a

reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, o que agora é denominado axioma da continuidade de Dedekind- Cantor².

Obviamente, nossa intenção ao desenvolver as atividades de implementação com alunos de 5º ano não foi de introduzir formalmente o conceito de números reais, pois os alunos envolvidos ainda não estavam preparados, devido à sua maturidade e nível de escolarização, para conhecimentos tão aprofundados. No entanto, entendemos que o desenvolvimento de *noções* de continuidade e de números reais, a partir de situações da realidade vivenciadas pelas crianças, deve favorecer uma melhor apreensão do conceito quando este for estabelecido formalmente.

2.2 O Ponto de Tensão entre o Discreto e o Contínuo

O trecho a seguir expressa de maneira excelente a ideia da complementaridade entre o discreto e o contínuo, fazendo uso de dois exemplos não matemáticos, mas que ilustram claramente a relação entre esses dois aspectos.

Ouçã uma cigarra cantando entre as árvores: primeiro se ouve uma série de notas precisamente definidas e claramente separadas, acelerando lentamente. Então, na medida em que o trinado recebe impulso, sente-se as notas unindo-se lentamente umas às outras; mas ainda cada trinado pode ser individualizado como parte elementar de um canto de flauta. Por fim, repentinamente, deparamo-nos com uma nota contínua que é o clímax do canto da cigarra até seu final.

Agora observe o mar quando quebra na praia. Cada onda toma volume, precipita-se, e desaparece na areia. Podemos separar regularmente cada onda daquelas que a precederam e daquelas que a seguirão, e ainda cada onda individual é parte do contínuo do mar.

Tal é, em nossa experiência cotidiana, a relação entre a continuidade e a ideia do discreto: às vezes a experiência da continuidade subjaz à do discreto e às vezes o discreto leva ao contínuo. Sua relação é uma relação entre parceiros iguais. (DA COSTA e DORIA, 1991/2, p. 123, tradução nossa)

O contínuo assume valores discretos e o discreto leva ao contínuo. Que aspectos estão relacionados nessa complementaridade? Em que instante acontece a transição do que era discreto para o contínuo? O “ponto de tensão” entre esses dois aspectos não é algo elementar, que possa ser simplesmente definido e ensinado. Exige intuição e abstração, estando intimamente ligado à noção de *infinito*.

² Mais informações em Caraça (1951).

A pesquisa em História da Matemática, realizada por Brolezzi (1996), sintetiza os obstáculos encontrados pelas antigas civilizações, nas quais a Matemática teve maior desenvolvimento, frente aos paradoxos³ da continuidade.

A evolução da ideia de Número e a formalização das ideias fundamentais do Cálculo, por exemplo, são circunstâncias que não escaparam da tensão entre o discreto e o contínuo.

Segundo Brolezzi (1996), os gregos foram os primeiros a procurar a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, em busca de explicações para o movimento e a transformações dos seres.

A reconhecida “crise dos incomensuráveis”, que marca o surgimento dos números irracionais, é considerada como uma explosão da tensão acumulada entre o discreto e o contínuo no mundo grego. A crise reflete o problema gerado pela dificuldade de expressão de grandezas discretas e contínuas dentro da linguagem matemática que estava em evolução.

Integrando o problema, também figuram os paradoxos de Zenão, seguidor das ideias de Parmênides, na escola filosófica de Elea (Magna Grécia). Zenão de Elea ficou conhecido por refutar a teoria dos *infinitesimais* de Demócrito, que propunha a concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. De acordo com Brolezzi (1996), a contradição desta ideia é apresentada por Zenão ao se referir aos infinitésimos:

se possuem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de comprimento infinito; e se não têm nenhum comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento algum. Além disso, dirá também: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente *nada*. (p. 22)

Os paradoxos mais conhecidos de Zenão acerca da impossibilidade do movimento afetaram, de modo direto ou indireto, muitas concepções da época, em geral baseadas na doutrina pitagórica de que o espaço fosse constituído de pontos e o tempo de instantes. Mas espaço e tempo possuem a propriedade da continuidade, e esses paradoxos revelam as dificuldades de se conceber os fenômenos associados a essa propriedade.

Por exemplo, no paradoxo de Aquiles e a tartaruga, o herói grego, Aquiles, ao apostar uma corrida com a tartaruga, resolve dar-lhe uma vantagem, por ser mais ágil e veloz

³ (latim: *paradoxum*) Pensamento que, apesar de aparentemente correto, apresenta uma conclusão ou consequência contraditória, ou em oposição a determinadas verdades aceitas (JASPIASSU; MARCONDES, 2006).

que ela. Porém, no instante em que Aquiles atinge o ponto em que a tartaruga estava, esta já estará mais adiante (mesmo que a distância que os separa seja cada vez menor), e assim sucessivamente. Conclui-se, então, que Aquiles jamais poderá alcançar a tartaruga, por mais veloz que ele seja.

Uma variação do anterior é o paradoxo da Dicotomia⁴, o qual nos traz a ideia da impossibilidade do movimento, ao considerarmos, por exemplo, que para atravessar uma sala, antes de chegar à parede oposta, uma pessoa deve obviamente chegar à metade da sala. Mas, antes disso ela deve percorrer a metade da metade, ou seja, um quarto da distância. E assim por diante, sempre dividindo a distância a ser percorrida pela metade, indefinidamente. Desse modo, a pessoa nunca chegará ao outro lado, e mais ainda, ela nem sairá do lugar, pois terá que percorrer um número infinito de espaços, ainda que pequenos, num tempo evidentemente finito.

Segundo Brolezzi (1996), o problema incide em se considerar o tempo contínuo e o espaço discreto, ou vice-versa. Assim, os paradoxos de Zenão “recolhem essa sensação de certo desamparo intuitivo, pois relatam uma situação de perplexidade comum frente à continuidade e ao infinito” (p. 22).

Como consequência da perplexidade diante desses conceitos, os gregos desenvolveram o que se chamou de *Horror ao Infinito*. Esse período se caracterizou pela utilização do método da exaustão no desenvolvimento das ideias iniciais do Cálculo Diferencial e Integral, traduzido pelas palavras de Aristóteles (*apud* BROLEZZI, 1996, p. 21): “Os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram”.

Percebemos que historicamente o par discreto/contínuo esteve presente no desenvolvimento de inúmeros conceitos matemáticos, estando intimamente relacionado com as ideias de infinito e infinitésimos. Por abranger conceitos tão complexos, tentou-se até contornar o uso dessas noções por algum tempo, assim como hoje não se explora a complementaridade dos dois aspectos no ensino básico, subestimando sua importância.

Considerando a relevância de mostrar a ideia de infinito, sem deixar de lado tanto o infinitamente grande quanto o infinitamente pequeno na construção do conceito de números racionais e reais, as atividades desenvolvidas em sala de aula seguem dois caminhos de

⁴ (grego: *dichotomia*: divisão em dois, bifurcação) Divisão de uma classe de fenômenos em duas partes, cujas diferenças são contraditórias (JASPIASSU; MARCONDES, 2006).

maneira intuitiva. A primeira conduz à ideia de um conjunto discreto com infinitos elementos e a segunda indica a divisão do tempo em intervalos cada vez menores, acarretando na descoberta de medidas de comprimento infinitamente pequenas.

3 A Modelagem Matemática nos Anos Iniciais

Dedicamos o presente capítulo a uma breve abordagem da trajetória da Modelagem Matemática, desde sua utilização no campo da Matemática Aplicada até sua implementação no Ensino de Matemática. Direcionamos nossos olhares aos anos iniciais do Ensino Fundamental, nos quais o trabalho é ainda mais específico, pois os alunos desse nível ainda estão desenvolvendo sua autonomia para investigações e discussões de problemas, nesse aspecto a Modelagem traz grandes contribuições.

3.1 Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática

As concepções de Modelo e Modelagem Matemática são diversas e dependem do contexto ao qual estão relacionadas. Porém, um conceito geral pode ser destacado em relação ao surgimento dessa prática: a partir da necessidade do ser humano de representar, analisar e prever situações de seu dia-a-dia.

De acordo com Burak (1987, p. 20), “a capacidade humana de pensar, questionar e criar, aliada ao espírito de investigação e da ferramenta matemática já desenvolvida, permitiu ao homem explorar seu meio ambiente, modelando-o para melhor conhecê-lo”.

Assim, a Modelagem Matemática é vista um conjunto de procedimentos que o homem utiliza para tentar explicar matematicamente os fenômenos que ocorrem em seu cotidiano e fazer previsões, possibilitando a tomada de decisões. Nessa perspectiva, um Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto ou fenômeno em estudo (BASSANEZI, 2011).

A Modelagem Matemática constitui-se como um elo entre a Matemática e as demais ciências, tendo como seu *locus* original a Matemática Aplicada. Até o século XIX, a Física era o campo onde se encontrava o maior número de aplicações da Matemática. As demais ciências geralmente utilizavam apenas a linguagem comum para expor suas ideias, o que podia resultar em falta de clareza e imprecisão.

Porém, na ciência contemporânea, a matemática passou a ser indispensável para a formalização das teorias fundamentais, devido ao seu poder de síntese e, e ao mesmo tempo, de generalização. O reconhecimento de uma teoria científica, muitas vezes, tem como condição necessária o fato e poder ser expressa em linguagem matemática (BASSANEZI, 2011).

Diante disso, o papel da matemática na sociedade é amplamente reconhecido, devido às suas inúmeras aplicações em diversas áreas. E essas aplicações geralmente são expressas por meio de modelos matemáticos.

Segundo Bassanezi (2011) o êxito dos modelos matemáticos contribuiu para que a Matemática Aplicada conquistasse espaço também na área da Educação, inicialmente nos cursos superiores, com o objetivo de desenvolver disciplinas matemáticas “aplicáveis”. E nos cursos de Mestrado e Doutorado, com o objetivo de desenvolver a criatividade matemática do aluno a fim de torná-lo um *modelador*, dependendo de sua área de pesquisa.

Na Educação Básica, a inclusão de aspectos de aplicações, sob a forma da modelagem matemática e resolução de problemas, é incentivada por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática.

Por muito tempo – e ainda atualmente –, a apresentação da matemática como algo completo e acabado conduziu seu ensino desvinculado da realidade e até mesmo do processo histórico de construção dos conceitos, contribuindo para o desinteresse dos alunos. Como exemplifica Bassanezi (2011, p. 36), o ensino de um teorema segue o esquema: “enunciado → demonstração → aplicação”, porém esta construção poderia ser feita na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, partindo de sua motivação, passa-se à formulação e validação de hipóteses, com a formulação de novos questionamentos, se necessário, até a elaboração do enunciado. Essa construção segue o processo de modelagem e contribui para o processo de aprendizagem, levando o aluno a participar efetivamente da construção do conceito.

O termo Modelagem não possui uma única definição no contexto da Educação Matemática. Algumas delas são: estratégia de ensino, metodologia de ensino, abordagem pedagógica, processo de obtenção de modelos matemáticos, ambiente de aprendizagem, entre outros (SOUZA; LUNA, 2014).

Porém, o processo de Modelagem em sala de aula apresenta características similares de acordo com a concepção de vários autores. Os procedimentos geralmente são organizados

em etapas, conforme as apresentadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012, *apud* TORTOLA, 2012):

Inteiração, fase em que os estudantes, orientados por um problema, buscam se familiarizar com o tema sob investigação por meio da coleta de dados e informações a seu respeito; Matematização, fase em que ocorre a transição da linguagem natural do fenômeno para a linguagem matemática, por meio de ações como a definição de variáveis, formulação de hipóteses, simplificações e o uso de signos e representações característicos da Matemática; Resolução, que consiste na produção de um modelo matemático, capaz de fornecer uma resposta para o problema condizente com a situação; e, finalmente, Interpretação de Resultados e Validação, fase em que ocorre a análise e interpretação dos resultados indicados pelo modelo, a partir de uma atitude avaliativa que visa a validação, ou não, do modelo matemático produzido. (p. 27, grifos nossos)

Evidentemente, no contexto da Educação Matemática, a modelagem tem um aspecto e um objetivo diferente daquela advinda da Matemática Aplicada. Em sala de aula o que se busca é a aprendizagem da matemática por meio da modelagem. Nessa perspectiva, a obtenção de um modelo pode não ser uma etapa prioritária, sendo dada maior importância ao processo de elaboração do mesmo, ou seja, às discussões promovidas acerca do tema, às investigações realizadas, à análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural.

Os argumentos acerca das contribuições da inclusão da modelagem no ensino de matemática também são compartilhados pelos envolvidos nesse contexto, destacamos alguns a partir de pesquisas relevantes no cenário brasileiro (BASSANEZI, 2011; BARBOSA, 2001):

- * Desenvolve a capacidade em geral dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos em resolução de problemas;
- * Possibilita que os alunos percebam a presença dos modelos matemáticos na sociedade e suas implicações sociais, políticas e econômicas, desenvolvendo a criticidade;
- * Prepara os alunos para utilizar a matemática em diferentes áreas;
- * Facilita ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, assimilar conceitos e resultados, e valorizar a própria matemática.

Neste estudo, a Modelagem é vista conforme a perspectiva apresentada por Barbosa (2001), como um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a investigar, por meio de conceitos matemáticos, situações com referência na realidade.

3.2 Práticas de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais

A multiplicidade de maneiras de se conceber a Modelagem e, conseqüentemente, de implementá-la em sala de aula ilustra a crescente consolidação desse campo na perspectiva da Educação Matemática. Porém, ao se tratar especificamente dos anos iniciais essa prática não se mostra tão expressiva quanto nas demais séries da Educação Básica. Silva e Klüber (2012, *apud* SOUZA; LUNA, 2014) apontam que essa ausência pode ser justificada pelo debate pouco frequente a respeito da Modelagem em cursos de pedagogia, tendo em vista que esses cursos, em geral, representam o campo de formação dos professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

As pesquisas que se destacam, no cenário brasileiro (BURAK, 1987; 2005; LUNA; SOUZA, 2014), geralmente abordam os desafios e a formação dos professores para que possam explorar as potencialidades do trabalho com Modelagem, aspecto importante a ser abordado, considerando que a grande maioria dos professores que lecionam nos anos iniciais não possui formação específica em Matemática.

Outros pesquisadores preocupam-se em descrever as experiências de Modelagem nos anos iniciais destacando a promoção do interesse e participação efetiva dos alunos, com vista a uma aprendizagem significativa (BURAK; KAVIATKOVSKI, 2014); ou investigando os usos que estudantes fazem da linguagem para o desenvolvimento de modelos matemáticos (TORTOLA, 2012; TORTOLA; ALMEIDA, 2014), ou ressaltando o papel das discussões matemáticas em situações de modelagem (LUNA, 2007), ou ainda, trazendo suas inúmeras contribuições no sentido de desenvolver a criticidade e autonomia, a possibilidade do trabalho interdisciplinar, entre muitas outras.

Em geral, essas pesquisas ressaltam o uso da Modelagem desde os anos iniciais por conta de suas possibilidades metodológicas, “pela visão maior que proporciona em relação a um assunto, pela visão de totalidade, por envolver de forma natural e indissociável o ensino e a pesquisa e pela possibilidade de se almejar um dos principais objetivos da educação: o desenvolvimento da autonomia do aluno” (BURAK, 2005, p. 47). Ao contemplar essas possibilidades, a Modelagem satisfaz as necessidades de um ensino de Matemática mais dinâmico e mais significativo para o aluno.

Além disso, o trabalho com Modelagem nos anos iniciais apresenta algumas características peculiares, relativas às práticas de ensino e às experiências específicas deste

nível. Embora a concepção de Modelagem Matemática não faça distinção quanto aos níveis de escolaridade, mantendo a ideia de abordar um problema não essencialmente matemático por meio da Matemática, o que difere, são os conhecimentos e a familiarização que os estudantes têm para com os conceitos matemáticos. Certamente, não devemos esperar que um estudante dos anos iniciais do Ensino Fundamental obtenha um modelo matemático sofisticado. Mas devemos considerar que as representações utilizadas por esses estudantes são simples, porém importantíssimas para a construção do pensamento matemático.

Para ilustrar essas peculiaridades, destacamos duas experiências que apontam certa semelhança à nossa prática.

Luna (2007) aborda o papel das discussões matemáticas em situações de modelagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A investigação foi orientada pelo tema “Assim funciona um Restaurante Natural...”, em que os estudantes da 2ª série (atualmente correspondente ao 3º ano) foram convidados a discutir o que é necessário saber para ativar um restaurante natural, sendo esta situação inicial proposta pela pesquisadora e, posteriormente, ampliada pelos sujeitos da pesquisa. No desenvolvimento do trabalho, vários procedimentos foram adotados como: a visita a um restaurante natural próximo à escola, e a realização de uma entrevista com a proprietária do local para entender como é o seu funcionamento, sua organização, seu cardápio; a realização de uma enquete com os estudantes e funcionários da escola para verificar quais itens deveriam constar no cardápio do restaurante natural da escola; o teste de receitas do item escolhido (sanduíches); e a definição dos preços. Este último momento foi riquíssimo em experiências matemáticas, possibilitando aos alunos refletirem sobre as operações, os sistemas de medidas, proporções, estimativas e até noções de frações.

Os resultados apontam as contribuições da incorporação do ambiente da Modelagem Matemática, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, através da interação dos alunos com situações reais que mobilizam vários conhecimentos matemáticos.

Tortola (2012) apresenta o desenvolvimento de cinco atividades propostas a alunos do 4º ano, a fim de identificar os diferentes usos da linguagem neste nível de escolaridade. Desta série de atividades, escolhemos a segunda, que trata do “Espaço dos Estudantes na sala de aula”. Para determinar quantos alunos caberiam na sala de aula, considerando que cada um tem direito a 1 metro quadrado, foram utilizados diferentes tipos de linguagens, começando com a linguagem natural ao analisar o problema em estudo, passando pelos registros figurais para indicar a área destinada aos estudantes e pela linguagem matemática, ao realizar medições e calcular a área desse espaço, voltando sempre à linguagem natural por meio da

qual o modelo (cálculo da área do retângulo) foi explicado. A atividade suscitou o estudo de unidades de medida de comprimento e de área, além de contemplar algumas propriedades operativas, como a comutativa da multiplicação, e apresentar aos estudantes a interpretação de área sob um ponto de vista geométrico.

Notamos que, ao fazer corresponder cada espaço da sala de aula a um aluno, envolveram-se de maneira implícita noções de contínuo (medidas) e discreto (pessoas), conforme nossos estudos.

De maneira geral, Tortola (2012) considera que

os estudantes, baseados nos princípios da Matemática, procuram sempre partir do uso de uma linguagem que lhes é conhecida, utilizam registros numéricos, em linguagem natural, e partindo destes, passam a utilizar registros tabulares, gráficos, figurais, geométricos e até mesmo algébricos – dependendo da forma de vida – suscitados de acordo com o contexto das situações problema propostas para estudo nas atividades de Modelagem Matemática. (p. 152)

Souza e Luna (2014) apontam em seu panorama acerca das pesquisas sobre Modelagem Matemática nos anos iniciais, algumas características a respeito da especificidade da prática de Modelagem nesse contexto. Destacamos algumas delas:

- * Predominantemente, a escolha do tema é realizada pelos professores, embora os encaminhamentos específicos se definam no decorrer da pesquisa das crianças, ou seja, não há um direcionamento prévio a respeito de quais conteúdos abordar.
- * A implementação das tarefas de modelagem molda-se às práticas de ensino específicas dos professores deste nível, como a roda de conversa, as feiras escolares e a elaboração de relatórios.
- * A abrangência de diferentes conteúdos disciplinares e não disciplinares envolve profissionais de outras áreas para informar às crianças dados relevantes a respeito do tema a ser explorado.
- * É frequente a elaboração de desenhos, paralelamente à produção escrita e oral das crianças, referente à temática abordada.

Diante dos exemplos apresentados, ressaltamos a importância das discussões e da disseminação das ideias e experiências acerca das contribuições da Modelagem Matemática no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Burak (1987), desde seus primeiros trabalhos sobre a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, acreditava e defendia

que esta prática educativa poderia possibilitar um desejo maior de se estudar matemática, além de desenvolver no aluno a curiosidade, o interesse, o espírito de equipe, o desejo de investigação e contribuir também para, através do ensino de matemática, proporcionar uma formação geral ao aluno. (p. 63)

Devemos ter em mente, enquanto professores, que foge ao nosso alcance ensinar todos os conceitos matemáticos que os estudantes necessitam, e que dos conceitos que ensinamos apenas uma parte prevalece em sua vida. Portanto, devemos propiciar a eles a capacidade de *aprender a aprender*, de pesquisar, de formular e resolver seus próprios problemas. E neste sentido, vimos que a Modelagem Matemática traz valiosas contribuições.

4 Aspectos Metodológicos da Pesquisa

Apresentamos, a seguir, o caminho trilhado para a realização deste trabalho, o problema de pesquisa investigado, os procedimentos metodológicos utilizados na obtenção e análise dos dados, inspirados na metodologia de pesquisa qualitativa, e uma breve descrição das conduções das atividades desenvolvidas com os alunos.

4.1 Problema de Pesquisa

Tendo em vista os trabalhos que discutem a importância das abordagens discreta e contínua na construção do conceito de número e em todas as fases de escolarização, adotamos como problema de pesquisa investigar sobre *a construção do pensamento matemático de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental a respeito das noções de discreto e contínuo, em ambiente de Modelagem Matemática.*

Relacionamos às equações de diferenças por estas serem caminhos matemáticos para “discretizar” fenômenos que são contínuos. As crianças utilizam-se do pensamento discreto na organização do raciocínio matemático sobre problemas concretos, sendo que a ideia de continuidade deverá ser formalizada ao longo do percurso escolar em paralelo a outros conceitos da Ciência. Neste sentido, proporcionar situações nas quais essas duas ideias sejam exploradas, de maneira intuitiva, deve contribuir para o desenvolvimento de conceitos mais complexos futuramente como, o que tem ênfase em nosso estudo, a noção de números reais.

Conforme os estudos apresentados nos capítulos anteriores, fundamentamo-nos na relação das noções de infinitamente grande/pequeno com a passagem do discreto ao contínuo, observando como as crianças revelam esse pensamento em ambiente de aprendizagem caracterizado pela Modelagem Matemática.

4.2 Escolha Metodológica

Este trabalho está composto por duas partes que se complementam com o objetivo de abranger o conteúdo Equações de Diferenças, adequado ao nível do ensino superior, e relacioná-lo às noções de discreto e contínuo, que devem ser desenvolvidas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

No primeiro momento, apresentado nos capítulos anteriores, buscamos um breve estudo sobre os fundamentos teóricos envolvidos na problemática de pesquisa além de uma revisão bibliográfica sobre outros trabalhos relacionados à Modelagem Matemática nos anos iniciais.

O segundo momento, que virá adiante, refere-se à implementação realizada com o objetivo de analisar situações proporcionadas pelo ambiente da Modelagem Matemática, buscando indícios a respeito da construção do pensamento matemático das crianças do 5º ano acerca das noções de discreto e contínuo. Esses indícios estão embasados, principalmente, nas falas e atitudes dos alunos participantes. Neste sentido, nossa pesquisa está inserida no campo qualitativo. Conforme Bicudo (1993 apud BORBA e ARAÚJO, 2013, p. 24), “pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada”.

Trata-se de um estudo realizado em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública de ensino situada no município de Peabiru – Pr.

Algumas características da pesquisa qualitativa são apresentadas por Bogdan e Biklen (1994). Destacamos alguns aspectos do nosso trabalho que se enquadram nessas características e, ao mesmo tempo, expomos os procedimentos metodológicos utilizados.

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.

Concordamos que as ações são mais espontâneas e podem ser melhor compreendidas quando realizadas no ambiente natural em que os sujeitos estão inseridos.

Os alunos participantes da pesquisa estavam habituados com a situação, pois as atividades foram conduzidas em seu ambiente natural: sua própria sala de aula, em horário

regular, a pesquisadora é a própria professora da turma, e eles frequentemente realizavam trabalhos em equipe.

Durante as aulas, foram utilizados equipamentos de gravação de áudio e vídeo. Assim, os detalhes das falas e atitudes dos alunos puderam ser revistas e transcritas a fim de obter os dados para a investigação. Essas gravações constituíram a fonte principal para as análises, pois enquanto os alunos realizavam as atividades a professora-pesquisadora sempre era solicitada por uma equipe ou por outra, não tendo disponibilidade para fazer registros ou anotações em diário de campo.

Porém, ao considerar o investigador como *instrumento* de pesquisa, fazemos uso de nossas experiências e pressupostos para coletar dados e interpretá-los.

2. A investigação qualitativa é descritiva

Os dados obtidos são apresentados por meio de palavras ou imagens (e não de números, como em uma pesquisa quantitativa). Essa abordagem descritiva tem a vantagem de aproveitar detalhes que nos permitam inferir a respeito do tema de pesquisa. Conforme Bogdan e Biklen (1994, p. 49), “tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo”.

Diante disso, consideramos como fontes valiosas de investigação as falas dos alunos, as quais foram transcritas e alguns trechos serão apresentados mais adiante. Também exploramos os registros feitos por eles no decorrer das atividades e suas reações e expressões demonstradas durante o processo.

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos

Nesta pesquisa não nos preocupamos com as soluções dos problemas propostos em si, mas buscamos, durante o processo de resolução, encontrar indícios do pensamento sobre o discreto e o contínuo. Também não se tratava do momento de formalizar esses conceitos, tanto que em momento algum foram explicitados aos alunos termos como “discreto”, “contínuo” ou “números reais”.

As atividades constituíram um “plano de fundo”. O cenário principal de nossa investigação foi constituído do ambiente de Modelagem Matemática e suas contribuições para a expressão, por parte dos alunos, dos conceitos investigados.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva

Não dispomos de hipóteses *a priori* ou de uma teoria à qual procuramos comprovar ou refutar. O que buscamos é a compreensão dos dados obtidos. Nas palavras de Bogdan e Biklen (1994, p. 50), “não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes”.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa

Numa investigação qualitativa, busca-se estratégias e procedimentos que permitam compreender o ponto de vista dos sujeitos pesquisados.

Embora, em muitos casos, o comportamento dos sujeitos possa ser alterado pela presença do pesquisador, consideramos que na execução dos momentos principais das atividades as atitudes dos alunos foram satisfatoriamente espontâneas, mesmo com a presença de câmeras e gravadores. Foi possível contar com a participação dos alunos, alguns mais ativos, outros menos, no sentido de exporem suas ideias e conclusões.

Como exposto anteriormente, as atividades foram gravadas em áudio e vídeo. Estas foram revistas em vários momentos a fim de retirarmos a essência e os detalhes que pudessem contribuir para as análises. A transcrição das falas foi realizada segundo as normas apresentadas por Vieira e Mota (2011) no estudo comparado dos padrões de concordância em variedades do Português brasileiro, africano e europeu. Baseamo-nos, obviamente, nas convenções empregadas nas transcrições em Português brasileiro, conforme o quadro a seguir.

Convenção	Situação
...	Qualquer pausa
(hipótese)	Hipótese do que se ouviu
((comentário))	Comentários do transcritor
/	Truncamento, interrupção discursiva
::	Prolongamento de vogal e/ou consoante
?	Interrogação
Maiúsculas	Entonação enfática
- - -	Silabação
“aspas”	Discurso direto

Quadro 1: Principais convenções empregadas em transcrições no Brasil

4.3 Descrição das Atividades Desenvolvidas

Para a realização das atividades, procurou-se proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem repleto de investigações, discussões e conclusões que partissem de seu envolvimento e disposição. Por isso, fundamentamo-nos na Modelagem Matemática como metodologia propiciadora desse ambiente.

Segundo Barbosa (2001, p. 35), um ambiente de aprendizagem de Modelagem revela-se como “um convite aos alunos para indagação e investigação de situações vindas de outros contextos que não o da matemática”.

Essa escolha justifica-se ainda pelo fato de que “a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações” (BASSANEZI, 2011, p. 16).

Foi possível “experimentar” dois tipos de situações.

A primeira atividade foi baseada com referência parcial na realidade, pois os dados numéricos foram levantados com base em suposições, que os próprios alunos consideravam como fictícias, no entanto motivadora de vários questionamentos.

Já a segunda atividade baseou-se em dados reais como fonte de pesquisa, produzidos e coletados pelos próprios alunos.

Em ambas as atividades, não houve a preocupação com a obtenção de um modelo, embora possamos considerar que, tendo descoberto padrões e escrevendo regras simples que facilitavam os cálculos, os alunos chegaram perto de criá-los, levando em conta as limitações de seu nível de escolaridade. O que nos motivou na escolha delas foi sua relação com as equações de diferenças e as possibilidades de encaminhamento que elas oferecem na abordagem do par discreto/contínuo.

As atividades foram desenvolvidas durante os meses de agosto e setembro do ano de 2014, em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental, no período vespertino de uma escola da rede municipal de ensino da cidade de Peabiru – Pr. A turma é composta por 21 alunos com idades entre 9 e 12 anos.

Descreveremos a seguir o encaminhamento de cada atividade, de forma geral, deixando as análises e os detalhes observados para o próximo capítulo.

A primeira atividade, a qual denominamos “O Problema da Reprodução dos Coelhos”, foi realizada em duas etapas, e teve como objetivo principal levar os alunos a obter um conjunto discreto com “muitos” elementos, aproximando-se da noção de continuidade.

No primeiro dia, estavam presentes 18 alunos que foram organizados em 9 duplas para a discussão e resolução da atividade. A duração desta primeira etapa foi de, aproximadamente, duas horas. As discussões iniciaram-se sobre animais de estimação, a criação de coelhos, as características destes animais. A rápida reprodução dos coelhos foi uma característica logo apontada pelos alunos. Após a discussão ter se encaminhado para esse apontamento, foi apresentado um texto com ilustrações acerca do problema que a reprodução desordenada dos coelhos causou na Austrália, como pode ser visto na Figura 2, no próximo capítulo.

Pensando no rápido crescimento da população de coelhos, passou-se à formulação das hipóteses e condições para que essa reprodução aconteça, chegando ao desafio de determinar quantos casais de coelhos existiriam a cada mês, usando as mesmas hipóteses propostas por Leonardo de Pisa na formulação do problema, deixando o limite de tempo indeterminado, conforme cada equipe se interessasse em calcular.

A formulação das primeiras estratégias para representar o problema não foi tarefa fácil, por várias vezes as explicações tiveram de ser retomadas para toda a classe e também nos grupos. Depois de algum tempo, alguns alunos foram adotando uma atitude mais autônoma, discutindo entre si, descobrindo regularidades e desenvolvendo suas próprias estratégias.

No fim da tarde, enquanto algumas duplas insistiam em continuar calculando o número de coelhos que existiriam nos próximos meses, por estarem impressionados com a forma que essa quantidade aumentava, outras já haviam se cansado e desistido do trabalho. Iniciou-se, então, a exposição dos métodos utilizados e a discussão final dos resultados e conclusões acerca do problema, sendo esta a fase principal da atividade. Desta discussão final foram destacadas as contribuições mais significativas a respeito da noção de “muitos”, de “infinito”, que procuraremos relacionar à noção de continuidade, conforme as análises posteriores.

Ainda com relação à primeira atividade, alguns dias depois, fizemos a retomada a fim de verificar e aprimorar a compreensão inicial que os alunos tiveram no desenvolvimento da aula anterior. Essa segunda etapa teve duração de, aproximadamente, uma hora e meia e

estavam presentes dois alunos a mais que no primeiro dia. Esses dois alunos participaram incluindo-se em duas equipes diferentes, que já conheciam o problema, formando assim sete duplas e dois trios para a retomada da atividade.

Esse momento caracterizou-se pela exposição e complementação dos métodos de contagem utilizados pelas equipes. Embora sejam simples, as descobertas realizadas pelos alunos e exploradas por toda a classe, podem ser consideradas o seu modelo para o problema. Eles descobriram que a quantidade de coelhos existentes em cada mês poderia ser obtida somando as quantidades referentes aos dois meses imediatamente anteriores. Diante dessa “praticidade”, muitos se empolgaram ainda mais na busca pelas quantidades dos próximos meses, encontrando os números da sequência de Fibonacci sem conhecê-la.

A segunda atividade, relacionada à “Observação do crescimento de uma Planta”, também pode ser considerada em duas etapas. O objetivo dessa atividade foi estimular o desenvolvimento da noção de continuidade do tempo, considerando-o inicialmente como variável discreta e sucessivamente dividindo-o em intervalos cada vez menores. Além disso, procuramos investigar como os alunos pensavam sobre o processo de crescimento das plantas, se ele se dá de maneira contínua ou se em determinados instantes o crescimento ocorre de uma só vez.

A primeira etapa, de obtenção dos dados para o problema, teve duração de 25 dias. Foi o período em que os alunos cultivaram e observaram o crescimento de uma planta (alpiste), fazendo medições e organizando os dados em tabela. O alpiste foi cultivado em “bonecos ecológicos” e a cada cinco dias os alunos mediam o comprimento da planta e anotavam nas tabelas de cada equipe. Todos os alunos participaram dessa etapa divididos em 7 equipes com 3 alunos em cada uma. Cada equipe elegeu um de seus bonecos para serem feitas as medições a fim de trabalharem com os mesmos dados posteriormente.

A segunda etapa dessa atividade foi realizada em uma aula de aproximadamente uma hora e meia, na qual estavam presentes 20 alunos. Nesse momento, buscamos analisar o crescimento da planta observando, inicialmente, os períodos de maior e menor desenvolvimento, calculando as diferenças entre as medidas registradas em períodos consecutivos. Em seguida, passamos a pensar sobre como o alpiste foi se desenvolvendo a cada dia. Calculou-se a média de crescimento por dia, depois por hora, por minuto, por segundo... As ideias e reações dos alunos são descritas no próximo capítulo.

5 Análise das Atividades

Neste capítulo, apresentamos com detalhes as atividades desenvolvidas e buscamos uma compreensão da construção do pensamento matemático dos alunos envolvidos, a respeito dos conceitos de discreto e contínuo, por meio das contribuições do ambiente de Modelagem Matemática. Para tanto, consideramos os registros escritos produzidos pelos alunos, as transcrições de suas falas e suas expressões obtidas por meio das gravações em vídeo.

Atribuímos nomes fictícios aos alunos que tiveram contribuições mais significativas e cujas falas ou atitudes são citadas no texto.

5.1 Atividade 1: O Problema da Reprodução dos Coelhos

A Atividade 1 foi desenvolvida com base no conhecido problema da reprodução dos coelhos, proposto por Leonardo de Pisa em seu *Liber Abaci* em 1202, que dá origem à famosa sequência de Fibonacci.

A resolução do problema por meio da teoria das equações de diferenças foi apresentada na seção 1.3. Agora, exploraremos sua contribuição para o desenvolvimento da noção de continuidade, por meio da ideia do “infinitamente grande”.

Conforme aponta Brolezzi (1996, p.8),

Um conjunto com um número "muito grande" de elementos tende a revestir-se com aparência de continuidade (pense-se, por exemplo, na areia da praia, cujo montante não se avalia pela contagem do número de grãos, mas pela medida, utilizando noções de volume ou massa).

Com essa atividade, procuramos investigar a noção que os alunos têm sobre o infinito e relacionar com a noção de continuidade, fundamentada na ideia acima. Para melhor ilustrar como se deu o desenvolvimento do trabalho com os alunos, apresentaremos trechos das conversas, acompanhados da descrição do contexto em que aconteciam e das considerações que nos aproximam dos objetivos do trabalho.

Como motivação das discussões iniciais, a professora-pesquisadora⁵ introduziu o assunto sobre animais de estimação questionando quais alunos tinham animais em casa, quais espécies são apropriadas para criação em ambiente doméstico. Os coelhos logo foram citados e suas características atraíram a atenção da turma, por serem tão “bonitinhos” e “fofinhos”, conforme a opinião das crianças.

Apenas um aluno, que chamaremos Gabriel, tinha coelhos como animais de estimação, outros relataram que já tiveram em outros momentos e a maioria das crianças simpatizava com os bichinhos e gostaria de tê-los em casa. Por coincidência, os coelhos de Gabriel eram justamente um casal, o qual foi possível utilizar como exemplo na formulação do problema posteriormente.

Vários outros predicados foram atribuídos aos coelhos, como “gostam de cenoura, tomate, alface”, “servem como amigos”, “pé de coelho dá sorte”. Mas o que despertou o interesse da turma foi o exposto por Bruno: “Eles fazem filhote muito rápido, professora!”. Ao explorar o tema, com questionamentos da professora, os alunos ainda destacaram o fato de os coelhos terem vários filhotes a cada cria, sendo a rápida reprodução uma característica típica da espécie.

Adentrando mais ao assunto, passou-se a refletir acerca do fato de que em nossa realidade, nosso país, nossa cidade, criar coelhos como animais de estimação é algo inofensivo. Porém, na Austrália a reprodução desordenada desses animais já causou diversos transtornos. As informações a respeito do tema foram apresentadas por meio do texto intitulado “Como teve início a incrível superpopulação de coelhos na Austrália”. O texto, com algumas imagens ilustrativas do problema, foi compartilhado com os alunos utilizando aparelho de projeção multimídia. A Figura 2 traz o referido texto a fim de esclarecer ao leitor como foram apresentadas as informações.

⁵ Trata-se da professora da turma, a pesquisadora e, ao mesmo tempo, a autora do trabalho. A partir deste momento, usaremos apenas a denominação “professora” enquanto estivermos nos referindo às atividades em sala de aula.

<p>Como teve início a incrível superpopulação de coelhos na Austrália</p> 	<p>A primeira imagem que se passa na cabeça das pessoas ao mencionar coelho é a de criaturas fofinhas, pequenas, peludas, que comem cenouras e fazem ovos de chocolate.</p> 
<p>Mas essa imagem é completamente diferente para os australianos, pois lá eles vivem em uma crise de superpopulação de coelhos.</p>	<p>Tudo começou em 1859, quando um homem chamado Thomas Austin, um latifundiário do estado de Victoria, importou 24 coelhos europeus selvagens (<i>Oryctolagus cuniculus</i>) e os lançou no mato para caça esportiva.</p>
<p>Mas ele não sabia que a fama dos coelhos, de serem bem velozes, também era válida em sua reprodução, que fez aqueles 24 roedores se tornarem milhões em poucos anos.</p> 	<p>Quase 70 anos depois, a estimativa da população de coelhos na Austrália era de 10 bilhões, graças às condições climáticas favoráveis que o país oferece.</p>
<p>Durante o século de XIX, o método mais comum de proteger as plantações dessas devastadoras criaturas era com armadilhas, atirando nelas e alguns ainda caçavam.</p> 	<p>Entre 1880 e 1885 o governo começou a construir cercas de proteção que impediam a entrada dessas "pestes". Hoje a Austrália possui a maior cerca do mundo com 5 mil quilômetros de comprimento.</p> 
<p>Em algumas tentativas mais desesperadas, o governo chegou a utilizar vírus para acabar com a população em massa. Mas, com o tempo, os coelhos acabaram desenvolvendo imunidade aos vírus.</p>	<p>Atualmente, a Austrália ainda sofre com a superpopulação dessas criaturas fofas e, ao mesmo tempo, devastadoras. Estima-se que a população de coelhos no "Velho Continente" seja de mais de 200 milhões.</p>

Figura 2: Informações sobre a superpopulação de coelhos na Austrália
Fonte: Adaptado de Hagui (2014)

Após conhecerem as informações apresentadas no texto, a professora propôs uma comparação da população de coelhos na Austrália com a quantidade de habitantes do Brasil. As estimativas que os alunos faziam sobre a população brasileira iniciavam em vinte milhões, oitenta milhões. Ao informar que a população brasileira era estimada em pouco mais de cento e noventa milhões de habitantes, os alunos logo perceberam que a Austrália, mesmo tendo menor extensão territorial, tem uma quantidade de coelhos maior que o Brasil tem de habitantes, e Ana ainda completou: “Então com certeza tem mais coelhos do que gente na própria Austrália”.

Utilizando os coelhos de Gabriel como exemplo, prosseguiu-se à reflexão:

Professora: se o Gabriel deixar o casal de coelhos dele se reproduzir, como será que essa população dele vai crescer?

Henrique: dá um para cada um no mundo, professora.

Professora: se ele deixar os coelhinhos todos lá na casa dele?

Henrique: ah professora, daí eles morrem de aperto ((risos)).

Nesta fala descontraída, Henrique revela duas noções que podem ser comparadas a princípios fundamentais na Matemática. Em sua primeira fala, ele utiliza a *relação um a um* para comparar a quantidade de coelhos com a quantidade de pessoas no mundo, o que provavelmente ele considera ser uma grande quantidade, porém finita.

Após considerar a hipótese de deixar os coelhos presos em um local, percebe-se a noção de que uma quantidade muito grande de coelhos (conjunto discreto), limitados a uma região, faz com que eles tenham que viver muito próximos uns dos outros. Podemos comparar essa situação à continuidade ou completude dos números reais, pois sabemos que em um intervalo limitado, por exemplo $[0, 1] \in \mathbb{R}$, existem infinitos números.

Após a contextualização, passou-se à formulação das hipóteses do problema. Para poder contar quantos coelhos existiriam, os alunos foram indicando coletivamente as condições para a reprodução dos coelhos a partir de questionamentos da professora. Seguindo a ideia de Henrique, Ana e Felipe iniciaram os apontamentos.

Ana: precisa de muito espaço.

Felipe: precisa de um casal.

Professora: é precisa de um casal pra começar. Nós vamos pegar um casalzinho só, recém-nascido. Esse casal recém-nascido, quanto tempo depois que eles começam a reproduzir?

Bruno: depois de um mês mais ou menos?

Felipe: as fêmeas tem que estar no cio.

Apoiando-se nas suposições levantadas pelos alunos, a professora assumiu a função de organizar os dados do problema, chegando à formulação das hipóteses conforme o problema proposto por Fibonacci, mas nas palavras dos alunos e da professora:

1. Cada casal só começa a se reproduzir com dois meses de idade;
2. A partir dos dois meses, cada casal cria em todos os meses;
3. A cada cria nasce sempre mais um casal de coelhos;
4. Nenhum coelho morre.

Nas discussões para elaboração dessas hipóteses, os estudantes sabiam que geralmente os coelhos têm mais filhotes do que apenas um casal em cada cria, porém eles compreenderam a necessidade de considerar apenas dois e, especificamente, um macho e uma fêmea, para facilitar a organização e o pensamento.

Felipe: e esse macho e essa fêmea vão ter os filhos.

Camila: e mais outro, e mais outro...

Felipe: e os filhos deles vão ter mais filhos e os outros filhos vão ter mais filhos...

Para ajudar na compreensão da situação, foi utilizado um software⁶, que simula a evolução do problema, mostrando quantos pares de coelhos existem a cada mês e diferenciando quais são recém-nascidos ou adultos por meio de desenhos. A simulação foi feita para todos os meses em um ano. No início, os alunos apontavam quais coelhos iriam crescer, quais teriam filhotes e quantos coelhos haveria no próximo mês. Porém, conforme passava-se de um mês ao outro essa tarefa se complicava e eles ficavam admirados com as quantidades que surgiam e ansiosos para ver a tela seguinte.

A Figura 3 mostra quatro fases do problema da reprodução dos coelhos representadas no software citado.

⁶ Intitulado “Fibonacci: Problema dos Coelhos”, disponibilizado por meio de um repositório de recursos para a educação em ciências, voltado para educadores em geral, desenvolvido em um projeto de extensão universitária, denominado “CiênciaMão”, da Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_fibonacciproblemadoscoelhos>.

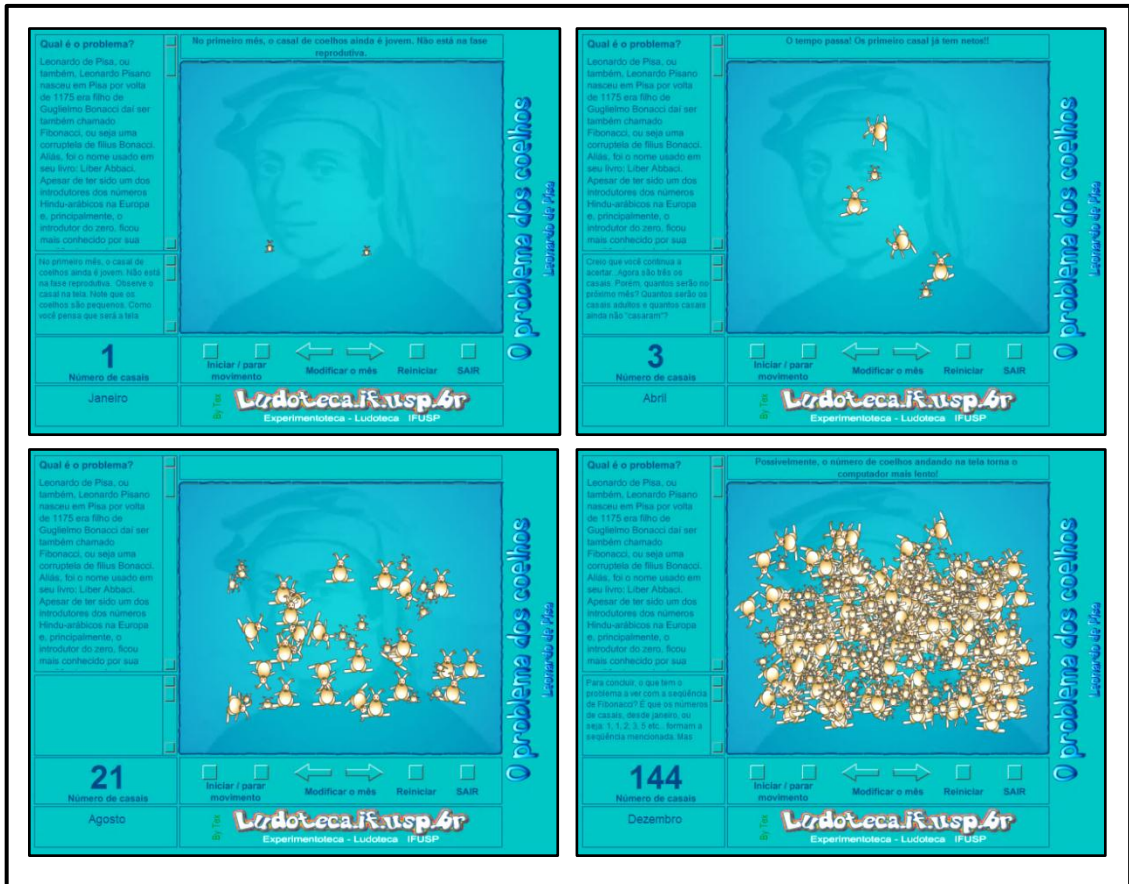


Figura 3: Simulação da reprodução dos coelhos
 Fonte: software “Fibonacci: Problema dos Coelhos”

Em duplas, os alunos começaram a dar forma às suas representações do problema. Todos optaram por representar coelhos grandes e pequenos por símbolos, alguns usavam riscos, outros usavam bolinhas, outros desenhavam coelhos de tamanhos diferentes.

janeiro	1 casal	
fevereiro	1 casal	
março	2 casais	
abril	3 casais	
maio	5 casais	
junho	8 casais	
julho	13 casais	
agosto	21 casais grandes + 22 pequenos	42 casais
setembro	34 casais grandes + 42 pequenos	76 casais
outubro	55 casais grandes + 64 pequenos	119 casais
novembro	89 casais grandes + 106 pequenos	195 casais
dezembro	137 casais grandes + 170 pequenos	307 casais

Figura 4: Representação Atividade 1 pela Equipe 1

Porém, conforme a quantidade de coelhos aumentava, a representação e a contagem ficavam mais difíceis. Então, a professora passou a instigá-los a buscar alternativas nas quais não fosse necessário desenhar um por um. Procurando regularidades entre o número de coelhos adultos e recém-nascidos que obtinham a cada mês, a maioria dos alunos percebeu que as quantidades de coelhos novos que nasceriam a cada mês seria igual à quantidade de coelhos adultos que estivessem aptos a reproduzir no mês anterior. Assim, passaram a utilizar a operação de adição e apenas anotar os resultados obtidos, conforme ilustra a representação da Equipe 1, na Figura 4, e da Equipe 2, a seguir, que registrou o número de coelhos adultos, jovens e filhotes em cada etapa.

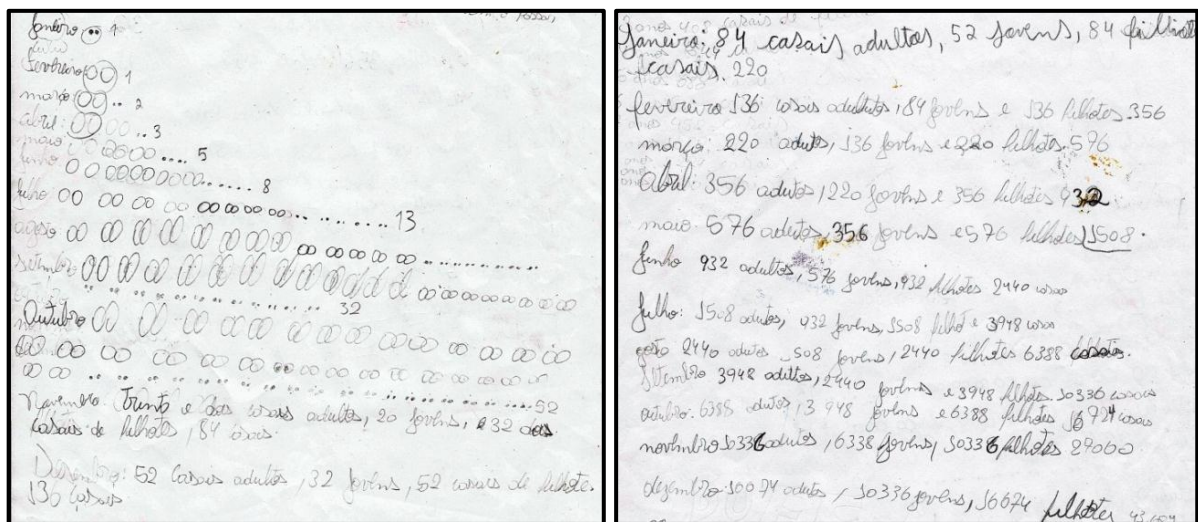


Figura 5: Representação da Atividade 1 pela Equipe 2

Este foi o momento em que os alunos construíram seus modelos. Embora simples, exigiram concentração, raciocínio e discussões na tentativa de encontrar as regularidades envolvidas na reprodução dos coelhos. Assim que encontraram o método que facilitava a investigação, várias equipes se engajaram ainda mais, pela curiosidade de obter quantidades de coelhos cada vez maiores. Embora, pudessem utilizar a calculadora, os alunos da Equipe 3, preferiram registrar os cálculos efetuados. Assim, na Figura 6, temos o registro de cada etapa alcançada na obtenção do modelo por esta equipe.

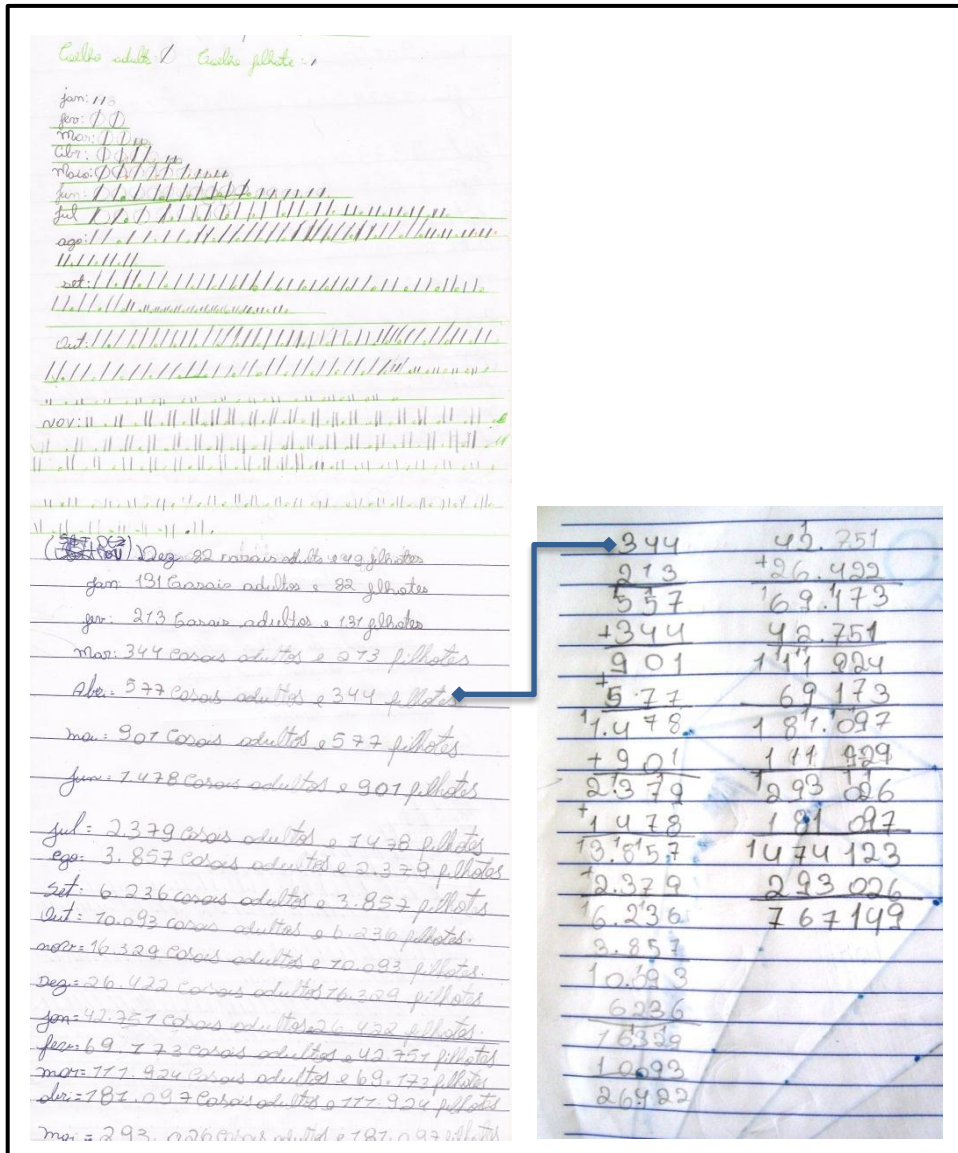


Figura 6: Representação da Atividade 1 pela Equipe 3

As representações das três equipes destacadas mostram a obtenção de um modelo recursivo, no qual as variáveis são discretas. Todas as equipes obtiveram resultados numéricos diferentes, fato que não teve influência em nossas análises, porém esses resultados foram revistos em outra ocasião.

Maior importância foi dada ao momento em que os alunos foram convidados a exporem suas conclusões e opiniões acerca do problema estudado.

Nesse momento, foi possível confirmar como as crianças recebem naturalmente a formulação de modelos, fazendo aproximações da realidade para poder representá-la matematicamente.

Pedro: professora foi muito grande. Somando foi muito grande a reprodução deles, mas a gente fez um numero abaixo ainda, né professora?

Professora: verdade, vocês me falaram que eles são capazes de criar mais do que um casal.

Felipe: nós só fez com um casal, imagina com uns dez filhotes?

Professora: quanto será que daria se fosse uns dez filhotes em cada cria?

Ana: ia dar MUITO, professora!

Otávio: quinhentos e alguma coisa.

Camila: ia dar BILHÕES, professora!

Ana: daria muito mais que bilhões, daria INFINITO!

As ênfases nas falas dos alunos revelam as ideias que estes têm sobre quanto seriam *muitos* coelhos. Iniciando com quinhentos, logo chegando aos bilhões e ao infinito, que nesta fala de Ana parece estar relacionado a uma quantidade muito grande, porém finita. Já na fala de Bruno, a seguir, a ideia de infinito se revela de outra maneira.

Bruno: ia dar infinito, depende da quantidade de tempo que for calcular.

Professora: depende da quantidade de tempo?

Bruno: eu acho...

Professora: se calculasse pra dois anos, já ia ser infinito?

Bruno: não, estou falando assim: se continuasse calculando ia dar infinito.

Professora: ah:: se não parasse nunca de calcular?

Bruno: ia ser infinito porque nunca para. Cada vez vai criando mais ((fala não identificável)).

Neste caso, identifica-se duas noções acerca do infinito. Inicialmente, Bruno demonstra a mesma ideia de Ana, quando diz que “*depende* da quantidade de tempo”, dando a entender que essa quantidade de tempo a que ele se refere é finita, sendo assim, a quantidade de coelhos também seria finita. Porém, ao ser questionado revela uma noção mais elaborada, de que como os coelhos continuam criando filhotes e os filhotes também têm crias e esse processo “nunca para”, então a quantidade de coelhos aumentaria sem limites.

A noção de infinito se revela ora como uma quantidade muito grande, ora como um processo que se repete continuamente. Portanto, a continuidade do tempo acarretaria a quantidade infinita de coelhos.

Em um segundo momento, esta atividade acerca da reprodução dos coelhos foi retomada. Porém, esse momento caracterizou-se pela exposição e complementação dos métodos de contagem utilizados pelas equipes. Ao compreender uma regra prática que permitia determinar o numero de coelhos a cada mês a partir da quantidade obtida no mês

anterior, vários alunos se empolgaram e queriam calcular sempre mais, pois se surpreendiam com os resultados alcançados a cada mês.

Consideramos que o ambiente de Modelagem Matemática contribuiu para o desenvolvimento da autonomia, propiciando aos alunos maior interesse e discussões a respeito do tema de estudo. As exposições dos alunos permitiram-nos perceber algumas noções que estes têm a respeito de quantidades discretas *muito* grandes relacionando-as ao infinito.

A noção de continuidade revela-se em dois momentos e sob dois aspectos diferentes. O primeiro, no início das discussões, quando Henrique afirma que não seria possível prender todos os coelhos em um local. Pois este local, por ser limitado, é finito, e a quantidade de coelhos seria infinita, ou *muito* grande, como se considerava até o momento. Conforme as crianças passarem a raciocinar mais sobre coisas abstratas e menos sobre coisas reais, perceberão que é possível sim um intervalo limitado conter infinitos elementos, como é o caso dos números racionais e, mais ainda, dos reais.

O segundo aspecto em que a continuidade se faz presente é a noção de infinito como um processo que se repete indefinidamente, revelado na última fala de Bruno.

5.2 Atividade 2: Observação do desenvolvimento de uma planta

Nessa atividade procuramos explorar a noção de continuidade por meio da divisão sucessiva de intervalos de tempo regulares, portanto discretos, tornando-os cada vez menores, aproximando-se da ideia de continuidade, a qual rege os fenômenos naturais.

No início do mês de agosto, cada aluno confeccionou um “Boneco Ecológico”, no qual foram plantadas sementes de alpiste na região da cabeça, conforme o alpiste crescia assemelhava-se aos cabelos do boneco. Neste momento, foram integrados os conteúdos de Ciências, os quais os alunos já haviam estudado, como os elementos necessários para que as plantas se desenvolvam, o processo de fotossíntese.

Os alunos se envolveram nos cuidados e no cultivo da planta durante todo o mês de agosto.



Figura 7: Boneco ecológico

Para esta atividade, a turma foi dividida, desde o início, em sete grupos de três alunos e cada grupo escolheu um entre seus bonecos para ser analisado. A cada cinco dias eram feitas as medições do comprimento da planta no boneco escolhido de cada equipe e os dados eram anotados em tabelas. A Tabela 3 apresenta as medidas, em centímetros, obtidas por todas as equipes.

	01/08	06/08	11/08	16/08	21/08	26/08
Equipe 1	0	1,1	6,3	10,2	11,5	13,0
Equipe 2	0	0,8	7,0	9,1	14,0	15,0
Equipe 3	0	1,0	8,0	15,0	16,0	16,0
Equipe 4	0	1,9	9,1	14,0	15,0	18,0
Equipe 5	0	2,0	8,2	12,9	16,0	
Equipe 6	0	1,2	8,0	10,5	12,3	
Equipe 7	0	1,5	7,5	11,6	12,5	

Tabela 3: Crescimento do alpiste em centímetros

As três últimas equipes desconsideraram a última medição, pois nesse dia as plantas já estavam sem vida e seus comprimentos estavam menores do que os obtidos anteriormente.

Após esse período de 25 dias, foi realizada uma aula com duração aproximada de uma hora e meia na qual os alunos foram instigados a analisar como se deu o desenvolvimento do alpiste em cada boneco. A discussão foi conduzida de modo a levá-los a pensar sobre o crescimento contínuo da planta.

Inicialmente, a professora ressaltou que os intervalos de tempo entre cada medição efetuada foram sempre iguais, de 5 em 5 dias. Em seguida, levantou a seguinte questão: “A medida que a planta cresceu em cada intervalo foi sempre a mesma?”.

Os alunos já haviam percebido que não, que havia intervalos em que a planta crescia mais, em outros menos, e em alguns casos até diminuiu, como citado anteriormente.

Então, a professora solicitou que os alunos verificassem em qual período a planta havia se desenvolvido mais. Cada equipe passou a calcular as diferenças entre as medidas consecutivas e relataram suas conclusões. A Figura 8 exemplifica como os integrantes da Equipe 1 obtiveram e representaram as diferenças entre as medidas encontradas em cada período.

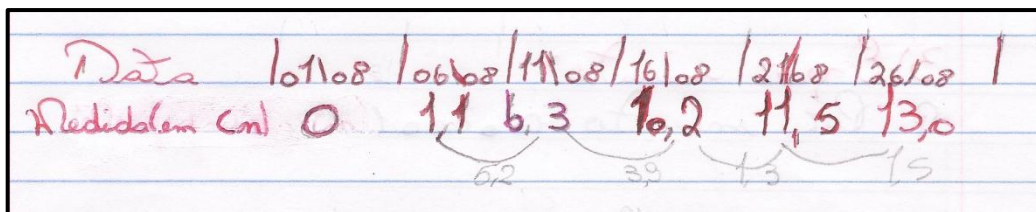


Figura 8: Crescimento do alpiste em cada intervalo

Em todos os casos o período de maior desenvolvimento foi entre os dias 06 e 11, como mostra a Tabela 3.

Discutindo sobre como ocorre esse desenvolvimento, os alunos demonstraram ter a noção de que a planta crescia um pouco a cada dia, então passaram a calcular essa medida.

Professora: então, como que vocês acham que a gente pode fazer pra dizer quanto que esse alpiste crescia a cada dia?

Bruno: dividindo pelo anterior?

Ana: dividindo por cinco?

Pedro: e se num dia crescesse mais e no outro menos?

Professora: é por isso que a gente vai ter que fazer uma média, quer dizer, se em todos os dias ela crescesse igual, quanto que aproximadamente seria por dia?

Foi necessário explicar o conceito de média, como uma distribuição das medidas igualmente para cada dia. Os estudantes calcularam a média de crescimento em cada intervalo e depois obtiveram apenas uma média para o período todo. Para isso, consideraram a medida máxima que o alpiste atingiu e em quantos dias isso aconteceu (alguns em 25 dias e outros em 20), efetuando a divisão com o uso de calculadoras.

Outros conceitos foram explorados, antes de prosseguir à análise, para compreender os números que surgiam como resultados, pois apareciam várias casas decimais e os estudantes ainda não haviam construído o significado desses números. Como os resultados representavam medidas em centímetros, a professora procurou explorar as noções de décimos de centímetros, ou milímetros, os quais eram possíveis de visualizar com a régua, e estimular a imaginação para as medidas menores que um milímetro, ressaltando a ideia de divisão do espaço de um milímetro em dez ou em cem partes.

Após obter as medidas que cada planta crescia, em média, por dia, a professora passou a investigar qual a ideia dos alunos sobre como ocorre esse crescimento.

Professora: vocês viram que a planta crescia alguns milímetros por dia. Vocês acham que a planta só cresce quando passa de um dia para o outro? Que horas ela cresce?

Ana: de noite.

Professora: só de noite ela cresce?

Ana: de dia também, mas eu não vi a minha crescer, professora.

Essa visão de Ana, de que as plantas crescem à noite enquanto estamos dormindo e, por isso não percebemos, é muito comum entre as crianças. Não só ela, mas outros alunos também demonstravam ter essa ideia.

Tentando incitar a imaginação para a visualização de uma planta crescendo, obteve-se a discussão a seguir:

Professora: se a gente colocar uma câmera monitorando a planta, vai ter um período que ela vai ficar parada e de uma hora pra outra, por exemplo, quando chegar meia noite, ela vai crescer tudo de uma vez?

Pedro: não.

Luana: ela vai crescer devagar, todo dia ela vai crescendo devagar.

Pedro: a gente nem percebe, professora.

Professora: por que será que a gente nem percebe?

Ana: porque é muito devagar e à noite cresce um pouco mais.

Felipe: e a gente não tem paciência pra ficar vendo.

Otávio: é que nem o ponteiro grande do relógio.

Ana continua a pensar que a planta cresce mais à noite. Esse seu conceito evidencia o domínio do pensamento discreto sobre o contínuo nas crianças, ao considerar que o fenômeno

estudado apenas se modifica em instantes determinados por intervalos de tempo iguais (variação discreta).

Quando passaram a calcular a média de crescimento da planta por hora, os alunos obtiveram medidas menores que os milímetros. Ao tentar imaginar essas medidas, as explicações baseadas na lentidão com a qual ocorre o crescimento da planta foram se tornando mais convincentes.

Professora: seria um décimo de milímetro, que é um milímetro dividido em dez partes. Agora, um milímetro que é um espacinho desse aqui da régua ((mostrando na régua)) dividido em dez partes...

Ana: é só um pontinho, é muito pouco!!!

Professora: então por que a gente não consegue ver a planta crescendo?

Gabriel: por que ela cresce muito pouco...

Professora: porque ela cresce o tempo todo, mas o tanto que ela cresce...

Ana: é uma hora que demora.

Professora: é uma hora ainda...

Ana: um minuto não é nada.

Professora: e em um minuto?

Ana: cresce nada.

Professora: mas será que é NADA?

Ana: é nada de nada, professora.

Professora: se ela não crescesse NADA em um minuto, ela cresceria em uma hora?

Henrique: não.

Professora: ela nunca cresceria nada.

Felipe: porque uma hora é feita por minutos.

Professora: então alguma coisa ela cresce em um minuto.

Henrique: professora, eu fiz a conta por um minuto, deu zero ponto zero zero zero cinco

Ana: é muito pouco!

O argumento de Felipe sobre a hora ser formada por minutos auxiliou na compreensão de que o crescimento da planta nesse intervalo de tempo pode ser muito pequeno, mas nunca zero. Assim como a hora é composta por minutos, estes são compostos por segundos, que por sua vez, podem ser divididos em décimos, centésimos, milésimos... “infinitésimos” de segundos e ainda assim haverá alguma medida correspondente ao crescimento da planta nesse intervalo, mesmo que não haja instrumento para medi-la. Obviamente, a discussão com as crianças não alcançou este nível, pois seu raciocínio se

sustenta em coisas reais, ou seja, mesmo que elas não vejam, elas sabem que existem no mundo material, como ilustra o trecho a seguir:

Henrique: por segundo? 0.000008

Professora: o que será que tem esse tamanho?

Ana: um microbiozinho, professora.

Bruno: uma célula.

Assim como na primeira atividade, os alunos se envolveram, demonstrando interesse e curiosidade para encontrar valores, agora, cada vez menores. Então, tomaram a iniciativa e começaram a diminuir ainda mais o intervalo de tempo. Com a explicação da professora sobre como os segundos são divididos, em décimos, centésimos, milésimos, fizeram a média de crescimento por décimos de segundos e quando os integrantes da Equipe 5 calcularam para os centésimos de segundos, tiveram a surpresa:

Henrique: em centésimo de segundo dá ZERO!

Professora: ainda não daria zero, é que seriam muitos zeros e a calculadora não tem espaço suficiente pra mostrar.

Henrique: tem que fazer no caderno a conta... Quando eu crescer eu vou criar uma calculadora que cresce a tela pra caber tudo.

Henrique ainda não tem o conhecimento de que, pela continuidade do tempo, do espaço e dos números reais, essa sua calculadora deverá ser infinita, ou seja, deverá abranger infinitos dígitos.

A Figura 9 ilustra todo o processo, desde a organização dos dados até o cálculo das médias de crescimento do alpiste, realizado pela Equipe 5, composta por Henrique, Luana e Gabriel.

Vamos acompanhar o crescimento da alpiste no Boinco ecológico.

Data	01/08	06/08	11/08	16/08	21/08	26/08
Medida (em cm)	0	2,0	8,2	12,9	16,0	

1) Podemos estimar quanto a planta cresceu, em média, por dia?

R: Ela cresceu de dia 01 ao dia 06, 04 cm.
 cresceu de dia 06 ao dia 11, 12,4 cm.
 cresceu de dia 11 ao dia 16, 09,4 cm.
 cresceu de dia 16 ao dia 21, 06,2 cm.

Medida de dia 01 ao dia 26/08.

R: 0,8 cm. ela cresce em 1 dia.

2) Quanto será que a planta cresceu, em média por hora?

R: 0,03 por hora ela cresceu 0,03

3) E por minuto? 0,0005 por minuto.

por segundo 0,000008

por décimo de segundo 0,0000008

○ ————— Por centésimo de segundo

Figura 9: Processo de realização da Atividade 2

Diante dessas experiências, vemos que as crianças continuam a raciocinar com base no discreto, embora algumas delas estejam se aproximando do ponto de tensão entre o discreto e o contínuo. E estas são as que demonstram uma noção mais elaborada sobre o infinito: como um processo contínuo e apenas não como uma quantidade muito grande.

Não buscamos formalizar o conceito de continuidade, considerando sua complexidade. Mas acreditamos que as crianças devem desde cedo ter contato com experiências que as levem a refletir sobre grandezas numéricas, a fim de que possam assimilar com maior propriedade conceitos que lhes serão apresentados futuramente, como os números reais, por exemplo, e que exigem essa reflexão.

Considerações Finais

Ao compor algumas considerações quanto à pesquisa realizada, retomamos o objetivo que nos instigou a tal realização: *investigar sobre a construção do pensamento matemático de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental a respeito das noções de discreto e contínuo, em ambiente de Modelagem Matemática.*

A fundamentação teórica que orientou nossos estudos permitiu-nos relacionar as noções de discreto e contínuo às ideias de infinitamente grande e infinitamente pequeno. Considerando que essas noções estão presentes na formação de inúmeros conceitos matemáticos, destacamos a importância de que sejam abordados de maneira intuitiva desde os primeiros anos de escolaridade. Nossos olhares voltaram-se à formação do conceito de número real.

Notoriamente, o campo numérico que as crianças de 5º ano do Ensino Fundamental conhecem e compreendem até o momento é o dos naturais. Por isso, o pensamento discreto prevalece em seu raciocínio. A ideia de continuidade será formalizada ao longo do percurso escolar, mas proporcionar situações que levem em conta a interação do par discreto/contínuo, de maneira intuitiva, pode contribuir para a aquisição de conceitos mais complexos e a ampliação do campo numérico dos alunos.

Os temas abordados nas atividades – reprodução de coelhos e desenvolvimento de plantas – foram relacionados às equações de diferenças por estas constituírem caminhos para a “discretização” de fenômenos que são contínuos. Na primeira atividade destacou-se a continuidade do tempo e do espaço, enquanto a variável “quantidade de coelhos” era discreta. Na segunda atividade, estudamos o crescimento do alpiste, um fato biológico que ocorre continuamente, porém a variação da medida do comprimento da planta só é percebida em intervalos de tempo regulares. Por isso, de início, o tempo foi considerado como uma variável discreta.

O ambiente de Modelagem Matemática revelou-se como aspecto fundamental em nossa investigação. Por meio dele proporcionamos situações de discussão em grupos e envolvendo toda a turma. A possibilidade de expor suas ideias e compreender as ideias dos demais contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, além de

motivá-los a participar efetivamente das atividades propostas. Além disso, por meio dessas discussões foi possível identificar a construção do pensamento sobre o discreto e o contínuo, sem mencionar estes termos durante a realização das atividades.

Ao abordar a noção de um conjunto com infinitos elementos, na Atividade 1, as crianças foram instigadas a pensar sobre uma quantidade *muito grande* de elementos limitados a um espaço determinado. Este pensamento gerou a percepção de que isso não é possível, como realmente não é, por estarmos lidando com entes reais, os coelhos. Mas quando as crianças se depararem com o conceito de número real, deverão assimilar que em um intervalo limitado é possível existir infinitos elementos, por se tratar de entes abstratos, os números.

Porém, outra noção sobre o infinito também foi revelada: a ideia de um processo que se repete continuamente, mostrando uma aproximação maior com o pensamento abstrato.

A Atividade 2 permitiu-nos verificar que o pensamento das crianças necessita de coisas reais para se apoiar. Por menores que fossem as medidas encontradas, os alunos sempre tentavam compará-las com algo que imaginassem ser *muito pequeno*, como um “microbiozinho” ou uma “célula”.

Acreditamos que este trabalho contribui no sentido de mostrar que essas atividades, assim como muitas outras, têm um valor mais profundo do que apenas a construção de uma sequência ou a obtenção de médias de crescimento em intervalos regulares, pois dependendo da abordagem utilizada, podem ser associadas à relação entre as noções de discreto e contínuo.

Referências

BALD, A. A. *Modelos determinísticos com equações de diferenças de fenômenos biológicos*. 1993. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores*. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

———. *Temas e Modelos*. São Paulo: Unicamp, 2012.

BOGDAN, R. C., e S. K. BIKLEN. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Tradução: Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista Maria João Alvarez. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. vol. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROLEZZI, A. C. *A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática*. 1996. 92 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BURAK, D. *Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série*. 1987. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Rio Claro, 1987.

———. Modelagem Matemática: experiências vividas. In: *Analecta*. vol. 6. nº 2. 2005. p. 33-48.

BURAK, D.; KAVIATKOVSKI, M. A. C. Considerações sobre a Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir de atividades desenvolvidas em sala de aula. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. *Modelagem Matemática nos Anos Iniciais*. São Paulo: Sucesso, 2014. p. 51-62.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1951.

CHUQUIPOMA, D. J. A. *Modelagem Matemática*. São João del-Rei, MG: UFSJ, 2012.

DA COSTA, N. C. A, e F. A. DORIA. Continuous & Discrete: A Research Program. In: *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* (UFPR) vol. 12/13. nº 1/2. Curitiba: UTFPR, 1991/2. p. 123-127.

DEDEKIND, R. *Essays on the Theory of Numbers*. Tradução: Wooster Woodruff Beman. Chicago: Open Court, 1924.

HAGUI, L. T. Como teve início a incrível superpopulação de coelhos na Austrália. 2014. *Megacurioso*. Disponível em: <<http://www.megacurioso.com.br/bizarro/42557-bizarro-como-teve-inicio-a-incrivei-superpopulacao-de-coelhos-na-australia.htm>>. Acesso em: 01 ago. 2014.

HEFEZ, A. *Indução Matemática*. PIC – OBMEP. nº 4. 2009.

HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Tradução: Paula Porto Martins. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

JASPIASSU, H.; MARCONDES, D. *Dicionário básico de filosofia*. 4. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2006.

LOPES, P. C. R. *Construções dos Números Reais*. Dissertação (Mestrado em Matemática, Especialização em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

LUNA, A. V. A. Modelagem Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo de caso no 1º ciclo. In: *Conferência Interamericana de Educacion Matematica* Santiago de Querétaro. Anais..., 2007.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: práticas e desafios. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. *Modelagem Matemática nos Anos Iniciais*. São Paulo: Sucesso, 2014. p. 37-50.

MEYER, J. F.C.A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MOURA, L. O. G. O discreto e o contínuo no ensino de Matemática. In: MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. *Linguagem, Conhecimento, Ação: ensaios de epistemologia e didática*, São Paulo: Escrituras, 2003. p. 239-254.

SOUZA, E. G.; LUNA, A. V. A. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: pesquisas, práticas e formação de professores.” In: *REVEMAT*. vol. 9. Florianópolis, 2014. p. 57-73.

TORTOLA, E. *Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. A Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: um olhar sobre a linguagem. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. *Modelagem Matemática nos Anos Iniciais*. São Paulo: Sucesso, 2014. p. 63-78.

VIEIRA, S. R.; MOTA, M. A. R. C. *Principais sinais acordados em uma transcrição no Brasil*. 2011. Disponível em: <http://www.concordancia.letras.ufrj.br/index.php?option=com_content&view=article&id=52> Acesso em: 12 dez. 2014.