UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE - DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Progressões Aritméticas de Ordem Superior: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio

WILHIAN ALEXANDER FERREIRA LIMA

Orientadora: Prof.ª Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria

Maringá - PR

2015

Progressões Aritméticas de Ordem Superior: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio

WILHIAN ALEXANDER FERREIRA LIMA

Trabalho de Conclusão de Curso em forma de Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, do Departamento de Matemática da UEM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria

Maringá - PR

2015

WILHIAN ALEXANDER FERREIRA LIMA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Josiane Faria

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Rizziolli

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro

Luciene Parron G. Arantes

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 25 de fevereiro de 2015.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

À minha família por sempre me apoiar nas decisões importantes da minha vida, principalmente pela escolha profissional do Magistério.

Aos meus amigos por entenderem a minha ausência nesse período tão importante para minha formação acadêmica.

À Professora Josiane, por toda a dedicação, paciência, orientação e ensinamentos durante o decorrer deste Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado.

Ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática - PROFMAT, ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, à Lúcia e aos docentes pela boa formação que me proporcionaram.

À Professora Magali Santini e ao Professor Leandro Malaquias pelo estímulo e por sempre acreditarem na minha capacidade de encarar novos desafios.

À minha mãe Sallime por ser a fonte inspiradora de toda a minha existência.

À Jesus Cristo por permitir mais esse avanço na minha escala evolutiva.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo analítico das Progressões Aritméticas de Ordem Superior e propor uma sequência didática para abordagem deste conteúdo no Ensino Médio. Para isto, também é realizada uma exposição analítica das sequências e séries de números reais, com vistas ao tratamento analítico teórico e, posteriormente, às aplicações deste conceito no contexto do Ensino Médio.

Palavras-chaves: Sequências de Números Reais, Progressões Aritméticas de Ordem p, Ensino Médio.

Abstract

The objective of this paper is to present an analytical study of Arithmetic Progressions of a Higher Order and it's proposed a teaching sequence for the approach of this subject in High School. In order to achieve this, it is carried out an analytical exposition of sequences and series of real numbers, with views of the theoretical analytical treatment of them and, subsequently, applications of this concept in the context of the High School.

Keywords: Sequences of Real Numbers, Arithmetic Progressions of Order p, High School.

Sumário

Lista de Tabelas

Introdução

Sendo a matemática uma ciência milenar, existem vários registros históricos a respeito do desenvolvimento dessa ciência, os quais descrevem que, em muitas ocasiões, teorias foram desenvolvidas e provadas por paradoxos estabelecidos por filósofos ou matemáticos da antiguidade, como no caso de sequências e séries numéricas.

Zenão de Eléa (490 — 425 a.C.) contribuiu para a matemática com seus vários paradoxos, onde alguns destes envolvem a soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, o qual é a essência da convergência de uma série infinita de números. Arquimedes (287 — 212 a.C.), através de vários exemplos, apresentou resultados envolvendo áreas e volumes de várias figuras e sólidos, tentando explicar como somas infinitas poderiam ter resultados finitos.

Fibonacci (1170 — 1240) descobriu uma sequência de números inteiros na qual cada número é igual à soma dos dois antecessores ($1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \cdots$). Esta sequência continua sendo aplicada em várias áreas da matemática moderna e da ciência, sendo o exemplo mais amplamente utilizado para introduzir sequências numéricas no currículo escolar do Ensino Médio.

Mais recentemente, Euler (1707 — 1783) foi o primeiro a utilizar a notação de somatório, usando a letra grega sigma para o símbolo da soma. Euler utilizou séries infinitas para desenvolver novos métodos, como o desenvolvimento da série de potência, que consiste em uma expressão de funções como soma de um número infinito de termos, através da qual provou o *problema de Basileia*, que consiste em encontrar a soma exata dos inversos dos quadrados dos inteiros positivos, isto é, a soma exata da série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right).$$

No mesmo período, D\`Alembert (1717 — 1783) desenvolveu o teste da razão para determinar a convergência de muitas séries, apresentando uma fundamentação mais teórica para o estudo sobre séries. Cauchy (1789 — 1857) foi o primeiro a definir por completo as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas, sendo um dos principais nomes relacionados à Teoria das Funções. Srinivasa Ramanujan (1887 — 1920), um matemático indiano, usou sequências e séries de potências para desenvolver teorias importantes em Teoria de Números, utilizadas por matemáticos no século 20.

No decorrer do Ensino Médio, quando nos deparamos com situações-problema que exigem um conhecimento prévio de sequências numéricas, acabamos sempre por definir um termo geral que descreva cada um dos termos dessa sequência ou através de uma progressão aritmética, onde a diferença de cada termo da sequência e seu antecessor é igual a uma constante real, ou através de uma progressão geométrica, em que a razão entre cada termo da sequência e seu antecessor definem essa constante real.

Todavia, algumas sequências numéricas não podem ser descritas através de progressões aritméticas ou geométricas. Nesse caso, procuramos determinar o termo geral da sequência numérica dada utilizando uma lei de recorrência, embora poucos alunos consigam acompanhar esse tipo de raciocínio, uma vez que tal conteúdo é abordado superficialmente, sem o devido aprofundamento, na disciplina de Matemática do Ensino Médio.

Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho é explorar exemplos que são solucionados através de sequências numéricas utilizando, quando necessário, uma lei de recorrência e, principalmente, através de progressões aritméticas de ordem superior, um conteúdo rico de aplicações, porém inexplorado no decorrer do Ensino Médio. Nestas análises não serão abordadas as progressões geométricas de ordem superior por apresentarem uma teoria específica, ficando como tema para um trabalho posterior.

A apresentação da teoria e das aplicações de recorrências lineares e das progressões aritméticas de ordem superior, em sala de aula, deverá ocorrer no quarto bimestre do ano letivo das turmas da terceira série do Ensino Médio, por apresentarem pré-requisitos tais como Função Polinomial e Sistemas Lineares.

O trabalho está organizado como segue: a seguir, são apresentados alguns conteúdos preliminares fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. O Capítulo 2 é devotado ao estudo analítico de sequências e séries, assim como serão apresentadas e definidas as progressões aritméticas de ordem superior. No Capítulo 3 será apresentado um roteiro de estudo das progressões aritméticas de ordem superior, uma proposta de como este conteúdo poderia ser aplicado em sala de aula.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Para analisarmos e descrevermos o comportamento de progressões aritméticas de ordem superior faz-se necessária a revisão de alguns conteúdos que estão diretamente relacionados à resolução de progressões assim caracterizadas. A resolução de sistemas lineares e a caracterização de uma função polinomial são fundamentais para este estudo, além da análise de sequências numéricas pela lei de recorrência, propriedades do termo geral e da soma dos termos de uma progressão aritmética, assuntos que serão abordados no próximo capítulo.

Nesta dissertação, denotará $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ o conjunto dos números naturais, excluindo o zero.

1.1 Sistemas Lineares

Aqui iremos apresentar a definição de sistemas lineares e algumas propriedades que serão utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes sobre este assunto, ver [10, p. 127-176].

Definição 1.1.1 *Um* ***sistema linear S*** *é todo conjunto de* ***m*** *($m \geq 2$) equações lineares em* ***n*** *incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dado por*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Os números reais a_{ij} são os ***coeficientes*** *de x_j e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são* ***constantes reais****. Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, o sistema linear é dito* ***homogêneo****.*

1.1.1 Solução de um Sistema Linear

Definição 1.1.2 *Dizemos que a **n-upla** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$ é uma **solução do sistema linear S** se ela é solução de cada uma das n equações de S.*

As soluções dos sistemas lineares com duas incógnitas são pares ordenados da forma (a_1, a_2), com três incógnitas são ternos ordenados da forma (a_1, a_2, a_3), com quatro incógnitas são quadras ordenadas da forma (a_1, a_2, a_3, a_4), e assim sucessivamente.

Quando o sistema linear S apresenta somente uma ou infinitas soluções dizemos que S é um sistema linear **compatível**. Caso o sistema linear não apresente solução, dizemos que o sistema linear S é **incompatível**.

Exemplo 1.1.3 Considere o sistema linear S dado por:

$$S : \begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x + y + z &= 6. \end{cases}$$

Veja que S é compatível pois possui a terna (1, 2, 3) como solução única.

A resolução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas consiste em calcular o valor das duas variáveis que satisfazem as equações do sistema e pode ser feita através de dois métodos resolutivos, adição e substituição. No método de adição deve-se adicionar as duas equações de tal forma que essa soma cancele uma das incógnitas e no método de substituição deve-se isolar uma das variáveis em qualquer uma das equações do sistema, e substituir o valor isolado na outra equação.

No caso do sistema linear apresentar três equações com três incógnitas, utiliza-se a Regra de Cramer, que apresenta as soluções do sistema linear utilizando cálculos com determinantes de matrizes de ordem 3.

Quando queremos resolver sistemas lineares com mais de três equações, qualquer um dos métodos anteriores dificulta determinar a solução do sistema pelo excesso de cálculos ou de substituições. Neste caso, utiliza-se o *método de escalonamento*, também conhecido como *método de Gauss*, pois facilita a resolução e a discussão de um sistema linear.

Dessa forma, sendo o método de escalonamento aplicável a qualquer sistema linear, este será o método utilizado nas resoluções de sistemas lineares neste trabalho, conforme será descrito a seguir.

Dado um sistema linear S, se efetuarmos qualquer uma das três operações elementares sobre as equações do sistema linear não iremos alterar a sua solução:

(a) trocar de posições duas equações do sistema S;

(b) multiplicar qualquer equação do sistema S por um número real diferente de zero;

(c) multiplicar uma equação do sistema linear S por um número real diferente de zero e adicioná-la à outra equação do mesmo sistema.

Assim, iremos obter outro sistema linear S_1 que possui a mesma solução do sistema linear S e dizemos que os sistemas lineares S e S_1 são **equivalentes** (representado por $S \sim S_1$).

O processo de escalonamento consiste em aplicar uma quantidade finita de operações elementares sobre as equações do sistema linear visando fazer com que o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação (a partir da segunda) seja maior do que na equação precedente do mesmo sistema linear S.

Exemplo 1.1.4 Seja o sistema linear S dado por:

$$S : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 4 \\ x - 2y + 2z &= 0. \end{cases}$$

Escalonando o sistema linear S a fim de obter um sistema linear equivalente S_1, primeiramente eliminamos a incógnita x das segunda e terceira equações de S aplicando as seguintes operações elementares:

(a) multiplicar a primeira equação por -2 e somar o resultado com a segunda equação, obtendo a equação $y - z = 2$;

(b) multiplicar a primeira equação por -1 e somar o resultado com a terceira equação, obtendo a equação $-y + z = -1$.

O sistema original foi reduzido ao sistema equivalente:

$$S_1 : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ y - z &= 2 \\ -y + z &= -1. \end{cases}$$

Nesse novo sistema equivalente, eliminamos a incógnita y da terceira equação, aplicando a próxima operação elementar:

(c) somar a segunda equação com a terceira, obtendo a equação $0 = 1$.

O sistema anterior foi reduzido ao sistema equivalente:

$$S_2 : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ y - z &= 2 \\ 0 &= 1. \end{cases}$$

Como S_2 é incompatível (pois $0 \neq 1$), então o sistema linear S também será incompatível, não possuindo conjunto-solução (ou conjunto-solução $= \emptyset$).

Exemplo 1.1.5 Resolvendo o seguinte sistema linear

$$S : \begin{cases} 3x - 5y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y - 4z &= 2 \\ x + 4y - 4z &= 3, \end{cases}$$

utilizando escalonamento, obtemos:

$$S : \begin{cases} 3x - 5y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y - 4z &= 2 \\ x + 4y - 4z &= 3, \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y - 4z &= 3, \\ -4y + 4z &= -4 \\ -17y + 14z &= -8 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 4y - 4z &= 3, \\ y - z &= 1 \\ 17y - 14z &= 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y - 4z &= 3, \\ y - z &= 1 \\ 3z &= -9. \end{cases}$$

Nesse último sistema linear equivalente, da última equação, obtemos $z = -3$. Substituindo este valor na segunda equação obtemos $y = -2$, e substituindo estes dois valores na primeira equação teremos que o valor de x é igual a -1. Logo, o sistema linear dado é compatível e determinado, sendo a terna $(-1,\ -2,\ -3)$ o seu conjunto-solução.

Exemplo 1.1.6 Resolvendo o sistema linear

$$S : \begin{cases} x - y + 2z &= 2 \\ x + 4y + 2z &= 7 \\ 2x + 3y + 4z &= 9, \end{cases}$$

utilizando escalonamento, teremos:

$$S : \begin{cases} x - y + 2z &= 2 \\ x + 4y + 2z &= 7 \\ 2x + 3y + 4z &= 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z &= 2 \\ 5y &= 5 \\ 5y &= 5. \end{cases}$$

As duas últimas equações do sistema escalonado representam a mesma equação. Eliminando a última equação, obtemos o sistema equivalente, já escalonado:

$$S_2 : \begin{cases} x - y + 2z &= 2 \\ \qquad\quad 5y &= 5. \end{cases}$$

A incógnita z, nesse caso, é chamada de variável pois não inicia nenhuma das duas equações do sistema escalonado. Fazendo $z = \alpha$, onde α é um número real qualquer, no sistema escalonado, determinamos x e y:

$$S_2 : \begin{cases} x - y &= 2 - 2\alpha \\ \quad 5y &= 5. \end{cases} \qquad \sim \qquad S_3 : \begin{cases} x &= 3 - 2\alpha \\ y &= 1. \end{cases}$$

Neste último sistema equivalente, o valor da incógnita y é 1, da incógnita z é α, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e a incógnita x depende de cada valor escolhido para α, sendo $x = 3-2\alpha$. Portanto, o sistema dado é compatível e indeterminado, sendo a terna $\{(3 - 2\alpha,\ 1,\ \alpha)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ o seu conjunto-solução.

1.2 Função Polinomial

Para o estudo de progressões aritméticas de ordem superior recorre-se frequentemente ao conceito de função, principalmente pela sua aplicabilidade relacionada a determinação do valor numérico de um polinômio e também para determinar o termo geral que define uma sequência numérica. Nesta seção serão apresentadas definições relacionadas a este conceito e que serão aplicadas posteriormente.

Definição 1.2.1 *Sejam A e B dois conjuntos não-vazios e uma relação f de A em B, a qual determina pares ordenados $(x,\ y)$, em que o primeiro elemento x pertence a A e o segundo elemento y pertence a B. Dizemos que a relação f é uma **função** ou **aplicação** de A em B se a **todo** elemento $x \in A$ associa-se **um único elemento** $y \in B$, tal que o par $(x,y) \in f$.*

Quando uma função está definida no conjunto A para o conjunto B, podemos representá-la por

$$f : A \to B,$$

e lê-se função f de A em B.

O **domínio** de uma função, representado por $D(f)$, é o conjunto onde a função está definida. O conjunto **imagem** de uma função, representado por $Im(f)$, é o conjunto obtido pelos y correspondentes a cada x do domínio e está diretamente relacionado com a função que relaciona x e y. O **contradomínio** de uma função, representado por $CD(f)$, é o conjunto onde a imagem estará contida. Dessa forma, se a função f é definida por $f : A \to B$, então teremos:

$$D(f) = A, \quad CD(f) = B \quad e \quad Im(f) \subset B.$$

As definições a seguir classificam as funções em injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Definição 1.2.2 *Uma função $f : A \to B$ é **injetora** quando dois diferentes valores em A correspondem dois diferentes valores em B. Simbolicamente, f é injetora quando*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição 1.2.3 *Uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** quando o conjunto imagem coincide com o contradomínio B, isto é,*

$$Im(f) = CD(f).$$

Definição 1.2.4 *Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** quando é sobrejetora e injetora.*

Quanto a monotonicidade, as funções podem ser classificadas em:

(a) crescentes quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

(b) estritamente crescentes quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

(c) decrescentes quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

(d) estritamente decrescentes quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

(e) constantes quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Com o intuito de caracterizar uma função polinomial, vejamos alguns tipos mais comuns de funções.

Exemplo 1.2.5 Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função do 1º grau** ou uma **função afim** se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa-se o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, com a $\neq 0$. Simbolicamente, temos a função do 1º grau descrita como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b, \qquad a \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.6 Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função do 2º grau** ou **quadrática** se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa-se o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, com a $\neq 0$. Simbolicamente,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.7 Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função potência** se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa-se o elemento $(ax^n) \in \mathbb{R}$, com a $\neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Simbolicamente,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^n, \qquad a \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Nesse último exemplo não se considera $n = 0$ pois, neste caso, poderíamos ter uma indeterminação do tipo 0^0, quando fosse determinada a imagem do elemento 0 do domínio. Caso fosse feita uma restrição no domínio dessa função, excluindo o zero, n poderia ser igual a qualquer número natural e, no caso de n ser igual a zero, a função potência ficaria restrita a uma função constante, $f(x) = a$, qualquer que fosse o elemento do domínio dessa função, inclusive para o zero.

Diante desses exemplos e definições, formalizamos o conceito de uma função polinomial.

Definição 1.2.8 *Um **polinômio** é uma expressão formal do tipo*

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X^1 + a_0,$$

onde $(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n)$ *é uma lista ordenada de números reais e* X *é uma **indeterminada**, sendo* X^i *uma abreviatura para* $X.X.\ldots.X.X$ *(i fatores). Caso* $a_i = 0$*, para todo* $i = 0, 1,\ \cdots, n$*, então* $p(x) = 0$ *é o polinômio nulo.*

A cada polinômio $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X^1 + a_0$*, faz-se corresponder a **função polinomial*** $\bar{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *quando existem números* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *tais que, para todo* $x \in R$*, tem-se*

$$\bar{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$*, então* $\bar{p}$ *tem grau* n*. Se* $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$*, então* $\bar{p}$ *não tem grau definido.*

Dessa forma, não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio p e a função polinomial $\bar{p}$. Ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial.

1.2.1 Função Polinomial Soma

Quando somamos dois polinômios, a soma dos termos semelhantes $a.x^p$ e $b.x^p$ será o monômio $(a + b)\,.x^p$.

Definição 1.2.9 *Dadas as funções polinomiais* $\boldsymbol{p}$ *e* $\boldsymbol{q}$ *definidas no conjunto dos números reais, **a função polinomial soma***

$$\begin{aligned} (p+q) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (p+q)(x) = p(x) + q(x), \end{aligned}$$

é definida pelo polinômio em que cada termo é a soma dos termos semelhantes dos polinômios parcelas.

O grau de $(p + q)$ *é tal que:*

(a) *grau* $p >$ *grau* $q \Longrightarrow$ *grau* $(p+q) =$ *grau* p;

(b) *grau* $p =$ *grau* $q \Longrightarrow$ *grau* $(p+q) \leq$ *grau* p *ou* $(p+q)$ *não tem grau definido.*

1.2.2 Determinação de um Polinômio a partir de seus Valores

Considere o problema de determinar um polinômio p a partir de seus valores. Um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, de grau n é dado quando se conhecem seus $n+1$ coeficientes e vale a seguinte afirmação [3, p. 178]:

> "Dados $n+1$ números reais distintos $x_0; x_1; \ldots; x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0;\ y_1;\ \ldots;\ y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau menor ou igual a n, tal que
>
> $$p(x_0) = y_0; \qquad p(x_1) = y_1; \qquad \ldots \qquad ; \qquad p(x_n) = y_n."$$

Com essas identidades, determinam-se os coeficientes de $p(x)$ resolvendo-se um sistema com as $n+1$ equações descritas anteriormente nas $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$S: \begin{cases} a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + \cdots + a_0 & = y_0 \\ a_n x_1^n + \cdots + a_1 x_1 + \cdots + a_0 & = y_1 \\ \qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_n x_n^n + \cdots + a_1 x_n + \cdots + a_0 & = y_n. \end{cases}$$

Este sistema, no qual as quantidades conhecidas são as potências sucessivas de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, têm sempre solução única, pois estes $n+1$ números são dois a dois diferentes.

Exemplo 1.2.10 Considere o problema de encontrar um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de grau igual a 4, que assume nos pontos $x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$ e $x_4 = 3$ os valores $y_0 = 7, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 11$ e $y_4 = 25$, respectivamente. Dessa forma, obtemos o sistema de equações lineares S:

$$S: \begin{cases} a_4(-1)^4 + a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1)^1 + a_0 & = 7 \\ a_4(0)^4 + a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0)^1 + a_0 & = 1 \\ a_4(1)^4 + a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + a_1(1)^1 + a_0 & = 5 \\ a_4(2)^4 + a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2)^1 + a_0 & = 11 \\ a_4(3)^4 + a_3(3)^3 + a_2(3)^2 + a_1(3)^1 + a_0 & = 25, \end{cases}$$

que é igual a:

$$S:\begin{cases} a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 & = 7 \\ a_0 & = 1 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = 5 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 & = 11 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 & = 25, \end{cases}$$

o qual resulta em:

$$S:\begin{cases} a_4 - a_3 + a_2 - a_1 & = 6 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 & = 4 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 & = 10 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 & = 24. \end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema, por escalonamento, obtém-se $a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{53}{12}, a_3 = -\frac{5}{2}$ e $a_4 = \frac{7}{12}$, definindo o polinômio:

$$p(x) = \frac{7}{12}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{53}{12}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

Capítulo 2

Sequências e Séries

No decorrer do Ensino Médio, o estudo sobre sequências numéricas aborda, principalmente, as progressões aritméticas e geométricas, onde os alunos devem observar certos padrões, associando ideias do dia a dia, a fim de tornar o aprendizado mais significativo. No entanto, cabe ao professor, o intermediário entre o conhecimento e o aluno, um estudo mais aprofundado a respeito das sequências numéricas e de suas propriedades a fim de enriquecer ainda mais tal conteúdo em sala de aula.

Este capítulo é devotado a um estudo analítico de sequências e séries de números reais, dando enfoque ao comportamento analítico das progressões aritméticas de ordem superior. Ao leitor interessado em uma abordagem mais aprofundada sobre este assunto, sugerimos a leitura deste tópico, apresentado em [1] e [7].

2.1 Sequências de Números Reais

Definição 2.1.1 *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado de* ***n-ésimo*** *termo da sequência. Ou seja,*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n = x(n). \end{aligned}$$

Assim, sequência ou sucessão é todo conjunto, com elementos numéricos ou não, apresentados em uma determinada ordem.

Denotamos por $(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots)$, ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n), a sequência infinita $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.2

(a) A sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = n$, é descrita por:

$$(n) = (0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \cdots);$$

(b) A sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, é descrita por:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \cdots\right);$$

(c) A sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, é descrita por:

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \cdots\right),$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Algumas sequências não podem ser definidas algebricamente em função de sua posição. Neste caso, utiliza-se uma *Lei de Recorrência* para determinar os termos dessa sequência.

Definição 2.1.3 ***Lei de recorrência*** *é uma regra que permite calcular cada termo de uma sequência dada, a partir do termo anterior, onde necessariamente seja conhecido o primeiro termo da sequência.*

Dessa forma, toda lei de recorrência fornece o primeiro termo x_1 de uma sequência (x_n) e expressa um termo qualquer x_{n+1} em função do seu antecedente x_n. Por exemplo, na sequência definida pela lei de recorrência

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_{n+1} = 2.x_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

temos que:

- $x_2 = 2.x_1 = 2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;
- $x_3 = 2.x_2 = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$;
- $x_4 = 2.x_3 = 2.\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$;
- $x_5 = 2.x_4 = 2.\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$;

e assim sucessivamente, determinando a sequência

$$(x_n) = \left(\frac{1}{3}; \ \frac{2}{3}; \ \frac{4}{3}; \ \frac{8}{3}; \ \frac{16}{3}; \ \cdots \right).$$

Em algumas aplicações faz-se necessário encontrar a lei de recorrência de uma sequência que forneça seus elementos. Por exemplo, para obter a lei de recorrência que fornece qualquer elemento da seguinte sequência $(1; \ 3; \ 7; \ 15; \ 31; \ 63; \ \ldots)$, podemos analisar os elementos dados e procurar estabelecer uma relação entre os mesmos. Assim, seguindo esse raciocínio, temos:

- $x_1 = 1$.
- $x_2 = 3 = 2.1 + 1 = 2.x_1 + 1;$
- $x_3 = 7 = 2.3 + 1 = 2.x_2 + 1;$
- $x_4 = 15 = 2.7 + 1 = 2.x_3 + 1;$
- $x_5 = 31 = 2.15 + 1 = 2.x_4 + 1;$

Logo, pelo raciocínio acima exposto, segue que

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2.x_n + 1, \end{cases}$$

é uma lei de recorrência da sequência numérica dada.

2.1.1 Operações com Sequências

Como as sequências são funções reais, podemos efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre duas sequências, com uma restrição na operação de divisão.

Definição 2.1.4 *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências dadas.*
(i) *A **adição das duas sequências dadas** consiste em somar, para cada valor de n, os elementos das sequências (x_n) e (y_n), ou seja,*

$$(x_n) + (y_n) = (w_n),$$

em que $w_n = x_n + y_n$*;*

(ii) *A* ***subtração das duas sequências dadas*** *consiste em subtrair, para cada valor de* n*, os elementos das sequências* (x_n) *e* (y_n)*, ou seja,*

$$(x_n) - (y_n) = (v_n),$$

em que $v_n = x_n - y_n$*;*

(iii) *A* ***multiplicação das duas sequências dadas*** *consiste em multiplicar, para cada valor de* n*, os elementos das sequências* (x_n) *e* (y_n)*, ou seja,*

$$(x_n).(y_n) = (p_n),$$

em que $p_n = x_n.y_n$*;*

(iv) *A* ***divisão das duas sequências dadas*** *consiste em dividir, para cada valor de* n*, os elementos das sequências* (x_n) *e* (y_n)*, desde que* $y_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*; ou seja,*

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} = (q_n),$$

em que $y_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

2.1.2 Sequências Monotônicas

Definição 2.1.5 *Uma sequência* (x_n) *será classificada como:*

(i) crescente *quando* $x_n < x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) não-decrescente *quando* $x_n \leq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) decrescente *quando* $x_n > x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) não-crescente *quando* $x_n \geq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Toda sequência é **monótona** se for crescente, não-crescente, decrescente ou não decrescente. Caso não seja monótona, a sequência é classificada como **alternante**. Caso uma sequência possua todos os termos idênticos, essa sequência é classificada como **constante**.

Exemplo 2.1.6

(a) A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ é crescente. De fato, escrevendo os elementos dessa sequência como

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \ldots\ ,\ \frac{n}{2n+1},\ \frac{n+1}{2n+3},\ \ldots\ ,$$

percebe-se que os quatro primeiros elementos crescem a medida que o valor de n cresce. Isso nos leva a supor que

$$x_n = \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} = x_{n+1}.$$

Para verificar a veracidade de tal afirmação, multiplicamos os dois membros da desigualdade acima por $(2n+1).(2n+3)$, obtendo as desigualdades equivalentes:

$$n.(2n+3) < (n+1).(2n+1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n^2+3n < 2n^2+3n+1.$$

Como a última desigualdade é verdadeira para todo valor de n, pois o segundo membro da desigualdade é 1 unidade maior que o primeiro, então $x_n < x_{n+1}$, ou seja, $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ é uma sequência crescente.

(b) A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$, para $n \neq 0$, é decrescente. De fato, escrevendo os elementos dessa sequência como

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots,$$

percebe-se que os elementos decrescem a medida que o valor de n cresce. Isso nos leva a supor que

$$x_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = x_{n+1}.$$

Para verificar a veracidade de tal afirmação observamos que, como $n+1 > n$, então

$$\frac{1}{n} \quad > \quad \frac{1}{n+1},$$

ou seja,

$$x_n > x_{n+1},$$

para todo $n \neq 0$, mostrando que a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ é decrescente.

2.1.3 Sequências Limitadas

Definição 2.1.7 *Uma sequência (x_n) é **limitada superiormente** (respectivamente **limitada inferiormente**), se existe $c > 0$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$), para* *todo $n \in \mathbb{N}$. Se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, isto é, $-c < x_n < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que a sequência (x_n) é **limitada**.*

Exemplo 2.1.8

(a) A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ é limitada superiormente por 1, já que seus elementos $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$, são todos menores do que este valor. Na verdade, qualquer número real c, tal que $c \geq 1$, é um limitante superior da sequência dada. Nesse caso, dizemos que 1 é um *limitante superior mínimo* de $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(b) A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ é limitada inferiormente por 0, já que seus elementos $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \cdots, \dfrac{n}{2n+1}, \cdots$, são maiores do que zero. Ainda mais, qualquer número real c, tal que $c \leq \dfrac{1}{3}$, é um limitante inferior da sequência dada, conforme pode ser verificado facilmente analisando os elementos da sequência dada. Nesse caso, dizemos que $\dfrac{1}{3}$ é um *limitante inferior máximo* de $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$.

(c) Ainda analisando a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ do primeiro item, percebe-se que seus elementos são maiores do que 0, sendo este o limitante inferior máximo. Como essa sequência possui limitantes superior e inferior, então $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ é uma sequência *limitada*. O mesmo ocorre para a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ do segundo item que, além de possuir um limitante inferior máximo igual a $\dfrac{1}{3}$, também possui um limitante superior mínimo igual a $\dfrac{1}{2}$, pois $\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}} < \dfrac{1}{2}$. Dessa forma, $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ também é uma sequência limitada.

2.1.4 Subsequências

Definição 2.1.9 *Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, uma subsequência de (x_n) é uma restrição desta sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Dessa forma, uma subsequência de (x_n) é uma sequência do tipo $(b_{ij}) = (a_{n_j})$, onde (n_j) é uma sequência crescente de inteiros positivos, isto é, $n_1 < n_2 < \ldots$.*

Denotamos a subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ou ainda

$$(x_{n_0};\ x_{n_1};\ x_{n_2};\ \cdots;\ x_{n_k};\ \cdots).$$

Exemplo 2.1.10 As sequências $(x_n) = \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ e $(y_n) = \left(n^{(-1)^n}\right)$ admitem as seguintes subsequências:

(a) $(x_{2n}) = \left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{4};\ \cdots;\ -\dfrac{1}{2n};\ \cdots\right)$;

(b) $(y_{2n-1}) = \left(1;\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{5};\ \cdots;\ \dfrac{1}{2n-1};\ \cdots\right)$.

2.1.5 Limites de Sequências Reais

Definição 2.1.11 *Sejam (x_n) uma sequência de números reais e L um número real. Dizemos que (x_n) converge para L, ou é convergente, e se escreve*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = L,$$

quando, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, para todo $n > n_0$.

Podemos expressar essa definição na forma:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = L \quad .\equiv. \quad \forall \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon, \quad \forall \quad n \geq n_0.$$

Se uma sequência não é convergente, ela é dita divergente.

Exemplo 2.1.12 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

De fato, seja $\varepsilon > 0$ um número real positivo qualquer e seja n_0 um número natural tal que $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, o qual existe pois $\mathbb{R}$ é arquimediano [7, p. 59]. Então, $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ e, se $n > n_0$,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é convergente e converge para zero, quando n tende ao infinito.

Exemplo 2.1.13 A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{n^2}{n+3}\right)$ é uma sequência divergente pois*:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+\dfrac{3}{n}}\right) = \infty,$$

ou seja, não existe o limite dessa sequência quando $n \to \infty$.

A unicidade do limite de uma sequência é verificada pelo Teorema a seguir.

Teorema 2.1.14 *Se existir um número real L tal $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$, então ele é único.*

Demonstração: Seja uma sequência (x_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Vamos supor, por absurdo, que existe um número real M, onde $M \neq L$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = M$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2} > 0$. Note que os intervalos $(L-\varepsilon, \quad L+\varepsilon)$ e $(M-\varepsilon, \quad M+\varepsilon)$ são disjuntos pois, caso contrário, existiria um número real x tal que $x \in (L-\varepsilon, \quad L+\varepsilon) \cap (M-\varepsilon, \quad M+\varepsilon)$, que implicaria em $|L-x| < \varepsilon \quad$ e $\quad |M-x| < \varepsilon$, donde concluiríamos que

$$|L-M| \leq |L-x| + |M-x| < 2\varepsilon = |L-M|,$$

o que é um absurdo. Assim, como $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$, implica que $x_n \in (L-\varepsilon, \quad L+\varepsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (M-\varepsilon, \quad M+\varepsilon)$, para todo $n > n_0$. Logo, não pode ocorrer $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = M$, provando que o limite é único.

$\square$

Como consequência da Definição 2.1.11 e do Teorema 2.1.14, que tratam da convergência de sequências e da unicidade do limite, respectivamente, temos os seguintes resultados sobre limites de sequências.

Proposição 2.1.15 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja uma sequência (x_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (L-1, \quad L+1)$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}, L-1, L+1\}$. Sejam c e d o menor e o maior elemento de F, respectivamente. Então todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$. Logo, a sequência é limitada.

$\square$

Exemplo 2.1.16 A sequência $(x_n = n) = (0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \cdots)$ é limitada inferiormente $(x_n \geq 0, \ \forall\ n \in \mathbb{N})$ mas não é limitada superiormente. Logo, da Proposição 2.1.15, segue que essa sequência não é convergente, pois não é limitada.

Observação 2.1.17 O fato de uma sequência ser limitada não é suficiente para que a sequência seja convergente. Por exemplo, a sequência $(x_n) = ((-1)^n)$ é limitada inferiormente por -1, é limitada superiormente por 1, mas não é convergente, pois $x_n \to 1$ quando n é par e $x_n \to -1$ quando n é ímpar.

A recíproca da Proposição 2.1.15 é dada pelo resultado abaixo.

Proposição 2.1.18 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência crescente. Como (x_n) também é uma sequência limitada, então o conjunto $S = \{x_n \mid n \geq 1\}$ tem um limitante superior. O Axioma do Completamento nos diz que todo conjunto não-vazio de números que possua um limitante superior também possui um limitante superior mínimo. Dessa forma, consideremos que L seja o limitante superior mínimo do conjunto S. Agora, dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior de S. Portanto, $x_N > L - \varepsilon$, para algum inteiro N. Como a sequência (x_n) é crescente, então $x_n \geq x_N$, para todo $n > N$. Assim, se $n > N$, teremos

$$x_n > L - \varepsilon,$$

que implica em

$$0 \leq x_n - L < \varepsilon,$$

desde que $x_n \leq L$. Assim,

$$|L - x_n| < \varepsilon,$$

qualquer que seja $n > N$. Com este resultado, concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} (x_n) = L,$$

provando que a sequência é convergente.

□

De maneira similar (utilizando o limitante inferior máximo) demonstra-se que essa Proposição é válida para sequências decrescentes.

Exemplo 2.1.19 Seja a sequência (x_n) definida com o primeiro termo $x_0 = \sqrt{2}$ e termo geral $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$. Determinando os cinco primeiros termos dessa sequência, obtemos:

- $x_0 = \sqrt{2}$;
- $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$;
- $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$;
- $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$;
- $x_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$.

Para verificar se essa sequência é limitada, observamos que:

- $x_0 = \sqrt{2} < 2$;
- $x_1 = \sqrt{2 + x_0} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$;
- $x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2 + 2} = 2$;
- $\ldots$,

assim,

$$x_0 = \sqrt{2} < 2 \quad \text{e} \quad x_{n-1} < 2 \quad \Rightarrow \quad x_n < 2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, (x_n) é limitada inferiormente por $\sqrt{2}$ e superiormente por 2, ou seja, (x_n) é uma sequência limitada. Verificando se essa sequência é monótona, temos que:

$$x_0 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 + x_0} = x_1,$$

e

$$x_{n-1} < x_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2 + x_n} = x_{n+1}.$$

Portanto, $x_n < x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, mostrando que (x_n) é uma sequência crescente. Logo, como essa sequência é monótona e limitada, segue da Proposição 2.1.18 que a sequência dada é convergente.

2.2 Séries

Em várias aplicações na matemática, o número π é um número decimal infinito que denota a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Esse número π pode ser escrito, por exemplo, como

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\dots$$

Estudos preliminares determinam que todo número decimal infinito pode ser escrito como uma soma infinita. No caso do número π, podemos reescrevê-lo como:

$$\pi = 3+0,1+0,04+0,001+0,0005+0,00009+\cdots = 3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\dots$$

Quanto mais parcelas adicionarmos à soma acima mais próximos estaremos do valor de π.

Assim, sempre que adicionarmos parcelas a uma sequência infinita (x_n), obtemos uma expressão da forma

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_n + \dots,$$

a qual é denominada de **série infinita** ou simplesmente **série**, e que é denotada pelo símbolo

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \quad \text{ou} \quad \sum x_n.$$

Para determinarmos se uma série infinita possui uma soma finita, ou seja, se a série infinita se aproxima de algum número real, consideremos as **somas parciais** definidas por

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1,\\
s_2 &= x_1 + x_2,\\
s_3 &= x_1 + x_2 + x_3,
\end{aligned}$$

onde, de maneira geral, teremos

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Estas somas parciais definem uma nova sequência que pode ou não ter um limite. Se $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)$ existe, então dizemos que esse limite é a soma da série $\sum x_n$.

Definição 2.2.1 *Sejam dadas a série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \ldots,$$

e a n-ésima soma parcial s_n da mesma série, representada por

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Se a sequência (s_n) é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n) = s$, onde s é um número real, então a série $\sum x_n$ é dita convergente e escrevemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots = s \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = s.$$

O número real s é chamado de ***soma da série****. Se a sequência (s_n) é divergente, então a série é chamada de divergente.*

Exemplo 2.2.2 Sequências infinitas representadas da forma

$$x + xr + xr^2 + xr^3 + \cdots + xr^{n-1} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(xr^{n-1}\right), \quad x \neq 0,$$

são denominadas de **séries geométricas**, onde cada termo é obtido do termo anterior, multiplicando-o por uma mesma constante real r.

No caso de r ser igual a 1, obteríamos a soma

$$s_n = x + x + x + \cdots + x = \sum_{i=1}^{n} x = nx.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n)$ não existe, então a série geométrica é divergente, nesse caso.

No entanto, se considerarmos $r \in (-1; 1)$, teremos:

$$s_n = x + xr + xr^2 + xr^3 + \cdots + xr^{n-1},$$

e, se multiplicarmos ambos os membros dessa igualdade por r, obtemos:

$$rs_n = xr + xr^2 + xr^3 + \cdots + xr^n.$$

Subtraindo membro a membro essa duas últimas equações, obtemos:

$$s_n - rs_n = x - xr^n \quad \Longleftrightarrow \quad s_n(1-r) = x(1-r^n) \quad \Longleftrightarrow \quad s_n = \frac{x\,(1-r^n)}{(1-r)}.$$

Se escolhessemos $x = \dfrac{1}{2}$ e $r = \dfrac{1}{2}$, onde $r \in (-1;1)$, teríamos a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, cujas somas parciais são:

$$s_1 = \frac{1}{2},$$
$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$
$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

onde, de maneira geral, teremos:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n},$$

uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$. Assim, s_n pode ser reescrita como:

$$s_n = \frac{\frac{1}{2}.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \Longleftrightarrow s_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \Longleftrightarrow s_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Dessa forma, como

$$\lim_{n\to\infty}(s_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{x}{1-r},$$

então, para $r = \dfrac{1}{2}$, a série geométrica é convergente e sua soma é 1.

Se $r < 1$ ou $r > 1$ então, para $s_n = \dfrac{x\,(1-r^n)}{(1-r)}$, teremos que a sequência $\{r^n\}$ é divergente, o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)$ não existe. Dessa forma, se $r < 1$ ou $r > 1$, então a série geométrica é divergente.

Resumidamente, a série geométrica $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(xr^{n-1}\right), \quad x \neq 0$:

(a) é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(xr^{n-1}\right) = \frac{x}{1-r}$;

(b) divergente se $|r| \geq 1$.

Exemplo 2.2.3 Vamos mostrar que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

conhecida como **série harmônica**, é divergente. Para tanto, é conveniente usarmos as somas parciais $s_2,\ s_4,\ s_8,\ s_{16},\ s_{32},\ \cdots$ e mostrar que estas tornam-se cada vez maiores quando n cresce. Assim:

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}, \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}, \\
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2},
\end{aligned}$$

e, utilizando o mesmo raciocínio, obtemos $s_{32} > 1 + \dfrac{5}{2}$ e $s_{64} > 1 + \dfrac{6}{2}$ e, de modo geral, temos

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Isso mostra que $\lim\limits_{n \to \infty} (s_{2^n}) = \infty$, ou seja, não existe, provando que (s_{2^n}) é divergente e, consequentemente, que a série harmônica também é divergente.

A seguir, relacionamos a convergência de séries e sequências, cujo termo geral é x_n.

Teorema 2.2.4 *Se a série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n$ *é convergente, então* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Demonstração: Seja $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Então $x_n = s_n - s_{n-1}$. Por hipótese, temos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n$ é convergente. Então (s_n) é convergente. Seja $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n) = s$. Como $n - 1 \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, então teremos que $\lim\limits_{n \to \infty} (s_{n-1}) = s$. Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} (x_n) = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} (s_n) - \lim_{n \to \infty} (s_{n-1}) = s - s = 0.$$

$\square$

Exemplo 2.2.5 No exemplo 2.2.2 vimos que a série $\sum_{i=1}^{\infty}(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ é convergente. Calculando $\lim_{n\to\infty}(x_n)$, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0,$$

confirmando plenamente o Teorema 2.2.4 .

Observação 2.2.6 Pela contrapositiva do Teorema 2.2.4, se

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n) \text{ não existe},$$

então a série $\sum_{i=1}^{\infty}(x_n)$ é divergente. Essa implicação é chamada de ***Teste para Divergência de Séries***.

Exemplo 2.2.7 Dada a sequência $(x_n) = \left(\frac{n^2}{5n^2+4}\right)$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{5n^2+4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5+\frac{4}{n^2}}\right) = \frac{1}{5} \neq 0,$$

mostrando que a série $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{5n^2+4}\right)$ é divergente.

O Teorema 2.2.4 não é suficiente para concluirmos que uma sequência (x_n) é divergente pelo fato de $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$. Caso $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$, então a série pode ser divergente ou convergente. Como foi visto no Exemplo 2.2.3, a série $\sum x_n$, em que $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, é divergente e, no entanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

2.3 Progressões Aritméticas

Entre os vários tipos de sequências de números reais e que possuem muitas aplicações práticas, passaremos ao estudo das **sequências aritméticas**, também chamadas de **progressões aritméticas**, definidas por uma lei de recorrência.

Definição 2.3.1 *Uma **progressão aritmética** é uma sequência* $(x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n;\ \cdots)$ *de números reais* x_n*, na qual, a partir do segundo termo, é constante a diferença entre cada termo* x_n *e o seu antecedente* x_{n-1}*. Essa diferença constante é chamada de **razão** e será representada por* r*.*

Assim, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência de números reais (x_n), na qual $x_n - x_{n-1} = r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3.2 Consideremos que um atleta iniciou seu treinamento correndo 3 km e pretende aumentar essa distância diariamente em 500 m. Dessa forma, se chamarmos de x_1 a distância percorrida no primeiro dia de treinamento, em quilômetros, e x_n a distância percorrida pelo atleta no enésimo dia, então $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3; \cdots,\ x_n;\ \cdots)$ será uma progressão aritmética de razão $r = 0,5$ $(500m = 0,5km)$. Para os quatro primeiros dias de treinamento teremos a sequência $(x_n) = (3,0;\ 3,5;\ 4,0;\ 4,5;\ \cdots)$.

Face à regularidade dos termos de uma progressão aritmética, podemos estabelecer relações algébricas que caracterizam seus termos. De fato, consideremos (x_n) uma progressão aritmética com primeiro termo x_1 e razão r. Da definição de progressão aritmética e utilizando uma lei de recorrência para definir o termo geral que determina cada elemento dessa mesma progressão, temos:

- $x_2 - x_1 = r \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + r;$
- $x_3 - x_2 = r \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_2 + r \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1 + r + r \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1 + 2r;$
- $x_4 - x_3 = r \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_3 + r \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_1 + 2r + r \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_1 + 3r;$
- $x_5 - x_4 = r \quad \Rightarrow \quad x_5 = x_4 + r \quad \Rightarrow \quad x_5 = x_1 + 3r + r \quad \Rightarrow \quad x_5 = x_1 + 4r;$

e assim sucessivamente.

Estas igualdades sugerem que:

$$x_n = x_1 + (n-1).r, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Isto motiva a seguinte proposição.

Proposição 2.3.3 *Se (x_n) é uma progressão aritmética de razão r então o* ***termo geral*** *dessa sequência será dado por*

$$x_n = x_1 + (n-1).r, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstração: Vamos mostrar essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita.

Para $n = 1$, a sentença é válida, pois $x_1 = x_1 + (1-1).r = x_1 + 0.r = x_1$. Em seguida, por hipótese, afirmamos a validade da sentença para n, ou seja, vale $x_n = x_1 + (n-1).r$, e provaremos a validade da mesma sentença para n + 1, ou seja, $x_{n+1} = x_1 + ((n+1)-1).r$. Assim,

$$x_{n+1} = x_n + r.$$

De fato, como $x_n = x_1 + (n-1).r$, então:

$$x_{n+1} = x_1 + (n-1).r + r \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n+1} = x_1 + nr - r + r \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n+1} = x_1 + nr$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_{n+1} = x_1 + (n+1-1)\,r \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n+1} = x_1 + ((n+1)-1)\,r.$$

Dessa forma, vale a sentença do termo geral da progressão aritmética, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Exemplo 2.3.4 Para determinar o vigésimo termo da progressão aritmética (5; 9; 13; 17; $\cdots$), basta substituir x_1 por 5, r por 4 (pois $9-5=4$) e n por 20, na fórmula do termo geral de uma progressão aritmética:

$$x_{20} = 5 + (20-1).4 = 81.$$

Logo, o vigésimo termo dessa progressão aritmética será igual a 81.

Um importante Teorema é aplicado quando estudam-se as progressões aritméticas, como veremos a seguir.

Teorema 2.3.5 *Se (x_n) é uma progressão aritmética, então a soma dos seus n primeiros termos, denotada por S_n, é*

$$S_n = \left[\frac{x_1 + x_n}{2}\right] n.$$

Demonstração: Seja dada uma progressão aritmética (x_n) qualquer.

Primeiramente, indicando a soma dos n primeiros termos por S_n, obtém-se:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n \quad .$$

Escrevendo essa soma de trás para frente, obtém-se:

$$S_n = x_n + x_{n-1} + \cdots + x_3 + x_2 + x_1 \quad .$$

Somando-se membro a membro essas duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
2S_n &= (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \cdots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) \\
\Longleftrightarrow 2S_n &= (x_1 + x_n) + (x_1 + r + x_n - r) + \cdots + (x_n - r + x_1 + r) + (x_1 + x_n) \\
\Longleftrightarrow 2S_n &= \underbrace{(x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + \cdots + (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n)}_{n \ parcelas} \\
\Longleftrightarrow 2S_n &= (x_1 + x_n)\, n \\
\Longleftrightarrow S_n &= \left[\frac{x_1 + x_n}{2}\right] n,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

□

Exemplo 2.3.6 Para encontrarmos a soma dos trinta primeiros termos da progressão aritmética $(1;\ 4;\ 7;\ \cdots)$, sabemos que o primeiro termo x_1 vale 1, pela progressão aritmética dada, e que n vale 30. Em seguida, com a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, obtemos $x_{30} = x_1 + 29.r = 1 + 29.3 = 88$. Assim, substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, obtemos:

$$S_{30} = \frac{(x_1 + x_{30})}{2}.30 = \frac{(1 + 88)}{2}.30 = 1335.$$

Logo, a soma dos trinta primeiros termos da progressão aritmética dada será igual a 1335.

2.4 Progressões Geométricas

Assim como as progressões aritméticas, as progressões geométricas também são definidas por uma lei de recorrência.

Definição 2.4.1 *Uma **progressão geométrica** é uma sequência* $(x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n;\ \cdots)$ *de números reais* x_n *não-nulos, na qual, a partir do segundo termo, é constante o quociente entre cada termo* x_n *e o seu antecedente* x_{n-1}*. Esse quociente constante é chamado de **razão** e será representada por* q*.*

Assim, uma progressão geométrica de razão q é uma sequência de números reais (x_n) não-nulos, na qual $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = q$, para todo n natural, onde $n > 1$.

Exemplo 2.4.2 Consideremos que um vazamento em um tanque de gasolina provocou a perda de 2 litros no primeiro dia. Como o orifício responsável pelas perdas foi aumentando, as perdas foram dobrando a cada dia. Dessa forma, se chamarmos de x_1 a perda de gasolina no primeiro dia, em litros, e x_n a perda de gasolina no enésimo dia, então $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3,\ \cdots;\ x_n;\ \cdots)$ será uma progressão geométrica de razão $q = 2$. Considerando os seis primeiros dias de vazamento, teremos a sequência $(x_n) = (2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64;\ \cdots)$.

Face à regularidade dos termos de uma progressão geométrica, serão estabelecidas algumas relações algébricas a fim de caracterizar os termos desta progressão. Consideremos (x_n) uma progressão geométrica com primeiro termo x_1 e razão $q \neq 0$. Da definição de progressão geométrica e utilizando uma lei de recorrência para definir o termo geral que determina cada elemento dessa mesma progressão, temos:

- $\dfrac{x_2}{x_1} = q \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1.q;$
- $\dfrac{x_3}{x_2} = q \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_2.q \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1.q.q \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1.q^2;$
- $\dfrac{x_4}{x_3} = q \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_3.q \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_1.q^2.q \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_1.q^3;$
- $\dfrac{x_5}{x_4} = q \quad \Rightarrow \quad x_5 = x_4.q \quad \Rightarrow \quad x_5 = x_1.q^3.q \quad \Rightarrow \quad x_5 = x_1.q^4;$

e assim sucessivamente.

Estas igualdades sugerem que:

$$x_n = x_1 + q^{n-1}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

De fato, desse raciocínio, obtemos a proposição a seguir.

Proposição 2.4.3 *Se* (x_n) *é uma progressão geométrica de razão* $q \neq 0$ *então o* ***termo geral*** *dessa sequência é*

$$x_n = x_1.q^{n-1}, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstração: Vamos mostrar essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita.

Para $n = 1$ a sentença é válida, pois $x_1 = x_1 + q^{1-1} = x_1 + q^0 = x_1$. Em seguida, por hipótese, afirmamos a validade da sentença para n, ou seja, vale $x_n = x_1.q^{n-1}$, e provaremos a validade da mesma sentença para $n+1$, ou seja, vale $x_{n+1} = x_1.q^{((n+1)-1)}$. Assim

$$x_{n+1} = x_n.q.$$

De fato, como $x_n = x_1.q^{n-1}$, então:

$$x_{n+1} = x_1.q^{n-1}.q \iff x_{n+1} = x_1.q^{n-1+1} \iff x_{n+1} = x_1.q^{((n+1)-1)}.$$

Dessa forma, vale a sentença do termo geral da progressão geométrica, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$\square$

Exemplo 2.4.4 Para determinar o décimo termo da progressão geométrica $(2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \cdots)$, basta substituir x_1 por 2, q por 2 (pois $\frac{4}{2} = 2$) e n por 10 na fórmula do termo geral da progressão geométrica dada, obtendo

$$x_{10} = 2.2^{10-1} = 2.2^9 = 2^{10} = 1024.$$

Logo, o décimo termo dessa progressão geométrica será igual a 1024.

Um importante Teorema é aplicado quando estudam-se as progressões geométricas, como veremos a seguir.

Teorema 2.4.5 *Se* (x_n) *é uma progressão geométrica finita, com* $q \neq 1$, *então a soma dos seus* n *primeiros termos, denotada por* S_n, *é*

$$S_n = x_1.\frac{1-q^n}{1-q} \quad .$$

Demonstração: Seja dada uma progressão geométrica (x_n). Primeiramente, indicando a soma dos n primeiros termos por S_n, obtém-se:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

Multiplicando ambos os membros de S_n por q, obtemos:

$$q.S_n = x_1.q + x_2.q + x_3.q + \cdots + x_{n-1}.q + x_n.q$$
$$\Longleftrightarrow q.S_n = x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + x_n.q.$$

Efetuando a subtração $S_n - q.S_n$, obtemos:

$$S_n - q.S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n - (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + x_n.q)$$
$$\Longleftrightarrow S_n - q.S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_2 - x_3 - x_4 - \cdots - x_n - x_n.q$$
$$\Longleftrightarrow S_n - q.S_n = x_1 - x_n.q.$$

Como $x_n = x_1.q^{n-1}$, então

$$S_n - q.S_n = x_1 - \left(x_1.q^{n-1}\right).q$$
$$\Longleftrightarrow S_n - q.S_n = x_1 - x_1.q^n$$
$$\Longleftrightarrow S_n.\left(1-q\right) = x_1.\left(1-q^n\right).$$

Como $q \neq 1$, então

$$S_n = x_1.\frac{1-q^n}{1-q},$$

concluindo a demonstração.

□

Exemplo 2.4.6 Para encontrarmos a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica $(2;\ 4;\ 8;\cdots)$, sabemos que o primeiro termo x_1 é igual a 2, que a razão é igual a 2, pela progressão geométrica dada, e que n vale 10. Assim, substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos da progressão geométrica dada, obtemos:

$$S_{10} = 2.\frac{1-2^{10}}{1-2} = 2.\frac{1-1024}{-1} = 2.1023 = 2046.$$

Logo, a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica dada será igual a 2046.

Como consequência do Teorema 2.4.5, obtemos o Corolário a seguir.

Corolário 2.4.7 *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita (x_n), com $q \neq 1$, é*

$$S_n = \frac{x_n.q - x_1}{q-1}.$$

Demonstração: Dada uma progressão geométrica (x_n), já vimos que

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Assim,

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Longleftrightarrow S_n = \frac{x_1 - x_1.q^n}{1-q} \Longleftrightarrow S_n = \frac{x_1.q^n - x_1}{q-1}$$
$$\Longleftrightarrow S_n = \frac{x_1.q^{n-1+1} - x_1}{q-1} \Longleftrightarrow S_n = \frac{x_1.q^{n-1}.q - x_1}{q-1} \Longleftrightarrow S_n = \frac{x_n.q - x_1}{q-1},$$

completando a demonstração do corolário.

□

Observação 2.4.8 No Teorema 2.4.5 e no Corolário 2.4.7, consideramos a razão da progressão geométrica $q \neq 1$. Caso tivéssemos $q = 1$, então a progressão geométrica possuiría todos os seus termos iguais a x_1, por exemplo, tais que a soma dos n primeiros termos dessa progressão geométrica seria igual a soma de n parcelas iguais a x_1, ou seja,

$$S_n = \underbrace{x_1 + x_1 + \ \cdots \ + x_1}_{n \ parcelas} = nx_1.$$

Em algumas aplicações, devemos descobrir a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Para tal, devemos inicialmente apresentar dois teoremas fundamentais para assim obtermos uma fórmula que determine a soma dos termos dessa progressão geométrica infinita.

Teorema 2.4.9 *Se $h > -1$, então*

$$(1+h)^n \geq 1 + n.h,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Vamos mostrar essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita.

Para $n = 0$ a sentença é válida, pois

$$(1+h)^0 \geq 1 + 0.h \Rightarrow 1 \geq 1.$$

Agora, vamos supor que a sentença seja verdadeira para algum $n = k \in \mathbb{N}$, isto é, vale $(1+h)^k \geq 1 + k.h$, e mostraremos que ela é verdadeira para $n = k+1$. Com efeito, se $(1+h)^k \geq 1 + k.h$, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $(1+h)$, que é positivo, obtemos

$$\begin{aligned} (1+h)^k . (1+h) &\geq (1+k.h) . (1+h) = 1 + kh + h + kh^2 \\ &= 1 + (k+1) .h + kh^2 \geq 1 + (k+1) .h, \end{aligned}$$

provando o teorema.

□

Teorema 2.4.10 *Se* $|q| < 1$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} (q^n) = 0.$$

Demonstração: Se $q = 0$, escolhido $\varepsilon > 0$, teremos que

$$|q^n - 0| = 0 \Longrightarrow |q^n - 0| < \varepsilon,$$

para todo $n > 0$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} (q^n) = 0$, se $q = 0$. Se $q \neq 0$, escolhido $\varepsilon > 0$, e fazendo $h = \dfrac{1}{|q|} - 1$, teremos h positivo e, com o resultado do Teorema 2.4.8, obtemos

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+n.h} < \frac{1}{n.h} < \varepsilon,$$

se $n > \dfrac{1}{\varepsilon.h}$.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} (q^n) = 0$, se $|q| < 1$ e $q \neq 0$, provando o teorema.

□

Após os resultados apresentados nestes dois últimos teoremas, passaremos ao próximo que formaliza a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

Teorema 2.4.11 *Se (x_n) é uma progressão geométrica infinita, com razão q tal que $-1 < q < 1$, então a soma S_n infinita dessa progressão geométrica será dada por*

$$S_n = \frac{x_1}{1-q}.$$

Demonstração: Para provar este teorema, vamos mostrar que a sequência das somas parciais da progressão geométrica,

$$(s_1;\ s_2;\ s_3;\ \cdots;\ s_n;\ \cdots) = (s_n)$$

converge para $\dfrac{x_1}{1-q}$.

Escolhendo $s = \dfrac{x_1(1-q^n)}{1-q}$, obtemos

$$s - \frac{x_1}{1-q} = x_1.\frac{1-q^n}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} = -\frac{x_1}{1-q}.q^n,$$

e, calculando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} s - \frac{x_1}{1-q} = \lim_{n\to\infty} -\frac{x_1}{1-q}.q^n = \lim_{n\to\infty} -\frac{x_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n,$$

onde, lembrando que x_1 e q são constantes reais e $\lim\limits_{n\to\infty}(q^n) = 0$, pelo Teorema 2.4.9, teremos

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{x_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = -\frac{x_1}{1-q}.0 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} s - \frac{x_1}{1-q} = 0.$$

Dessa forma, concluímos que

$$S_n = \lim_{n\to\infty} s = \frac{x_1}{1-q}.$$

□

Observação 2.4.12

(a) No Teorema 2.4.11, se $x_1 = 0$, então a progressão geométrica será por $(0;\ 0;\ 0;\ \cdots)$ e sua soma será zero, qualquer que seja o valor de q;

(b) Ainda no Teorema 2.4.11, Se $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência de somas parciais não convergiriam, pois se tratariam de séries geométricas, que não convergem nesse caso, como foi visto no Exemplo 2.2.2, na seção sobre séries, deste capítulo.

Exemplo 2.4.13 A soma dos termos da progressão geométrica infinita $\left(1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \cdots\right)$, onde $x_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$, será dada por:

$$S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

2.5 Progressões Aritméticas de Ordem Superior

Algumas definições e propriedades a respeito de progressões aritméticas são fundamentais para a definição das progressões aritméticas de ordem superior, como veremos a seguir.

2.5.1 Progressões Aritméticas de Primeira Ordem

Considerando a definição de progressão aritmética apresentada na Definição 2.3.1, temos a Proposição a seguir.

Proposição 2.5.1 *Seja (x_n) uma sequência de números reais.*
(i) *(x_n) será uma progressão aritmética de razão r se, e somente se, seu termo geral é um polinômio de grau n menor ou igual a 1, na variável n, escrito na forma:*

$$x_n = r.n + (x_1 - r)\,.$$

(ii) *(x_n) será uma progressão aritmética de razão r se, e somente se, a soma S_n de seus n primeiros termos é um polinômio de grau menor ou igual a 2, na variável n, sem termo independente, escrito na forma:*

$$S_n = \frac{r}{2}.n^2 + \frac{(2x_1 - r)}{2}.n.$$

Demonstração:
(i) Sendo (x_n) uma progressão aritmética, de razão r, conforme a Proposição 2.3.3, o seu termo geral será dado por:

$$x_n = x_1 + (n-1).r\ .$$

Reescrevendo esse termo geral como sendo um polinômio na variável n, temos:

$$x_n = x_1 + (n-1).r \iff x_n = x_1 + n.r - r \iff x_n = r.n + (x_1 - r)\,.$$

Analisando esse polinômio x_n, se $r \neq 0$, então esse polinômio tem grau 1; se $r = 0$ então esse polinômio tem grau menor que 1. Assim, o termo geral x_n dessa progressão aritmética de razão r é um polinômio de grau menor ou igual a 1, na variável n.

Em contrapartida, seja (x_n) uma sequência numérica cujo termo geral é dado por:

$$x_n = a.n + b, \qquad a,\ b\ \in\ \mathbb{R},$$

um polinômio de grau 1, na variável n. Nesse polinômio, fazendo $a = r$ e $b = x_1 - r$, onde x_1 é o primeiro termo da sequência (x_n), e reescrevendo esse polinômio, temos:

$$x_n = r.n + (x_1 - r) \iff x_n = x_1 + n.r - r \iff x_n = x_1 + (n-1)\,.r \quad ,$$

que denota o termo geral de uma progressão aritmética de razão r. Portanto, (x_n) é uma progressão aritmética de razão r.

(ii) Sendo (x_n) uma progressão aritmética, de razão r, a soma dos n primeiros termos dessa progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)}{2}.n \quad .$$

Reescrevendo essa soma S_n como sendo um polinômio na variável n, temos:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)}{2}n \ \Leftrightarrow\ S_n = \frac{(x_1 + x_1 + (n-1)\,r)}{2}n \ \Leftrightarrow S_n = \frac{(x_1 + x_1 + nr - r)}{2}n$$

$$\Leftrightarrow\ S_n = \frac{((2x_1 - r) + nr)}{2}n \ \Leftrightarrow\ S_n = \frac{((2x_1 - r)\,n + n^2 r)}{2} \ \Leftrightarrow\ S_n = \frac{r}{2}n^2 + \frac{((2x_1 - r)\,n)}{2}.$$

Analisando esse polinômio S_n, se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio do segundo grau na variável n, desprovido de termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem o termo independente. Assim, a soma S_n dos n primeiros termos da sequência (x_n) é um polinômio de grau menor ou igual a 2, na variável n.

Em contrapartida, seja (x_n) uma sequência numérica cuja soma S_n dos seus n primeiros termos seja dada por

$$S_n = a.n^2 + b_n, \qquad a,\ b\ \in\ \mathbb{R},$$

um polinômio de grau 2, na variável n. Nesse polinômio, fazendo $a = \dfrac{r}{2}$ e $b = \dfrac{(2x_1 - r)}{2}$, onde x_1 é o primeiro termo da sequência (x_n), e reescrevendo esse polinômio, temos:

$$S_n = \frac{r}{2}n^2 + \frac{((2x_1 - r)\,n)}{2} \ \Leftrightarrow S_n = \frac{((2x_1 - r)\,n + n^2 r)}{2} \ \Leftrightarrow S_n = \frac{((2x_1 - r) + nr)}{2}n$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{(x_1 + x_1 + nr - r)}{2}n \;\Leftrightarrow S_n = \frac{(x_1 + x_1 + (n-1)\,r)}{2}n \;\Leftrightarrow S_n = \frac{(x_1 + x_n)}{2}n,$$

que denota a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Portanto, (x_n) é uma progressão aritmética de razão r.

□

Definição 2.5.2 *Toda progressão aritmética que possua o termo geral x_n na forma*

$$x_n = r.n + (x_1 - r)\,,$$

ou seja, na forma de um polinômio de grau 1, na variável n, é denominada de ***progressão aritmética de primeira ordem****.*

Com base no que foi estudado até aqui, a seguir serão apresentadas algumas definições e proposições, a fim de formalizar essa relação entre o termo geral de progressões aritméticas de ordem p com uma função polinomial, também de grau p, na variável n.

2.5.2 Operador Diferença

Definição 2.5.3 *Seja dada a sequência $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n,\ \cdots)$. Define-se o* ***operador*** *Δ (ou* ***operador diferença****) como sendo a diferença entre cada termo x_{n+1} e o seu antecedente x_n, denotado por*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Proposição 2.5.4 *Uma sequência de números reais (x_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, (Δx_n) é uma sequência constante.*

Demonstração: Se a sequência de números reais $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n;\ \cdots)$ é uma progressão aritmética, então a diferença entre cada termo x_{n+1} e o seu antecedente x_n é sempre igual a uma constante r, chamada de razão da progressão aritmética. Logo, $(\Delta x_n) = (r;\ r;\ r;\ \cdots;\ r;\ \cdots)$ é uma sequência constante.

Em contrapartida, se na sequência de números reais $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n;\ \cdots)$ obtivermos que $(\Delta x_n) = (x_{n+1} - x_n) = (r;\ r;\ r;\ \cdots;\ r;\ \cdots)$, ou seja, obtivermos uma sequência constante, onde r é uma constante real, então, por definição, (x_n) é uma progressão aritmética.

□

2.5.3 Progressões Aritméticas de Segunda Ordem

Definição 2.5.5 *Uma* ***progressão aritmética de segunda ordem*** *é uma sequência de números reais* (x_n), *na qual as diferenças* $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, *entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética* ***não-estacionária*** *(razão* $r \neq 0$*).*

Exemplo 2.5.6 Seja dada a sequência $(x_n) = (1;\ 4;\ 10;\ 19;\ 31;\ 46;\ 64;\ \cdots)$. Essa sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre cada termo e seu anterior, $(y_n) = (\Delta x_n) = (x_{n+1} - x_n) = (3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18;\ \cdots)$ é uma progressão aritmética (com razão $r = 3$) não-estacionária.

Como consequência dessa definição, decorre o Teorema a seguir.

Teorema 2.5.7 *Uma sequência de números reais* (x_n) *é uma* ***progressão aritmética de segunda ordem*** *se, e somente se, seu termo geral é dado por um polinômio do segundo grau, na variável* n*.*

Demonstração: Se a sequência dada (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a sequência de números reais dada por

$$(y_n) = (\Delta x_n) = (x_2 - x_1; x_3 - x_2; x_4 - x_3; \cdots; x_n - x_{n-1}; \cdots) = (y_1; y_2; y_3; \cdots; y_n; \cdots)$$

é uma progressão aritmética não-estacionária. Assim, $(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$ é a soma dos $n - 1$ primeiros termos da progressão aritmética (y_n) e que será denotada por um polinômio do segundo grau, na variável n. Se simplesmente somarmos todos os termos da sequência (y_n), teremos:

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1} \\ \Longleftrightarrow\ & y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_n - x_1 \\ & \qquad \Longleftrightarrow x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$, então o termo geral da sequência (x_n) também será expresso por um polinômio do segundo grau, na variável n.

Em contrapartida, se o termo geral da sequência numérica (x_n) for expresso por $x_n = an^2 + bn + c$, onde a, b e c são constantes reais, então seu operador Δ será:

$$\begin{aligned}
&\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \\
\iff &\Delta x_n = a\,(n+1)^2 + b\,(n+1) + c - \left(an^2 + bn + c\right) \\
\iff &\Delta x_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c \\
\iff &\Delta x_n = 2an + (a+b)\,.
\end{aligned}$$

Assim, Δx_n é expresso por um polinômio do primeiro grau, na variável n. Logo, Δx_n é uma progressão aritmética não-estacionária e, por definição, (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

□

2.5.4 Progressões Aritméticas de Ordem Superior

Definição 2.5.8 *Uma progressão aritmética de ordem k $(k > 2)$ é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$.*

Exemplo 2.5.9 Seja a sequência numérica definida por $(x_n) = (2n^3 - n)$, onde $n \in \mathbb{N}$. Encontrando os elementos de (x_n) e suas diferenças (Δx_n), $(\Delta^2 x_n) = (\Delta\Delta x_n)$, $(\Delta^3 x_n) = (\Delta\Delta\Delta x_n)$, com n variando de 0 a 10, obtemos a tabela:

n	$(\mathbf{x_n})$	$(\mathbf{\Delta x_n})$	$(\mathbf{\Delta^2 x_n})$	$(\mathbf{\Delta^3 x_n})$
0	*0*	*1*	*12*	*12*
1	*1*	*13*	*24*	*12*
2	*14*	*37*	*36*	*12*
3	*51*	*73*	*48*	*12*
4	*124*	*121*	*60*	*12*
5	*245*	*181*	*72*	*12*
6	*426*	*253*	*84*	*12*
7	*679*	*337*	*96*	*12*

Continua na próxima página

Continuação da página anterior

n	$(\mathbf{x_n})$	$(\mathbf{\Delta x_n})$	$(\mathbf{\Delta^2 x_n})$	$(\mathbf{\Delta^3 x_n})$
8	*1016*	*433*	*108*	*12*
9	*1449*	*541*	*120*	*12*
10	*1990*	*661*	*132*	*12*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 2.1: Elementos e Operadores da sequência (x_n).

Analisando esses valores, percebe-se que as diferenças $(\mathbf{\Delta^3 x_n})$ formam uma progressão aritmética estacionária e as diferenças $(\mathbf{\Delta^2 x_n})$ formam uma progressão aritmética não-estacionária, ou seja, a sequência $(\mathbf{\Delta^2 x_n})$ forma uma progressão aritmética de ordem 2, definindo assim a sequência $(\mathbf{x_n})$ como uma progressão aritmética de ordem 3.

Para relacionar o termo geral de uma progressão aritmética superior com um polinômio, segue o Teorema que se refere à soma de polinômios.

Teorema 2.5.10 *$1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{p} k^p$ é um polinômio de grau $p+1$ em n.*

Demonstração: Para demonstrar este Teorema, vamos usar o Prinicípio da Indução Finita sobre p. Para $p = 1$, temos que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$ é a soma dos n termos de uma progressão aritmética de razão r igual a 1 e, pela fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, obtemos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)}{2}.n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

um polinômio de grau $2 = p + 1$. Logo, a sentença é válida para $p = 1$.

Agora, vamos supor que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p + 1$ em n, para algum $p \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, s\}$. Assim, devemos mostrar que essa suposição é válida para $p = s + 1$, isto é, mostraremos que $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s + 2$, na variável n.

Observe que $(k + 1)^{s+2}$ é um Binômio de Newton na forma $(a + b)^n$ e, desenvolvendo esse binômio pela fórmula do Termo Geral de um Binômio dado por $T_{p+1} = \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p$, com $0 \ \leq \ p \ \leq n$, obtém-se:

$$(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)\,.k^{s+1} + \cdots\,,$$

onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau s em k. Utilizando propriedades operatórias de somatórios, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\,.\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n),$$

onde $F(n)$ é um polinômio de grau $s+1$, em n, pela hipótese de indução.

Desenvolvendo e simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, obtemos:

$$\begin{aligned} 2^{s+2} + 3^{s+2} + \cdots + n^{s+2} + (n+1)^{s+2} = 1^{s+2} + 2^{s+2} + 3^{s+2} &+ \cdots + n^{s+2} \\ +(s+2)\,.\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} &+ F(n) \\ \Longleftrightarrow \left(2^{s+2} - 2^{s+2} + 3^{s+2} - 3^{s+2} + \cdots + n^{s+2} - n^{s+2}\right) &+ (n+1)^{s+2} = 1 \\ +(s+2)\,.\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} &+ F(n) \\ \Longleftrightarrow (n+1)^{s+2} = 1 + (s+2)\,.\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} &+ F(n). \end{aligned}$$

Isolando $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ na última equação, obtemos:

$$(n+1)^{s+2} - 1 - F(n) = (s+2)\,.\sum_{k=1}^{n} k^{s+1},$$

donde obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{(s+2)},$$

um polinômio de grau $s+2$ na variável n, concluindo a prova do Teorema.

$\square$

Como consequência do Teorema 2.5.10, apresentamos o Corolário a seguir.

Corolário 2.5.11 *Se F é um polinômio de grau p, então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau p + 1 em n.*

Demonstração: Se F é um polinômio de grau p, então F pode ser expresso por

$$F(k) = a_p k^p + a_{p-1}k^{p-1} + \cdots + a_1 k^1 + a_0.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_p k^p + a_{p-1}k^{p-1} + \cdots + a_1 k^1 + a_0\right).$$

Utilizando propriedades operatórias de somatórios, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} (a_p k^p) + \sum_{k=1}^{n} \left(a_{p-1}k^{p-1}\right) + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \left(a_1 k^1\right) + \sum_{k=1}^{n} (a_0)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} F(k) = a_p \sum_{k=1}^{n} (k^p) + a_{p-1} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{p-1}\right) + \cdots + a_1 \sum_{k=1}^{n} \left(k^1\right) + n.a_0.$$

Pelo Teorema 2.5.10, segue que $\sum_{k=1}^{n} (k^p)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n, $\sum_{k=1}^{n} \left(k^{p-1}\right)$ é um polinômio de grau p em n, e assim sucessivamente. Dessa forma, $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é obtido pela soma de polinômios com graus diferentes, o o maior grau entre esses polinômios é $p+1$. Portanto, $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau $p+1$, na variável n, concluindo a prova do corolário.

□

Diante dessas informações podemos formalizar uma importante propriedade das progressões aritméticas de ordem superior, dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 2.5.12 *Uma sequência numérica (x_n) é uma progressão aritmética de ordem p, $(p \geq 2)$, se, e somente se, seu termo geral x_n é um polinômio de grau p, na variável n.*

Demonstração: Para provar este Teorema, vamos proceder por indução sobre p. Para $p = 2$, a sentença é verdadeira, como foi demonstrado no Teorema 2.5.7.

Agora, vamos supor que a sentença do Teorema seja verdadeira para algum $p \in \{\,2,\ 3,\ \cdots,\ s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$. Se (x_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$, então $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ é uma progressão aritmética de ordem s, por definição, e, pela hipótese de indução, Δx_n é um polinômio de grau s, em n. Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots + \Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n \iff$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_{n-2} - x_{n-1}) +$$

$$+ (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_{n+1} - x_n,$$

donde, pelo Corolário 2.5.11 do Teorema 2.5.10, segue que Δx_n é um polinômio de grau $s+1$. Reciprocamente, seja dada uma sequência de números reais (x_n) cujo termo geral x_n é um polinômio de grau $s+1$ em n. Assim, obtendo uma expressão para o seu operador diferença, temos:

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_{n+1} - x_n \\ \Longleftrightarrow \Delta x_n &= \left(a_{s+1}(n+1)^{s+1} + a_s(n+1)^s + \cdots\right) - \left(a_{s+1}n^{s+1} + a_s n^s + \cdots\right), \end{aligned}$$

donde, pela fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton, teremos:

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \Delta x_n &= \left(a_{s+1}\left(n^{s+1} + (s+1)n^s + \cdots + 1\right) + a_s\left(n^s + \cdots + 1\right)\right) \\ &- a_{s+1}n^{s+1} - a_s n^s - \ldots \\ \Longleftrightarrow \Delta x_n &= a_{s+1}n^{s+1} + a_{s+1}(s+1)n^s + \cdots + a_{s+1} + a_s n^s + \cdots + a_s + \cdots \\ &- a_{s+1}n^{s+1} - a_s n^s - \ldots \\ \Longleftrightarrow \Delta x_n &= a_{s+1}(s+1)n^s + \cdots + (a_{s+1} + a_s + \cdots + a_0) \end{aligned}$$

um polinômio de grau s na variável n. Pela hipótese de indução, (Δx_n) é uma progressão aritmética de ordem s e, portanto, (x_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$.

$\square$

Em suma, com base no que foi aqui estudado, as progressões aritméticas de ordem (superior) p, onde $p \geq 2$, podem ser descritas pelos seguintes fatos:

- Se uma sequência é uma progressão aritmética de ordem p então as diferenças entre cada termo e o termo anterior dessa sequência formam uma progressão aritmética de ordem $p-1$ e a recíproca também é válida;
- Se uma sequência é uma progressão aritmética de ordem p então seu termo geral é caracterizado por um polinômio cujo grau também é p e a recíproca também é válida.

Capítulo 3

Roteiro de Estudo: Progressões Aritméticas de Ordem Superior

Ao trabalharmos com problemas que envolvem sequências numéricas e, em particular, as progressões aritméticas, muitas vezes nos deparamos com situações onde fórmulas não são suficientes para determinarmos as possíveis soluções para um problema proposto.

Neste capítulo, apresentamos uma sugestão de sequência didática que pode ser trabalhada com alunos do Ensino Médio, na qual enfocamos e apresentamos conceitos que auxiliam a resolução de problemas envolvendo sequências numéricas, indicando outras alternativas de resoluções, além da aplicação de fórmulas, estimulando o aprendizado e o aprofundamento sobre este tema.

3.1 Lei de Recorrência

No estudo das sequências de números reais, denotadas por

$$(a_n) = (\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ \cdots\ ;\ a_n;\ \cdots\ ),$$

procura-se definir uma expressão a_n, definida como termo geral da sequência (a_n), que possibilite determinar qualquer elemento (também chamado de **termo**) dessa sequência em função da posição que ocupe na sequência dada.

No entanto, algumas sequências não podem ser definidas algebricamente em função de sua posição. Neste caso, utiliza-se uma lei de recorrência, que fornece o primeiro termo a_1 e expressa um termo qualquer a_{n+1} em função do seu antecedente a_n.

Definição: Uma ***lei de recorrência*** é uma regra de que permite calcular cada termo de uma sequência dada, a partir do termo anterior, onde necessariamente seja conhecido o primeiro termo da sequência.

Exemplo 3.1.1 Seja $(a_n) = (a_1;\ a_2;\ a_3;\ \cdots;\ a_n;\ \cdots)$, uma sequência numérica, onde seus termos são definidos pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Podemos obter alguns elementos dessa sequência:

- $a_1 = 1$;
- $a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$;
- $a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$;
- $a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10$;
- $a_5 = a_4 + 3 = 10 + 3 = 13$;

e assim, sucessivamente. Dessa forma, essa sequência pode ser escrita como

$$(a_n) = (1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ \cdots).$$

Exemplo 3.1.2 Para definir uma lei de recorrência que forneça os termos da seguinte sequência $(1;\ 3;\ 7;\ 15;\ 31;\ 63;\ \cdots)$, vamos analisar os termos dados na sequência e procurar estabelecer uma relação entre os mesmos:

- $a_1 = 1$;
- $a_2 = 2.1 + 1 = 2.a_1 + 1$;
- $a_3 = 2.3 + 1 = 2.a_2 + 1$;
- $a_4 = 2.7 + 1 = 2.a_3 + 1$;
- $a_5 = 2.15 + 1 = 2.a_4 + 1$;
- $\ldots$;

- $a_{n+1} = \cdots = 2.a_n + 1.$

Assim, uma lei de recorrência para a sequência dada será:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2.a_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Exercícios Propostos

01) Uma sequência numérica é definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} - 1, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Determine a soma dos seis primeiros termos dessa sequência.

02) Descubra, em cada caso, uma lei de recorrência para cada uma das sequências:

(a) $(-3;\ -6;\ -9;\ -12;\ -15;\ \cdots)$;

(b) $(-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \cdots)$;

(c) $(2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \cdots)$;

3.2 Progressões Aritméticas

Definição: Seja (a_n) uma sequência numérica. Se, a partir do segundo termo, a diferença entre cada termo a_n e o seu antecedente a_{n-1} é constante, então essa sequência é chamada de ***progressão aritmética***, e essa diferença entre os termos é chamada de ***razão***, representada por r.

Exemplo 3.2.1 A sequência $(a_n) = (1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \cdots)$ é uma progressão aritmética pois, determinando a diferença entre dois termos consecutivos de (a_n), obtemos a mesma constante r :

$$5 - 1 = 9 - 5 = 13 - 9 = 17 - 13 = 21 - 17 = \cdots = 4 = r.$$

Para encontrarmos um determinado termo de uma progressão aritmética utilizamos a fórmula do termo geral a_n dessa progressão, dada por $a_n = a_1 + (n-1).r$, onde a_1, n e r são, respectivamente, o primeiro termo, a ordem do termo que se quer determinar, e a razão da progressão aritmética.

Exemplo 3.2.2 Na progressão aritmética do Exemplo 3.2.1, temos o primeiro termo a_1 igual a 1 e a razão r igual a 4. Para determinar o décimo termo dessa progressão, consideremos n igual a 10 e substituímos a_1, r e n na fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, obtendo:

$$a_{10} = 1 + (10-1).4 = 1 + 9.4 = 1 + 36 = 37.$$

Exercícios Propostos

03) Encontre o 18º termo da progressão aritmética $(5;\ 12;\ 19;\ \cdots)$.

04) Calcular o 100º número ímpar positivo.

A seguir, no decorrer das definições que serão apresentadas, iremos caracterizar uma progressão aritmética de ordem superior.

3.3 Operador Diferença

Definição: Dada uma sequência numérica (a_n), define-se o ***operador*** Δ (ou ***operador diferença***) como sendo a diferença entre cada termo (a_{n+1}) e o seu antecedente (a_n), denotado por

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Exemplo 3.3.1

(a) Na sequência $(a_n) = (1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \cdots)$, temos:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4;$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 9 - 5 = 4;$$

$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = 13 - 7 = 4;$$

$$\Delta a_4 = a_5 - a_4 = 17 - 13 = 4;$$

$$\Delta a_5 = a_6 - a_5 = 21 - 17 = 4;$$

e assim sucessivamente.

(b) Na sequência $(b_n) = (1;\ 3;\ 6;\ 10;\ 15;\ 21;\ \cdots)$, temos:

$$\Delta b_1 = b_2 - b_1 = 3 - 1 = 2;$$

$$\Delta b_2 = b_3 - b_2 = 6 - 3 = 3;$$

$$\Delta b_3 = b_4 - b_3 = 10 - 6 = 4;$$

$$\Delta b_4 = b_5 - b_4 = 15 - 10 = 5;$$

$$\Delta b_5 = b_6 - b_5 = 21 - 15 = 6;$$

e assim sucessivamente. Note que, ao definirmos a sequência $(c_n) = (\Delta b_n) = (b_{n+1} - b_n)$ e, denotando $\Delta c_n = \Delta^2 b_n$, obtemos:

$$\Delta c_1 = \Delta^2 b_1 = \Delta b_2 - \Delta b_1 = 3 - 2 = 1;$$

$$\Delta c_1 = \Delta^2 b_2 = \Delta b_3 - \Delta b_2 = 4 - 3 = 1;$$

$$\Delta c_1 = \Delta^2 b_3 = \Delta b_4 - \Delta b_3 = 5 - 4 = 1;$$

$$\Delta c_1 = \Delta^2 b_4 = \Delta b_5 - \Delta b_4 = 6 - 5 = 1;$$

e assim sucessivamente.

Note que todos os resultados obtidos para o operador $\Delta^2 b_n$, os quais também dependem da sequência inicial (b_n), são iguais a uma mesma constante real. Nestas circunstâncias, $\Delta^2 b_n$ é denominado de ***operador diferença de segunda ordem***. De maneira análoga podem ser definidos operadores diferença de ordens superiores.

Exercício Proposto

05) Para cada uma das as sequências numéricas abaixo, aplicando a definição do operador diferença, encontre (Δa_n), $(\Delta^2 a_n)$ e $(\Delta^3 a_n)$:

(a) $(a_n) = (1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ \cdots)$,

(b) $(a_n) = (3;\ 5;\ 8;\ 15;\ 32;\ 68;\ 135;\ \cdots)$,

3.4 Progressões Aritméticas de Primeira Ordem

Definição: Seja (a_n) uma sequência numérica. Quando as diferenças entre os termos consecutivos dessa sequência forem iguais a uma constante real r, com $r \neq 0$, então essa sequência numérica será denominada ***progressão aritmética de primeira ordem*** ou simplesmente ***progressão aritmética de razão r***. Caso $r = 0$, a sequência é denominada ***progressão aritmética estacionária*** ou ***constante***.

Exemplo 3.4.1 A progressão aritmética $(a_n) = (-4;\ 7;\ 18;\ 29,\ \cdots)$ é de primeira ordem. De fato, sendo $a_1 = -4, a_2 = 7, a_3 = 18$ e $a_4 = 29$, os quatro primeiros elementos dessa sequência e, usando a notação do operador diferença, temos que:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 7 - (-4) = 11;$$
$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 18 - 7 = 11;$$
$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = 29 - 18 = 11,$$

ou seja, as diferenças entre dois termos consecutivos é sempre constante, mostrando que a sequência é uma progressão aritmética de primeira ordem. Observe que essa progressão aritmética de primeira ordem pode ser interpretada como uma progressão aritmética de razão r igual a 11.

3.5 Progressões Aritméticas de Segunda Ordem

Definição: Dada uma sequência numérica (a_n), quando as diferenças entre os termos consecutivos dessa sequência formam uma progressão aritmética não-estacionária, então essa sequência numérica será denominada ***progressão aritmética de segunda ordem***.

Exemplo 3.5.1 A progressão aritmética $(a_n) = (1;\ 5;\ 10;\ 16;\ 22;\ 29;\ \cdots)$ é de segunda ordem. De fato, definindo uma nova sequência (b_n), cujos elementos são as diferenças entre os termos consecutivos de (a_n), obtemos:

$$\begin{aligned} (b_n) &= (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = ((a_2 - a_1)\,;\ (a_3 - a_2)\,;\ (a_4 - a_3)\,;\ \cdots) \\ &= (5-1;\ 10-5;\ 16-10;\ \cdots) = (4;\ 5;\ 6;\ \cdots)\,. \end{aligned}$$

Como a sequência (b_n) define uma progressão aritmética não-estacionária de razão 1, então (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Exercício Proposto

06) Dadas as sequências numéricas abaixo, identifique qual(is) sequência(s) determinam uma progressão aritmética de segunda ordem:

(a) $(x_n) = (-3;\ 0;\ 3;\ 6;\ 10;\ 14;\ \cdots)$,

(b) $(y_n) = (7;\ 1;\ -5;\ -11;\ -17;\ -23;\ \cdots)$,

(c) $(w_n) = (2;\ 9;\ 16;\ 23;\ 30;\ 37;\ \cdots)$,

(d) $(b_n) = (6;\ 8;\ 15;\ 27;\ 44;\ \cdots)$,

(e) $(z_n) = (1;\ 3;\ 19;\ 61;\ 171;\ \cdots)$,

3.6 Progressões Aritméticas de Ordem p

Definição:

(a) Uma ***progressão aritmética de ordem p*** ($p > 2$) é uma sequência numérica na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $p - 1$;

(b) Toda progressão aritmética de ordem p, com $p \geq 2$, também é denominada de ***progressão aritmética de ordem superior***.

Exemplo 3.6.1 Sabendo que a sequência numérica

$$(a_n) = (10;\ 12;\ 15;\ 22;\ 39;\ 75;\ 142;\ 255;\ 432;\ 694;\ \cdots)$$

é uma progressão aritmética de ordem superior, vamos determinar a sua ordem. Ordenando em uma tabela os elementos da sequência (a_n) e das sequências determinadas pelos seus operadores diferença, (Δa_n), $(\Delta^2 a_n) = (\Delta\Delta a_n)$, $(\Delta^3 a_n) = (\Delta\Delta\Delta a_n)$, $\cdots$, com n variando de 1 a 10, obtemos:

$\boldsymbol{n}$	$(\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}^2\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}^3\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}^4\mathbf{a_n})$
1	*10*	*2*	*1*	*3*	*3*
2	*12*	*3*	*4*	*6*	*3*
3	*15*	*7*	*10*	*9*	*3*
4	*22*	*17*	*19*	*12*	*3*
5	*39*	*36*	*31*	*15*	*3*
6	*75*	*67*	*46*	*18*	*3*
7	*142*	*113*	*64*	*21*	*3*
8	*255*	*177*	*85*	*24*	*3*
9	*432*	*262*	*109*	*27*	*3*
10	*694*	*371*	*136*	*30*	*3*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.1: Elementos e Operadores da sequência (a_n).

Analisando esses valores, percebe-se que a sequência $(\boldsymbol{\Delta^4 a_n})$ forma uma progressão aritmética estacionária e a sequência anterior $(\boldsymbol{\Delta^3 a_n})$ forma uma progressão aritmética não-estacionária; dessa forma, $(\boldsymbol{\Delta^3 a_n})$ determina uma progressão aritmética de ordem 3, definindo assim a sequência (a_n) como uma progressão aritmética de ordem 4.

Exercício Proposto

07) Sabendo que a sequência numérica

$$(a_n) = (0;\ 1;\ 14;\ 51;\ 124;\ 245;\ 426;\ 679;\ 1016;\ 1449;\ 1990;\ \cdots)$$

determina uma progressão aritmética de ordem p, determine o valor de p.

3.7 Termo Geral de uma Progressão Aritmética de Ordem p

Definição: Se uma progressão aritmética (a_n) é de ordem p, então o seu termo geral a_n pode ser escrito como um polinômio de grau p, na variável n, ou seja,

$$a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + c_{p-2} n^{p-2} + \ \cdots\ + c_0,$$

onde $c_p,\ c_{p-1},\ c_{p-2},\ \cdots\ c_0$ são constantes reais e $c_p \neq 0$.

Assim, descrevendo os termos gerais de algumas progressões aritméticas de ordem p como polinômios na variável n, cujos graus são iguais às suas respectivas ordens, teremos:

- Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem 1, então seu termo geral, na variável n, será dado por $a_n = c_1 n + c_0$;

- Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem 2, então seu termo geral, na variável n, será dado por $a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$;

- Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem 3, então seu termo geral, na variável n, será dado por $a_n = c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$;

- Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem 4, então seu termo geral, na variável n, será dado por $a_n = c_4n^4 + c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0$;

- ...

- Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem k, então seu termo geral, na variável n, será dado por $a_n = c_kn^k + c_{k-1}n^{k-1} + \ \cdots \ + c_1n + c_0$,

onde c_i, com $i = 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ k$, são constantes reais.

Exemplo 3.7.1 No exemplo 3.6.1, a sequência

$$(a_n) = (10;\ 12,\ 15;\ 22;\ 39;\ 75;\ 142,\ 255;\ 432;\ 694;\ \cdots)$$

foi descrita como uma progressão aritmética de ordem 4. Dessa forma, seu termo geral a_n será um polinômio de grau 4, na variável n, representado por

$$a_n = c_4n^4 + c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0,$$

onde $c_4,\ c_3,\ c_2,\ c_1$ e c_0 são constantes reais e $c_4 \neq 0$. Pela sequência dada, sabemos que $a_1 = 10, a_2 = 12, a_3 = 15, a_4 = 22$ e $a_5 = 39$. Substituindo n por 1, 2, 3, 4 e 5, na expressão do termo geral a_n da sequência, obtemos o seguinte sistema linear (S) com 5 equações e 5 incógnitas:

$$S : \begin{cases} c_4 1^4 + c_3 1^3 + c_2 1^2 + c_1 1^1 + c_0 & = a_1 \\ c_4 2^4 + c_3 2^3 + c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0 & = a_2 \\ c_4 3^4 + c_3 3^3 + c_2 3^2 + c_1 3^1 + c_0 & = a_3 \\ c_4 4^4 + c_3 4^3 + c_2 4^2 + c_1 4^1 + c_0 & = a_4 \\ c_4 5^4 + c_3 5^3 + c_2 5^2 + c_1 5^1 + c_0 & = a_5. \end{cases}$$

Desenvolvendo as potências e substituindo os valores de $x_1,\ \cdots\ , x_n$ nesse sistema, reescrevemos o sistema S:

$$S : \begin{cases} c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0 & = 10 \\ 16c_4 + 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 & = 12 \\ 81c_4 + 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 & = 15 \\ 256c_4 + 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 & = 22 \\ 625c_4 + 125c_3 + 25c_2 + 5c_1 + c_0 & = 39. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema por escalonamento, obtemos:

$$c_4 = \frac{1}{8},\ c_3 = -\frac{3}{4},\ c_2 = \frac{15}{8},\ c_1 = -\frac{1}{4} \text{ e } c_0 = 9,$$

definindo a expressão do termo geral dessa sequência como:

$$a_n = \frac{1}{8}n^4 - \frac{3}{4}n^3 + \frac{15}{8}n^2 - \frac{1}{4}n + 9.$$

De posse da expressão do termo geral a_n dessa sequência, podemos determinar, por exemplo, o vigésimo termo dessa sequência, o qual que será dado por:

$$a_{20} = \frac{1}{8}20^4 - \frac{3}{4}20^3 + \frac{15}{8}20^2 - \frac{1}{4}20n + 9 = 20000 - 6000 + 750 - 5 + 9 = 14754.$$

Exercícios Propostos

08) Determinar o termo geral x_n da sequência numérica $(x_n) = (1;\ 3;\ 11;\ 31;\ 69;\ \cdots)$.

09) Determine o 40º termo da sequência numérica $(a_n) = (2;\ 5;\ 11;\ 20;\ 32;\ \cdots)$.

3.8 Aplicações

Como exemplos de aplicações de recorrências lineares e de progressões aritméticas de ordem superior, serão apresentadas e solucionadas duas questões, sendo a primeira aplicada em um concurso vestibular aplicado em uma Instituição de Ensino Superior e a segunda aplicada em um Exame Nacional de Qualificação (ENQ) de um curso de pós-graduação, o PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

As duas questões apresentarão duas possíveis soluções, sendo que a primeira solução utiliza uma lei de recorrência e a segunda resolução utiliza os conceitos apresentados para as progressões aritméticas de ordem superior.

Aplicação 1

(Instituto Presbiteriano Mackenzie - São Paulo/SP) Observe a disposição, a seguir, da sequência dos números naturais impares.

$1^{\underline{a}}$ *linha* $\longrightarrow 1$

$2^{\underline{a}}$ *linha* $\longrightarrow 3,\ 5$

$3^{\underline{a}}$ *linha* $\longrightarrow 7,\ 9,\ 11$

$4^{\underline{a}}$ *linha* $\longrightarrow 13,\ 15,\ 17,\ 19$

$5^{\underline{a}}$ *linha* $\longrightarrow 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29$

O quarto termo da $20^{\underline{a}}$ linha é:

(a) 395.

(b) 371.

(c) 387.

(d) 401.

(e) 399.

Primeira Sugestão de Solução da Aplicação 1

Solução: Analisando cada uma das linhas dadas observa-se que, em cada linha, temos uma progressão aritmética de razão 2, já que a diferença entre cada elemento e o anterior é igual a essa constante, com exceção da primeira linha. Dessa forma, devemos encontrar o primeiro termo da vigésima linha e, em seguida, adicionar a razão igual a 2 sucessivamente a esse primeiro termo, a fim de obter o quarto termo dessa mesma linha.

Se tomarmos somente os primeiros termos de cada linha, obtemos a sequência $(x_n) = (1;\ 3;\ 7;\ 13;\ 21;\ \cdots\ ;\ x_n;\ \cdots)$, que não apresenta o comportamento de uma progressão aritmética ou de uma progressão geométrica, já que as diferenças ou as razões, respectivamente, entre cada elemento e o elemento anterior não resultam em uma mesma constante real.

Dessa forma, devemos encontrar o termo geral dessa sequência procurando estabelecer uma relação que defina os elementos da sequência dada. Utilizando uma lei de recorrência, considerando que o primeiro termo x_0 seja igual a 1, podemos reescrever os elementos dessa sequência da seguinte forma:

- $x_0 = 1$;
- $x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1 + 2 \Rightarrow x_1 = x_0 + 2 \Rightarrow x_1 = x_0 + 2.1 \Rightarrow x_1 = x_0 + (1+1).1$;
- $x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = 1 + 6 \Rightarrow x_2 = x_0 + 6 \Rightarrow x_2 = x_0 + 3.2 \Rightarrow x_2 = x_0 + (2+1).2$;
- $x_3 = 13 \Rightarrow x_3 = 1 + 12 \Rightarrow x_3 = x_0 + 12 \Rightarrow x_3 = x_0 + 4.3 \Rightarrow x_3 = x_0 + (3+1).3$;
- $x_4 = 21 \Rightarrow x_4 = 1 + 20 \Rightarrow x_4 = x_0 + 20 \Rightarrow x_4 = x_0 + 5.4 \Rightarrow x_4 = x_0 + (4+1).4$;

e assim, sucessivamente.

Estas igualdades sugerem que

$$x_n = x_0 + (n+1).n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, assumindo que a lei de recorrência

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_0 + (n+1).n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

define cada termo da sequência $(x_n) = (1;\ 3;\ 7;\ 13;\ 21;\ \cdots\ x_n;\ \cdots)$, então vigésimo termo dessa sequência, identificado como x_{19}, será dado por:

$$x_{19} = x_0 + (19+1).19 = 1 + 20.19 = 381.$$

Portanto, o primeiro termo da 20ª linha será igual a 381.

Agora, para determinar o quarto termo da vigésima linha, sabemos que os números em cada linha formam uma progressão aritmética. Dessa forma:

- segundo termo da 20ª linha = 381 + 2 = 383;
- terceiro termo da 20ª linha = 383 + 2 = 385;
- quarto termo da 20ª linha = 385 + 2 = 387.

Portanto, a resposta correta é a alternativa **(c)**.

□

Segunda Sugestão de Solução da Aplicação 1

Solução: Inicialmente, analisando cada uma das linhas dadas, observa-se que em cada linha temos uma progressão aritmética de razão 2. Dessa forma, devemos encontrar o primeiro termo da vigésima linha e, em seguida, adicionar a razão igual a 2 sucessivamente a esse primeiro termo a fim de obter o quarto termo dessa mesma linha.

Se tomarmos somente os primeiros termos de cada linha, obtemos a sequência $(x_n) = (1;\ 3;\ 7;\ 13;\ 21;\ \cdots\ ;\ x_n;\ \cdots)$, que não apresenta o comportamento de uma progressão aritmética ou de uma progressão geométrica, já que as diferenças ou as razões, respectivamente, entre cada elemento e o elemento anterior não resultam em uma mesma constante real.

Assim, vamos verificar se a sequência dada tem o comportamento de uma progressão aritmética de ordem superior. Encontrando-se os operadores diferença

$$(\Delta x_n) = (x_{n+1} - x_n)\,,$$

e

$$\left(\Delta^2 x_n\right) = (\Delta x_{n+1} - \Delta x_n)\,,$$

para esses elementos x_n, com n variando de 0 a 4, obtemos:

n	$(\mathbf{x_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}^\mathbf{2}\mathbf{x_n})$
0	1	2	2
1	3	4	2
2	7	6	2
3	13	8	2
4	21	10	2
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 3.2: Elementos e Operadores da sequência (x_n).

Analisando esses elementos e valores, percebe-se que as diferenças $(\mathbf{\Delta^2 x_n})$ formam uma progressão aritmética estacionária e as diferenças $(\mathbf{\Delta x_n})$ formam uma progressão aritmética não-estacionária, ou seja, a sequência $(\mathbf{\Delta x_n})$ forma uma progressão aritmética de ordem 1, definindo assim a sequência $(\mathbf{x_n})$ como uma progressão aritmética de ordem 2.

Dessa forma, como toda progressão aritmética de ordem 2 tem seu termo geral definido por um polinômio também de grau 2, na variável n, então a progressão aritmética em questão tem seu termo geral x_n da forma:

$$x_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0,$$

onde $c_2,\ c_1$ e c_0 são constantes reais e $c_2 \neq 0$.

Para encontrar as constantes reais $c_2,\ c_1$ e c_0, utilizando a fórmula do termo geral, temos que:

- $x_0 = 1 \ \Rightarrow\ c_2.0^2 + c_1.0 + c_0 = 1 \ \Rightarrow\ c_0 = 1;$
- $x_1 = 3 \ \Rightarrow\ c_2.1^2 + c_1.1 + c_0 = 3 \ \Rightarrow\ c_2 + c_1 + 1 = 3 \ \Rightarrow\ c_2 + c_1 = 2;$
- $x_2 = 7 \ \Rightarrow\ c_2.2^2 + c_1.2 + c_0 = 7 \ \Rightarrow\ 4.c_2 + 2.c_1 + 1 = 7 \ \Rightarrow\ 4.c_2 + 2.c_1 = 6 \ \Rightarrow\ 2.c_2 + c_1 = 3;$

Da primeira equação já sabemos que $c_0 = 1$. Resolvendo um sistema linear com as duas últimas equações obtidas:

$$S : \begin{cases} c_2 + c_1 = 2 \\ 2c_2 + c_1 = 3, \end{cases}$$

por escalonamento, teremos:

$$\begin{cases} c_2 + c_1 = 2 \\ 2c_2 + c_1 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} c_2 + c_1 = 2 \\ c_1 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1, \end{cases}$$

encontrando $c_2 = c_1 = 1$. Dessa forma, o termo geral x_n da progressão aritmética de ordem 2, com $n \in \mathbb{N}$, será dado por:

$$x_n = n^2 + n + 1.$$

Portanto, o vigésimo termo da progressão aritmética de ordem 2

$$(x_n) = (1;\ 3;\ 7;\ 13;\ 21;\ \cdots\ ;\ x_n;\ \cdots),$$

identificado como x_{19}, será dado por:

$$x_{19} = 19^2 + 19 + 1 = 361 + 19 + 1 = 381.$$

Agora, para determinar o quarto termo da vigésima linha, sabemos que os números em cada linha formam uma progressão aritmética. Dessa forma:

- segundo termo da $20^{\underline{a}}$ linha = 381 + 2 = 383;
- terceiro termo da $20^{\underline{a}}$ linha = 383 + 2 = 385;
- quarto termo da $20^{\underline{a}}$ linha = 385 + 2 = 387.

Portanto, a resposta correta é a alternativa **(c)**.

$\square$

Aplicação 2

(Exame Nacional de Qualificação - PROFMAT - 2012/2)

Considere a sequência a_n definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1+2 \\ a_3 &= 2+3+4 \\ a_4 &= 4+5+6+7 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e qual é o maior desses inteiros? Calcule a_{10}.

(b) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Primeira Sugestão de Solução da Aplicação 2

(Proposta pela Coordenação Nacional do PROFMAT)

Solução:

(a) Uma maneira de fazer é ir até a décima linha, seguindo a regra sugerida, em que o último termo de uma linha é o primeiro termo da seguinte.

- $a_1 = 1;$
- $a_2 = 1 + 2;$
- $a_3 = 2 + 3 + 4;$
- $a_4 = 4 + 5 + 6 + 7;$
- $a_5 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11;$
- $a_6 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16;$
- $a_7 = 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22;$
- $a_8 = 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29;$
- $a_9 = 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37$
- $a_{10} = 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46.$

Então a_{10} é a soma de uma P.A., com primeiro termo 37, último termo 46, e razão 1. Portanto

$$a_{10} = \frac{(37 + 46)}{2}.10 = 415.$$

(b) Primeiro vejamos qual é a lei que rege o primeiro termo de a_n. Chamemos de b_n esse primeiro termo. Temos

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 4,\ b_5 = 7,$$

e assim sucessivamente. Seque que

$$b_2 - b_1 = 0, \quad b_3 - b_2 = 1, \quad b_4 - b_3 = 2, \quad b_5 - b_4 = 3,$$

isto é,

$$b_n - b_{n-1} = n - 2.$$

Ou seja, $b_n - b_{n-1}$, com $n \geq 2$, é uma P.A. de razão 1 e primeiro termo igual a zero. Então b_n é igual a 1 mais a soma dessa P.A. até o termo $n-2$:

$$b_n = 1 + \frac{(n-1)\,.\,(n-2)}{2}.$$

O último termo de a_n é igual a $b_n + n - 1$. Então, sendo a_n a soma de uma P.A. de n termos com o primeiro termo igual a b_n e o último igual a $b_n + n - 1$, resulta que

$$a_n = n.\frac{b_n + (b_n + n - 1)}{2}.$$

Colocando essa expressão explicitamente em função de n, temos

$$a_n = n.\left[b_n + \frac{n-1}{2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_n = n.\left[1 + \frac{1}{2}.\,(n-1)\,.\,(n-2+1)\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_n = n.\left[1 + \frac{1}{2}.\,(n-1)^2\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_n = n.\left[1 + \frac{1}{2}.\left(n^2 - 2n + 1\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_n = n.\left[1 + \frac{1}{2}.n^2 - n + \frac{1}{2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_n = n.\left[\frac{1}{2}.n^2 - n + \frac{3}{2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_n = \frac{1}{2}n^3 - n^2 + \frac{3}{2}n,$$

que é um polinômio cúbico em n.

□

Segunda Sugestão de Solução da Aplicação 2

Solução: (a) Uma outra sugestão de solução segue os passos da primeira, explicitando os termos até a décima linha.

- $a_1 = 1;$
- $a_2 = 1 + 2;$
- $a_3 = 2 + 3 + 4;$
- $a_4 = 4 + 5 + 6 + 7;$

- $a_5 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$;
- $a_6 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$;
- $a_7 = 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22$;
- $a_8 = 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29$;
- $a_9 = 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37$;
- $a_{10} = 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46$.

Na linha a_{10}, o menor dos inteiros é 37 e o maior dos inteiros é 46. Para encontrar o valor de a_{10}, basta efetuar a soma dos inteiros que aparece nessa linha. Assim

$$a_{10} = 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 = 415.$$

(b) Se efetuarmos todas as somas que determinam os termos $a_1,\ a_2,\ \cdots\ ,\ a_{10}$, formaremos a sequência de números reais

$$(a_n) = (1;\ 3;\ 9;\ 22;\ 45;\ 81;\ 133;\ 204;\ 297;\ 415;\ \cdots\ ),$$

onde cada elemento dessa sequência é a soma dos n inteiros em cada linha a_n. Essa sequência não apresenta o comportamento de uma progressão aritmética e nem de uma progressão geométrica. Assim podemos verificar se essa sequência tem o comportamento de uma progressão aritmética de ordem superior.

Encontrando-se os operadores diferença

$$(\Delta a_n) = (a_{n+1} -\ a_n)\,,$$

$$\left(\Delta^2 a_n\right) = (\Delta a_{n+1} - \Delta a_n)\,,$$

e

$$\left(\Delta^3 a_n\right) = \left(\Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n\right)\,,$$

para esses elementos a_n, com n variando de 1 a 10, obtemos:

$\mathbf{n}$	$(\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}^2\mathbf{a_n})$	$(\boldsymbol{\Delta}^3\mathbf{a_n})$
1	1	2	4	3
2	3	6	7	3
3	9	13	10	3
4	22	23	13	3
5	45	36	16	3
6	81	52	19	3
7	133	71	22	3
8	204	93	25	3
9	297	118	28	3
10	415	146	31	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.3: Elementos e Operadores da sequência (a_n).

Analisando esses elementos e valores da Tabela 3.3, percebe-se que as diferenças $(\boldsymbol{\Delta}^3\mathbf{a_n})$ formam uma progressão aritmética estacionária e as diferenças $(\boldsymbol{\Delta}^2\mathbf{a_n})$ formam uma progressão aritmética não-estacionária, ou seja, a sequência $(\boldsymbol{\Delta}^2\mathbf{a_n})$ forma uma progressão aritmética de ordem 2, definindo assim a sequência $(\mathbf{a_n})$ como uma progressão aritmética de ordem 3. Dessa forma, como toda progressão aritmética de ordem 3 tem seu termo geral definido por um polinômio também de grau 3, na variável n, então a progressão aritmética em questão tem seu termo geral a_n da forma:

$$a_n = c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0,$$

onde $c_3,\ c_2,\ c_1$ e c_0 são constantes reais e $c_3 \neq 0$.

Para encontrarmos as constantes reais $c_3,\ c_2,\ c_1$ e c_0, utilizando a fórmula do termo geral, temos

- $a_1 = 1 \;\Rightarrow\; c_3.1^3 + c_2.1^2 + c_1.1 + c_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 1;$

- $a_2 = 3 \;\Rightarrow\; c_3.2^3 + c_2.2^2 + c_1.2 + c_0 = 3 \;\Rightarrow\; 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 3;$

- $a_3 = 9 \;\Rightarrow\; c_3.3^3 + c_2.3^2 + c_1.3 + c_0 = 9 \;\Rightarrow\; 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 9;$

- $a_4 = 22 \;\Rightarrow\; c_3.4^3 + c_2.4^2 + c_1.4 + c_0 = 22 \;\Rightarrow\; 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 = 22;$

Resolvendo um sistema linear com essas quatro equações obtidas, nas quatro incógnitas $c_3,\ c_2,\ c_1$ e c_0,

$$S : \begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 + c_0 &= 1 \\ 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 &= 3 \\ 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 &= 9 \\ 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 &= 22 \end{cases}$$

por escalonamento, teremos:

$$\begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 + c_0 &= 1 \\ -4c_2 - 6c_1 - 7c_0 &= -5 \\ -18c_2 - 24c_1 - 26c_0 &= -18 \\ -48c_2 - 60c_1 - 63c_0 &= -42 \end{cases} \sim \begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 + c_0 &= 1 \\ -4c_2 - 6c_1 - 7c_0 &= -5 \\ 12c_1 + 22c_0 &= 18 \\ 48c_1 + 84c_0 &= 72 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 + c_0 &= 1 \\ -4c_2 - 6c_1 - 7c_0 &= -5 \\ 12c_1 + 22c_0 &= 18 \\ -4c_0 &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 &= 1 \\ -4c_2 - 6c_1 &= -5 \\ 12c_1 &= 18 \\ c_0 &= 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} c_3 + c_2 &= -\frac{1}{2} \\ -4c_2 &= 4 \\ c_1 &= \frac{3}{2} \\ c_0 &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} c_3 + c_2 &= -\frac{1}{2} \\ c_2 &= -1 \\ c_1 &= \frac{3}{2} \\ c_0 &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} c_3 &= \frac{1}{2} \\ c_2 &= -1 \\ c_1 &= \frac{3}{2} \\ c_0 &= 0 \end{cases}$$

Dessa forma, o termo geral a_n da progressão aritmética de ordem 3, com $n \in \mathbb{N}^*$, será dado por:

$$a_n = \frac{1}{2}n^3 - n^2 + \frac{3}{2}n.$$

$\square$

Observação 3.8.1 Uma observação importante a respeito das duas aplicações aqui apresentadas é a de que, na primeira aplicação, o primeiro termo da sequência procurada tem índice 0, indicando que o termo geral dessa sequência tem solução no conjunto dos números naturais, enquanto que na segunda aplicação o primeiro termo da sequência procurada tem índice 1, indicando que o termo geral dessa sequência tem solução no conjunto dos números naturais, excluindo o zero.

Tal situação ocorre para uma adequação ao que está sendo solicitado na aplicação, cuja sequência procurada poderia também ter seu primeiro termo com índice 0. Nesse caso, a expressão que define o termo geral da progressão (a_n) também seria um polinômio, mas com coeficientes diferentes daqueles encontrados. Todavia, os termos de (a_n) seriam os mesmos, nas duas situações.

Exercícios Propostos

10) (Universidade Federal de Lavras - UFLA) Os números triangulares são definidos como o número de pontos na sequência de figuras:

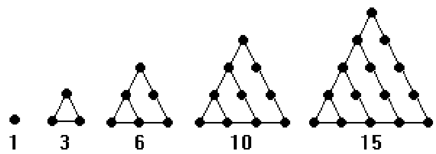

Figura 3.1: Números Triangulares

Uma fórmula geral para estes números é:

(a) $\left[\dfrac{n.(n-1)}{3}\right], \quad n \geq 3.$

(b) $\left[\dfrac{n.(n+1)}{2}\right], \quad n \geq 1.$

(c) $2n+4, \quad n \geq 1.$

(d) $\dfrac{n}{3}+2n+1, \quad n \geq 0.$

(e) $(n+1).(n-1), \quad n \geq 1.$

11) (Universidade Estadual do Norte Fluminenese - UENF) Observe a sequência numérica a seguir: $(0;\ 3;\ 8;\ 15;\ 24;\ \cdots)$. Determine em relação a essa sequência:

(a) o seu $6^{\underline{o}}$ termo;

(b) a expressão do termo de ordem **n**.

12) (Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS) Considere a disposição de números abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & 3 & & & & & \\
 & & & & 4 & & 5 & & 6 & & & & \\
 & & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & & \\
 & & 11 & & 12 & & 13 & & 14 & & 15 & & \\
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array}$$

O primeiro elemento da quadragésima linha é:

(a) 777.

(b) 778.

(c) 779.

(d) 780.

(e) 781.

13) (Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO) Passando em uma sala de aula, um aluno verificou que, no quadro-negro, o professor havia escrito os números naturais ímpares da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 3 & 5 & & & \\ 7 & 9 & 11 & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \end{array}$$

O aluno achou interessante e continuou a escrever, até a décima linha. Somando os números dessa linha, ele encontrou

(a) 800.

(b) 900.

(c) 1000.

(d) 1100.

(e) 1200.

14) (Universidade Estadual Paulista - Unesp) Para cada n natural, seja o número

$$K_n = \underbrace{\sqrt{3.\sqrt{3.\sqrt{3.\ (\cdots).\sqrt{3}}}}}_{n\ vezes} - \underbrace{\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.\ (\cdots).\sqrt{2}}}}}_{n\ vezes}.$$

Se $n \to +\infty$, para que valor se aproxima K_n?

3.9 Gabarito dos Exercícios Propostos

3.1 Lei de Recorrência

01) -6 .

02) **(a)**

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_{n+1} = x_n - 3, \quad \forall\ n \geq 2. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_{n+1} = x_n.(-1), \quad \forall\ n \geq 2. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_{n+1} = 2.x_n, \quad \forall\ n \geq 2. \end{cases}$$

3.2 Progressões Aritméticas

03) $a_{18} = 124$.

04) 199.

3.3 Operador Diferença

05) **(a)**
- $(\Delta a_n) = (3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ \cdots);$
- $(\Delta^2 a_n) = (2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ \cdots);$
- $(\Delta^3 a_n) = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ \cdots).$

(b)
- $(\Delta a_n) = (2;\ 3;\ 7;\ 17;\ 36;\ 67;\ \cdots);$
- $(\Delta^2 a_n) = (1;\ 4;\ 10;\ 19;\ 31;\ \cdots);$
- $(\Delta^3 a_n) = (3;\ 6;\ 9;\ 12;\ \cdots).$

3.5 Progressões Aritméticas de Segunda Ordem

06) alternativa d.

3.6 Progressões Aritméticas de Ordem p

07) $p = 3$.

3.7 Termo Geral de uma Progressão Aritmética de Ordem p

08) $x_n = n^3 - 3n^2 + 4n - 1,\ n\ \geq\ 1.$

09) $a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2,\ n\ \geq\ 1$ e $a_{40} = 2342$.

3.8 Aplicações

10) alternativa b.

11) **(a)** 35;

(b)

$$x_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{se } n \geq 0 \\ n^2 + 2n & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

12) alternativa e.

13) alternativa c.

14) 1.

Considerações Finais e Conclusão

Ao se iniciar um trabalho cuja abordagem principal é o estudo das Sequências Numéricas, somos inseridos em um ramo da Matemática repleto de conceitos e de aplicações, os quais são relegados a segundo plano ou tratados superficialmente durante a formação acadêmica de um discente na sua graduação na Educação Básica, mais especificamente no 3º ciclo, que corresponde ao Ensino Médio.

Definir os termos de uma sequência numérica utilizando uma lei de recorrência ou aplicar os conceitos de progressões aritméticas de ordem superior, onde uma lei de recorrência é necessária, são procedimentos que auxiliam e facilitam a resolução de vários problemas propostos no decorrer do Ensino Médio e, principalmente, em questões de concursos vestibulares aplicadas em várias instituições de ensino superior no Brasil, sejam elas do setor público ou privado.

A sequência didática apresentada neste trabalho não foi aplicada na prática. Logo, não é um produto final e estará sujeita a modificações, conforme as exigências e adequações do ambiente escolar onde for aplicada. No entanto, os resultados dessa sequência didática servirão de apoio para novos estudos, principalmente relacionados as progressões geométricas de ordem superior, conteúdo específico que não foi abordado neste trabalho.

Ao finalizar este estudo não podemos afirmar que, ao aplicar os conceitos e procedimentos relacionados as progressões aritméticas de ordem superior, estejamos apresentando uma maneira mais fácil de se chegar a um resultado esperado, abordando sequências numéricas. No entanto, estes conceitos e procedimentos são uma boa alternativa principalmente para estudantes que sintam dificuldades em definir uma sequência numérica através de uma lei de recorrência, enriquecendo ainda mais tal conteúdo em sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G. S. S., *Análise Matemática para Licenciatura – 3ª edição rev. e ampl. –*. São Paulo. Blucher. 2008.

[2] Ávila, G. S. S., *Cálculo das Funções de Uma Variável - Volume 2 - 7ª edição*. Rio de Janeiro. LTC. 2012.

[3] Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. Rio de Janeiro. SBM. 2006.

[4] Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. Rio de Janeiro. SBM. 2006.

[5] Dolce, O., Guelli, C. A., Iezzi, G., *Álgebra IV*. São Paulo. Moderna. 1978.

[6] Domenico, L. C. de, *Matemática 3 em 1 - Curso Completo do 2º Grau*. São Paulo. Editora IBEP.

[7] Lima, Elon Lajes, *Curso de Análise - Volume 1*. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1992.

[8] Filho, A. B., Gentil, N, Greco, A. C., Greco, S. E., Santos, C. A. M., *Matemática para o 2º Grau (Reformulado) - Volume 1*. São Paulo. Editora Ática. 1996.

[9] Franzin, N. A., Miranda, I. T. P., Paiva, M. B. F., Raymundo, P. J., *Matemática - O Saber Quantitativo*. Maringá. CLICHETEC. 2007.

[10] Hazzan, S., Iezzi, G., *Fundamentos da Matemática Elementar - Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas - Volume 4*. São Paulo. Atual. 1977.

[11] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2 - 3ª edição*. Trad. sob a direção de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo. HARBRA. 1994.

[12] Morgado, A. C., Wagner, E., Zani, S. C.., *Progressões e Matemática Financeira (Coleção do Professor de Matemática)*. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1993.

[13] Muraro, A. M., *Minimanual de Pesquisa Matemática*. Uberlândia. Claranto. 2004.

[14] Swokovski, E., *Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2*. Trad. sob a direção de Alfredo Alves de Faria. São Paulo. Makron Books. 1994.