UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Cleber Alves Côrtes

Formalização dos Conjuntos Numéricos: contribuição para o ensino de frações e números decimais

São José do Rio Preto
2015

Cleber Alves Côrtes

Formalização dos Conjuntos Numéricos: contribuição para o ensino de frações e números decimais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Parham Salehyan.

São José do Rio Preto
2015

Côrtes, Cleber Alves.
Formalização dos conjuntos numéricos : contribuição para o ensino de frações e números decimais / Cleber Alves Côrtes. -- São José do Rio Preto, 2015
67 f. : il.

Orientador: Parham Salehyan
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Aritmética - Estudo e ensino. 3. Teoria dos conjuntos. 4. Frações - Estudo e ensino. 5. Matemática - Metodologia. I. Salehyan, Parham. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 511(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Cleber Alves Côrtes

Formalização dos Conjuntos Numéricos: contribuição para o ensino de frações e números decimais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Parham Salehyan
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Miguel V. S. Frasson
USP – São Carlos

Prof. Dr. Jefferson L. R. Bastos
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
25 de fevereiro de 2015

“Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito.”

François Fénelon.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é buscar uma forma prazerosa de se trabalhar a matemática em sala de aula, principalmente as frações e números decimais, sem deixar de lado o rigor que a matemática exige. Para isso estudaremos inicialmente a formação dos conjuntos numéricos de maneira formal e demonstrando os principais fatos inerentes ao assunto. Em seguida buscaremos maneiras de trabalhar tais conteúdos de maneira prática sem abrir mão do rigor e respeitando as limitações do nível de ensino em que os alunos se encontram. Como as frações são um dos tópicos que mais assustam os alunos do ensino fundamental e normalmente é vista em determinada unidade do livro didático, assim como os demais assuntos, o que leva os alunos a pensarem que os conteúdos são desconectados, vamos sugerir uma maneira alternativa de trabalhar. Além de atividades concretas e divertidas, vamos organizar um plano de ensino que traga o estudo das frações diluído durante todo o ano letivo, mostrando assim que esses números estão presentes sempre na matemática e na vida cotidiana.

Palavras-chave: Formalização dos Conjuntos Numéricos. Frações e números decimais. Formação e demonstrações.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to pursue a pleasant way of working math in the classroom, mainly fractions and decimals, without overlooking the accuracy that mathematics requires. For this, we will first study the formation of the set of numbers, in a formal way, and we will demonstrate the key facts relating to the topic. Then, we will search for some ways of working such contents in a useful way without losing accuracy and respecting the boundaries of the educational attainment in which students are. As fractions are one of the topics that most has been frightening elementary students, and are frequently seen in a specific unit of the textbook, as well as other matters, which can lead students to think that the contents are detached, we will suggest an unconventional way to work. In addition to concrete and fun activities, we will organize a teaching plan that brings the study of fractions diluted throughout the school year, therefore showing that these numbers are always present in mathematics and in everyday life.

Keywords: Registration of Set of Numbers. Fractions and decimals. Formation and demonstrations.

Sumário

1 Introdução

Você em algum momento já se perguntou como se deu a criação dos números? Os números estão tão presente no nosso dia-a-dia que às vezes parece que eles sempre existiram. Eles são tão comuns, presentes e necessários que não imaginamos nossa vida sem eles. Poderia haver alguma forma de vida inteligente sem a presença do ar, da água, da luz ou dos números?

Apesar dos números parecerem ser tão comum no dia-a-dia, os alunos encontram dificuldades de aprendizagem de conceitos que os envolvem, em especial as frações. Os professores por vezes buscam maneiras alternativas para que os educandos assimilem tais conhecimentos. E foi essa busca que motivou a realização deste trabalho.

Nele investigaremos a criação dos números conjuntos numéricos estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Todos os alunos, em algum momento de sua vida escolar, ouviu a história de que os primeiros números nasceram da necessidade do homem de contar. Para isso ele registrava com pedrinhas, conchas ou outros objetos ao seu alcance. Com o tempo ele passou a registrar com sulcos em madeira, ossos ou até mesmos em pedras. Claro que essa história serve para exemplificar e dar uma noção histórica aos nossos alunos, mas nosso propósito aqui é um pouco mais audacioso. Vamos estudar como podemos definir de maneira formal os conjuntos numéricos, suas operações e sua relação de ordem.

Após dominarmos esses conhecimentos, vamos buscar alternativas para ensinar nossos alunos. Para isso vamos discutir alguns pontos sobre o ensino dos números naturais, inteiros e racionais. Criaremos um plano de ensino que tornem esses tópicos mais próximos e presentes no cotidiano dos alunos. E por último conheceremos alguns materiais, entre eles, vídeos, jogos digitais, enigmas e desafios, livros paradidáticos e atividades que podem tornar a sala de aula mais atraente, divertida e produtiva. Enfim que produza conhecimentos duradouros nas mentes dos alunos.

Mas antes de começarmos nossos estudos, vamos citar uma curiosidade. Você já imaginou porque cada conjunto numérico recebeu determinada letra para representa-lo? A maioria deles o motivo é obvio, porém dois deles merecem explicação. Vejamos:

- $\mathbb{N}$ de Natural
- $\mathbb{Z}$ de Zahl (que significa NÚMERO em Alemão)
- $\mathbb{Q}$ de Quociente (que é o resultado de uma divisão) ou RAZÃO, por isso, chamamos de Racionais.
- $\mathbb{I}$ de Irracionais
- $\mathbb{R}$ de Reais
- $\mathbb{C}$ de Complexos

Agora vamos dar inicio aos nossos trabalhos. Boa Leitura.

2 Números Naturais

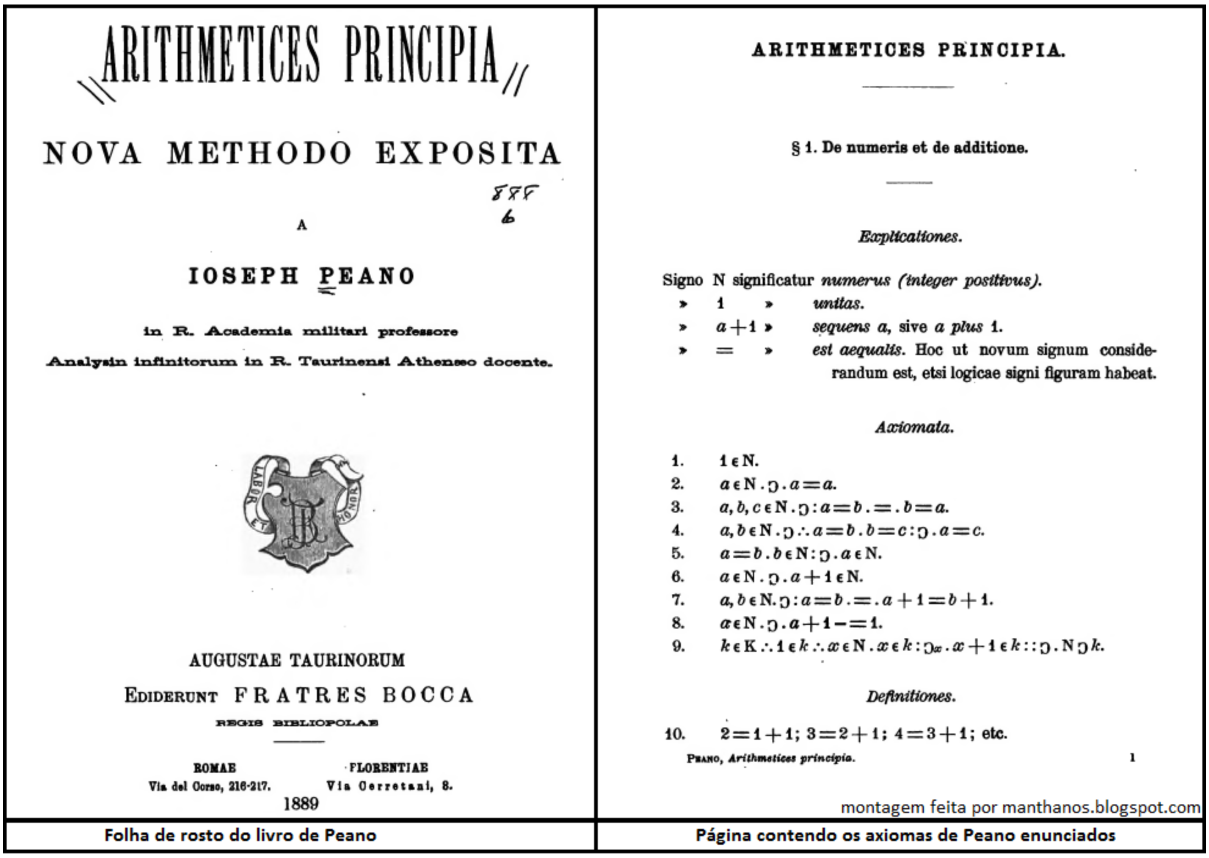
Podemos observar que o conceito de número nos é apresentado pronto e o aceitamos sem questionar. Assim como as palavras que não sabemos ao certo ,suas origens, mas aprendemos seus significados e utilizamos adequadamente mediante a experiência, a observação e a repetição.

Neste capítulo vamos formalizar o Conjunto dos Números Naturais. Para isso vamos conceituar as ideias de número, sucessor, infinito, adição e multiplicação. Esses conceitos temos em nossa mente desde o início de nossa vida escolar como intuitivos e que normalmente não questionamos sua justificativa. Aqui vamos tornar esses conceitos de forma mais rigorosa.

2.1 Construção dos Números Naturais

Vamos conceitualizar a Construção do Conjunto dos Números Naturais de forma axiomática, ou seja, assumindo alguns fatos matemáticos como axiomas. Este processo se dá dessa forma porque é necessário um mínimo de informações para que possamos construir uma teoria. Para esta formalização utilizaremos a ideia celebre matemático Giuseppe Peano.

Giuseppe Peano (1858-1932) em seu livro *"Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"*, se propõe a formalizar o conjunto dos números naturais. Para isso ele lança mão dos conhecidos **axiomas de Peano**.



ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore

Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenaeo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM

EDIDERUNT FRATRES BOCCA

REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE Via del Corso, 216-217. FLORENTIAE Via Cerretani, 8.

1889

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*

» 1 » *unitas.*

» $a+1$ » *sequens a*, sive *a plus* 1.

» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \varepsilon N$.
2. $a \varepsilon N . \supset . a = a$.
3. $a, b, c \varepsilon N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b \varepsilon N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \varepsilon N : \supset . a \varepsilon N$.
6. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 \varepsilon N$.
7. $a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 -= 1$.
9. $k \varepsilon K \therefore 1 \varepsilon k \therefore x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x . x + 1 \varepsilon k :: \supset . N \supset k$.

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$; etc.

PEANO, *Arithmetices principia.* 1

montagem feita por manthanos.blogspot.com

Folha de rosto do livro de Peano	Página contendo os axiomas de Peano enunciados

Folha de rosto e página do livro de Peano contendo seus axiomas extraído de http://manthanos.blogspot.com.br

Axiomata.

1. $1 \in \mathrm{N}.$
2. $a \in \mathrm{N} . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in \mathrm{N} . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in \mathrm{N} : \supset . a \in \mathrm{N}.$
6. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 \in \mathrm{N}.$
7. $a, b \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 -= 1.$
9. $k \in \mathrm{K} \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathrm{N} . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . \mathrm{N} \supset k.$

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

Como podemos notar pela imagem, Peano enunciou nove axiomas (ou postulados) e uma definição. Devido a simbologia ser diferente da utilizada atualmente a interpretação pode ser imprecisa, mas tentaremos explicar um pouco melhor as informações acima.

1. O conjunto a ser construído não é vazio, ou seja, pelo menos possui um elemento. Denotaremos este elemento por 1.
2. Se ***a*** é um número natural, então ***a*** é igual a ***a.*** Em termos de notação escreveremos a = a.
3. Se ***a*** e ***b*** são naturais e ***a***=***b,*** então ***b***=***a***. (Note que há um erro gráfico aqui, pois está passando o número ***c*** no axioma 3 e faltando no Axioma 4).
4. Se ***a***, ***b*** e ***c*** são naturais com ***a***=***b*** e ***b***=***c,*** então ***a***=***c***.
5. Se ***a***=***b*** e ***b*** é um natural então ***a*** é natural.
6. Se um número ***a*** é natural, então ***a+1*** é natural. Ou seja, se um número é natural então seu sucessor também é. O conceito *sucessor* será definido posteriormente.
7. Se ***a*** e ***b*** são naturais e ***a***=***b,*** então ***a+1*** é igual a ***b+1***. Isto é se dois naturais são iguais então seus sucessores também são.
8. Se ***a*** é um número natural então ***a+1*** é diferente de ***1***. Isso significa que ***1*** não é sucessor de nenhum número.
9. Se ***K*** $\subset$ N tal que 1 $\in$ K e para todo k $\in$ K, k=1$\in$K, então K=N. Observamos que esta propriedade é basicamente o principio da indução finita.
10. Aqui Peano denota o sucesso de 1 por 2, o sucessor de 2 por 3, o sucessor de 3 por 4, etc.

Existem outras maneiras para escrever esses axiomas. Por exemplo:

(A1) O zero é um número natural.
(A2) Todo número natural tem um único sucessor que também é natural.
(A3) O zero é o único natural que não possui sucessor.
(A4) Se dois números naturais tem o mesmo sucessor então esses números são iguais.
(A5) Se o número zero pertence a um subconjunto dos números naturais que possui o sucessor de todos os seus elementos, então esse subconjunto é o próprio conjunto dos números naturais.

Algumas observações sobre os axiomas.

a) Note que os axiomas foram resumidos a apenas cinco, sendo atualmente enunciados apenas o primeiro, o sexto, o sétimo, o oitavo e o nono dos originais. Alguns autores enumeram apenas quatro, fundindo em apenas um os axiomas *A1* e *A3*.
b) O axioma A5 (equivalente ao axioma 9 no original de Peano) é conhecido como o axioma da indução, pois ele traz a idéia do Princípio da Indução Finita, também conhecido como Princípio da Indução Matemática, Princípio da Indução Completa ou apenas Princípio da Indução.
c) Não há consenso sobre o fato de considera ou não o zero como número natural. Geralmente toma-se ele natural ou não de acordo com a necessidade. Neste trabalho tomarei o zero como natural por um fato que explicarei mais adiante.
d) Observe que ao enunciarmos os axiomas não explicamos o que significa a palavra SUCESSOR. Sabemos intuitivamente mas esse termo não foi devidamente definido. Portanto deveremos fazer isso mais adiante. Você pode observar que Peano também utilizou este método. Ele utiliza a idéia de sucessor em seus nove postulados (que é sinônimo de axioma) e só define isso no seu item 10 que ele denomina DEFINIÇÕES.

O que é número?

Antes de formalizarmos os números naturais, é interessante perguntarmos o que é um número? Pode parecer desnecessário conceituar uma palavra que acreditamos conhecer claramente. Mas se torna necessário pelo fato de poder ser constrangedor para uma pessoa com boa formação matemática se alguém lhe perguntar “ – O que é um número?” e esta não souber responder adequadamente a esta simples pergunta.

Número sempre esteve ligado a quantidades e a contagem. Uma criança, mesmo que ainda bebê, em seus primeiros contatos com os números, os utiliza para contagem. Observe que quando a criança é questionada sobre sua idade ela responde mostrando seus dedinhos, da maneira que seus pais a ensinaram. Mesmo que ela não saiba neste momento ela esta relacionando a quantidade “um” (e neste caso um dedo, pois ela não ainda não tem a noção de tempo “ano”) com o número “1”. Nós sabemos ainda que essa relação é biunívoca.

> **Nota:** Biunívoca significa “um para um”. Neste caso temos o conjunto dos algarismos {1, 2, 3, ...} e o conjunto das quantidades {um, dois, três, ...}. Relação um para um quer dizer que o algarismo 1 relaciona-se apenas com a quantidade “um” e a quantidade “um” se relaciona apenas com o algarismo 1. O mesmo ocorre com os demais elementos dos conjuntos. Como essa relação é duas vezes única, chamamos de relação biunívoca.

Tomemos como conhecidos apenas os símbolos denominados algarismos utilizado para representar quantidades. Isto é, utilizaremos o símbolo “1” para designar a quantidade “um” de uma entidade qualquer (seja concreta como objetos ou abstratas como tempo), o símbolo “2” para designar a quantidade “dois” e assim por diante. Usei aqui a expressão “por diante” ao invés de “sucessivamente” que seria mais elegante porque ainda não temos definido rigorosamente o significado da palavra sucessor. Utilizaremos também o símbolo “0” para designar a ausência de todo e qualquer elemento que seja objeto de contagem.

Definição de Sucessor
Observe que apenas conhecemos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4,... Esses algarismos podem ser utilizados para diversas finalidades como por exemplo elencar elementos em uma lista ou ordenar elementos dentro de um conjunto qualquer, entre outras. Entretanto chamaremos esses algarismos de “números” quando estes forem utilizados para representar as quantidades nenhum, um, dois, três, quatro,...

Ainda não sabemos o que um sucessor, nem conhecemos as operações que podemos efetuar com tais números e também não sabemos sobre a infinidade desses elementos.

Tomemos agora um conjunto numérico não vazio X formado pelos números que já temos como conhecidos.

Definição 2.1 Uma função injetora $s\colon X \to X$, que chamaremos de função *Sucessor*, tal que s relacione cada $x \in X$ a $s(x) \in Im(s)$, que chamaremos de sucessor de x e denotaremos por $s(x) = x + 1$.

Lembramos que uma função $f\colon A \to B$ é dita injetora (ou injetiva) se elementos distintos de A (que é o domínio da função) possuem imagens distintas pela f, isto é, dados $a, b \in A$, com $a \neq b$, então $f(a) \neq f(b)$. Equivalentemente se $f(a) = f(b)$ então $a=b$. Uma função $f\colon A \to B$ é dita sobrejetora (ou sobrejetiva) se o contradomínio é igual a Imagem da função f. Usando símbolos, escrevemos $Im(f) = B$. Uma função é dita bijetora (ou bijetiva) se ela for simultaneamente injetora e sobrejetora. (voltar ultima frase ***)

Na língua corrente temos que sucessor significa próximo, o que vem depois. Em termos quantitativos, queremos que sucessor seja a quantidade imediatamente superior a quantidade dada. Neste sentido a função Sucessor s relaciona cada elemento de X a sua imagem $s(x)$ também pertencente ao conjunto X, onde $s(x)$ representa a quantidade imediatamente e superior a x. Com a função assim definida podemos enunciar algumas propriedades de s em X.

a) Sabemos por definição que o conjunto X é não vazio, logo a imagem de X também é não vazia.
b) Claramente temos que o sucessor de cada número é diferente do próprio número, e como por definição que s é injetora, então todo elemento de X é diferente de $s(x)$.
c) Pelo fato de s ser injetora temos que tomados dois elementos distintos em X suas imagens também serão distintas.
d) Das propriedades destacamos a de que dado um elemento de X, todos os elementos “maiores” que ele também está em X.

Observamos que o termo “maior” deve ser entendido como aquele que representa uma quantidade superior ao seu antecessor. Isso se dá pelo fato de ainda não termos estabelecidos uma **relação de ordem** entre esses elementos. Para simplificar, podemos enunciar tais propriedades da seguinte maneira:

(P1.1) para todo $X \neq \varnothing$, $Im(s) \neq \varnothing$.
(P1.2) para todo $x \in X$, $x \neq s(x)$.
(P1.3) para todo $x, y \in X$, tais que $x \neq y$, $s(x) \neq s(y)$.
(P1.4) se $x \in X$ é o menor elemento de X, então $Im(s) = X \setminus \{x\}$.

Demonstração das propriedades citadas acima.

Demonstração de (P1.1).

Pela hipótese $X \neq \varnothing$. Tomemos $x \in X$ e x' o seu sucessor. Isto é $x' \in Im(s)$. Isto garante que $Im(s) \neq \varnothing$.

Demonstração de (P1.2).

Seja $x = s(x)$. *Pelo fato que* $s(x)$ representa a quantidade imediatamente superior a x, a igualdade $x = s(x)$ é impossível. Portanto $x \neq s(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração de (P1.3).

Lembramos que por definição s é uma função injetiva, ou seja, se $x \neq y$, então $s(x) \neq s(y)$.

Demonstração de (P1.4).

Suponhamos que $x \in Im(s)$. Logo existe $y \in X$ tal que $y = s(x)$. Lembre-se que y de fato representa uma quantidade imediatamente menor que x. Mas isso é um absurdo, pois x é o menor elemento de X.
Portanto $Im(s) = X \setminus \{x\}$.

Observe que estas demonstrações foram feita independentemente da escolha do conjunto X, isso significa que essas propriedades são validas em qualquer conjunto formado pelos números que conhecemos como representantes de quantidades. Podemos notar também que *(P1.2)* é uma maneira formal de escrever *(A2)*, assim como *(P1.3)* a de escrever *(A4)* e *(P1.4)* de escrever *(A5)*.

Agora se colocarmos a condição de **zero pertencer ao conjunto *X***, conseguiremos organizar todos os números que conhecemos em um único conjunto que chamaremos de Conjunto dos Números Naturais e denotaremos por $\mathbb{N}$.

Definição 2.2: O *Conjunto dos Números Naturais*, denotado por $\mathbb{N}$, é o conjunto numérico munido da função sucessor s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(A1.0) $0 \in \mathbb{N}$;
(P'1.1) $Im(s) \neq \varnothing$;
(P'1.2) para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \neq s(x)$;
(P'1.3) para todo $x, y \in \mathbb{N}$, tais que $x \neq y$, $s(x) \neq s(y)$.
(P'1.4) $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Denotaremos a imagem de s, que é formada por todos os números naturais exceto o número zero por $\mathbb{N}^*$, ou seja, $Im(s) = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$.

Considerações sobre a formalização aqui elaborada.

Formalizando $\mathbb{N}$ desta forma podemos considerar um número menor de axiomas. Aqui consideramos como primitiva a ideia de sucessor para tomar uma quantidade imediatamente superior na definição da função *s*, chamada da função Sucessor. Postulamos sobre $\mathbb{N}$ que o número zero é um número natural. Posteriormente todos os demais axiomas foram considerados como propriedades que puderam ser demonstradas.

Notação 2.3
Denotaremos os sucessores de cada natural da seguinte forma:
s(0) = 1 (lê-se um)
s(1) = 2 (lê-se dois)
s(2) = 3 (lê-se três)
e assim sucessivamente, utilizando a consagrada notação indo-arábica.

Desse modo verificamos Conjunto dos Números Naturais contém o conjunto
$S = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), ...\} = \{0, s(0), s(1), s(s(1)), ...\} = \{0, s(0), s(1), s(2), ...\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

2.2 Infinitude de $\mathbb{N}$

A intuição nos leva a crer que o conjunto dos números naturais é *infinito*. O objetivo desta seção é definir os conceitos de finitude e infinitude de conjuntos e mostrar que de fato o conjunto dos números naturais.

Antes de mais nada, chamamos a atenção para a diferença entre "infinito" e "um número muito grande". Compositores, poetas e escritores ao comporem suas obras por vezes fazem uso de metáforas onde empregam expressões como "infinito como o mar", ou "infinito como a areia da praia", entre outras. Frases bonitas de se ler e ouvir mas que servem apenas para comparação, pois não expressam realmente uma verdade.

Imaginemos a situação (tão absurda quanto às expressões acima citadas, mas que serve para exemplificar): O planeta Jupiter, que é o maior do sistema solar, por algum motivo saiu de sua orbita e "estacionou" ao lado do planeta Terra. Agora ele esta sugando toda a água do nosso planeta. Em determinado momento essa água vai acabar é claro! Ora então tanto o mar quanto a água não são infinitos, e até mesmo já é propagado como medida de preservação do meio-ambiente que á agua é um recurso que se não for bem utilizado poderá faltar num futuro próximo. Então se fosse possível contar o número de gotas de água que estão presentes no planeta chegaríamos a "um número muito grande", mas que é finito.

No mundo físico não há nada infinito. No universo há um grande número de galáxias, planetas, estrelas e outros corpos celestes, assim como há grandes distancias entre dois pontos nesta imensidão, números tão grandes que desconhecemos a maioria deles, porém todos eles são finitos. O infinito existe apenas no campo das ideias. Os números, uma reta, um plano e o espaço (cito aqui o espaço tridimensional utilizado na matemática não o espaço sideral que os cientistas da atualidade já afirmam ser finito) são exemplos de objetos matemáticos infinitos.

Um fato curioso sobre a infinidade de números é que apenas uma pequena parte deles possui nome. Você já se perguntou qual é o maior número que você conhece? A partir de determinado ponto não sabemos qual é o nome dos números que vem depois, mas eles existem.

Você já ouviu falar dos números GOOGOL e GOOGOLPLEX. Googol é o nome do número 10^{100}, ou seja, o número que é escrito pelo algarismo "1" seguido de cem algarismos zero. Desde a criação do universo que data de 14 bilhões de anos, ainda não se passaram um googol de segundos. Este número, batizado pelo matemático Edward Kasner em 1938, foi o que inspirou o nome do site de busca GOOGLE (nome deste número em inglês). Já o googolplex é 10^{googol} que é o formado pelo algarismo "1" seguido de um googol de algarismos zero.

Muitas pessoas se perguntam o que vem depois dos bilhões ou trilhões, para saciar essa curiosidade destaco aqui o nome das vinte primeiras ordem numéricas: milhar (ou mil), milhão, bilhão, trilhão, quadrilhão, quintilhão, sextilhão, setilhão, octilhão, nonilhão, decilhão, undecilhão, duodecilhão, tredecilhão, quatordecilhão, quindecilhão, sexcedilhão, setedecilhão, octodecilhão, novedecilhão, vigesilhão...

Para encerrar esta discussão sobre curiosidades cito agora o ZILHÃO. Algumas pessoas ás vezes dizem "gostaria de ter um zilhão de reais". Esse número não existe. O "z" é tomado como um número arbitrário, que pode ser qualquer número, inclusive um “muito grande”, daí o nome arbitrário zilhão.

Retornemos ao assunto principal desta seção e provemos agora que $\mathbb{N}$ é infinito.

Definição 2.4 Um conjunto X é dito *finito* se for vazio ou houver uma bijeção com $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso diremos que o conjunto X possui n elementos ou que n é a cardinalidade de X, denotando por $|X| = n$ ou $\#X = n$. Caso contrário diremos que o conjunto X é *infinito.*

Teorema 2.5 *O conjunto dos números naturais é infinito.*

Demonstração

Dizer que $\mathbb{N}$ é infinito é o mesmo que dizer que $\mathbb{N}$ não é finito. Tomemos A_n um conjunto de números naturais, onde n representa a quantidade de elementos desse conjunto. Para $n = 1$ é claro que A_n é subconjunto de $\mathbb{N}$ e A_n é diferente de $\mathbb{N}$. O mesmo acontece para $n = 2$, ou seja, $A_n \not\subset \mathbb{N}$. Alias isso ocorre para qualquer n natural que tomarmos. Como não há nenhum conjunto finito em bijeção com o Conjunto dos Números Naturais, logo $\mathbb{N}$ é infinito.

Existem várias definições análogas à acima, porém uma dada pelo matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) merece ser mencionado. Cantor define conjunto infinito de maneira até então inédita. Ele afirma que se um subconjunto próprio $Y \subset X$, ou seja, $Y \neq X$, possui uma bijeção com X, $Y \leftrightarrow X$, então X é infinito. É o que ocorre por exemplo no caso dos número pares e os números naturais.

Essa afirmação jogou por terra toda a crença milenar grega que dizia que “*o todo é sempre maior que qualquer uma de suas partes*”. Lembre-se que aqui estamos falando do campo das ideias, pois é claro que no mundo real dos objetos, dos animais ou qualquer outra entidade concreta a afirmação grega é valida. É que na época dos gregos a matemática ainda não tinha atingido um nível de evolução suficiente para estudos do infinito.

Definição 2.6*:* Um conjunto é dito *enumerável* se for finito ou se possuir uma bijeção com $\mathbb{N}$.

2.3 Operações em $\mathbb{N}$

Nesta seção definiremos as operações *adição* e *multiplicação* numa maneira formal, baseada na nossa intuição dos números naturais. Lembre–se que as operações subtração e divisão em geral não são bem definidas nesse conjunto. Por exemplo 3 – 5 ou 7 : 2 não são números naturais.

2.3.1 Adição em $\mathbb{N}$

Definição 2.7 A *adição* ou *soma* de dois números naturais *n* e *m*, que denotaremos por *n+m*, é definida por:

$$\begin{cases} n + 0 = n; \\ n + s(k) = s(n + k); \end{cases}$$

onde $k \in$ N tal que *s(k)* = *m*. Lembre-se que a *Im(s)*= $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, portanto se n $\neq$ 0, existe k tal que *s(k)* = *m*.

Por exemplo:

$$n + s(0) \overset{\substack{2.7 \\ item\ 2}}{=} s(n + 0) \overset{\substack{2.7 \\ item\ 1}}{=} s(n) \qquad ①$$

$$e$$

$$n + s(s(0)) \overset{\substack{2.7 \\ item\ 2}}{=} s(n + s(0)) \overset{\substack{2.7 \\ item\ 2}}{=} s(s(n + 0)) \overset{\substack{2.7 \\ item\ 1}}{=} s(s(n)). \qquad ②$$

Vale observar que a soma de dois números naturais é um número natural, pelo fato que a Im(s) $\subset$ $\mathbb{N}$. Por outro lado pela injetividade da função sucessor, a adição entre números naturais esta bem definida.

Aprendendo a somar
Sabendo que a soma está bem definida, “vamos aprender a somar”.

Pela definição, *n + s(0) = s(n + 0)*. Pela notação 2.3, *s(0) = 0+1 = 1*, *s(n) = n + 1*, então de fato acabamos de demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.8 Para todo número natural *n*, *s(n) = n + 1*.

A seguir mostraremos as propriedades da adição.

Teorema 2.9 Dados os números naturais *n*, *m* e *p*, são válidas as seguintes propriedades:
PA1) Associatividade: $n + (m + p) = (n + m) + p$;
PA2) Elemento Neutro: $n + 0 = 0 + n = n$;
PA3) Comutatividade: $n + m = m + n$;
PA4) Lei do Cancelamento ou do Corte: $n + p = m + p \Rightarrow n = m$.

Demonstração de PA1.
Considere *n* e *m* naturais fixos, faremos a demonstração por indução sobre *p*. Seja

$$A_{nm} = \{p \in \mathbb{N};\ n + (m + p) = (n + m) + p\}.$$

O objetivo é mostrar $A_{nm} = \mathbb{N}$.
Se $p = 0$,

$$n + (m + 0) = n + m,$$

e

$$(n + m) + 0 = n + m.$$

Então $0 \in A_{nm}$. Suponhamos válida a hipótese de indução para *p*, e provemos que vale para $s(p)$.

$$n + (m + s(p)) \overset{\substack{2.7\\ item\ 2}}{=} n + s(m + p) \overset{\substack{2.7\\ item\ 2}}{=} s(n + (m + p)) \overset{HI}{=} s((n + m) + p) \overset{\substack{2.7\\ item\ 2}}{=} (n + m) + s(p).$$

Então pela indução $A_{nm} = \mathbb{N}$.

Demonstração de PA2.
Lembre–se que pela definição da adição $n + 0 = n$. Seja o conjunto $A_n = \{n \in \mathbb{N};\ n + 0 = 0 + n\}$. Claramente $0 \in A_n$, pois $0 + 0 = 0 + 0 = 0$. Suponha válida a hipótese de indução para *n* e provemos que vale também para $s(n)$:

$$0 + s(n) \overset{\substack{2.7\\ item\ 2}}{=} s(0 + n) \overset{HI}{=} s(n + 0) \overset{\substack{2.7\\ item\ 1}}{=} s(n) \quad ③$$

Analogamente

$$s(n) + 0 = s(n) \quad ④$$

Portando pela indução concluímos que $A_n = \mathbb{N}$, ou seja, zero é elemento neutro da adição. De fato pela injetividade da função sucessor zero é o único elemento neutro da adição.

Demonstração de PA3.
Novamente apliquemos o Principio de Indução sobre *m*, fixando *n*. Seja $A_m = \{m \in \mathbb{N};\ n + m = m + n\}$.
Pela propriedade anterior, $0 \in A_m$. Suponhamos válida a hipótese para um *m* arbitrário e demonstremos que vale para o sucessor de *m*. Lembre-se que o sucessor de *m* pode ser escrito como $m + 1$, conforme a proposição 1.8, então

$$n + s(m) \overset{2.8}{=} n + (m + 1) \overset{HI}{=} n + (1 + m) \overset{PA1}{=} (n + 1) + m \overset{HI}{=} (1 + n) + m \overset{PA1}{=}$$

$$\overset{PA1}{=} 1 + (n + m) \overset{HI}{=} 1 + (m + n) \overset{PA1}{=} (1 + m) + n \overset{HI}{=} (m + 1) + n \overset{2.8}{=} s(m) + n.$$

Então pela indução, $A_m = \mathbb{N}$.

Demonstração de PA4.

Utilizaremos a mesma ideia da demonstração de PA1. Pela PA2, $0 \in A_{nm}$, onde

$$A_{nm} = \{p \in \mathbb{N} \,;\, n + p = m + p \Rightarrow n = m\}.$$

Suponhamos válida a hipótese para p e provemos que é válida para $s(p)$.

$$n + s(p) = m + s(p) \overset{2.8}{\Rightarrow} n + (p+1) = m + (p+1) \overset{PA1}{\Rightarrow} (n+p) + 1 = (m+p) + 1 \overset{2.8}{\Rightarrow}$$

$$\overset{2.8}{\Rightarrow} s(n + p) = s(m + p) \underset{\substack{sucessores\ iguais \\ números\ iguais}}{\overset{P'1.3}{\Rightarrow}} n + p = m + p \overset{HI}{\Rightarrow} n = m.$$

Pela indução finita a Lei do Cancelamento da Adição para quaisquer n, m e p naturais.

Unicidade do Elemento Neutro da Adição

Ao demonstrar a propriedade do elemento neutro da adição PA2 provamos que zero é "um" elemento neutro da adição, mas não provamos que ele é único. Sabemos de nossa experiência escolar que este é o único, mas se quisermos definir todos os detalhes rigorosamente, devemos demonstrar isso também.

Suponhamos que exista um $m \in \mathbb{N}$, tal que $n + m = n$, para todo n. Então n + m = n + 0, logo pela lei do cancelamento concluímos m = 0. Isso demonstra que 0 é o único elemento neutro da adição.

Para encerrarmos nossa discussão sobre a adição, cabe-nos demonstrar que é impossível somar dois naturais e obter como resultado o número zero.

Proposição 2.10 Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $n + m = 0$. Então $n = m = 0$.

Demonstração

Suponhamos $m \neq 0$. Então m é sucessor de algum número natural p, ou seja, $m = s(p) = p + 1$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} 0 &= n + m \\ &= n + s(p) \\ &= n + (p + 1) \\ &= (n + p) + 1 \\ &= s(n + p). \end{aligned}$$

Isto é, zero é o sucessor de um número natural. O que é um absurdo! Então $m = 0$, logo $n = 0$.

Expressando apenas através de palavras, o que essa proposição quer dizer é que a *soma de dois números naturais diferentes de zero jamais é igual a zero*.

2.3.2 Multiplicação em $\mathbb{N}$

Assim como fizemos para definir a adição dos números naturais, criaremos agora uma função recursiva que tenha o mesmo comportamento da multiplicação.

Observação sobre notação
A multiplicação dos números naturais n e m pode ser representada de várias maneiras. Dentre elas temos as seguintes que são as mais usadas:

a) $n \cdot m$ (utilizando o ponto para indicar a multiplicação)
b) $n \times m$ (utilizando a letra X para indicar a multiplicação)
c) nm (utilizando a justaposição para indicar a multiplicação)

Apesar da terceira forma ser mais simples, neste capítulo utilizaremos a primeira julgá-la mais clara. Isso porque quando escrevemos nm temos o costume de lêr “ene eme”, e quando escrevemos $n \cdot m$ lemos “ene vezes eme”.

Definição 2.11 A *multiplicação* ou *produto* de dois números naturais n e m, que denotaremos por $n \cdot m$, é definida como:

$$\begin{cases} n \cdot 0 = 0; \\ n \cdot (m+1) = n \cdot m + n. \end{cases}$$

A definição acima nos fornece duas informações:

a) A multiplicação de um número natural arbitrário n por *zero.*
b) E a multiplicação de n com o *sucessor de m.* Repare que este item traz a idéia da distributiva da multiplicação em relação à adição.

Observe que assim como feito na definição de adição, o segundo item desta definição pode ser escrito utilizando a função sucessor:

$$n \cdot s(m) = n \cdot m + n$$

Utilizando essa forma de escrever o item 1 da definição, tomando $m = 0$,

$$n \cdot s(0) \overset{\substack{2.11 \\ item2}}{=} n \cdot 0 + n \overset{\substack{2.11 \\ item1}}{=} n.$$

Por outro lado, $s(0) = 1$, logo:

$$n \cdot 1 = n. \quad ④$$

Isto é um elemento neutro para multiplicação.

A seguir verificaremos que o produto de números naturais é um número natural.

Verifiquemos por indução sobre m. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m = 0$ então $n \cdot 0 = 0$ que é um número natural. Se $m \cdot n \in \mathbb{N}$, então $n \cdot (m + 1) = n \cdot m + n$, que é um número natural pela hipótese da indução e da definição de multiplicação. Logo, o produto de números naturais é um número natural.

Verifiquemos agora as propriedades da multiplicação enunciadas no teorema abaixo.

Proposição 2.12 Para todo n $\in \mathbb{N}$, $0 \cdot n = 0$.

Demonstração

Faremos a prova por indução sobre n. Se $n = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, pela definição 2.11.
Suponha que a hipótese é valida para algum n e provemos que vale para $n + 1$.

$$0 \cdot (n+1) \overset{\substack{2.11 \\ item2}}{=} 0 \cdot n + 0 \overset{HI}{=} 0 + 0 = 0.$$

Portanto pela indução finita $0 \cdot n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.13 *(Propriedades da Multiplicação)* Dados os números naturais n, m e p, são válidas as seguintes propriedades:
PM1) Elemento Neutro da Multiplicação: $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$;
PM2) Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação a Adição:
$n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$
e $(n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$;
PM3) Propriedade Associativa da Multiplicação: $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$;
PM4) Propriedade Comutativa da Multiplicação: $n \cdot m = m \cdot n$;
PM5) Lei do Cancelamento (ou do Corte) da Multiplicação: $n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m$, *se* $p \neq 0$;
PM6) Se $n \cdot m = 0$ *então* $n = 0$ ou $m = 0$.

Demonstração de PM1

A demonstração desta propriedade já foi feita logo acima do teorema.

Demonstração de PM2

Tomemos n e m fixos e apliquemos indução sobre p. Seja $p = 0$, então $n \cdot (m+0) = n \cdot m$ pela PA2; por outro lado

$$n \cdot m + n \cdot 0 \overset{\substack{2.11 \\ item1}}{=} n \cdot m + 0 \overset{PA2}{=} n \cdot m.$$

Portanto a igualdade vale para $p = 0$.

A igualdade $(n + m) \cdot 0 = n \cdot 0 + m \cdot 0$ vale pela definição 2.11.

Suponhamos que a propriedade vale para um p qualquer. Provemos que ela vale para $p+1$. No caso da primeira igualdade:

$$\begin{aligned} n(m + (p+1)) &= n((m+p)+1) && PA1 \\ &= n \cdot (m+p) + n && 2.11\ item2 \\ &= (n \cdot m + n \cdot p) + n && HI \\ &= n \cdot m + (n \cdot p + n) && PA1 \\ &= n \cdot m + n \cdot (p+1) && 2.11\ item2 \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade:

$$\begin{aligned}(n+m)\cdot(p+1) &= (n+m)\cdot p+(n+m) && \textit{2.11 item2}\\ &= (n\cdot p+m\cdot p)+(n+m) && \textit{HI}\\ &= (n\cdot p+n)+(m\cdot p+m) && \textit{PA1}\\ &= n\cdot(p+1)+m\cdot(p+1) && \textit{2.11 item2}\end{aligned}$$

Pela indução finita mostramos as igualdades.

Demonstração de PM3)

Novamente faremos a prova por indução sobre *p*. Façamos *p = 0*, então

$$\mathrm{n}\cdot(\mathrm{m}\cdot 0)\overset{\substack{2.11\\ \text{item1}}}{=}\mathrm{n}\cdot 0\overset{\substack{2.11\\ \text{item1}}}{=}0$$

e

$$(\mathrm{n}\cdot\mathrm{m})\cdot 0\overset{\substack{2.11\\ \text{item1}}}{=}0,$$

logo a propriedade vale para *p = 0*. Suponhamos a propriedade válida para um *p* qualquer e provemos sua validade para *p + 1*.

$$n\cdot\big(m\cdot(p+1)\big)\overset{\substack{2.11\\ item2}}{=}n\cdot(m\cdot p+m)\overset{\substack{2.11\\ item2}}{=}n\cdot(m\cdot p)+(n\cdot m)\overset{HI}{=}(n\cdot m)\cdot p+(n\cdot m)$$

e

$$(n\cdot m)\cdot(p+1)\overset{\substack{2.11\\ item2}}{=}(n\cdot m)\cdot p+(n\cdot m).$$

Então pela indução finita vale a associatividade da multiplicação.

Demonstração de PM4)

Tomemos *n* fixo e apliquemos indução sobre *m*. Tome *m = 0*. Pela definição 2.11 e proposição 2.12,

$$n\cdot 0=0\cdot n=0.$$

Logo a comutatividade vale para *m = 0*. Suponhamos *PM4* válida para *m* qualquer e provemos que também é válida para *m + 1*.

$$n\cdot(m+1)\overset{\substack{2.11\\ item2}}{=}n\cdot m+n\overset{HI}{=}m\cdot n+n,$$

e

$$(m+1)\cdot n\overset{\substack{PM2\\ item2}}{=}m\cdot n+n,$$

Portanto a comutatividade vale para m + 1 e pela indução finita vale para todos os números naturais.

Demonstração de PM5)

Suponha $n\cdot p=m\cdot p$, onde *n* e *m* são naturais fixos e apliquemos a indução sobre *p*. Tomemos p = 1.

$$n\cdot p=m\cdot p\;\Rightarrow\;n\cdot 1=m\cdot 1\;\Rightarrow\;n=m$$

Suponhamos válida a hipótese para *p* e provemos que é válida para *s(p)*.

$$n \cdot s(p) = m \cdot s(p) \overset{2.8}{\Rightarrow} n \cdot (p + 1) = m \cdot (p + 1) \overset{PM2}{\Rightarrow} n \cdot p + n = m \cdot p + m$$

Desta última igualdade, temos duas possibilidades, $n \neq m$ ou $n = m$. Se $n = m$ já temos o desejado. Tomemos $n \neq m$. Sem perda de generalidade suponhamos $n < m$, tal que $m = n + q$, $q \in \mathbb{N}^*$. Logo

$$n \cdot p + n = (n + q) \cdot p + (n + q) = n \cdot p + q \cdot p + n + q$$

Pela lei do cancelamento aditivo temos $0 = p \cdot q + q$, o que é um absurdo. Portanto é válida a Lei do Cancelamento da Multiplicação para quaisquer n, m e p naturais.

Demonstração de PM6)

Seja $n \cdot m = 0$. Se $n \neq 0$, escrevemos $n \cdot m = 0 = n \cdot 0$. *Pela propriedade anterior concluímos que* $m = 0$.

2.4 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Durante a construção dos números naturais, observamos que existe uma comparação entre esses números, isso é percebido pela noção da função sucessor. O objetivo desta seção é formalizar essa observação por meio de uma relação de ordem.

Notação: Dada uma função $f: X \to X$, denotaremos $f^0 = Id_X$ *(função identidade)*, $f^1 = f$, e por indução $f^{s(n)} = f \circ f^n$.

Para formalizarmos a ordem dos números naturais dentro do conjunto $\mathbb{N}$, vamos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.14 Seja s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função sucessor. Então $s^{m+p}(0) = s^m(0) + s^p(0)$.

A prova desta propriedade é consequência direta da definição de função composta.

Definição 2.15 Uma relação R definida sobre o conjunto não vazio A é chamada de uma relação de ordem se satisfaz as seguintes propriedades:

i) a propriedade reflexiva: aRa, para todo $a \in A$;
ii) a propriedade antissimétrica: se aRb e bRa, então $a = b$;
iii) a propriedade transitiva: se aRb e bRc, então aRc.

Um conjunto munido de uma relação de ordem é chamado de um *conjunto ordenado*. Uma relação de ordem é chamada de ordem total se para todo $a, b \in A$, $a = b$ ou aRb ou bRa. Nesse caso diremos que o conjunto A é totalmente ordenado.

Por exemplo, a relação de inclusão entre subconjuntos de um conjunto é uma relação de ordem. A seguir definiremos uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

Definição 2.16 Dados $n, m \in \mathbb{N}$, diremos que *n é menor ou igual a m* e escrevemos $n \leq m$, se existe p $\in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$ para algum $p \in \mathbb{N}$.

A seguir verificaremos que essa relação é uma relação de ordem sobre $\mathbb{N}$. Claramente $n \leq n$ para todo n, basta tomar $p = 0$. Se $n \leq m$ e $m \leq n$ então $m = n + p_1$ e $n = m + p_2$. Então $m = m + p_2 + p_1$, ou , $p_1 + p_2 = 0$. Pela definição da adição e suas propriedades isso é possível se, e somente se, $p_1 = p_2 = 0$, portanto $m = n$. Isto é, essa relação é antissimétrica. Para a transitividade, sejam $n \leq m$ e $m \leq p$ então $m = n + p_1$ *e* $p = m + p_2$, *logo* $p = n + p_1 + p_2$, então pela definição $n \leq p$.

É comum escrevermos $n < m$ quando $n \leq m$ e $n \neq m$ e também é usual escrever $m \geq n$ em lugar de $n \leq m$.

Proposição 2.17 Dado um número natural n,

i) se $n \in \mathbb{N}^*$, então $n > 0$;

ii) para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) > n$.

Demonstração de i)

Sabemos que $\mathbb{N}^* = Im\ s$, então $n = s(k) = k+1 = k+1+0$ para algum $k \in \mathbb{N}$, portanto pela definição n > 0.

Demonstração de ii)

Suponha que exista algum n natural que seja maior que seu sucessor, ou seja, $s(n) \leq n$.
Dessa maneira teríamos:

$$n = s(n) + m \quad \text{com } n, s(n) \text{ e } m \in \mathbb{N}$$
$$= n + 1 + m \quad \text{Forma do sucessor: } s(n) = n + 1$$

Aplicando PA4, ou seja, cancelando n nos dois termos da equação temos:

$$0 = 1 + m$$ *Mas isso é impossível, pois pela proposição 2.10 a soma de dois naturais não pode ser igual a zero.*

Logo o sucessor de qualquer número natural é sempre maior que o próprio número.

Outra demonstração pode ser feita utilizando o fato que $s(n) = n + 1$, logo pela definição $s(n) > n$.

Proposição 2.18 *(Lei da Tricotomia)* Dados números naturais *n* e *m*, uma e apenas uma das seguintes situações ocorre.

i) $n < m$

ii) $n = m$

iii) $n > m$

Inicialmente demonstraremos que apenas uma das situações mencionadas pode ocorrer.

Observe que os itens *(i)* e *(ii)* não podem ocorrer simultaneamente, pois por definição eles são incompatíveis. Isso ocorre porque se $n < m$ então existe um número natural $p \neq 0$ tal que $m = n + p$. Mas se $n = m$ então necessariamente $p = 0$ que é absurdo, o mesmo ocorre com os itens *(ii)* e *(iii)*. Agora se *(i)* e *(iii)* ocorressem simultaneamente,

- para $n < m$ existiria um natural p diferente de zero tal que $m = n + p$ ⑤
- para $n > m$ existiria um natural q diferente de zero tal que $n = m + q$ ⑥

$$\begin{aligned} n + 0 &= n && PA2 \\ &= m + q && ⑥ \\ &= (n + p) + q && ⑤ \\ &= n + (p + q) && PA1 \end{aligned}$$

Aplicando *PA4*, ou seja, cancelando *n* nos dois termos da equação temos:

$$0 = p + q$$

Pela proposição *2.10*, $p + q = 0$ então $p = q = 0$. O que é uma contradição já que *p* e *q* são diferentes de zero. Logo os itens *(i)* e *(iii)* não podem ocorrer simultaneamente.

A seguir demonstraremos que necessariamente uma das três situações ocorrem.
Tomemos m fixo e apliquemos indução sobre n. Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N} ;\, n < m \quad ou \quad n = m \quad ou \quad n > m\}.$$

De fato o conjunto A é formado pelos números naturais que satisfazem uma das situações acima. Provaremos que $A = \mathbb{N}$.

Claramente $0 \in A$, pois pela proposição 2.17 uma das situações $0 = m$ ou $0 < m$ sempre acontecem para qualquer $m \in \mathbb{N}$.

Mostraremos agora que se $n \in A$ então $s(n) \in A$. Consideremos as três situações possíveis.
<u>*1ª Situação:*</u>

$$Se\ n < m \underset{p \in N}{\overset{R1}{\Rightarrow}} m = n + p \underset{\substack{escrever \\ p = q+1 \\ q \in N}}{\overset{\substack{como\ p \neq 0 \\ podemos}}{\Rightarrow}} m = n + (q+1) \overset{PA3}{\Rightarrow} m = n + (1+q) \overset{PA1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{PA1}{\Rightarrow} m = (n+1) + q \overset{2.8}{\Rightarrow} m = s(n) + q \overset{2.8}{\Rightarrow} \begin{cases} se\ q = 0 \overset{PA2}{\Rightarrow} s(n) = m. \\ \\ se\ q > 0 \overset{R1}{\Rightarrow} s(n) < m. \end{cases}$$

Logo $s(n) \in A$.

<u>*2ª Situação:*</u>

$$Se\ n = m \overset{PA4}{\Rightarrow} n + 1 = m + 1 \overset{2.8}{\Rightarrow} s(n) = m + 1 \overset{R1}{\Rightarrow} s(n) < m. \quad Logo\ s(n) \in A.$$

<u>*3ª Situação:*</u>

$$Se\ n > m \underset{p \in N}{\overset{R1}{\Rightarrow}} n = m + p \overset{PA4}{\Rightarrow} n + 1 = (m+p) + 1 \underset{PA1}{\overset{2.8}{\Rightarrow}} s(n) = m + (p+1) \overset{R1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{R1}{\Rightarrow} s(n) > m. \qquad Logo\ s(n) \in A.$$

Então, pela indução finita $A = \mathbb{N}$.

A Lei da Tricotomia afirma que o conjunto dos números naturais munido da relação de ordem $\leq$ é de fato um conjunto totalmente ordenado.

A seguir mostraremos que a relação de ordem definida em $\mathbb{N}$ é compatível com as operações de adição e multiplicação.

Teorema 2.19 *(Monotonicidade)* Dados quaisquer números naturais n, m e p,

i) $n \leq m \Leftrightarrow n + p \leq m + p$

ii) $n \leq m \Rightarrow n \cdot p \leq m \cdot p$, *a reciproca vale se* $p > 0$.

Demonstração de i)

($\Rightarrow$) Tomemos n e m fixos, $n \leq m$ e apliquemos indução sobre p. Claramente p = 0 satisfaz a afirmação, pois para todo número natural n, $n = n + 0$. Suponhamos válida a monotonicidade para p e provemos que vale para s(p). Se $n \leq m$, pela hipótese da indução $n + p \leq m + p$, logo pela definição existe um q tal que $m + p = n + p + q$, portanto $m + p + 1 = n + p + 1 + q$, ou, $m + s(p) = n + s(p) + q$. Isto é, $m + s(p) \leq n + s(p)$. Então pela indução finita, terminamos a demonstração.

($\Leftarrow$) Seja $n + p \leq m + p$, então pela definição, existe q tal que $m + p + q = n + p$. Pela lei de cancelamento da soma, concluímos que $m + q = n$, portanto $n \leq m$.

Demonstração de ii)

($\Rightarrow$) Tomando $n \leq m$, $m = n + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Então para todo $p \in \mathbb{N}$, $m \cdot p = (n + q) \cdot p$. Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, $m \cdot p = (n \cdot p) + (q \cdot p)$. Logo $n \cdot p \leq m \cdot p$.

($\Leftarrow$) Seja, por absurdo, $n > m$. Então $n = m + r$, $r \in \mathbb{N}^*$. Assim

$$(m + r) \cdot p \leq m \cdot p, \text{ ou, } m \cdot p + r \cdot p \leq m \cdot p.$$

Pelo item anterior, $r \cdot p \leq 0$. *Isto* $r \cdot p = 0$, *portanto* $r = 0$ *ou* $p = 0$. *Mas estes são absurdos, pois r e p são naturais positivos.* Portanto $n \leq m$.

Teorema 2.20 Dados quaisquer números naturais n e m, $n < m$ se, e somente se $n + 1 \leq m$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Se $n < m$, então existe $p \in \mathbb{N}^*$, $m = n + p$. Como p $\neq$ 0, então p é sucessor de algum $q \in \mathbb{N}$, ou seja, $p = s(q)$. Logo $m = n + p = n + s(q) = n + (q + 1) = n + (1 + q) = (n + 1) + q$. Então $n + 1 \leq m$.

($\Leftarrow$) Se $n + 1 \leq m$, então existe $p \in \mathbb{N}^*$, tal que $m = (n + 1) + p = n + (1 + p)$. Logo n < m.

Deste último teorema extraímos uma informação muito útil que é o fato de entre um número n e seu sucessor $s(n)$ não há nenhum número natural. Esta é uma informação que normalmente não questionamos, já que temos isso em mente desde o inicio de nossa vida escolar. Este fato é expressado pela proposição seguinte.

Proposição 2.21 Não há números naturais compreendido entre n e $s(n)$.

Demonstração

Suponha que exista m $\in \mathbb{N}$, tal que $n < m < s(n)$. Então $n < m < n + 1$. Se $n < m$ então existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = n + p$. Como $m < n + 1$, então $n + p < n + 1$ *ou* $p < 1$. Absurdo, pois $p \in \mathbb{N}^*$, logo não pode ser menor do que 1.

Pela construção dos naturais o número zero é o menor elemento deste conjunto. A seguir mostraremos que todo subconjunto não vazio dos naturais possui menor elemento. Este fato é conhecido como Propriedade da Boa Ordem.

Teorema 2.22 *(Propriedade da Boa Ordem)* Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui menor elemento.

Demonstração

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $M = \{ n \in \mathbb{N}; n \leq x, \ \forall x \in S \}$. Claro que $0 \in M$. Como $S \neq \emptyset$, tome $s \in S$. Então $s+1 \notin M$, pois $s+1$ não é menor ou igual a s. Assim, $M \neq \mathbb{N}$. Como 0 $\in M$ e $M \neq \mathbb{N}$, deve existir $m \in M$ tal que $m+1 \notin M$, caso contrário, pelo Principio de Indução, M deveria ser $\mathbb{N}$. Afirmamos que um tal m é o menor elemento de S, isto é, $m = minS$. Como $m \in M$, então $m < x, \ \forall x \in S$. Só falta mostrar que $m \in S$. Suponha que $m \notin$ S. Então $m < x, \ \forall x \in S$. Pelo teorema 2.20, teríamos $m+1 \leq x, \ \forall x \in S$, do que resultaria $m+1 \in M$, em contradição com a escolha de m. Logo $m \in S$, conforme queríamos.

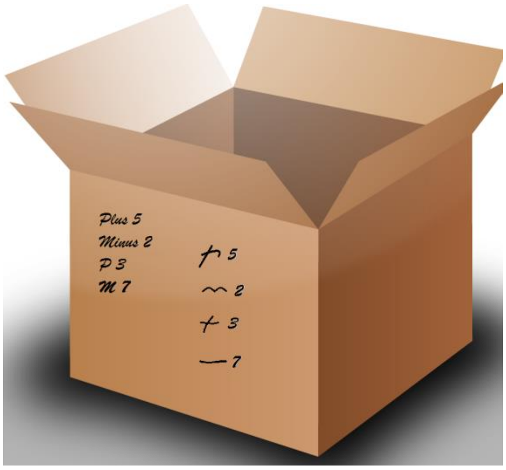
Uma observação importante: Dissemos anteriormente que o Princípio da Boa Ordem é muito útil para demonstrações em $\mathbb{N}$. Isso se dá ao fato, de que para provar a validade deste princípio utilizamos o Princípio de Indução Finita. Isso significa que ao utilizarmos a Boa Ordenação estamos utilizando Indução Finita e vice-versa. Em resumo, ambas são proposições matemáticas equivalentes.

3 Números Inteiros

O Conjunto dos Números Inteiros é introduzido aos alunos do ensino fundamental como uma extensão do Conjunto dos Números Naturais, ou seja, é adicionado a $\mathbb{N}$ os inteiros negativos para que seja formado um novo conjunto $\mathbb{Z}$.

O que justifica a criação de tal conjunto são problemas nos quais os naturais não bastam para solucioná-los. Tais problemas normalmente envolvem operações comerciais onde resultarão em dívidas, transações bancárias que deixarão saldos negativos ou problemas onde encontraremos quantidades faltando.

Observe que os números negativos são apresentados aos alunos de maneira empírica, ou seja, através da experimentação para que eles mesmos percebam a necessidade da existência de tais números. Mas do ponto de vista matemático, assumir a existência de tais números baseado apenas em experimentações não é apropriado. O que faremos neste capítulo é construir o conjunto dos números inteiros a partir dos números naturais.



Curiosidade Histórica

Há que acredite, apesar de não haver provas, que os símbolos + e – que simbolizam as operações de adição e subtração que servem também para diferenciar um número negativo de um positivo, tem sua origem no modo de vida muito antigo, mas que vivenciamos experiências semelhantes até os dias de hoje.

Imagine uma situação de um comerciante compra de um fornecedor 5 peças de determinado produto e guarda em uma caixa. Para saber quantas peças há na caixa ele escreve PLUS 5 (plus em latim significa MAIS). Quando ele vende duas peças ele escreve MINUS 2 (minus em latim significa MENOS). Com o corre corre, e a pressa que os vários afazeres nos causa em nossas vidas, o comerciante começa a escrever apenas as primeiras letras P e M das palavras. Com o passar do tempo ele capricha cada vez menos em sua escrita até que o P se transforme em uma cruz (+) e o M em um traço (–).

Claro que essa é uma situação hipotética e esse comerciante deve ser visto como um povo, e que essa transformação dos símbolos haveria acontecido dentro de um longo período onde envolveria várias gerações.

3.1 Preliminares

Antes de iniciarmos a formalização do Conjunto dos Números Inteiros, definiremos alguns conceitos.

Definição 3.1 *(Partições de um Conjunto)* Seja A um conjunto não vazio. Chamamos de *partição de A* uma coleção de subconjuntos não vazios de A, de forma que tais subconjuntos sejam disjuntos dois a dois e que a reunião de todos eles formem A.

Exemplo 1. Suponha $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Verifiquemos se as coleções em cada um dos itens abaixo são partições de A. É fácil verificar que os conjuntos $\{\{a, c, e, g\}, \{b, d\}, \{f\}\}$, $\{\{a, c, e, g\}, \{b, d, f\}\}$ e $\{\{a, b, c\}, \{d, f\}, \{e, g\}\}$, são partições de A.

Definição 3.2 *(Conjunto das Partes de um Conjunto)* Seja A um conjunto. O *conjunto das partes de A* ou *conjunto potência de A*, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo 2. Suponha $A = \{a, b, c\}$, então as partes de A é dada por

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing. \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Observe que se tomarmos um conjunto B vazio, então $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing\}$, pois $\varnothing$ é o único subconjunto de B.

Definição 3.3 *(Produto Cartesiano)* Considere dois conjuntos A e B. Chamamos de *produto cartesiano de A por B* ou simplesmente "*A cartesiano B*", e denotamos $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$, isto é, $A \times B = \{(a, b) ; a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Perceba que a definição trata de dois conjuntos, mas não exige que estes sejam distintos. Assim tomando $A = B$ temos $A \times A = \{(a, b) ; a, b \in A\}$. Neste caso podemos escrever $A \times A = A^2$.

Exemplo 3. Suponha $A = \{a, b, c\}$. Assim $A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$. Agora suponha $B = \varnothing$, então $B^2 = B \times B = \varnothing$.

> **Nota:** O produto cartesiano recebe esse nome porque cada par ordenado pode ser entendido como um ponto do plano cartesiano. O adjetivo "cartesiano" por sua vez, refere-se a René Descartes que foi o matemático francês responsável por desenvolver a geometria analítica.

Definição 3.4 *(Relação Binária)* Considere dois conjuntos A e B. Uma *relação binária entre A e B* é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Assim como no produto cartesiano, a relação binária pode ocorrer dentro de um mesmo conjunto.

Definição 3.5 *(Relação Inversa)* Seja R uma relação entre os conjuntos A e B. A inversa de R, denotada por R^{-1}, é a relação entre os conjuntos B e A, definida por $R^{-1} = \{(b, a) ; (a, b) \in R\}$.

Claramente temos que $(R^{-1})^{-1} = R$.

Todas as definições feitas até o momento são de grande importância para o desenvolvimento do da discussão que faremos neste e nos próximos capítulos. Porém destaco a importância das definições e do teorema que faremos a seguir devido o relevante papel que estes desempenharam na construção dos conjuntos numéricos.

Definição 3.6 *(Relação de Equivalência)* Uma relação R é chamada de *relação de equivalência em A* se possuir as propriedades:

i) propriedade reflexiva: para todo $a \in A$, aRa;
ii) propriedade simétrica: se aRb então bRa;
iii) propriedade transitiva: se aRb e bRc, então aRc;

para quaisquer a, b e $c \in A$.

Definição 3.7 *(Classe de Equivalência)* Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Tomando $a \in A$, chamamos de *classe de equivalência* de a o conjunto $\bar{\boldsymbol{a}}$ dos elementos de A que são equivalentes a a por R, ou seja, todos os elementos de A que se relaciona com a por R e denotamos: $\bar{a} = \{b \in A; bRa\}$.

Chamamos de ***conjunto quociente*** o conjunto das classes de equivalência de R em A.

Teorema 3.8 *(Propriedades das Classes de Equivalência)* Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Se $a, b \in A$, então:

i) $a \in \bar{a}$
ii) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow aRb$
iii) $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$
iv) As classes de equivalência formam uma partição de A.

Demonstração de i)

Pela propriedade reflexiva, aRa, logo $a \in \bar{a}$.

Demonstração de ii)

($\Rightarrow$) Suponha $\bar{a} = \bar{b}$, pelo item anterior $a \in \bar{a}$, portanto $a \in \bar{b}$, ou, aRb.

($\Leftarrow$) Mostraremos $\bar{a} \subset \bar{b}$ e $\bar{b} \subset \bar{a}$. Tome $x \in \bar{a}$, então xRa, logo pela transitividade xRb, ou seja, $x \in \bar{b}$.
Analogamente, $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Demonstração de iii)

Suponhamos $\bar{a} \neq \bar{b}$ e $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, Então existe $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Isto é cRa e cRb. Pela simetria e transitividade concluímos aRb. Portanto item anterior, $\bar{a} = \bar{b}$, o que é um absurdo. Então $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$,

Demonstração de iv)

Pelo primeiro item a união das classes é todo o conjunto e pelo item 3 estas classes são disjuntas. Portanto pela definição elas representam uma partição de A.

3.2 Construção do Conjunto dos Números Inteiros

O principal objetivo desta seção é a construção do conjunto dos números inteiros, observe que de fato este conjunto contém o conjunto dos números naturais, e estender as operações adição e multiplicação aos inteiros.

Definição 3.9 Seja ~ a relação no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $a + d = b + c$.

Nota 1: Quando escrevemos $(a, b) \sim (c, d)$ significa que existe alguma correspondência entre os dois termos. Isso quer dizer que o símbolo ~ tem um papel semelhante aos símbolos de $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $\geq$, $>$, entre outros. Neste contexto tal símbolo é utilizado para generalizar qual a ligação (ou relação) entre eles.

Nota 2: Lembre-se que uma das maneiras de representar o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é utilizar a reta numérica (ou reta numerada). Da mesma forma o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pode ser representado pelo plano cartesiano (ou coordenado). Neste contexto os elementos (a, b) e (c, d) podem ser representados como pontos do plano.

Apesar desses elementos poderem ser representados como pontos, não serão tratados desta maneira neste trabalho, pois nosso objetivo é formalizar os conjuntos numéricos com uma estrutura algébrica e não geométrica. Apenas utilizaremos algumas ideias geométricas em notas ou observações com o intuito de facilitar o entendimento ou tornar mais claro algum aspecto do desenvolvimento.

Observação sobre ~:Note que a igualdade $a + d = b + c$ descrita na relação ~ , pode ser escrita como $a - b = c - d$, diferença entre seus termos. Entretanto utilizamos a primeira forma pois ainda não definimos a subtração. Essa foi a solução encontrada pelos matemáticos do fim do século XIX para contornar tal dificuldade na construção dos inteiros.

Teorema 3.10 A relação ~ é uma relação de equivalência.

Demonstração

(i) propriedade reflexiva: $(a, b) \in N$, *pela comutatividade da soma* $a + b = b + a$, isto é $(a, b) \sim (a, b)$.

(ii) propriedade simétrica: se $(a, b) \sim (c, d)$, então $a + d = b + c$. *Escrevendo esta igualdade da forma* $c + b = d + a$ *concluímos que* $(c, d) \sim (a, b)$.

(iii) propriedade transitiva: se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$,

	$(a, b) \sim (c, d)$	e	$(c, d) \sim (e, f)$
	$a + d = b + c$	e	$c + f = d + e$
Adicionando f em ambos	$a+d+f =$	Adicionando b em ambos	$c+f+b = d+e+b$

os membros da primeira igualdade:	*b+c+f* *(1)*	os membros da segunda igualdade:	*(2)*
Pela comutatividade o segundo membro de *(1)* igual ao primeiro membro de *(2):*			$a+d+f=d+e+b.$
Pela lei do cancelamento da adição: $a + f = e + b$ ou $a + f = b + e$, portanto *(a, b) ~ (e, f).*			

Como ~ satisfaz as três propriedades da definição (3.6), concluímos que é uma relação de equivalência.

A classe de equivalência de *(a, b)* é dada por $\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|(x,y) \sim (a,b)\}$.

Exemplos:

1) $\overline{(3,1)} = \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),\ldots\}$
2) $\overline{(2,0)} = \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),\ldots\}$
3) $\overline{(0,2)} = \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),\ldots\}$

Observe que as classes dos exemplos *(1)* e *(2)* são iguais, pelo fato que $\overline{(3,1)} \sim \overline{(2,0)}$.

Definição 3.11 O conjunto quociente das classes de equivalência de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela relação ~ será chamado de conjunto dos números inteiros e denotado por

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim) = \{\overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Observamos que a aplicação $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, que chamaremos de *imersão*, dada por $a \to \overline{(a,0)}$ é injetiva. Dessa maneira podemos identificar $\mathbb{N}$ como a imagem de i em $\mathbb{Z}$, em outras palavras, podemos dizer que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Claramente essa aplicação não é sobrejetiva. Por exemplo classes como $\overline{(0,a)}$ não fazem parte da imagem de i. De fato como veremos em breve essas classes representarão os números *negativos*.

Uma pausa...

Faremos uma breve pausa para esclarecer um pouco ao leitor qual caminho será trilhado. Estas observações são um resumo do que faremos abaixo e serviram de orientação para facilitar o entendimento da construção dos inteiros.

Sabemos da matemática elementar (ainda não comprovamos esse fato) que um número inteiro pode ser representado através de diferentes somas ou *subtrações*.

Por exemplo:

4) $2 = 2 - 0 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 6 - 4 = \cdots$
5) $-2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 2 - 4 = 3 - 5 = 4 - 6 = \cdots$

Observe que as *subtrações* realizadas no exemplo *(4)* utilizaram os pares ordenados do exemplo *(1)* e as subtrações do exemplo *(5)* utilizaram os pares ordenados do exemplo *(2).*

3.3 Operações em $\mathbb{Z}$

3.3.1 Adição em $\mathbb{Z}$

Definição 3.12 *(Adição de Inteiros)* A soma dos elementos $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ é definida por

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(a+c, b+d)}.$$

Algumas considerações acerca desta definição.
Porque os matemáticos do século XIX decidiram definir a soma de inteiros dessa maneira?

Em notas e observações anteriores dissemos que os pares ordenados *(a, b)* poderiam ser vistos como seguimentos de retas. Se isso ocorre então podemos imaginá-los como vetores. E a definição acima nada mais é que uma soma de vetores, somando cada uma de suas coordenadas.

Entretanto, não é nosso objetivo tratar esse assunto de maneira geométrica e sim algébrica. Então como podemos justificar a definição acima? Quando fizemos a "observação sobre ~" na seção 3.2 dissemos que o par ordenado poderia ser visto como a diferença entre as coordenadas, ou seja, $\overline{(a,b)} = a - b$. Assim a soma $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ poderia ser efetuada da seguinte maneira:

Inicialmente temos:	$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$
Substituindo pela diferença de coordenadas:	$(a - b) + (c - d)$
Eliminando os parênteses:	$a - b + c - d$
Utilizando a propriedade comutativa:	$a + c - b - d$
Utilizando a distributiva da subtração em relação a multiplicação.	$(a + c) - (b + d)$
Que pode ser escrito como o novo par ordenado:	$\overline{(a+c, b+d)}$

Portanto $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$

Observe que da mesma forma que a ideia de subtração ocorre na definição *(3.9)* da relação ~ , também acontece na definição *(3.12)* de adição de inteiros. Note que utilizamos a subtração, apesar desta ainda não estar definida, apenas para exemplificar o raciocínio. Esta ainda será definida mais abaixo.

Exemplos da adição de inteiros:

6) $\overline{(2,0)} + \overline{(2,0)} = \overline{(2+2, 0+0)} = \overline{(4,0)}$
7) $\overline{(2,0)} + \overline{(3,1)} = \overline{(2+3, 0+1)} = \overline{(5,1)}$
8) $\overline{(3,1)} + \overline{(3,1)} = \overline{(3+3, 1+1)} = \overline{(6,2)}$

Observações sobre as somas acima:
Note que as classes $\overline{(2,0)}$ e $\overline{(3,1)}$ são idênticas, já que os elementos (2, 0) e (3, 1) pertencem a mesma classe. E apesar de ainda não termos concluído através de nosso trabalho sabemos que essas classes de equivalência representam o número 2, ou seja, 2 = $\overline{(2,0)}$ = $\overline{(3,1)}$ conforme o exemplo *(4)*.

Dessa forma os exemplos *(6)*, *(7)* e *(8)* representam a soma 2 + 2, por isso deveriam apresentar o mesmo resultado. Porém se observarmos com mais calma notaremos que os resultados são realmente todos iguais. Repare que a diferença entre as coordenadas de todos os resultados é sempre igual a 4, ou seja:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{(4,0)} = (4-0) = 4\\ \overline{(5,1)} = (5-1) = 4\\ \overline{(6,2)} = (6-2) = 4\end{array}\right\} Assim, \overline{(4,0)} = \overline{(5,1)} = \overline{(6,2)}$$

Isso significa que se as classes de equivalência *A*, *B* e *C* representam respectivamente os números inteiros *a*, *b* e *c* onde *a* + *b* = *c*, essa soma sempre será verdadeira independente dos elementos representantes das classes que forem tomados. Isso significa que a soma está bem definida em $\mathbb{Z}$. O que nos garante isso é o teorema abaixo.

Teorema 3.13 Se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')},$$

ou seja, a adição dada na definição anterior está bem definida.

Demonstração

Pela definição das classes de equivalência, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}\ e\ \overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ concluímos que

$$a + b' = a' + b \quad \text{e} \quad c + d' = c' + d.$$

Devemos mostrar que

$$(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c').$$

De fato pelas propriedades de adição entre os números naturais,

$$(a + c) + (b' + d') = a + b' + c + d' = b + a' + d + c' = (b + d) + (a' + c').$$

Isto é, a classe *(a + c)+ (b + d)= (a' + c')+ (b' + d')*, ou, $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$

Logo $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$**.**

Teorema 3.14 *(Propriedades)* A operação de adição em $\mathbb{Z}$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) Associativa: $\left(\overline{(a,a')} + \overline{(b,b')}\right) + \overline{(c,c')} = \overline{(a,a')} + \left(\overline{(b,b')} + \overline{(c,c')}\right)$.

ii) Comutativa: $\overline{(a,a')} + \overline{(b,b')} = \overline{(b,b')} + \overline{(a,a')}$.

iii) Elemento Neutro: $\overline{(a,a')} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(a,a')} = \overline{(a,a')}$.

iv) Elemento Simétrico (ou oposto ou inverso aditivo): $\overline{(a,a')} + \overline{(a',a)} = \overline{(0,0)}$. Consequentemente vale a lei do cancelamento.

v) Lei do cancelamento: $\overline{(a,a')} + \overline{(c,c')} = \overline{(b,b')} + \overline{(c,c')} \Rightarrow \overline{(a,a')} = \overline{(b,b')}$.

Demonstração i)

Efetuemos a soma	$\left(\overline{(a,a')} + \overline{(b,b')}\right) + \overline{(c,c')}$
Aplicando a definição 3.12 no primeiro membro temos	$\overline{(a+b, a'+b')} + \overline{(c,c')}$
Aplicando novamente a definição 3.12	$\overline{\left((a+b)+c, (a'+b')+c'\right)}$
Utilizando a associatividade da adição	$\overline{\left(a+(b+c), a'+(b'+c')\right)}$
Reescrevendo a soma da definição 3.12	$\overline{(a,a')} + \overline{(b+c, b'+c')}$
Repetindo o processo concluímos	$\overline{(a,a')} + \left(\overline{(b,b')} + \overline{(c,c')}\right)$

Portanto vale a propriedade associativa para quaisquer números inteiros.

Demonstração ii)

Efetuemos a soma	$\overline{(a,a')} + \overline{(b,b')}$
Aplicando a definição 3.12	$\overline{(a+b,a'+b')}$
Utilizando a comutatividade da adição	$\overline{(b+a,b'+a')}$
Reescrevendo a soma da definição 3.12	$\overline{(b,b')} + \overline{(a,a')}$

Portanto vale a propriedade comutativa para quaisquer números inteiros.

Demonstração iii)

Pela comutatividade da adição temos que $\overline{(a,a')} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(a,a')}$.
Basta então provar que $\overline{(a,a')} + \overline{(0,0)} = \overline{(a,a')}$

Efetuemos a soma	$\overline{(a,a')} + \overline{(0,0)}$
Aplicando a definição 3.12	$\overline{(a+0,a'+0)}$
Pelo elemento neutro da soma de naturais temos	$\overline{(a,a')}$

Então $\overline{(0,0)}$ é elemento neutro da soma nos inteiros.

Demonstração iv)

De fato, $\overline{(a,a')} + \overline{(a',a)} = \overline{(a+a',a'+a)}$, que por sua vez é igual a $\overline{(0,0)}$. Portanto para todo número inteiro existe um número simétrico.

Demonstração v)

Basta somar $\overline{(c,c')}$ nos dois lados da igualdade e utilizar o item anterior. Portanto vale a lei do cancelamento para quaisquer números inteiros.

Tendo demonstrado a lei do cancelamento estamos aptos a demonstrar a unicidade do elemento neutro. Lembre-se que demonstramos que $\overline{(0,0)}$ é elemento neutro da adição de inteiros, mas não demonstramos que ele era o único.

Demonstração da unicidade do elemento neutro

Suponhamos que exista $\overline{(b,b')}$ tal que $\overline{(a,a')} + \overline{(b,b')} = \overline{(a,a')}$, para toda classe $\overline{(a,a')}$.
Dessa forma temos: $\begin{cases} \overline{(a,a')} + \overline{(0,0)} = \overline{(a,a')} \\ \overline{(a,a')} + \overline{(b,b')} = \overline{(a,a')} \end{cases}$. Então $\overline{(a,a')} + \overline{(0,0)} = \overline{(a,a')} + \overline{(b,b')}$.
Pela lei do cancelamento temos que $\overline{(0,0)} = \overline{(b,b')}$, ou seja, $\overline{(0,0)}$ é o único elemento neutro da adição de inteiros.

Exemplos:

9) $\overline{(a,a')} + \overline{(a',a)} = \overline{(a+a',a'+a)} = \overline{(0,0)}$
10) $\overline{(5,3)} + \overline{(3,5)} = \overline{(8,8)} = \overline{(0,0)}$
11) $\overline{(5,3)} + \overline{(4,6)} = \overline{(9,9)} = \overline{(0,0)}$

Observações sobre os exemplos 12 e 13: Repare que *(3, 5)* e *(4, 6)* são representantes da mesma classe, por isso os exemplos *(10)* e *(11)* possuem o mesmo resultado.

Notação 3.15 Dado $\alpha \in \mathbb{Z}$, seu oposto ou inverso aditivo é denotado por $-\alpha$ (lê-se "menos α").

Definição 3.16 *(Subtração nos Inteiros)* Dados α, $\beta \in \mathbb{Z}$, chamamos de subtração e denotamos por (–) a operação $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Como já sabíamos a subtração de α por β nada mais é do que a soma de α com o simétrico de β.

Utilizando o teorema 3.14 podemos deduzir facilmente as propriedades da subtração:

Proposição 3.17 *(Propriedades da Subtração)* Dados α, β e $\gamma \in \mathbb{Z}$, vale as propriedades:

i) $-(-\alpha) = \alpha$
ii) $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$
iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$
iv) $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$
v) $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$

Dada $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, pelas propriedades vistas nessa sessão podemos escrever

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,0)} + \overline{(0,b)} = \overline{(a,0)} - \overline{(b,0)} = i(\mathrm{a}) - i(\mathrm{b}),$$

onde i representa a aplicação *imersão*. Pela injetividade desta aplicação, podemos identificar i(a) e i(b) por a e b. Portanto $\overline{(a,b)}$ pode ser escrita como $a - b$, ou seja, todo número inteiro pode ser escrito como *diferença* de dois números naturais. Outra coisa que podemos dizer é o seguinte: os inteiros *negativos*, ou seja, os elementos que não estão na imagem de i, são classes do tipo $\overline{(0,b)}$. Isso completa a observação depois da definição 3.11.

3.3.2 Multiplicação em $\mathbb{Z}$

Definição 3.19 *(Multiplicação de inteiros)* Dadas $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, definimos como produto de $\overline{(a,b)}$ por $\overline{(c,d)}$ e denotamos de $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}$, ou, $\overline{(a,b)}\ \ \overline{(c,d)}$ o inteiro $\overline{(ac+bd, ad+bc)}$.

A seguir explicaremos as razões para definir a multiplicação dessa forma. Primeiro pelo fato que os naturais fazem parte dos inteiros, as operações definidas entre os inteiros deverão satisfazer todas as propriedades das mesmas entre os naturais, ou seja, deverão ser comutativas, associativas, e ainda satisfazer a distribuição de multiplicação em relação à adição. Lembramos que todo inteiro $\overline{(x,y)}$ pode ser escrita como $x - y$, então

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = (a-b)\cdot(c-d) = a\cdot(c-d) - b\cdot(c-d) = ac - ad - bc + bd = ac + bd - ad - bc =$$
$$= (ac+bd) - (ad+bc) =$$
$$= \overline{(ac+bd, ad+bc)}.$$

Isso justifica a definição da multiplicação dada anteriormente.

Exemplos:

14) $\overline{(3,0)} + \overline{(3,0)} = \overline{(3\cdot 3 + 0\cdot 0, 3\cdot 0 + 0\cdot 3)} = \overline{(9+0, 0+0)} = \overline{(9,0)}$
15) $\overline{(3,0)} + \overline{(4,1)} = \overline{(3\cdot 4 + 0\cdot 1, 3\cdot 1 + 0\cdot 3)} = \overline{(12+0, 3+0)} = \overline{(12,3)}$
16) $\overline{(4,1)} + \overline{(4,1)} = \overline{(4\cdot 4 + 1\cdot 1, 4\cdot 1 + 1\cdot 4)} = \overline{(16+1, 4+4)} = \overline{(17,8)}$

Observações sobre as multiplicações acima:
Note que as classes $\overline{(3,0)}$ e $\overline{(4,1)}$ são idênticas já que representam o número 3 conforme o exemplo *(4)*. Dessa forma os exemplos *(14)*, *(15)* e *(16)* representam a multiplicação 3 · 3 = 9. Repare que a diferença entre as coordenadas de todos os resultados são iguais:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{(9,0)} = (9-0) = 9\\ \overline{(12,3)} = (12-3) = 9\\ \overline{(17,8)} = (17-8) = 9\end{array}\right\} Assim, \overline{(9,0)} = \overline{(12,3)} = \overline{(17,8)}.$$

Esses exemplos representam casos particulares do seguinte teorema que garante que a multiplicação está bem definida.

Teorema 3.20 Se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}$.

Demonstração
Pela hipótese $a + b' = b + a'$. Multiplicando essa igualdade por c e d,

$$ac + b'c = bc + a'c \qquad (1)$$

e

$$ad + b'd = bd + a'd. \qquad (2)$$

Somando o primeiro membro de (1) com o segundo de (2) e o segundo de (1) com o primeiro de (2),

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd$$
$$\overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(a'c+b'd, a'd+b'c)}$$
$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c,d)}. \qquad (3)$$

Novamente pela hipótese $c + d' = d + c'$. Multiplicando essa igualdade por a' e b',

$$a'c + a'd' = a'd + a'c' \qquad (4)$$

e

$$b'c + b'd' = b'd + b'c'. \qquad (5)$$

Somando o primeiro membro de (4) com o segundo de (5) e o segundo de (4) com o primeiro de (5),

$$a'c + b'd + a'd' + b'c' = a'd + b'c + a'c' + b'd'$$
$$\overline{(a'c+b'd, a'd+b'c)} = \overline{(a'c'+b'd', a'd'+b'c')}$$
$$\overline{(a',b')} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}. \qquad (6)$$

De (3) e (6) concluímos o teorema.

Estudemos agora as propriedades da multiplicação nos inteiros.

Teorema 3.21 *(Propriedades da multiplicação)* Sejam $\alpha = \overline{(a,a')}$, $\beta = \overline{(b,b')}$ e $\gamma = \overline{(c,c')}$ número inteiros. Então:

i) Associatividade: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;
ii) Comutatividade: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
iii) Elemento Neutro: $\alpha \cdot \overline{(1,0)} = \overline{(1,0)} \cdot \alpha = \alpha$;
iv) Distribuição em relação a adição: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;
v) $\alpha \cdot \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} \cdot \alpha = \overline{(0,0)}$;
vi) Lei do cancelamento: $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$, quando $\gamma \neq \overline{(0,0)}$.

Demonstração i)

Resolvamos a multiplicação do primeiro membro: (α · β) · γ

$$\left(\overline{(a,a')}\cdot\overline{(b,b')}\right)\cdot\overline{(c,c')} =$$
$$= \overline{(ab+a'b',ab'+a'b)}\cdot\overline{(c,c')} =$$
$$= \overline{\left((ab+a'b')\cdot c+(ab'+a'b)\cdot c',(ab+a'b')\cdot c'+(ab'+a'b)\cdot c\right)} =$$
$$= \overline{\left((abc+a'b'c)+(ab'c'+a'bc'),(abc'+a'b'c')+(ab'c+a'bc)\right)} =$$
$$= \overline{(abc+a'b'c+ab'c'+a'bc',abc'+a'b'c'+ab'c+a'bc)} =$$
$$= \overline{(abc+a'b'c+a'bc'+ab'c',a'bc+ab'c+abc'+a'b'c')}$$

Resolvamos a multiplicação do segundo membro: α · (β · γ)

$$\overline{(a,a')}\cdot\left(\overline{(b,b')}\cdot\overline{(c,c')}\right) =$$
$$= \overline{(a,a')}\cdot\overline{(bc+b'c',bc'+b'c)} =$$
$$= \overline{(a\cdot(bc+b'c')+a'\cdot(bc'+b'c),a\cdot(bc'+b'c)+a'\cdot(bc+b'c'))} =$$
$$= \overline{\left((abc+ab'c')+(a'bc'+a'b'c),(abc'+ab'c)+(a'bc+a'b'c')\right)} =$$
$$= \overline{(abc+ab'c'+a'bc'+a'b'c,abc'+ab'c+a'bc+a'b'c')} =$$
$$= \overline{(abc+a'b'c+a'bc'+ab'c',a'bc+ab'c+abc'+a'b'c')}$$

Como em ambos os membros chegamos ao mesmo resultado, logo vale a propriedade associativa.

Demonstração ii)

Resolvendo as multiplicações em ambos os membros temos:

$$\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$$
$$\overline{(a,a')}\cdot\overline{(b,b')} = \overline{(b,b')}\cdot\overline{(a,a')}$$
$$\underbrace{\overline{(ab+a'b',ab'+a'b)}}_{(1)} = \overline{(ba+b'a',ba'+b'a)}$$
$$= \overline{(ab+a'b',a'b+ab')} \quad \text{(pela comutatividade da multiplicação em } \mathbb{N}\text{)}$$
$$= \underbrace{\overline{(ab+a'b',ab'+a'b)}}_{(2)} \quad \text{(pela comutatividade da adição)}$$

Como (1) e (2) são iguais, logo vale a propriedade comutativa.

Demonstração iii)

Para demonstrar a propriedade do elemento neutro vamos desenvolver a multiplicação nos dois membros da igualdade $\alpha\cdot\overline{(1,0)} = \overline{(1,0)}\cdot\alpha$ *e concluir que ambos são iguais a* α*.*

$$\alpha\cdot\overline{(1,0)} = \overline{(1,0)}\cdot\alpha$$
$$\overline{(a,a')}\cdot\overline{(1,0)} = \overline{(1,0)}\cdot\overline{(a,a')}$$
$$\overline{(a\cdot 1+a'\cdot 0,a\cdot 0+a'\cdot 1)} = \overline{(1\cdot a+0\cdot a',1\cdot a'+0\cdot a)}$$
$$\overline{(a+0,0+a')} = \overline{(a+0,a'+0)}$$
$$\overline{(a,a')} = \overline{(a,a')}$$
$$\alpha = \alpha$$

Portanto vale a propriedade do elemento neutro na multiplicação de inteiros.

Demonstração iv)

Para demonstrar a propriedade distributiva em relação a adição, vamos desenvolver a soma e os produtos do segundo membro e encontrar o primeiro membro.

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma &= \overline{(a,a')} \cdot \overline{(b,b')} + \overline{(a,a')} \cdot \overline{(c,c')} \\
&= \overline{(ab + a'b', ab' + a'b)} + \overline{(ac + a'c' + ac' + a'c)} \\
&= \overline{\big((ab + a'b') + (ac + a'c'), (ab' + a'b) + (ac' + a'c)\big)} \\
&= \overline{(ab + a'b' + ac + a'c', ab' + a'b + ac' + a'c)} \\
&= \overline{(ab + ac + a'b' + a'c', ab' + ac' + a'b + a'c)} \\
&= \overline{\big(a \cdot (b + c) + a' \cdot (b' + c'), a \cdot (b' + c') + a' \cdot (b + c)\big)} \\
&= \overline{(a,a')} \cdot \overline{(b + c, b' + c')} \\
&= \overline{(a,a')} \cdot \overline{\big((b,b') + (c,c')\big)} \\
&= \alpha \cdot (\beta + \gamma)
\end{aligned}
$$

Logo vale a propriedade distributiva em relação a adição.

Demonstração v)

Demonstraremos a validade da propriedade do elemento nulo desenvolvendo os produtos presentes na igualdade $\alpha \cdot \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} \cdot \alpha$ e concluindo que ambos os membros são iguais a $\overline{(0,0)}$.

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \overline{(0,0)} &= \overline{(0,0)} \cdot \alpha \\
\overline{(a,a')} \cdot \overline{(0,0)} &= \overline{(0,0)} \cdot \overline{(a,a')} \\
\overline{(a \cdot 0 + a' \cdot 0, a \cdot 0 + a' \cdot 0)} &= \overline{(0 \cdot a + 0 \cdot a', 0 \cdot a' + 0 \cdot a)} \\
\overline{(0 + 0, 0 + 0)} &= \overline{(0 + 0, 0 + 0)} \\
\overline{(0,0)} &= \overline{(0,0)}
\end{aligned}
$$

Portanto vale a propriedade do elemento nulo.

Demonstramos aqui que o elemento $\overline{(0,0)}$ é um elemento nulo, porém será que ele é o único? Provaremos que sim com a seguinte demonstração.

Demonstração da unicidade do elemento nulo da multiplicação

Tomemos $\alpha = \overline{(a,a')} \in \mathbb{Z}$. Suponhamos que $\beta = \overline{(b,b')} \neq \overline{(0,0)} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\overline{(0,0)} = \alpha \cdot \beta = \overline{(a,a')} \cdot \overline{(b,b')} = \overline{(ab + a'b', ab' + a'b)}$$

Mas isso é um absurdo, já que *a, a', b* e *b'* são números naturais diferentes de zero, então $ab + a'b'$ e $ab' + a'b$ também são.

Logo $\overline{(0,0)}$ é o único elemento nulo da adição.

Demonstração vi)

Pela hipótese $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, então $\overline{(ac + a'c', ac' + a'c)} = \overline{(bc + b'c', bc' + b'c)}$, logo pela definição da igualdade entre classes de equivalência, $ac + a'c' + bc' + b'c = ac' + a'c + bc + b'c'$. Pela comutatividade $ac + b'c + a'c' + bc' = a'c + bc + ac' + b'c'$. Utilizando a associatividade dos naturais,

$$(a + b') \cdot c + (a' + b) \cdot c' = (a' + b) \cdot c + (a + b') \cdot c'.$$

Como $\gamma = \overline{(c, c')} \neq \overline{(0, 0)}$, então $c \neq c'$. Suponhamos $c > c'$, então $c = c' + d$ para algum $d \in \mathbb{N}^*$. Logo

$$(a + b') \cdot (c' + d) + (a' + b) \cdot c' = (a' + b) \cdot (c' + d) + (a + b') \cdot c'.$$

Pela distributiva da adição em relação a multiplicação dos naturais

$$(a + b') \cdot c' + (a + b') \cdot d + (a' + b) \cdot c' = (a' + b) \cdot c' + (a' + b) \cdot d + (a + b') \cdot c'.$$

Utilizando o cancelamento da adição dos naturais $(a + b') \cdot d = (a' + b) \cdot d$. Pela lei de cancelamento da multiplicação dos naturais, $a + b' = b + a'$, pois $d \neq 0$. Ou $\overline{(a, a')} = \overline{(b, b')}$, ou seja, $\alpha = \beta$. O caso $c' > c$ é análogo ao caso anterior.

Observação: Utilizando a lei do cancelamento concluímos que se $\alpha \cdot \beta = \overline{(0, 0)}$, então

$$\alpha = \overline{(0, 0)} \text{ ou } \beta = \overline{(0, 0)}.$$

3.4 Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$

O objetivo desta seção é estender a definição da relação de ordem definida entre os naturais aos números inteiros.

Definição 3.22 Dados os inteiros $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, diremos que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ quando

$$a + d \leq b + c.$$

Verificaremos que essa relação é uma relação de ordem.

Teorema 3.23 A relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$, isto é, dados α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$,

i) reflexiva: $\alpha \leq \alpha$;
ii) antissimétrica: se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então $\alpha = \beta$;
iii) transitiva: se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \leq \gamma$.

Demonstração i)

Tome $\alpha = \overline{(a,a')}$. Pela reflexividade de $\leq$ entre os números naturais, $a + a' \leq a' + a$, portanto $\alpha \leq \alpha$. Logo $\leq$ é reflexiva.

Demonstração ii)

Tome $\alpha = \overline{(a,a')}$ e $\beta = \overline{(b,b')}$. Temos duas hipóteses, $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$. Desenvolvamos cada uma delas.
Como $\beta \leq \alpha$,

$$\overline{(b,b')} \leq \overline{(a,a')} \overset{\substack{Def.\\3.22}}{\Rightarrow} b + a' \leq b' + a \underset{\substack{dos\\Naturais}}{\overset{\substack{Comuta-\\tividade}}{\Rightarrow}} a' + b \leq a + b'. \quad (1)$$

De $\alpha \leq \beta$,

$$\overline{(a,a')} \leq \overline{(b,b')} \overset{\substack{Def.\\3.22}}{\Rightarrow} a + b' \leq a' + b\ . \quad (2)$$

De (1) e (2), concluímos $a' + b \leq a + b' \leq a' + b$. Pela propriedade antissimétrica entre os naturais, $a' + b = a' + b$, ou, $\alpha = \beta$.

Demonstração iii)

Tome $\alpha = \overline{(a,a')}$, $\beta = \overline{(b,b')}$ e $\gamma = \overline{(c,c')}$. Temos duas hipóteses, $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$. Se $\alpha \leq \beta$,

$$\overline{(a,a')} \leq \overline{(b,b')} \overset{\substack{Def.\\3.22}}{\Rightarrow} a + b' \leq a' + b \overset{\substack{Def.\\2.16}}{\Rightarrow} a + b' + p = a' + b, \text{ para } p \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Se $\beta \leq \gamma$, $\overline{(b,b')} \leq \overline{(c,c')} \overset{\substack{Def.\\3.22}}{\Rightarrow} b + c' \leq b' + c \overset{\substack{Def.\\2.16}}{\Rightarrow} b + c' + q = b' + c$, para $q \in \mathbb{N}^*$. (4)

Somando as igualdades em (3) e (4),

$$a + b' + p + b + c' + q = a' + b + b' + c,$$

que utilizando a lei do cancelamento aditivo dos naturais, podemos substituir pela igualdade

$$a + p + c' + q = a' + c.$$

Como p, $q \in \mathbb{N}^*$, concluímos que $a + c' \leq a' + c$, ou seja, $\overline{(a,a')} \leq \overline{(c,c')}$, que significa que $\alpha \leq \gamma$.

Teorema 3.24 A relação ≤ é compatível com as operações em $\mathbb{Z}$, isto é, dados α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$, é valido:

i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
ii) $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;
iii) (Lei da Tricotomia) Apena uma das seguintes situações ocorre:
   a) $\alpha < \beta$;
   b) $\alpha = \beta$;
   c) $\alpha > \beta$.

Demonstração i)

Tome $\alpha = \overline{(a,a')}$, $\beta = \overline{(b,b')}$ e $\gamma = \overline{(c,c')}$. Se $\alpha \leq \beta \Rightarrow \overline{(a,a')} \leq \overline{(b,b')} \overset{Def.\ 3.22}{\Rightarrow} a + b' \leq a' + b$.

Adicionando c, $c' \in \mathbb{N}$ em cada lado da igualdade, $a + b' + c + c' \leq a' + b + c + c'$. Utilizando a associatividade dos naturais, $(a + c) + (b' + c') \leq (b + c) + (a' + c')$. Pela definição 3.22, $\overline{((a+c),(a'+c'))} \leq \overline{((b+c),(b'+c'))}$. Pela definição 3.12 de soma de inteiros, concluímos que $\overline{(a,a')} + \overline{(c,c')} \leq \overline{(b,b')} + \overline{(c,c')}$, ou seja, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, como queríamos demonstrar.

Demonstração ii)

Tomemos $\alpha = \overline{(a,a')}$, $\beta = \overline{(b,b')}$ e $\gamma = \overline{(c,c')}$. Pela hipótese $a + b' \leq a' + b$ e $c' \neq c$. Sem perda de generalidade, seja $c' \leq c$. Logo, existem p, $q \in \mathbb{N}$, tais que,

$$a' + b = a + b' + p \text{ e } c = c' + q.$$

Multipliquemos a penúltima igualdade por c e c' e a última por p.

$$a' + b = a + b' + p \Rightarrow a'c + bc = ac + b'c + pc, \tag{5}$$
$$a' + b = a + b' + p \Rightarrow a'c' + bc' = ac' + b'c' + pc', \tag{6}$$
$$c = c' + q \Rightarrow pc = pc' + pq, \tag{7}$$

Somando as igualdades (5) e (6),

$$ac + b'c + pc + a'c' + bc' = a'c + bc + ac' + b'c' + pc'. \tag{8}$$

Note que o primeiro membro de (8) foi obtido somando o segundo membro de (5) com o primeiro de (6), enquanto o segundo membro de (8) foi obtido somando o primeiro membro de (5) com o segundo de (6). Substituindo (7) em (8),

$$ac + b'c + pc' + pq + a'c' + bc' = a'c + bc + ac' + b'c' + pc',$$

aplicando a lei do corte aditivo em pc',

$$ac + b'c + pq + a'c' + bc' = a'c + bc + ac' + b'c',$$

suprimindo pq no primeiro membro,

$$ac + b'c + a'c' + bc' \leq a'c + bc + ac' + b'c',$$

aplicando a comutatividade e a associatividade,

$$(ac + a'c') + (bc' + b'c) \leq (ac' + a'c) + (bc + b'c'),$$

que representa a desigualdade entre os inteiros

$$\overline{(ac + a'c', ac' + a'c)} \leq \overline{(bc + b'c', bc' + b'c)},$$
$$\overline{(a,a')} \cdot \overline{(c,c')} \leq \overline{(b,b')} \cdot \overline{(c,c')},$$

ou, $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Demonstração iii)

Tomemos $\alpha = \overline{(a, a')}$ e $\beta = \overline{(b, b')}$. Pela lei de tricotomia entre os números naturais,

$$a + b' < a' + b \text{ ou } a + b' = a' + b \text{ ou } a + b' > a' + b.$$

O que significa que $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$.

Definição 3.25 Dado um número $\overline{(a, b)} \in$ Z, diremos que $\overline{(a, b)}$ é:

i) positivo se $\overline{(a, b)} > \overline{(0, 0)}$;
ii) negativo se $\overline{(a, b)} < \overline{(0, 0)}$;
iii) nulo se $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$;
iv) não negativo se $\overline{(a, b)} \geq \overline{(0, 0)}$;
v) não positivo se $\overline{(a, b)} \leq \overline{(0, 0)}$.

Observe que $\overline{(a, b)} > \overline{(0, 0)}$ se, e somente se, $a + 0 > b + 0$, ou seja, $a > b$. Isso significa que, conforme definição 2.16, existe $c \in \mathbb{N}^*$ tal que $a + c = b$. Tal igualdade equivale a dizer que $\overline{(a, b)} = \overline{(c, 0)}$. Analogamente concluímos os demais casos. Resumidamente podemos dizer que:

1) se $\overline{(a, b)}$ é positivo, $\overline{(a, b)} = \overline{(c, 0)}$ para algum $c \in \mathbb{N}^*$;
2) se $\overline{(a, b)}$ é negativo, $\overline{(a, b)} = \overline{(0, c)}$ para algum $c \in \mathbb{N}^*$;
3) se $\overline{(a, b)}$ é nulo, $\overline{(a, b)} = \overline{(0,0)}$.

Diante da tricotomia e dessas informações podemos descrever o conjunto $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\overline{(0, c)}; c \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0, 0)}\} \cup \{\overline{(c, 0)}; c \in \mathbb{N}^*\}$$

Neste momento, um fato muito importante deve ser notado: o conjunto dos inteiros não negativos, denotado, $\mathbb{Z}^{\geq 0}$, está em bijeção com $\mathbb{N}$. Este fato é demonstrado no próximo resultado.

Teorema 3.26 Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(c) = \overline{(c, 0)}$. Então f é injetiva e vale:

i) $f(c + d) = f(c) + f(d)$;
ii) $f(c \cdot d) = f(c) \cdot f(d)$;
iii) se $c \leq d$, $f(c) \leq f(d)$.

Demonstração i)

$f(c) + f(d) = \overline{(c, 0)} + \overline{(d, 0)} = \overline{(c + d, 0 + 0)} = \overline{(c + d, 0)} = f(c + d)$.

Demonstração ii)

$f(c) \cdot f(d) = \overline{(c, 0)} \cdot \overline{(d, 0)} = \overline{(c \cdot d + 0 \cdot 0,\ c \cdot 0 + 0 \cdot d)} = \overline{(c \cdot d + 0, 0 + 0)} = \overline{(c \cdot d, 0)}$
$= f(c \cdot d)$.

Demonstração iii)

Temos que $c \leq d$ se, e só se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $d = c + p$. Então, $f(d) = f(c + p) = f(c) + f(p) \geq f(c)$, pois $f(p) = \overline{(p, 0)}$ que pelas observações anteriores é um número não negativo. Portanto $f(c) \leq f(d)$.

Além disso, $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}^{\geq 0}$ e o teorema acima garantem que f *respeita* as operações e a relação de ordem definidas no conjunto dos números naturais. Por exemplo:

$2 + 7 = 9$ em $\mathbb{N}$, corresponde através de f a, $\overline{(2,0)} + \overline{(7,0)} = \overline{(9,0)}$ em $\mathbb{Z}^{\geq 0}$;

$2 \cdot 7 = 14$ em $\mathbb{N}$, corresponde através de f a, $\overline{(2,0)} \cdot \overline{(7,0)} = \overline{(14,0)}$ em $\mathbb{Z}^{\geq 0}$;

e que a relação de ordem

$2 \leq 7$ em $\mathbb{N}$, corresponde através de f a, $\overline{(2,0)} \leq \overline{(7,0)}$ em $\mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Portanto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ são idênticos observando a ordem dos elementos e as operações. Note que isso se dá pelo fato dos elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ serem distintos, pois os elementos de $\mathbb{N}$ são números e os de $\mathbb{Z}$ são classes de equivalência.

Pelo teorema 3.26 podemos identifica os inteiros não negativos com os números naturais. Dessa forma em lugar de escrever um número inteiro não negativo como sendo $\overline{(c,0)}$, escrevemos simplesmente c. Lembre-se que os números não positivos são dados por classe de $\overline{(0,c)}$, onde $c \in \mathbb{N}$, denotaremos um elemento como este por $-c$. Dessa forma obteremos a seguinte descrição para os números inteiros, a mesma que conhecemos desde a nossa *infância*:

$$\mathbb{Z} = \{-c\ ;\ c \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \{c\ ;\ c \in \mathbb{N}^*\} = \{..., -c, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., c, ...\}.$$

A partir desse momento podemos utilizar essa identificação e considerar $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{Z}$. Observe que esse fato nos traz duas informações muito importantes. Uma se trata da infinitude de $\mathbb{Z}$, isso porque dado que $\mathbb{N}$ é infinito e sendo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, logo **Z também é infinito**. A outra trata da enumerabilidade de $\mathbb{Z}$. Sabemos da definição 2.6 que um conjunto é enumerável se possuir uma bijeção com $\mathbb{N}$. De fato a função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\begin{cases} g(c) = \overline{(0,c)}, \text{ para } c = 2k+1 \\ g(c) = \overline{(c,0)}, \text{ para } c = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

define uma bijeção entre os naturais e os inteiros. Ou seja **Z é enumerável**.

Para encerrar este capítulo, vamos definir o conceito de elementos invertíveis e demonstrar que os únicos inteiros invertíveis são os números *1* e *–1*.

Definição 3.27 Diremos que $x \in \mathbb{Z}$ é *invertível* se existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x \cdot y = 1$.

Perceba que o zero não é invertível em $\mathbb{Z}$, pois $0 \cdot x = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{Z}$. Observe também que se x é invertível, y também é.

Proposição 3.28 Os únicos elementos invertíveis em $\mathbb{Z}$ são os números *1* e *–1*.

Demonstração

Tomemos $x = \overline{(a,a')}$ e $y = \overline{(b,b')}$, tais que $x \cdot y = 1$. Dessa forma,

$$1 = x \cdot y = \overline{(a,a')} \cdot \overline{(b,b')} = \overline{(ab + a'b', ab' + a'b)} = \overline{(1,0)}.$$

Portanto

$$ab + a'b' = 1 \quad (9)$$

e

$$ab' + a'b = 0 \quad (10)$$

Observando que *a, b, a', b'* são números naturais, teremos dois casos:

Caso 1: Suponhamos, $ab = 0$. Então $a'b' = 1$, logo $a' = b' = 1$. Substituindo esta informação em (10) temos, $ab' + a'b = a \cdot 1 + 1 \cdot b = a + b = 0$. Assim $a = b = 0$. Logo

$$x = \overline{(a,a')} = \overline{(0,1)} = -1 \quad \text{e} \quad y = \overline{(b,b')} = \overline{(0,1)} = -1.$$

Portanto $x = y = -1$.

Caso 2: Suponhamos, $a'b' = 0$. Então $ab = 1$, logo $a = b = 1$. Substituindo esta informação em (10) temos, $ab' + a'b = 1 \cdot b' + a' \cdot 1 = b' + a' = 0$. Assim $a' = b' = 0$. Logo

$$x = \overline{(a,a')} = \overline{(1,0)} = 1 \quad \text{e} \quad y = \overline{(b,b')} = \overline{(1,0)} = 1.$$

Portanto $x = y = 1$.

Portanto os únicos elementos invertível em $\mathbb{Z}$ são os números *1* e *–1*.

Note que a demonstração acima comprova também que $(-1) \cdot (-1) = 1$, fato bastante conhecido desde o ensino fundamental.

4 Números Racionais

Nos dez anos que trabalho com o ensino da matemática, com pequenas diferenças, vejo os livros didáticos apresentar os números racionais da seguinte maneira.

Inicialmente, no 5º ano do ensino fundamental, os alunos são apresentados às frações de maneira empírica e às vezes lúdicas, onde as frações representam partes de um inteiro.

Já no 6º ano, são apresentadas as frações, normalmente no contexto de divisão, em contextualizações similares a que segue: "de uma pizza partida em oito pedaços iguais, João comeu uma fatia, então ele comeu 1/8 da pizza". Na sequência, são estudadas, frações equivalentes e comparações de frações, as frações impróprias e os números mistos, e as operações e expressões numéricas envolvendo frações. Ainda nessa fase, são ensinados aos alunos, a relacionar as frações com os números decimais correspondentes, novamente utilizando a divisão. Posteriormente, como aplicação, é mostrado como utilizar as frações e os números decimais no cálculo de porcentagens.

Em seguida, no 7º ano, são feitas revisões do que foi aprendido no ano anterior antes de ensinar novidades aos alunos. Feito isso, trabalha-se razão e proporção. Neste momento razão é apenas mais uma palavra que significa divisão. Ao ensinar proporcionalidade, diretamente e inversamente proporcionais, utiliza-se o argumento de que se uma "grandeza" ou quantidade dobra a outra também dobra ou cai pela metade conforme o caso. Este momento é especialmente importante porque normalmente é aqui que é introduzido pela primeira vez a variável "*x*" que assombra tantos alunos. Utiliza-se quase sempre a famosa "*multiplicação em cruz*" que se não for bem compreendida pelo aluno, este passará a ter grandes dificuldades na disciplina deste ponto em diante. Isso porque normalmente, se ensina que um valor "passa" para o outro membro com o "sinal trocado" sem que seja apresentado a lei do cancelamento para justificar.

Somente no 8º ano é que se fala dos números como conjuntos numéricos. Nesta etapa são apresentados os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Todos através de exemplos cotidianos e sem nenhuma formalização. Os naturais e os inteiros normalmente nem ao menos recebe uma definição, enquanto o conjunto dos racionais é definido como aquele formado por números que podem ser escritos na forma a/b, onde a e b são inteiros e b não é zero.

No 1º ano do Ensino Médio, novamente retoma os conjuntos numéricos, onde os problemas são mais aprofundados, porém a forma como se trata a construção destes conjuntos, continua sem a formalização adequada, onde por vezes é apenas citado alguns momentos históricos que motivaram a criação de tais coleções.

O objetivo deste capítulo é fazer uma construção rigorosa do Conjunto dos Números Racionais a partir do Conjunto dos Números Inteiros.

4.1 Construção do Conjunto dos Números Racionais

Nesta seção faremos a construção do Conjunto dos Números Racionais a partir do Conjunto dos Números Inteiros. Nas seções seguintes estenderemos as operações nos inteiros também para os racionais, e mostraremos que os inteiros estão contidos nos racionais.

Definição 4.1 Seja ~ a relação no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b)\ ;\ a \in \mathbb{Z}\ \text{ e }\ b \in \mathbb{Z}^*\}$ definida por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $ad = bc$.

Antes de prosseguirmos, vamos fazer um breve comentário sobre o motivo da relação ~ ter sido assim definida. Note que até aqui não sabemos qual a forma dos números racionais e nem o que significa o número a/b quando a e b são números inteiros. Mas sabemos desde o ensino fundamental que se as frações $a/b = c/d$ então $ad = bc$ (utilizando a famosa regrinha da multiplicação em cruz). Portanto é uma boa ideia começarmos nossos estudos por esse fato já conhecido.

Teorema 4.2 A relação ~ é uma relação de equivalência.

Demonstração

Devemos mostrar que essa relação satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. As duas primeiras são consequências de comutatividade de multiplicação entre inteiros. Para a transitividade, se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b, concluímos $adf = bcf$ e $bcf = bde$. Portanto $adf = bde$. Cancelando o termo $d \neq 0$, $af = be$, ou seja, $(a, b) \sim (e, f)$.

Exemplo: $(1, 2) \sim (2, 4) \sim (-8, -16)$.

Definição 4.3 A classe de equivalência de um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação ~, é denotada por $\frac{a}{b}$ e lemos "a sobre b". Dessa forma

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\ ;\ (x, y) \sim (a, b)\}$$

Exemplo: De acordo com a definição 4.3, $\frac{1}{2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (x, y) \sim (1, 2)\}$. Utilizando a definição 4.1 podemos escrever $\frac{1}{2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 2x = y\}$. Dessa forma temos que os pares ordenados (1, 2), (2, 4) e (–8, –16) pertencem a classe $\frac{1}{2}$, enquanto (2, 1), (3, 7) e (–9, 4) não pertencem.

Teorema 4.4 (Propriedade Fundamental das Frações) Se (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Por definição o par $(a, b) \in \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, portanto o par $(a, b) \sim (c, d)$, ou $ad = bc$.

$(\Leftarrow)$ Pela hipótese o par $(a, b) \sim (c, d)$. Seja $(x, y) \in \frac{a}{b}$, então $(x, y) \sim (a, b)$. Pela transitividade, $(x, y) \sim (c, d)$, portanto pela definição 4.3, $(x, y) \in \frac{c}{d}$, logo $\frac{a}{b} \subset \frac{c}{d}$. De forma análoga $\frac{c}{d} \subset \frac{a}{b}$. Então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Definição 4.5 Chamamos de Conjunto dos Números Racionais, e denotamos por $\mathbb{Q}$, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência ~, isto é,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim = \left\{ \frac{a}{b} \ ; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

4.2 Operações em $\mathbb{Q}$

Nesta seção estenderemos as operações de adição e multiplicação já definidas entre os números inteiros ao conjunto dos números racionais.

Definição 4.6 Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $\in \mathbb{Q}$. Definimos as operações *adição* e *multiplicação*, respectivamente por:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Observe que em ambos os casos, o primeiro membro se refere a operações entre elementos de $\mathbb{Q}$ e no segundo membro operações entre elementos de $\mathbb{Z}$.

Nota sobre a Multiplicação: Podemos perceber claramente na definição a noção que temos desde o ensino fundamental, onde obtemos o resultado da multiplicação entre dois racionais, multiplicando os numeradores e os denominadores.

Nota sobre a Adição: Se repararmos, aqui também se encontra o resultado da operação que aprendemos no ensino fundamental, onde fazemos o uso do mínimo múltiplo comum:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemplos:

1) $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5+4\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{19}{20}$

2) $\frac{3}{4}+\frac{2}{10}=\frac{3\cdot 10+4\cdot 2}{4\cdot 10}=\frac{38}{40}=\frac{19}{20}$

3) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$

4) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{10}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 10}=\frac{12}{40}=\frac{3}{20}$

Observe que nos exemplos (1) e (2) obtivemos os mesmos resultados, assim como ocorre em (3) e (4). O que já era esperado pois $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$. E sabemos disso pois $1\cdot 10=5\cdot 2$, conforme o teorema 4.4. Entretanto devemos verificar se isso ocorre sempre.

Teorema 4.7 As operações em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas, ou seja, se $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$, então

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}.$$

Demonstração

Adição: Pela hipótese e pelo teorema 4.4, $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$. Como

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'},$$

devemos provar $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$, isto é, $(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$.

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição nos inteiros, essa igualdade é equivalente a *(ad)(b'd') + (bc)(b'd') = (a'd')(bd) + (b'c')(bd)*. Esta última igualdade é verdadeira, uma vez que pela hipótese, *ab' = ba' e cd' = dc'*.

Multiplicação: A demonstração neste caso é parecida com a da adição.

O conjunto dos números racionais munido das operações definidas anteriormente satisfaz todas as propriedades dessas operações definidas nos inteiros. Denote $\frac{0}{1}$ por 0 e é $\frac{1}{1}$ por 1.

Teorema 4.8 Sejam α, β e $\gamma \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades.

i) Comutatividade da adição: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
ii) Associatividade da adição: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
iii) Elemento neutro aditivo: $\alpha + 0 = \alpha$;
iv) Elemento Simétrico (ou oposto ou inverso aditivo): Existe α' tal que $\alpha + \alpha' = 0$;
v) Lei do cancelamento aditivo: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$;
vi) Comutatividade da multiplicação: $\alpha\beta = \beta\alpha$;
vii) Associatividade da multiplicação: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
viii) Elemento neutro multiplicativo: $\alpha \cdot 1 = \alpha$;
ix) Inverso multiplicativo: Se $\alpha \neq 0$, existe α'' tal que $\alpha\alpha'' = 1$;
x) Distributividade da multiplicação em relação a adição: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;
xi) $\alpha \cdot 0 = 0$;
xii) Lei do cancelamento: $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$, quando $\gamma \neq 0$.

As demonstrações desses itens são consequências diretas das definições e do teorema 4.4.

Observação: Os elementos α' e α'', chamados respectivamente de simétrico e inverso de α, são únicos, propriedade herdada dos inteiros dada pela proposição 3.28, e são denotados por $-\alpha$ e α^{-1}.

A demonstração da seguinte proposição também é feita pela definição de classes e pelo teorema 4.4.

Proposição 4.9 Para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = -\frac{-a}{-b}$. Isso significa que, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, b pode ser considerado positivo.

4.3 Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$

O objetivo desta seção é estender a definição da relação de ordem definida entre os inteiros aos números racionais.

Definição 4.10 Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com b, $d > 0$. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando $ad \leq bc$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor ou igual a $\frac{c}{d}$.

Teorema 4.11 A relação $\leq$ esta bem definida e é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

Demonstração

Tomemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Devemos demonstrar que se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$. Sejam $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, ou seja,

$$ab' = a'b \text{ e } cd' = c'd.$$

Como $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, então

$$ad \leq bc \Rightarrow ab'd \leq bb'c \Rightarrow a'bd \leq bb'c \Rightarrow a'd \leq b'c \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d}.$$

Continuando o raciocínio, temos

$$\frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d}. \Rightarrow a'd \leq b'c \Rightarrow a'dd' \leq b'cd' \Rightarrow a'dd' \leq b'c'd \Rightarrow a'd' \leq b'c' \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}.$$

Portanto a relação $\leq$ esta bem definida.

Demonstremos agora que ela também é uma relação de ordem.

Reflexiva: É obvio que $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, então $ab = ba$. Logo $ab \leq ba$. Portanto $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$.

Simétrica: Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, então $ad \leq bc$ e $bc \leq ad$. Pela tricotomia dos inteiros, $ad = bc$. Logo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Transitiva: Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, então $ad \leq bc$ e $cf \leq de$. Dessa forma, como b e f são maiores que 0,

$$adf \leq bcf \text{ e } bcf \leq bde \Rightarrow adf \leq bde \Rightarrow af \leq be \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}.$$

Teorema 4.12 *(Compatibilidade da Ordem com as operações em $\mathbb{Q}$)* Se α, β e $\gamma \in \mathbb{Q}$, então vale:

i) Se $\alpha \leq \beta$ então $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;

ii) Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq 0$, então $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$;

iii) Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \leq 0$, então $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$.

Demonstração

i) Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$ e $\gamma = \frac{e}{f}$. Se

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc \Rightarrow adf \leq bcf \text{ (pois } f > 0) \Rightarrow adf + bde \leq bcf + bde \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(af + be) \leq b(cf + de) \Rightarrow df(af + be) \leq bf(cf + de) \Rightarrow \frac{af+be}{bf} \leq \frac{cf+de}{df} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

ii) Como $\gamma = \frac{e}{f}$ e $\gamma \geq \frac{0}{1}$, então $\frac{e}{f} \geq 0$, isto é, $e \cdot 1 \geq f \cdot 0$, ou seja, $e \geq 0$. De $\alpha \leq \beta$ temos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc \Rightarrow adef \leq bcef$ (pois $e \geq 0$ e $f > 0$) $\Rightarrow aedf \leq cebf \Rightarrow \frac{ae}{bf} \leq \frac{ce}{df} \Rightarrow$

$$\frac{a}{b}\,\frac{e}{f} \leq \frac{c}{d}\,\frac{e}{f}.$$

iii) Como $\gamma = \frac{e}{f}$ e $\gamma \leq \frac{0}{1}$, então $\frac{e}{f} \leq 0$, isto é, $e \cdot 1 \leq f \cdot 0$, ou seja, $e \leq 0$. De $\alpha \leq \beta$ temos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc \Rightarrow adef \geq bcef$ (pois $e \leq 0$ e $f > 0$) $\Rightarrow aedf \geq cebf \Rightarrow \frac{ae}{bf} \geq \frac{ce}{df} \Rightarrow$

$$\frac{a}{b}\,\frac{e}{f} \geq \frac{c}{d}\,\frac{e}{f}.$$

Lema 4.13 Sejam b, d > 0. Então $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se, e somente se $ad < bc$.

Demonstração

Esta demonstração é consequência direta da definição 4.10.

Teorema 4.14 (Tricotomia) Dados α, $\beta \in \mathbb{Q}$, apenas uma das situações ocorre:

i) $\alpha < \beta$;
ii) $\alpha = \beta$;
iii) $\alpha > \beta$.

Demonstração

Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$. Da tricotomia dos inteiros temos que uma, e apenas uma das três situações ocorre: $ad \leq bd$, $ad = bd$ ou $ad \geq bd$, então $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Portanto $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$.

Diante da tricotomia podemos descrever o conjunto $\mathbb{Q}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{a}{b};\ \tfrac{a}{b} < 0 , b \in \mathbb{N} \text{ e } b > 0 \} \cup \{0\} \cup \{ \tfrac{a}{b};\ \tfrac{a}{b} > 0 , b \in \mathbb{N} \text{ e } b > 0 \},$$

ou de maneira mais simplificada,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^{>0}.$$

Utilizando o teorema a seguir podemos considerar o conjunto dos números inteiros como subconjunto dos números racionais, uma vez que existe uma função injetiva de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$.

Teorema 4.14 A função $i: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, dada por $a \to \frac{a}{1}$ é injetiva, e preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, isto é,

i) $i(m + n) = i(m) + i(n)$;
ii) $i(mn) = i(m) \cdot i(n)$;
iii) se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$.

Observe que m e n são números inteiros, enquanto suas imagens através de i são racionais.

Demonstração

Monstremos que $\imath$ é injetiva: $\imath(m) = \imath(n) \Leftrightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Leftrightarrow m \cdot 1 = 1 \cdot n \Leftrightarrow m = n$.

i) $\imath(m + n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = \imath(m) + \imath(n)$.

ii) $\imath(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m}{1}\frac{n}{1} = \imath(m) \cdot \imath(n)$.

iii) se $m \leq n$, então $n = m + q$, $q \in \mathbb{N}$. Assim

$$\imath(n) = \imath(m + q) = \imath(m) + \imath(q), \quad \text{com } \imath(q) \geq \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}.$$

Logo $\imath(m) \leq \imath(n)$. A demonstração pode ser feita também utilizando as propriedades anteriores:

$$m \leq n \Rightarrow m \cdot 1 \leq n \cdot 1 \Rightarrow \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{1}} \leq \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}} \Rightarrow \imath(m) \leq \imath(n).$$

Lema 4.15 Todo número racional $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, pode ser escrito, de modo único como uma *fração irredutível*, isto é, na forma $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$, onde m e n são *relativamente primos*, isto é, não possuem fatores primos em comum.

Demonstração

Para demonstrar esse fato, precisaremos utilizar o Teorema Fundamental da Aritmética, que diz que *todo número natural maior que 1 pode ser escrito de forma única, exceto pela ordem dos fatores, como um produto de números primos.*

Suponhamos inicialmente $\frac{a}{b}$ um número racional positivo. Consideremos as decomposições em fatores primos dos naturais a e b. Seja k o produto dos fatores comum a a e b. Dessa forma $\frac{a}{b} = \frac{ka'}{kb'}$. Pela propriedade fundamental das frações, dada pelo teorema 4.4, temos $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ com a' e b' primos entre si. Portanto $\frac{a'}{b'}$ é uma fração irredutível. Se existisse outra fração irredutível $\frac{c}{d}$, com $\frac{c}{d} = \frac{a'}{b'}$, a propriedade fundamental das frações nos daria $a'd = b'c$, que pela unicidade da decomposição em fatores primos, obrigaria d conter os fatores primos de b' e c os de a', ou seja, $a' = c$ e $b' = d$.

A demonstração para os negativos é análoga, bastando para isso tomar $\frac{a}{b}$ um número racional negativo.

Lema 4.16 Todo subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração

Tomemos X um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Dessa forma existe, pelo Princípio da Boa Ordem, um x_1 que é o menor elemento de X, um x_2 que é seu sucessor e assim sucessivamente. Então existe uma função injetora f: X $\to \mathbb{N}$ dada por $f(x_n) = n$, com $n \in \mathbb{N}$. Por construção, temos que f é sobrejetora, pois para todo n natural é imagem de algum $x \in$ X, pois X também é infinito. Portanto, pela definição 2.6, como há uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$, X é enumerável.

Proposição 4.17 $\mathbb{Q}^{>0}$, é enumerável.

Demonstração

Considere os números racionais escritos na forma irredutível conforme dada pelo lema 4.15. Seja a função f: $\mathbb{Q}^{>0} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f\left(\frac{a}{b}\right) = 2^a \cdot 3^b$. Observe que a imagem de $\frac{a}{b}$ pela função f é um número natural cuja decomposição em fatores primos somente possui fatores iguais a 2 e 3. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética que trata da unicidade desta decomposição e pelo lema 4.15 que trata da unicidade da representação de frações na forma irredutível, temos que f é injetora e tem como imagem um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Portanto pelo lema 4.16 temos que $\mathbb{Q}^{>0}$ é enumerável. Analogamente demonstramos que $\mathbb{Q}^{<0}$ também é enumerável. Tomemos $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} < \frac{0}{1}$. De acordo com a proposição 4.9 podemos supor b inteiro positivo. Seja a função g: $\mathbb{Q}^{<0} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f\left(\frac{-a}{b}\right) = 2^a \cdot 3^b$. Note que as imagens de f e g são idênticas.

Proposição 4.18 A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração

Tome X e Y conjuntos respectivamente finito e enumerável. Temos aqui dois possíveis casos, $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \cap Y \neq \emptyset$. Suponhamos primeiramente $X \cap Y = \emptyset$. Sendo X finito, podemos determinar sua quantidade k de elementos. Utilizando Principio da Boa Ordem podemos escrever $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}$ e $Y = \{x_{k+1}, x_{k+2}, ...\}$. Definimos então a função f: $X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x_n) = n$. Observe se $n \leq k$ então $x_n \in X$, senão $x_n \in Y$. A função f é claramente bijetora por construção. Logo $X \cup Y$ é enumerável. Agora para o caso $X \cap Y \neq \emptyset$, tomemos $W = X \setminus Y$ e f: $W \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$. Note que W e Y são disjuntos. Logo $W \cup Y$ é enumerável como o caso anterior.

Proposição 4.19 A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração

Tome X e Y conjuntos enumeráveis e infinitos (para conjuntos finitos é obvio). Independentemente de X e Y serem ou não disjuntos podemos tomar $W = X \cup Y$. Pelo Principio da Boa Ordem podemos escrever $W = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...\}$. Definimos então a função f: $W \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x_n) = n$. Como na proposição anterior, a função f é bijetora por construção. Logo $X \cup Y$ é enumerável.

(OUTRA MANEIRA)

Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. Claramente $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \cap Y \neq \emptyset$. Suponhamos $X \cap Y = \emptyset$. Como X é enumerável, existe f_1: $X \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora. Existe também g_1: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_p$, dada por $g_1(n) = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Note que $\mathbb{N}_p$ é o conjunto dos números naturais pares. Temos que g_1 é bijetora, pois para todo $2n$ existe n, tal que $g_1(n) = 2n$ e $2n = 2m \Leftrightarrow n = m$. Portanto podemos construir a função composta $g_1 \circ f_1 = h_1$, h_1: $X \rightarrow \mathbb{N}_p$, dada por $h_1(x) = 2 \cdot f_1(x)$, que é bijetora, pois a composição de duas funções bijetoras é bijetora. Procedendo da mesma maneira, como Y é enumerável, existe f_2: $Y \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora. Existe g_2: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_i$ ($\mathbb{N}_i$ é o conjunto dos naturais impares), bijetora, dada por $g_2(n) = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Compondo

$g_2 \circ f_2 = h_2$, $h_2: Y \to \mathbb{N}_i$, dada por $h_1(x) = 2 \cdot f_2(x) + 1$, que é bijetora. Assim sendo, temos $f: (X \cup Y) \to (\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i)$, ou seja, se tomarmos $W = X \cup Y$ podemos escrever $f: W \to \mathbb{N}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) & se\ x \in X \\ h_2(x) & se\ x \in Y \end{cases}$$

bijetora. Como $X \cap Y = \varnothing$, f está bem definida e, como $\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i = \mathbb{N}$, $X \cup Y$ é enumerável.

Agora suponhamos $X \cap Y \neq \varnothing$. Seja $W = X \setminus B$. Dessa forma $X \cup Y = W \cup Y$ e $W \cap Y = \varnothing$ por construção. Portanto pelo caso anterior $W \cup Y$ é enumerável, portanto $X \cup Y$ também é.

Proposição 4.20 A união de uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração

Para demonstrar esta proposição utilizaremos o Princípio de Indução Finita. Sejam X_1, X_2, X_3, ..., X_n, conjuntos enumeráveis. Desejamos provar que $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_n$, isto é, $\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ é enumerável. Sabemos da proposição anterior que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável, ou seja, para $n = 2$, $\bigcup_{k=1}^{2} X_k$ é enumerável. Então fazendo $X = X_1 \cup X_2$, temos que $X \cup X_3$, também é enumerável. Isso significa que para $n = 3$, $\bigcup_{k=1}^{3} X_k$ é enumerável. Repetindo estes passos até encontraremos que $\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$ é enumerável. Logo por 4.19, $\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k \cap X_n$ é também o é.

Teorema 4.21 $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Demonstração

Pelo teorema 4.14 podemos escrever o conjunto dos racionais como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^{>0}$. Da proposição 4.17 temos que $\mathbb{Q}^{<0}$, assim como $\mathbb{Q}^{>0}$ são enumeráveis. De 4.18, que a união de um conjunto enumerável com um finito é enumerável, ou seja, $\mathbb{Q}^{<0} \cup \{0\}$ é enumerável. De 4.19 temos que é enumerável a união de dois conjuntos enumeráveis, logo $(\mathbb{Q}^{<0} \cup \{0\}) \cup \mathbb{Q}^{>0}$ é enumerável. Portanto $\mathbb{Q}$ também é.

5 Vivencias em Sala de Aula

Graduei-me em matemática no ano de 2004. Entre 2002 e 2004, atuei por alguns meses como professor substituto. Esta experiência serviu para que melhorasse minha oratória frente a uma sala de aula. Porém sempre atuava por pouco tempo em diferentes turmas e diferentes etapas, que nessa época ainda eram chamadas de séries.

Iniciei, efetivamente, minha carreira como professor ano de 2005. Neste ano, tomei posse como professor concursado e pela primeira vez iria trabalhar com as mesmas turmas durante todo o ano letivo. Essas eram cinco turmas do Ensino Médio, duas de 1º ano, uma de 2º e duas de 3º. Foram-me atribuídas tais turmas, pois haviam sido as escolhidas por uma professora que se aposentou e cuja vaga assumi. Foi uma experiência muito gratificante, pois havia acabado de terminar o curso de graduação e pude experimentar pela primeira vez o prazer de ensinar.

No inicio do ano seguinte, acreditava que continuaria trabalhando com o Ensino Médio, pois meu trabalho havia sido bem avaliado pela direção e alunos. Mas no momento de atribuição das turmas foram me apresentado às regras e essa avaliação não era considerada. A ordem de escolha se dá do professor com mais tempo na escola para o com menos tempo. Ou seja, eu me encontrava na última posição desta classificação. Em resumo, eu não escolheria as turmas, ficaria com as que sobrassem, visto que a quantidade de aulas era exata para a quantidade de professores. Assim, me foi atribuído quatro turmas de 5ª séries, hoje chamadas 6º anos.

A principio fiquei um pouco aborrecido, pois gostava de trabalhar os conteúdos do Ensino Médio como funções, geometria plana, espacial e analítica, áreas de figuras planas e volume de figuras espaciais, e, acreditava que não seria tão emocionante trabalhar os conteúdos da 5ª série do Ensino Fundamental, que *julgava tão elementares*.

Já no primeiro dia, quando os professores se apresentam aos alunos, como era novato na escola, alguns pais vieram me conhecer. Os pais de alunos do Ensino Médio nem sempre buscam conhecer os professores de seus filhos, diferente dos pais de alunos da 5ª série. Queriam saber meu nome, quando tinha formado, onde já tinham lecionado. Quando souberam que eu já trabalhava naquela escola com turmas dos anos finais ficaram felizes, pois julgavam que seria um professor nos anos iniciais. Essa aceitação inicial amenizou um pouco minha frustração de não mais trabalha no Ensino Médio.

Ao iniciar os trabalhos com as 5ª séries, percebi que os conteúdos não eram tão elementares quanto eu julgava. Eram sim, fáceis de ser entendidos e explicados por mim que já conhecia a matéria, mas não se podia dizer o mesmo do aluno que tinha contato com aquele conhecimento pela primeira vez. Diante desta constatação tive meu entusiasmo renovado. Descobri que a matemática, independente do nível de ensino, ela sempre pode ser interessante, divertida e desafiadora, sendo este o rumo que o professor deve buscar no desenvolvimento de seu trabalho.

Nos anos que se seguiram trabalhei com diferentes turmas de EJA - Educação de Jovens e Adultos (sendo que estas apresentam desafios bastantes variados devido a heterogeneidade das turmas), Ensino Médio Noturno e Ensino Fundamental, sendo que a maior parte do tempo lecionei para 5ªs séries / 6ºs anos. Devido a isso, acabei por desenvolver uma visão global do que deve ser ensinado nesta etapa e quais as principais dificuldades apresentadas na compreensão e aprendizagem destes conteúdos.

Por isso, nas páginas que se seguem, evidencio como geralmente os conteúdos são apresentados pelos livros didáticos e ofereço uma proposta de como trabalhar os números naturais e racionais no 6º ano, sendo que o mesmo raciocínio pode ser aplicado as demais etapas tanto do Ensino Fundamental como Médio.

5.1 Conteúdos Matemáticos e Avaliações Externas

Como é de conhecimento dos professores da rede pública de educação, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) distribui aos alunos coleções consideradas aprovadas pelo Ministério da Educação (MEC) em ciclos trienais alternados. O grupo de professores de cada escola elegem as coleções que acreditam mais apropriadas a realidade de seus educandos e o MEC atende dentro de suas disponibilidades.

Durante esse tempo tive oportunidade de trabalhar com as coleções:

- Matemática Hoje é Feita Assim, do autor Antonio José Lopes Bigode, publicado pela Editora FTD;
- Matemática e Realidade, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, publicado pela Atual Editora;
- Novo Praticando Matemática, dos autores Álvaro Aldrini e Maria José Vasconcelos, publicado pela Editora do Brasil;

Esta última foi a utilizada por mais tempo. Por isso faço um breve relato de como o conteúdo está divido no primeiro volume da coleção, o qual é destinado ao 6º ano.

- **Unidade 1: Sistema de Numeração Decimal.** Nesta unidade os autores fazem um breve relato histórico sobre a criação dos números, números egípcios, romanos e indo-arábicos. Após este último, introduz o sistema posicional e o sistema de numeração decimal.
- **Unidade 2: Números Naturais.** Nesta discorre sobre os processos de contagem, antecessor, sucessor e a reta numérica.
- **Unidade 3: Adição e Subtração de Números Naturais.** Assim como o título da unidade sugere, ela traz vários exercícios e problemas utilizando as ideias de adição e subtração.
- **Unidade 4: Multiplicação e Divisão de Números Naturais.** Nesta além dos exercícios e problemas envolvendo a multiplicação e divisão, traz expressões numéricas envolvendo as quatro operações básicas e a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição e subtração.
- **Unidade 5: Potenciação e Raiz Quadrada de Números Naturais.** Estuda-se as propriedades dessas duas operações.
- **Unidade 6: Múltiplos e Divisores.** Nesta unidade é abordado os temas: sequência de múltiplos, critérios de divisibilidade, fatoração, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum.
- **Unidade 7: Dados, Tabelas e Gráficos de Barras.** Aqui se aprende para que servem os gráficos, como interpretá-los, como construí-los a partir de tabelas, e como fazer uma pesquisa estatística.
- **Unidade 8: Observando Formas.** Aqui aprendemos a reconhecer as formas da natureza e as criadas pelo homem, diferenciamos figuras planas das não-planas e poliedros de não-poliedros, utilizamos blocos retangulares para reconhecer pontos (vértices), retas, segmentos de retas (lados), faces (planos) e planificações.
- **Unidade 9: Ângulos.** Aqui conhecemos os tipos de ângulos, aprendemos a medi-los com um transferidor, conhecemos as retas paralelas, perpendiculares e concorrentes.
- **Unidade 10: Polígonos e Circunferências.** Nesta aprendemos os nomes de alguns polígonos, o que são polígonos regulares, triangulo, quadriláteros, paralelogramos e circunferência, e como calcular o perímetro de polígonos.

- **Unidade 11: Frações.** A exploração das frações é subdividida nos seguintes tópicos: (i) inteiro e partes do inteiros, (ii) frações de uma quantidade, (iii) Números mistos e frações impróprias, (iv) frações equivalentes, (v) comparação de frações, (vi) operações com frações, (vii) inversa de uma fração e (viii) potenciação e raiz quadrada de frações.
- **Unidade 12: Números Decimais.** Nessa unidade falamos sobre a notação decimal, aprendemos a comparar esses números, revemos as quatro operações básicas utilizando-os, dando um destaque para a multiplicação e a divisão por 10, 100 e 1000, e também aprendemos a escrever os números decimais na forma de fração.
- **Unidade 13: Porcentagens.** Agora será ensinado o que é e como calcular porcentagens além de como escrevê-las na forma decimal e fracionária.
- **Unidade 14: Medidas.** O volume é encerrado com a unidade destinada a ensinar sobre os sistemas de medida, calcular área do retângulo e volume de blocos regulares.

Como podemos observar o conteúdo é bastante amplo e que consultar tal volume notará que é muito bem trabalhado com exemplos fáceis e acessíveis aos alunos de tal nível escolar.

É de conhecimentos dos professores, se não de todos provavelmente por sua maioria, que o livro didático é um material de apoio e não deve ser utilizado como única fonte de referencia para a elaboração de suas aulas. Também não é necessário que se trabalhe o conteúdo assim como está disposto no livro. Porém ainda encontramos educadores que trabalham somente, quando não suprimem ainda mais, o que está ali presente, como se o sumário do livro fosse o seu plano de ensino anual.

Isso pode facilitar a vida do professor, que devido aos baixos salários praticados, normalmente está sobrecarregado de trabalho para aumentar sua renda. Porém encontramos alguns problemas:

- Nem sempre a forma em que o conteúdo é apresentado é a melhor maneira de atender as individualidades de sua turma.
- Os livros didáticos quase sempre trazem esses conteúdos de maneira estanque, não relacionando um com os outros. Note que no volume em questão, as frações são exploradas na unidade 11 e brevemente citadas nas unidades 12 e 13.
- Ainda neste volume, as noções de frações, porcentagens, posições relativas de retas e áreas são trabalhadas na segunda metade do livro. Isso significa que se o professor trabalhar nesta ordem, o aluno terá acesso a tal conteúdo no segundo semestre, porém estes conteúdos são sempre cobrados nas avaliações externas, como é o caso do Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar – PAAE que tem sua primeira etapa do primeiro semestre do ano (a segunda etapa no segundo semestre do ano letivo).
- Temos ainda a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, cuja primeira fase também é aplicada no primeiro semestre do ano letivo.

Claro que estes não são os únicos problemas ou pontos que podem ser levantados em uma discussão sobre a utilização do livro didático ou de como trabalhar o conteúdo matemático no sistema educacional, essa discussão é muito mais ampla, porém por não ser o escopo deste trabalho, vamos nos deter apenas a estes pontos.

5.2 Método Tradicional e Método Interligado

Dos pontos acima destacados, o que primeiro me chamou a atenção foi o fato dos conteúdos serem tratados de forma individualizada, ou seja, quando está sendo ensinadas as frações não se traz ao contexto outro tema como, por exemplo, área ou perímetro. Com isso, no meu quarto ano de magistério, passei a apresentar situações problemas que sempre retomavam os tópicos já estudados. Já no ano de 2012, cursando o PROFMAT, resolvendo problemas que haviam sido criados para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática, discutimos em sala as diferenças entre esta e as avaliações externas aplicadas pelos estados. As avaliações institucionais têm como objetivo avaliar o sistema educacional, já a OBM (assim como a OBMEP) tem como finalidade descobrir novos talentos.

De posse destas constatações, nos anos de 2013 e 2014 apresentei algumas mudanças na forma de apresentar o conteúdo aos alunos. Como normalmente trabalho anualmente com quatro turmas, a título de experimento, em 2013 trabalhei com duas turmas da maneira tradicional, ou seja, como meus pares, utilizando o livro didático tal como ele é apresentado, e com as outras duas com os conteúdos interligados, isto é, retomando um conteúdo já estudado dentro do contexto de outro conteúdo. Como foi satisfatório o resultado dessa maneira de trabalhar, que chamamos de método interligado, em 2014 foi estendido para três turmas e o modelo tradicional foi aplicado em apenas uma.

Em cada sala de 6º ano sempre chegam alunos que não foram nem ao menos alfabetizado. Existe uma parte dos alunos que não dominam a leitura, a escrita e nem as quatro operações básicas, em especial a divisão. Na grande maioria das vezes, os alunos que apresentam essas dificuldades, não tem em seu circulo familiar alguém que os orientem ou ajudem com os afazeres escolares, ficando assim todo o trabalho educacional a cargo da escola. Devido a isso foi observado o resultado do experimento considerando em cada sala os alunos em dois grupos distintos:

- Grupo 1 – dos alunos que apresentavam as dificuldades acima e,
- Grupo 2 – dos alunos que já se apropriaram dessas habilidades.

Os alunos do grupo 1, em ambos os métodos, tiveram pouco ou nenhum progresso. Questionando os alunos deste grupo sobre suas dificuldades na disciplina, suas principais queixas são: não gostam, não entenderem, não ter ninguém para ajuda-los e falta de tempo por parte deles ou dos responsáveis. Observando os alunos deste grupo dentro da sala de aula, encontramos os seguintes tipos de comportamentos: apatia, preguiça, desinteresse, dispersão (a atenção é facilmente desviada pelo que ocorre a sua volta, gerando principalmente conversas e brincadeiras). Com esses comportamentos, sem se dar a chance de conhecer o que a disciplina tem a oferecer é muito difícil de gostar ou entender mesmo.

Quanto a questão de tempo (ou falta dele), essa é uma desculpa amplamente utilizada em várias áreas ou momentos da vida. Isso porque é propagado que devido o consumismo o ser humano esta cada vez mais sobrecarregado de trabalho. O que não deixa de ser verdade, mas sempre que há oportunidade, tento passar aos alunos e responsáveis que o tempo (diferente da renda) é igualmente dividido. Todas as pessoas têm 24 horas por dia, e ela prioriza aquilo que acredita ser mais importante. Ninguém trabalha 24 horas por dia, logo sobram algumas horas de descanso. São os momentos onde normalmente se dedicam a TV, novelas, futebol, noticiários, reality show, videogames, redes sociais, entre outros. Se nesses momentos não sobra nenhum "tempinho" para a os estudos, leitura e troca de valores é porque a educação não esta sendo mesmo priorizada.

Os alunos do grupo 2 também evoluíram na utilização dos dois métodos, porém os que estudaram no método interligado tiveram um resultado consideravelmente superior do que aqueles que estudaram no método tradicional. Esse melhor desempenho pode ser medido pelo aproveitamento de suas avaliações, ou seja, por suas notas. Esse desenvolvimento no que tange os processos quantitativos foi satisfatório, porém essa melhora pode ser notada principalmente no quesito qualitativo. Isso se deu pelo fato de o aluno constantemente estar revendo os conteúdos já estudados, ele não “esquece” o que já aprendeu.

Outro aspecto que desenvolveu o interesse e a confiança dos alunos foi a utilização de objetos para vivenciar os fatos matemáticos. Lonas de 1 metro por 1 metro, folhas de papel e pedaços de madeiras cortados na forma de quadrados foram utilizados para vivenciar as frações, perímetros, medida de áreas. Além desses, outras formas geométricas, foram utilizadas para reconhecer ângulos, vértices e pontos, lados e retas (paralelas, perpendiculares e concorrentes). Assim como a utilização de triângulos, quadrados, retângulos e paralelogramos para construir outras figuras e novamente relembrar área e perímetro. Foram utilizados também blocos retangulares e cubos (principalmente dados e caixas de giz pela facilidade de manuseio) para se estudar volume, vértice e ponto, aresta e segmentos de reta, face e plano (momento em que relembramos a área da face).

Como recursos áudio-visuais foram utilizados jogos de computador, entre outros disponíveis em sites da internet, o TuxMath (programa gratuito disponível para Windows e Linux) para trabalhar as quatro operações. Também apresentados os vídeos das séries Arte & Matemática da TV Cultura e Matemática em Toda Parte da TV Escola. Esses vídeos tratam de diversos assuntos de história da matemática, álgebra, espaço e forma quase sempre ligados ao dia-a-dia.

Um recurso utilizado, e que se mostrou bastante eficaz para incentivar os alunos a participarem com mais entusiasmo, foram os problemas do tipo Enigma e Desafio, que se mostraram muito útil para divertir e trabalhar os conteúdos. Foram utilizados, em alguns momentos, quebras cabeças construídos em madeira e metais (estes últimos são pregos torcidos que devem ser encaixados e desencaixados), que tinham mais a intensão de entreter e deixar o estudo da matemática mais atraente e divertido.

5.3 Os Números Naturais (e Decimais) na Sala de Aula

Quando se deu a concepção do método interligado, já tinha em mente como iria trabalhar os conteúdos, ou seja, ensinando um conteúdo para logo em seguida retomá-lo novamente. E intermeando esse processo, utilizando atividades que despertassem o interesse dos alunos. Faltava agora, imaginar como trazer os conceitos cobrados pelas avaliações externas, que em geral se estuda no fim do ano letivo, para o início deste período.

Note inicialmente que no livro didático utilizado traz nas quatro primeiras unidades, assuntos relacionados aos números naturais e as quatro operações básicas e na unidade 5 introduz potenciação e raiz quadrada. As quatro primeiras unidades praticamente não traz nenhuma novidade, pois as operações básicas envolvendo números naturais e decimais já foram exaustivamente estudadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Devido a isso decidimos organizar os estudos iniciais da seguinte forma:

- 1ª Semana: Apesar dos alunos já conhecerem os números naturais, eles não os conhecem como conjuntos. Portanto, nesta semana, lembrando que em cada semana eram ministradas cinco aulas de 50 minutos cada, apresentamos o conjunto dos números naturais, inclusive sua notação $\mathbb{N}$ e a reta numérica. Sendo esses conceitos novidades para a maioria dos alunos. Ainda nesta semana apresentamos problemas envolvendo antecessor e sucessor, que são noções já conhecidas por eles.
- 2ª Semana: Como revisão, propomos exercícios e problemas de adição e subtração envolvendo números naturais e decimais.
- 3ª Semana: Ainda fazendo revisão, apresentamos exercícios e problemas de multiplicação e divisão de naturais e decimais.
- 4ª Semana: Utilizando a noção de multiplicação, apresentamos a potenciação e a raiz quadrada de números naturais e decimais.
- 5ª Semana: Ensinamos expressões numéricas, envolvendo as operações já estudadas, intercalando com exercícios de potência e raiz quadrada. Note que agora, os alunos aprendem expressões numéricas e ainda revisam o conteúdo anterior.

Observe que nestas primeiras semanas de aula, trabalhamos praticamente todo o conteúdo contido nas cinco primeiras unidades (80 paginas do livro) e parte da unidade 12. Dizemos praticamente todo o conteúdo, porque a parte histórica contida na primeira unidade foi explorada por meio de explanações e pequenas dramatizações feita pelos alunos, sem a utilização de exercícios ou atividades escritas que trabalhassem tais assuntos. E dizemos também parte da unidade 12, pois não foi trabalhado ainda a parte em que relaciona números decimais com frações.

O inicio do trabalho feito dessa forma se mostrou eficaz pelo fato de que essas operações são utilizadas até aqui serão sempre revisadas nos exercícios dos tópicos que estão por vir.

5.4 Os Números Racionais na Sala de Aula

Como o conteúdo envolvendo números naturais e decimais já havia sido desenvolvido até a quinta semana, estes poderiam (e deveriam) ser sempre retomados nos assuntos que viriam. A partir deste momento os alunos estavam aptos a ser introduzidos as frações, assunto que iniciaríamos na oitava semana.

Observe que o livro didático que é dividido em 14 unidades só trataria deste assunto na 11ª unidade, ou seja, praticamente no fim do ano. Mas trabalhando da maneira proposta poderíamos iniciar o tema já no segundo mês letivo.

A partir da experiência e da observação podemos perceber que frações é o tópico do 6º ano que os alunos apresentam mais dificuldades de assimilação. Devido a isso, esse assunto ao invés de ser estudado todo de uma vez como propõe o livro didático, ele seria dividido em pequenas porções e permeado por todo o ano letivo.

O objetivo de se fazer isso é para que o aluno trabalhe as frações durante o maior tempo possível, permitindo assim que ele desenvolva a prática e também perceba que estas estão presentes em diversas áreas do dia-a-dia.

Na próxima sessão apresentaremos um plano de ensino que poderá ser tomado como uma sugestão de como dividir os assuntos do 6º ano. Poderemos observar que as frações estarão presentes em 17 das 35 semanas, isto é, frações na forma $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, pois se considerarmos os números decimais esse número sobe ainda mais. Essas semanas são as de número 8, 9, 12, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31 e 34. Perceberemos que nas semanas de 27 a 31 serão utilizadas frações para representar as porcentagens.

5.5 Plano de Ensino

Este plano de ensino foi elaborado levando em consideração 200 dias letivos, distribuídos em 40 semanas. Sendo cinco aulas de matemática por semana, assim totalizando 200 aulas anuais.

Devido ao fato que, no decorrer do ano letivo, quase sempre ocorre algum evento não programado, dia após um feriado ou chuvoso que comparecem poucos alunos, as avaliações internas e externas, ou qualquer outro imprevisto que possa fazer com que alguma aula não tenha o aproveitamento esperado, este planejamento será preparado para que possa ser executado em 35 semanas. Deixando cinco semanas livres para compensar os possíveis atrasos. Caso isso não ocorra, estas poderão ser preenchidas com revisões ou, se possível, com atividades práticas, de recursos áudio-visuais, enigmas e desafios, como as citadas na seção 5.2.

Observação: Quando citar seis operações básicas, estaremos nos referindo as quatro operações básicas acrescidas da potência e raiz quadrada.

Conteúdos Divididos em Semanas	
1	Sistema de numeração decimal, conjunto dos números naturais, antecessor e sucessor.
2	Revisão de adição e subtração envolvendo números naturais e decimais.
3	Revisão de multiplicação e divisão envolvendo números naturais e decimais.
4	Potência e raiz quadrada envolvendo números naturais e decimais.
5	Expressões numéricas envolvendo as seis operações básicas e revisão de potência e raiz quadrada.
6	Reconhecer e diferenciar figuras planas e espaciais, polígonos, não-polígonos e circunferência. Reconhecer vértices, lados, arestas e faces. Aprender o nome de alguns polígonos.
7	Reconhecer ângulos, pontos, retas e segmentos de retas. Diferenciar retas paralelas, concorrentes e perpendiculares.
8	Frações: inteiro, partes de inteiro (ressaltar que toda fração representa uma divisão) e leitura.
9	Frações: frações de uma quantidade (multiplicação de fração por um número natural ou decimal).
10	Medidas: Sistemas de medidas, metro e grama, juntamente com seus múltiplos e submúltiplos.
11	Medidas: calcular perímetro, área e volume (observação: durante a resolução destes problemas, faremos revisões das seis operações básicas).
12	Continuar trabalhando os tópicos da semana anterior. Daremos ênfase neste tópico devido a sua importância na vida cotidiana. IMPORTANTE: propor exercícios que utilize frações de perímetro, área e volume.
13	Critérios de divisibilidade.
14	Múltiplos e Divisores. Apresentar problemas e exercícios que necessitem achar múltiplos e divisores comuns sem citar o MMC e o MDC.
15	MMC e MDC. Após os problemas e exercícios, repetir alguns problemas da semana anterior e deixar que os alunos percebam que estas técnicas permitem resolvê-los com maior facilidade.
16	Frações: comparação de frações e frações equivalentes.
17	Frações: soma e subtração de frações.
18	Frações: continuar o assunto da semana anterior, devido às dificuldades que os alunos

	apresentam para compreender o assunto.
19	Frações: multiplicação e (introduzir inversa da fração) divisão de frações.
20	Gráficos e Tabelas: construir gráficos de barras através de dados e tabelas. Interpretar gráficos para extrair os dados e representa-los em tabelas.
21	Gráficos e Tabelas: apresentar problemas estatísticos (inclusive que utilize multiplicação de fração). Fazer uma pesquisa estatística em sala e representá-la em gráfico.
22	Números Decimais: divisão por 10, 100 e 1000.
23	Frações: Números decimais na forma de fração e vice-versa. Relembrar que toda fração representa uma divisão, por isso o resultado é um número “natural” ou decimal.
24	Frações: potência e raiz quadrada.
25	Frações: números mistos e frações impróprias. Transformar números mistos em frações e vice-versa. Transformar números mistos e frações impróprias em números decimais.
26	Porcentagens: apresentar o que é porcentagem. Propor problemas de soluções fáceis (mentais), utilizando 10%, 20%, 50% e 100%.
27	Porcentagens: relacionar porcentagens com sua representação decimal e fracionária.
28	Porcentagens: apresentar problemas com nível médio de dificuldade. (Revisão de fração)
29	Porcentagens: problemas envolvendo acréscimos e descontos. (Revisão de fração)
30	Porcentagens: problemas envolvendo pesquisas estatísticas. (Revisão de fração)
31	Porcentagens: problemas envolvendo perímetros, áreas e volumes. (Revisão de fração e medidas)
32	Revisão: problemas com retas e ângulos (cálculo de perímetro e distâncias).
33	Revisão: problemas envolvendo MMC e MDC.
34	Revisão: operações com frações.
35	Revisão: divisão por 10, 100 e 1000, incentivando o cálculo mental.

5.6 Conclusões

Neste breve trabalho tivemos a oportunidade de estudar como estão formalmente organizados os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, juntamente com suas operações e relações de ordem. Compreendendo melhor esses aspectos, podemos pensar alternativas de trabalhar esses conceitos em sala de aula.

Sabendo que a maioria dos alunos apresentam dificuldades para compreender as frações, sugerimos um plano de ensino, onde as operações em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ estão quase sempre presentes. Isso porque também incluímos pontos de interesse como o estudo de espaço e forma, ou seja, geometria.

Claro que pela imensidão de discussões que a educação e o ensino podem levar, este trabalho não tem a pretensão de apresentar uma solução para o tema, e sim, relatar uma experiência que julgamos ter atingido seus objetivos. Desses objetivos julgamos como sendo essenciais:

- mostrar aos alunos que a matemática não é um amontoado de tópicos desconectados;
- estar sempre retomando conceitos já apreendidos;
- desenvolver nos alunos a habilidade de resolver situações problemas;
- e principalmente, mostrar que os desafios (e jogos) que a matemática propõe podem ser divertidos e interessantes, fazendo com isso que alguns alunos se apaixonem pela disciplina.

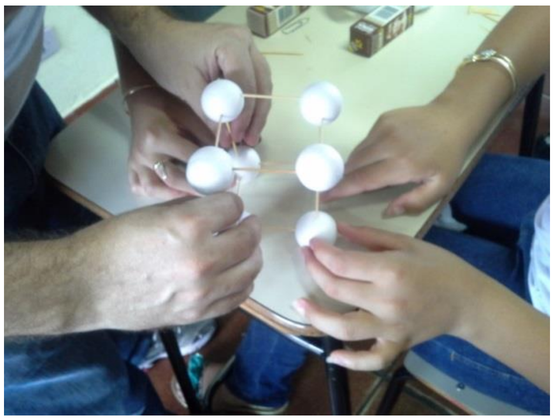
Reitero ainda que o plano de ensino aqui apresentado é apenas uma sugestão, pois cabe ao professor utilizar o seu talento para encontrar o próprio caminho e a melhor maneira de ajudar a sua turma. Lembremos que alunos diferentes podem demandar estratégias diferentes. Não existe receita pronta. O professor pode utilizar nossa sugestão de plano de ensino, mas será mais efetivo se este for ajustado e remodelado à suas necessidades, e melhor ainda, se com base no que foi discutido cada educador criar um que atenda exclusivamente a necessidade de seus alunos.

6 Anexos

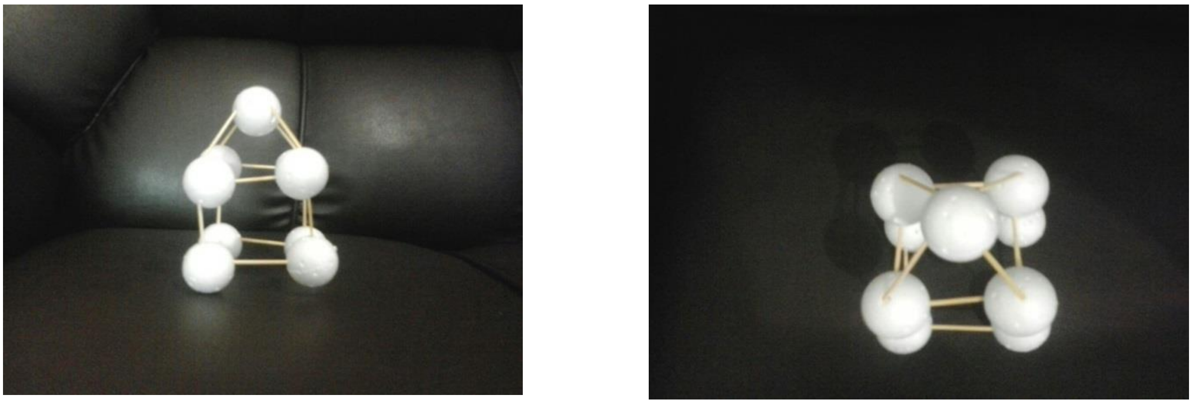
Aqui apresentamos algumas imagens dos recursos utilizados para incentivar e vivenciar a matemática.


Utilização de lonas pretas e brancas de 1m x 1m para estudar medida de áreas e frações.

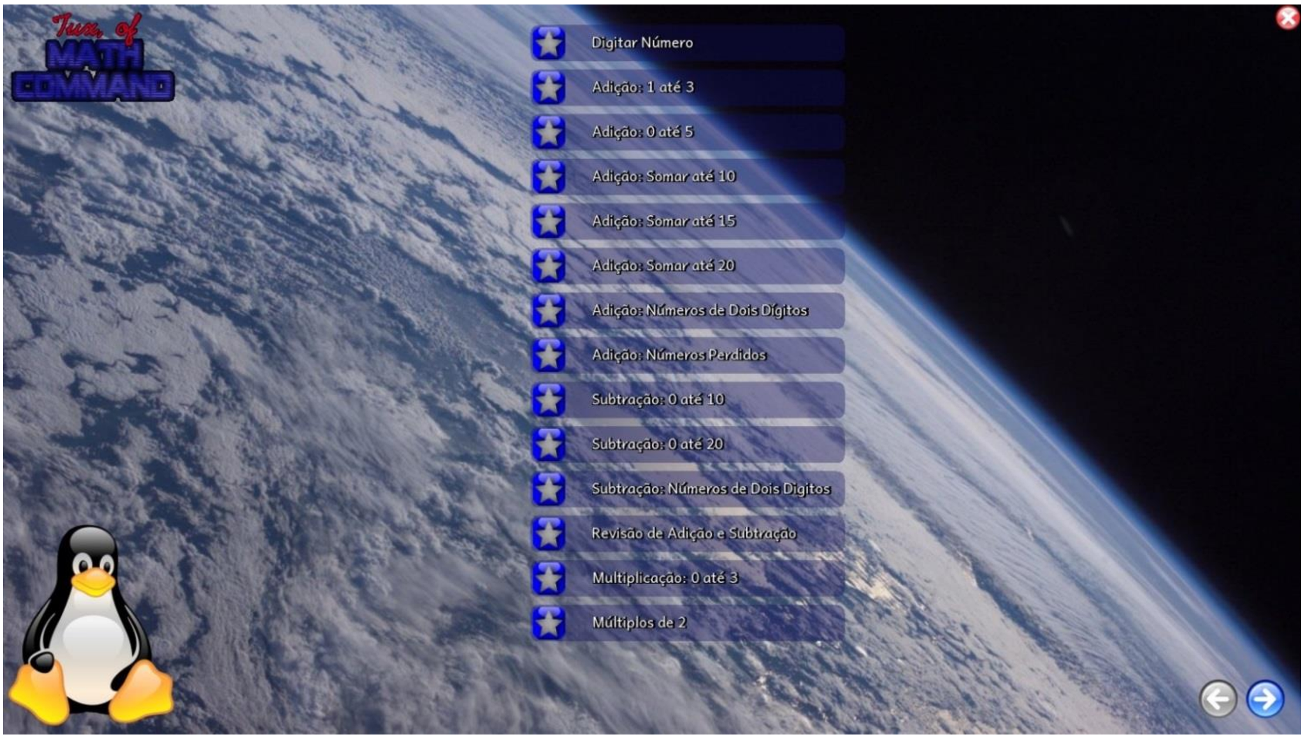
Caixas de giz para demonstrar a medida de volume.

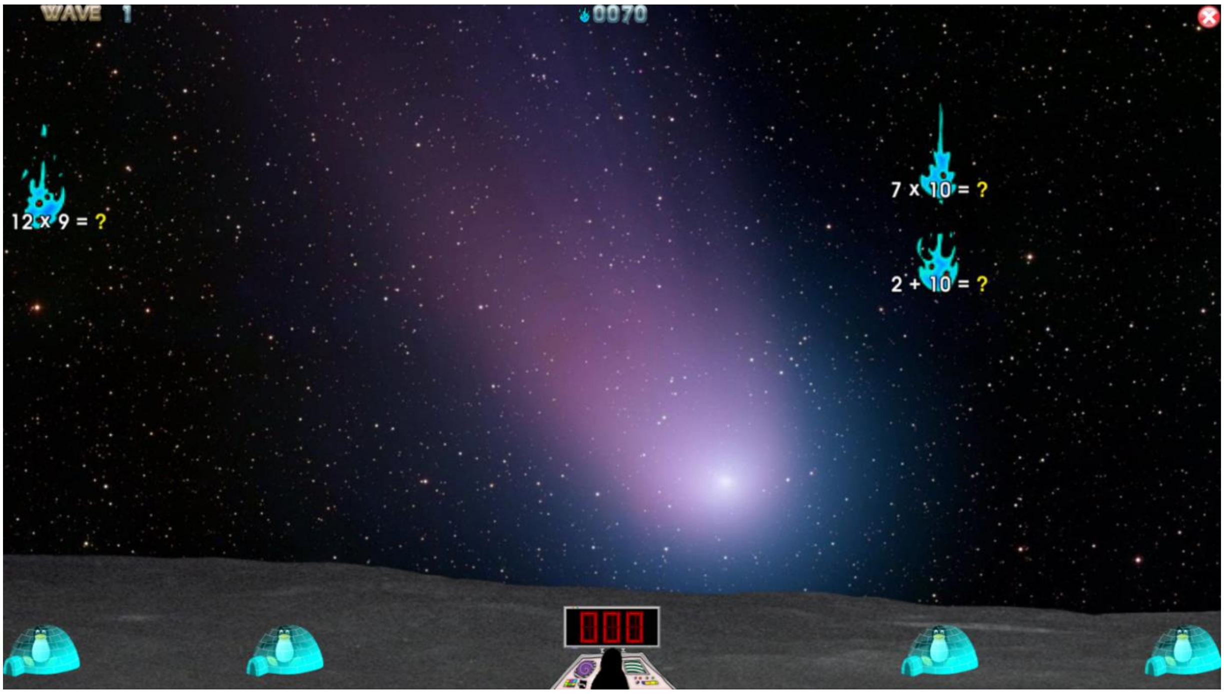
Construção de sólidos geométricos utilizando bolinhas de isopor e palitos de madeira.



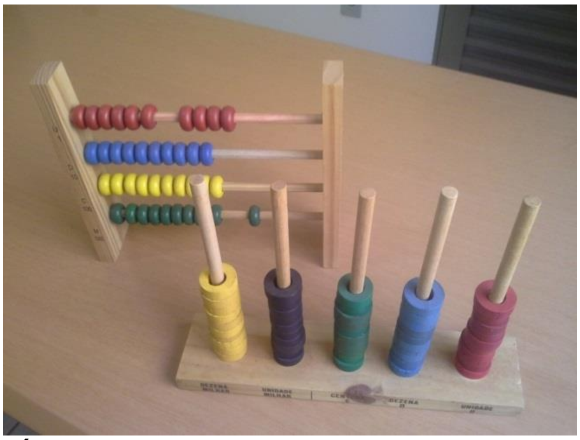
Construção feita em casa, por uma aluna. Aqui vemos o despertar do interesse pela disciplina.



Algumas das opções de operações do jogo TuxMath

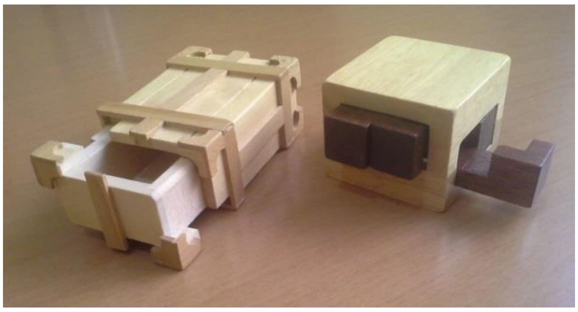


Imagens do programa TuxMath utilizado para trabalhar as quatro operações.



Ábacos utilizados para trabalhar sistema de numeração decimal e sistema posicional. Despertam a curiosidade por serem um tipo antigo de calculadora.

Quebra-cabeças feitos com pregos tortos cujo desafio consiste em desencaixá-los e depois voltar a encaixá-los.



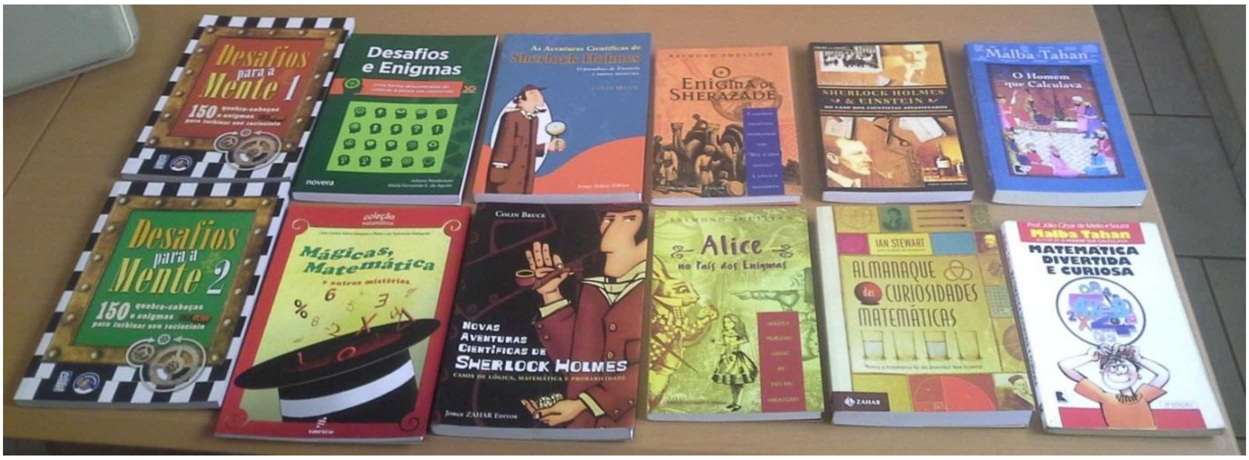
Quebra-cabeças feitos em madeira com desafios variados

Jogos de desafios. Vemos aqui um cubo de Rubik, conhecido mais como cubo mágico. Temos também um quebra-cabeça esférico, que depois de montado ao invés de ficar uma figura plana, torna-se uma esfera. E também vemos uma ampulheta na classe de instrumentos matemáticos antigos.

Cenas extraídas do filme Donald no País da Matemágica, apresentado para mostrar algumas curiosidades matemáticas de maneira divertida.

Cenas da série Matemática em Toda a Parte apresentado pelo Professor Antonio José Lopes Bigode e realizado pela TV Escola. Estes vídeos apresentam a matemática bem próxima do cotidiano.

DVDs e cena da série Matemática & Arte desenvolvido pela TV Cultura. Estes foram menos utilizados pois apresentam os conceitos de maneira teórica e bem menos prática em comparação aos anteriores.



Coleção com alguns livros que servem de inspiração para jogos, desafios e enigmas matemáticos, juntamente com alguns sites da internet. Os livros acima são:

- Desafios para a Mente 1 – Editora Ediouro;
- Desafios para a Mente 2 – Editora Ediouro;
- Desafios e Enigmas – Editora Novera (coletânea problemas do site www.somatematica.com.br);
- Magicas, Matemática e outros Mistérios – Editora EdUFSCar;
- As Aventuras Científicas de Sherlock Holmes – Editora Zahar;
- As Novas Aventuras Científicas de Sherlock Holmes – Editora Zahar;
- O Enigma de Sherazade – Editora Zahar;
- Alice no Pais dos Enigmas – Editora Zahar;
- Sherlock Holmes & Einstein no Caso dos Cientistas Assassinados – Editora Zahar;
- Almanaque das Curiosidades Matemáticas – Editora Zahar;
- O Homem que Calculava – Malba Tahan;
- Matemática Divertida e Curiosa – Autor Prof. Júlio César de Mello e Souza (verdadeiro nome de Malba Tahan).

7 Bibliografia

[1] AVILA, Geraldo; Análise Matemática para Licenciatura. 3ª Edição. Edgard Blucher, São Paulo, 2006.

[2] BORBA, Rute e GUIMARÃES, Gilda (Orgs.); A Pesquisa em Educação Matemática: Repercussões na Sala de Aula. 1ª Edição. Cortez, São Paulo, 2009.

[3] DOMINGUES, Hygino H. e IEZZI, Gelson; Álgebra Moderna. 4ª Edição. Atual, São Paulo, 2003.

[4] FERREIRA, Jamil; A Construção dos Números. 3ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[5] FERREIRA, Viviane Lovati; Metodologia do Ensino de Matemática: História, Currículo e Formação de Professores. 1ª Edição. Cortez, São Paulo, 2011.

[6] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais; Um Convite a Matemática. 2ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[7] HALMOS, Paul R.; Teoria Ingênua dos Conjuntos. 1ª Edição. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

[8] LIMA, Elon Lages et. al.; A Matemática do Ensino Médio volume 1. 5ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2004.

[9] LIMA, Elon Lages; Análise Real volume 1: Funções de uma Variável. 11ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2011.

[10] LIPSCHUTZ, Seymour e LIPSON, Marc; Matemática Discreta. 2ª Edição. Bookman, Porto Alegre, 2004.

[11] LUCKESI, Cipriano Carlos; Avaliação da Aprendizagem: Componente do Ato Pedagógico. 1ª Edição. Cortez, São Paulo, 2011.

[12] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. et. al.; Tópicos de Teoria dos Números. 1ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[13] MORGADO, Augusto César e CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Matemática Discreta. . 1ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[14] NETO, Antonio Caminha Muniz; Tópicos de Matemática Elementar volume 1: Números Reais. 1ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[15] NETO, Antonio Caminha Muniz; Tópicos de Matemática Elementar volume 3: Introdução à Análise. 1ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[16] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; Tópicos de História da Matemática. 1ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[17] ROQUE, Tatiana; História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desvendando Mitos e Lendas. 1ª Edição. Zahar, Porto Alegre, 2012.

[18] WALL, Edward S.; Teoria dos Números para Professores do Ensino Fundamental. 1ª Edição. Mc Graw Hill, Porto Alegre, 2004.