FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

JULIANA GONÇALVES FONSECA

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS REAIS: O ESTUDO DE EXPRESSÕES DECIMAIS.

.

DOURADOS/MS - 2013

JULIANA GONÇALVES FONSECA

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS REAIS: O ESTUDO DE EXPRESSÕES DECIMAIS.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT oferecido pela UEMS, sob orientação do Professor Dr. Alberny Alves Ferreira como exigência para a conclusão do curso.

DOURADOS/MS - 2013

JULIANA GONÇALVES FONSECA

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS REAIS: O ESTUDO DE EXPRESSÕES DECIMAIS.

Profº. Dr.: Alberny Alves Ferreira – Professor Orientador

Profº. Dr.: Robert Jesús Rodríguez Reyes – Professor Avaliador

Profº. Dr.: Vando Narciso – Professor Avaliador

DOURADOS/MS - 2013

Dedico este trabalho ao meu pai Gilson Rodrigues Fonseca e a minha mãe Nadir Gonçalves Fonseca.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus.

Agradeço aos idealizadores do PROFMAT, bem como à todos aqueles que fizeram possível a existência deste programa.

Agradeço ao Professor Dr. Lucélio Ferreira Simião, o qual por acaso encontrei, em uma tarde de Dezembro de 2010 (no Atacadão), e foi quem gentilmente me informou e esclareceu sobre o PROFMAT. Naquela mesma tarde eu iniciei meus estudos preparatórios para a prova de seleção.

Agradeço em ordem cronológica, aos professores Drª Maristela Missio, Dr. Fábio Rodrigues Lucas, Dr. Aguinaldo Lenine Alves, Ms. Luiz Oreste Cauz, Ms. Rildo Pinheiro do Nascimento, Dr. Alberny Alves Ferreira, Dr. Odival Faccenda, Dr. Vando Narciso, Mrª. Adriana Betânia de Paula Molgora; pelo profissionalismo e dedicação que demonstraram durante todo o curso. Aprendi muito com vocês.

Agradeço às minhas irmãs Joana Darc Gonçalves Fonseca e Jussara Gonçalves Fonseca, pela amizade e companheirismo.

Agradeço à meu orientador Dr. Alberny Alves Ferreira, pela paciência, atenção e dedicação.

Agradeço aos meus colegas mestrandos, turma 2011, e a todos que me ajudaram de forma direta ou indireta nessa caminhada.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre a Representação Decimal dos Números Reais, mais especificamente por meio da sua Expressão Decimal. Verificando as dificuldades encontradas pelos alunos (independente do período em que estudam, sejam alunos do Ensino Fundamental ou do Médio e de diferentes classes sociais), em identificar e conceituar corretamente Números Racionais ou Irracionais, bem como aplicar tais conceitos quando são necessários na interpretação de intervalos, na descrição de conjuntos soluções de inequações ou na determinação de domínio e imagem de diferentes funções em variadas situações. Neste sentido, este trabalho visa à importância desse estudo, já que a forma mais comum de representar os Números Reais é por meio de expressões decimais. Toda Expressão Decimal representa um Número Real e todo Número Real pode ser representado por uma Expressão Decimal. O fechamento do trabalho se dá com o uso do conceito de Série como ferramenta para encontrar a Fração Geratriz de uma Expressão Decimal Periódica e com o Estudo do maior número de Irracionais que o de Racionais no conjunto dos Números Reais.

Palavras chave: Números Reais, Expressões Decimais e Fração Geratriz.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

O conceito de Números Reais no estudo de Matemática é de fundamental importância, nos mais diversos níveis que se possa ocorrer este estudo.

Compreender bem este conceito é essencial para que se possa discutir com segurança aspectos como determinação correta do conjunto Domínio e do conjunto Imagem de dada função, na delimitação correta de um conjunto solução de dada inequação, enfim, entre outras inúmeras situações, reconhecer com segurança a racionalidade ou irracionalidade de um dado número.

Na educação básica, o estudo de Conjuntos Numéricos nas séries finais de Ensino Fundamental, consiste em parte substancial da Ementa Curricular de Matemática, atualmente vigente em nosso sistema de ensino, e regulamentada pela Secretaria Estadual de Mato Grosso do Sul e pela Secretaria Municipal da cidade de Dourados.

Ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental, são feitas formalizações, vindo a tornarem-se conceitos de alguns Conjuntos Numéricos, bem como, a apresentação de propriedades particulares a cada Conjunto. (Especialmente nos 4º e 5º ano onde são explorados o Conceito de Frações e de sua Representação Decimal).

Mas é nas séries finais do Ensino Fundamental onde tais conceitos e propriedades começam a ser definidos e tratados mais formalmente, como por exemplo: Leitura, Escrita, Comparação e Ordenação de números Naturais, Inteiros e Racionais; Conjunto dos números Naturais, Inteiros e Racionais; Reta Numerada; Conjuntos Numéricos (N, Z, Q, I e R) e Representação Decimal Finita e Infinita em Q.

No ensino médio, o estudo dos Conjuntos Numéricos também consta na Ementa curricular, porém apenas no primeiro ano.

Em um levantamento de informações realizado por meio de um questionário aplicado em novembro de 2012, em três Escolas Públicas da cidade de Dourados, duas localizadas na região Central e uma localizada no Bairro Jardim Água Boa, para 171 alunos, todos cursando o primeiro ano do ensino médio, verificou-se que eles possuíam faixa etária média de 15 anos e 2 meses, e que declararam estudar Matemática em média 0,94 horas diárias (inclusive na escola).

Observou–se os seguintes posicionamentos, informados pelas tabelas:

Questão 01. A fração – é o mesmo que?

Alternativas	Percentual de respostas
3,5	34,50%
1,7	4,64%
0,6	52,09%
0,35	8,77%

Questão 02. O decimal 0,36 é um número racional?

Alternativas	Percentual de respostas
sim	58,48%
não	25,73%
não sei responder	15,79%

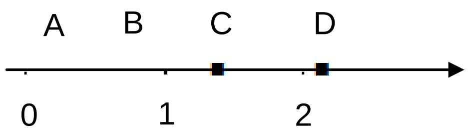
Questão 03. O número 0,3333… é um número:

Alternativas	Percentual de respostas
Racional	20,46%
Irracional	71,94%
não sei responder	7,6%

Questão 04. O número 0,101001000… é um número:

Alternativas	Percentual de respostas
Racional	17,54%
Irracional	71,35%
não sei responder	11,11%

Questão 05. A fração – está representada mais corretamente na reta abaixo através do ponto:



Souberam responder corretamente	Não souberam responder corretamente
46,79%	53,21%

Questão 06. Um número que é racional é também um número real?

Alternativas	Percentual de respostas
sim	76,61%
não	14,03%
não sei responder	9,36%

Questão 07. Um número que é irracional é também um número real?

Alternativas	Percentual de respostas
sim	51,46%
não	37,43%
não sei responder	11,11%

Questão 08. Um dado número pode ser classificado como racional e irracional ao mesmo tempo?

Alternativas	Percentual de respostas
sim	20,47%
não	63,16%
não sei responder	16,37%

Ainda, 67,84% dos alunos assinalaram que um número racional é aquele que pode ser escrito na forma de fração, enquanto que 24,56% assinalaram que um número racional é aquele que não pode ser escrito na forma de fração. 7,6% dos alunos não souberam responder esta questão.

Observou-se que 80,7% dos alunos assinalaram que um número irracional é representado na forma decimal infinita, enquanto que 11,7% assinalaram que um número irracional é representado na forma decimal finita e 7,6% não souberam responder esta questão.

Nota–se que mesmo estudando tais conceitos durante o decorrer do Ensino Fundamental, e tendo voltado a vê-los no primeiro bimestre (período decorrente do início do ano letivo, em fevereiro, até o final do mês de abril), parte considerável de alunos ainda se sentem inseguros a cerca destes conceitos, pois 71,94% consideraram 0,33333… como irracional e mesmo 52,09% dos alunos reconhecendo a fração – como sendo igual a 0,6 têm–se que 53,21% destes mesmos alunos não souberam localizar $-$ na reta real.

O PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma Rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática. O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.

O Programa opera em ampla escala, com o objetivo de, em médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo o território nacional.

Os objetivos do PROFMAT são consistentes com a missão estatutária da Sociedade Brasileira de Matematica que é de *"Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis"* e também vem ao encontro da Proposta de Lei PL-8035/2010 (Plano Nacional de Educação), que coloca como um dos objetivos nacionais para o decênio 2011 - 2020 "Formar cinquenta por cento dos professores da educação básica em nível de pós-graduação **lato** e **stricto sensu** e garantir a todos formação continuada em sua área de atuação".

O Profmat através das disciplinas componentes em sua grade curricular permite um estudo satisfatório do tema abordado - Representação Decimal de Números Reais; propiciando assim um acesso ao aprofundamento de conceitos referentes a este tema, favorecendo um estudo crítico e substancial a cerca deste assunto, permitindo estudos futuros sobre o tema.

O formato do curso oportuniza o estudo aprofundado de conceitos matemáticos fundamentais que são por sua vez a base de parte significativa da Matemática a ser lecionada na educação básica, proporcionando a capacitação do professor e oportunizando estudos sobre temas relevantes e inerentes ao Ensino de Matemática.

A forma mais comum de representar os Números Reais é por meio de Expressões Decimais e estas são modelos que representam somas de parcelas cada vez menores que convergem para um Número Real, desta forma permitem a compreensão da completude dos Números Reais de uma forma mais lógica e indutiva.

O estudo das Expressões Decimais permite a definição de uma caracterização de um número racional e, por conseguinte de um número irracional.

É possível estabelecer critérios na obtenção de uma expressão decimal que represente um racional finito ou infinito. Pela sua característica, a expressão decimal periódica permite o uso do conceito de Séries como ferramenta para se calcular a sua Fração Geratriz, que é o limite para onde ela converge.

Após o estudo das Expressões Decimais é feita uma discussão fundamentada e consciente sobre a quantidade superior de números irracionais em relação ao número de números racionais, dentro do conjunto dos números reais.

E importante salientar que direcionar a inserção do conceito de um número racional, bem como os conceitos de números irracionais e de reais, fundamentados em processos submetidos a uma lógica que expliquem suas caracterizações e justifiquem seus comportamentos, perpassa a adoção de metodologias didáticas na hora de ensinar, este direcionamento requer antes disso, conhecimento daquilo que se pretende ensinar. E, ter conhecimento satisfatório do que se pretende ensinar melhora substancialmente a qualidade desse ensino. Este é um dos objetivos do Profmat.

2 - METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido através de revisões bibliográficas, resoluções de exercícios sobre o tema com estudo de teoria e coleta de dados.

Foi de fundamental importância o estudo das disciplinas MA 11 – Números, Conjuntos e Funções Elementares e MA 22 – Fundamentos de Cálculo, na orientação das abordagens sobre o tema, bem como por dispor de material apropriado.

A revisão bibliográfica foi feita na biblioteca da UEMS (Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul). Foram consultados livros sobre análise real e calculo 1, além do material disponibilizado nas unidades 3 e 4 da MA 11 – 2011 e nas unidades 4 e 5 da MA 11 – 2012, além das unidades 1, 2 da MA 22 – 2012. Os títulos estão listados na bibliografia.

A coleta de dados foi feitas nas Escolas Estaduais: Antônia da Silveira Capilé, Presidente Vargas e Menodora Fialho de Figueiredo.

Foram entrevistados 171 alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Os alunos receberam um questionário (modelo anexo), onde foram arguidos sobre questões referentes aos Números Reais, abordando conceituação de Números Racionais, conceituação de Números Irracionais e representação decimal de um racional fracionário.

Foram tabulados os dados, calculado a média etária dos alunos e calculados os valores percentuais de cada resposta assinalada no questionário pelo aluno. As tabelas foram elaboradas com auxílio da planilha eletrônica Microsoft Excel.

3 - OS NÚMEROS REAIS

Adotando uma abordagem axiomática, afirmamos que o conjunto dos Números Reais forma um Corpo Ordenado Completo.

É um Corpo, pois os números reais possuem uma estrutura algébrica (constituída pelas operações de adição e multiplicação e de suas propriedades); É Ordenado pela existência da relação de ordem nos reais de forma compatível com suas operações (propriedades referentes à ordem, tricotomia e pelas leis de monotonicidades) e sua completeza se refere ao fato da reta real ser contínua (ausência de buracos).[1]

A noção central de completeza dos Números Reais está relacionada com a noção de convergência de sequências – Axioma da completeza: ”Toda sequência monótona e limitada de números reais converge para algum número real”.

Como uma expressão decimal é uma soma infinita, uma série, diremos que ela converge quando a sequência de suas somas parciais for convergente, ou seja, são convergentes sempre.[2]

Isto assegura o seguinte enunciado: “Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal”.

A relação de ordem em R, quando os seus elementos são representados por expressões decimais, traduz-se de forma lexicográfica.

O Conjunto dos Números Reais é formado pela união entre os Conjuntos dos Números Racionais e os Conjuntos dos Números Irracionais.[1]

3.1 - REPRESENTAÇÃO DECIMAL

A forma mais comum de representar os números reais é por meio de expressões decimais. Basta considerar os Números Reais positivos, pois para tratar de números negativos, basta acrescentarem o sinal de menos.

Uma expressão decimal é um símbolo de forma

em que é um número inteiro ≥ 0 e são dígitos, isso é números inteiros tais que 0 ≤ < 10. Para cada n ∈ N, tem–se um dígito , chamado o n-ésimo dígito da expressão decimal α.

O número natural chama-se a parte inteira de α.

A expressão decimal α corresponde a uma forma de representar a soma

— — —

O significado das reticências no final da expressão, dão a entender de que se trata de uma soma com infinitas parcelas, mas o significado preciso da igualdade acima é que o numero real α tem por valores aproximados os números racionais

— — —

Quando se substitui α por o erro cometido não é superior a —.

Assim, é o maior número natural contido em α, é o maior dígito tal que — , é o maior dígito tal que — — , etc.

Deste modo tem-se uma sequência não decrescente de números racionais que são valores (cada vez mais) aproximados do número real α.

Mais precisamente, tem-se 0 para cada n = 1, 2, 3, ...

Diz-se que o numero real α é o limite desta sequencia de números racionais.

O fato de que existe sempre um numero real que é limite desta sequencia (isto é, que tem os como seus valores aproximados) é uma forma de dizer que o corpo ordenado dos números reais é completo, portanto o nosso axioma da completeza lê-se:

Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal. [1]

3.1.1 - Representação Decimal dos Racionais

Algumas características particulares das expressões decimais correspondem a propriedades específicas dos números que elas representam.

Expressões decimais finitas e infinitas - periódicas (simples ou compostas) representam números racionais, e reciprocamente todo número racional – é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica (simples ou composta).

3.2 - EXPRESSÕES DECIMAIS FINITAS

São aquelas que a partir de certo ponto, todos os dígitos a_n se tornam iguais a zero;

Então, é um numero racional; na realidade uma fração decimal (fração cujo denominador é uma potência de 10).

Mas ocorre que uma fração decimal sempre pode ser representada por duas expressões decimais distintas. Toda fração decimal pode ser também escrita como dízima periódica, basta que subtraia uma unidade do seu último algarismo não nulo e acrescente uma sequencia infinita de algarismos nove.

Por exemplo, assim = 0,25 = 0,24999… [3]

3.3 - EXPRESSÕES DECIMAIS INFINITAS - PERIÓDICAS

Comecemos com o caso mais simples, que é também o mais intrigante. Trata-se da expressão decimal, ou seja, do numero real.

Afirmamos que α = 1. De fato, os valores aproximados de α são , , , etc. Ora,

- ; - ; … - ; … ; -

Vemos que tomando n suficientemente grande, a diferença - pode tornar-se tão pequena quanto se deseje, ou seja, os números racionais são valores cada vez mais aproximados de 1, ou seja, têm 1 como limite.

A igualdade 1 = 0,999… é facilmente compreendida após se esclarecer que o símbolo 0,999... na realidade significa o número cujos valores aproximados são 0,9, 0,99, 0,999, etc. E, como vimos acima, esse é o numero

1, e é importante entender que 0,999… representa o próprio limite da sequência de números racionais cujos termos são em que o dígito 9 aparece n vezes. Portanto esse número é o 1, e não uma aproximação de 1.

Uma vez estabelecido que

Resulta imediatamente que

Consequentemente, para todo dígito a, tem-se

Podemos ir mais além, observando que

Obtemos

Logo

Daí o resultado que,para quaisquer dígitos a e b,tem –se

0,abab... = , então 0,abab... = . [1]

3.3.1 - Dizima Periódica Simples

Uma expressão decimal chama-se dízima periódica simples**,** de período , se os primeiros p dígitos após a vírgula repetem–se indefinidamente na mesma ordem.

Para indicar de forma mais precisa o período, empregamos também a notação

Adaptando o raciocínio acima para p natural, fixo, podemos generalizar a fórmula para uma dízima periódica cujo período tem p dígitos.

Observando que:

Obtemos

Logo,

Portanto para quaisquer p dígitos têm - se que:

Na expressão acima, lembramos que = 9…9 (em que o dígito 9 aparece p vezes).

Este argumento permite-nos concluir que toda dízima periódica simples representa um número racional. [1]

3.3.2 - Dizima Periódica Composta

São aquelas que depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica.

Uma expressão decimal chama-se uma dízima periódica composta, de período, se os p dígitos, de posições m+1 a m+p, após a vírgula repetem-se indefinidamente na mesma ordem.

Para obter de forma generalizada, a fração geratriz de uma dízima periódica composta, procede-se:

Multiplicando ambos os lados da igualdade por :

Logo,

Este argumento permite-nos concluir que toda dízima periódica composta representa um número racional. [1]

3.4 - EXPRESSÕES DECIMAIS INFINITAS E NÃO PERIÓDICAS

Neste caso, assim como no periódico, temos uma infinidade de algarismos à direita da vírgula e assim só nos é possível escrever a representação decimal até uma certa casa decimal, porém, diferentemente do que acontece no caso periódico, não há repetição indefinidamente de um determinado grupo de algarismos e, assim, o número em questão não pode ser obtido como uma fração – com p e q inteiros e q diferente de 0.

Os números que podem ser obtidos como frações são chamados *racionais;* os que não podem ser obtidos como frações são chamados irracionais.[4]

O número π, por exemplo, possui valor irracional, ou seja, é expresso por uma expressão decimal infinita e não periódica.

Quando escrevemos devemos entender que o segundo membro desta igualdade representa uma sequência infinita de expressões decimais finitas cujos primeiros termos são:

3 3,1 3,14 3,141 3,1415 3,14159 etc

Cada expressão decimal dessa sequência representa um valor aproximado de π e só se pode obter uma aproximação melhor por falta, acrescentando novos algarismos decimais, sem alterar os que já estão lá.

A densidade de Q nos garante que existem números racionais tão próximos de π quanto queiramos.[3]

3.4.1 - A Expressão Decimal de um Irracional é Única

Todo número irracional positivo possui uma representação decimal *única* por meio de uma dízima *não periódica*. Para simplificar vamos nos restringir aos números entre 0 e 1.

Afirmamos que essa representação é única. (Repare que isso não ocorre em geral com os racionais. Por exemplo, 0,21 e 0,20999… representam o mesmo racional —).

Demonstração

Suponhamos que um irracional *x* entre 0 e 1 possua duas representações decimais distintas:

x = 0, (i) e x = 0, (ii)

Se essas representações são distintas certamente existe um $p \in$ N tal que para k = 0, 1,…, p – 1 e .

Para fixar idéias vamos assumir então que e por (i) e (ii)

x ≥ 0, , (iii)

x ≤ 0, 999... = 0, (iv)

já que se k = 0, 1, ..., p – 1 e é sempre menor ou igual a 9.

Mas (iii) e (iv) implicam que e x = 0, .

Porém nesse caso *x* é racional e chegamos a uma contradição!

Chegaríamos a uma contradição semelhante também se tivéssemos assumido , argumentando da mesma forma apenas trocando os papéis dos e .

A contradição tem origem no fato de termos suposto que havia duas representações decimais distintas para o mesmo irracional *x*.

Logo essa possibilidade tem que ser descartada, considerada falsa, e assim concluímos que todo irracional possui uma representação decimal única como dízima não-periódica.[4]

3.4.2 - Usando ferramentas de Séries para aproximar alguns Irracionais por meio de suas Expressões Decimais

As séries de potência são um caso particularmente importante das séries de funções, com inúmeras aplicações tanto práticas quanto teóricas.

São usadas na resolução de muitos problemas usando derivadas e integrais, usadas na resolução de muitos problemas numéricos, facilitando a sua compreensão.

3.4.2.1 - Aproximação de *e* Pelo Polinômio de Maclaurin

Tomando x = 1, obtemos,

3.4.2.2 - Aproximação de *e* Pelo Polinômio de Taylor

Tomando x = 1, obtemos,

3.4.2.3 - Aproximação do Valor de Π

Usando série de potência mostremos que

Tomando x = 1, obtemos,

ou

[5]

3.5 - FRAÇÃO GERATRIZ

A representação de uma dízima periódica na forma de fração é chamada Fração Geratriz da dízima periódica.

A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.

A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica, seguida de um período menos a parte não periódica, e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica. [1]

3.5.1 - Frações Decimais

Uma fração decimal é, por definição, uma fração (ordinária) cujo denominador é uma potência de 10.

Cabe ainda citar que, frações cujo denominador contenha fatores primos iguais a 2 e 5, podem ser escritas na forma de fração decimal.

Uma fração ordinária irredutível – quando é equivalente a uma fração decimal, gera uma expressão decimal exata (finita), quando q é da forma ,

m, n [3]

3.5.2 - Frações não Decimais

Mesmo que uma fração ordinária irredutível não seja equivalente a uma fração decimal (quando o denominador contém algum fator primo diferente de 2 ou 5), ela pode ser escrita "sob forma decimal". O segredo está em admitir expressões decimais ilimitadas.

Vejamos um exemplo:

Uma maneira de transformar uma fração ordinária como — em fração decimal consiste em escrever 3 como 3,0 ou 3,00 ou 3,000 etc (o número de zeros fica à critério) e efetuar a divisão por 11. Se tomarmos quatro zeros, por exemplo, obteremos o quociente 0,2727 e, no lugar do resto, aparece o algarismo 3. Isto quer dizer que o resto é 0,0003 (já que fomos até décimos de milésimos). Como o dividendo é igual ao divisor vezes o quociente mais o resto, temos 3,0000 = 11 x 0,2727 + 0,0003.

Dividindo ambos os membros desta igualdade por 11 e escrevendo 0,0003 sob forma de fração ordinária, obteremos: — = 0,2727+———.

Isto quer dizer que, se substituirmos a fração ordinária — pela expressão decimal 0,2727, cometermos um erro igual a ———.

O mesmo raciocínio mostra que, em geral, se em lugar de escrevermos a expressão decimal 0,2727... 27 (com o período 27 repetido por n vezes) o erro cometido será uma fração cujo denominador é 3 e cujo denominador é 11x .

Este erro se torna menor, a medida que n cresce. Tomando n suficientemente grande, podemos tornar o erro tão pequeno quanto desejemos.

Assim, as expressões decimais 0,27, 0,2727, 0,272727 etc; Constituem valores aproximados da fração ordinária — .

Quanto maior for o número de algarismos decimais tomados, menor será o erro cometido, isto é, melhor será a aproximação.

Por isso, quando escrevemos — = 0,2727 não estamos afirmando que — = 0,2727 , as reticências no fim do símbolo 0,2727… significam que ele não representa somente uma única expressão decimal, mas sim a sequencia infinita de expressões decimais, as quais são valores aproximados de —.

Generalizando:

Para obter a expressão decimal do número racional –, faz-se o processo de divisão continuada de p por q, acrescentando-se zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não nulo.

Não é difícil perceber por que esse processo gera dízimas periódicas. Como nas divisões sucessivas só podem ocorrer os restos 0, 1, 2, … q – 1, após no máximo q divisões um resto vai repetir-se e, a partir daí, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, logo tem-se uma expressão periódica.

De forma mais geral, o procedimento pode ser descrito como a seguir:

Primeiro, divide-se p por q, obtendo-se , em que pertence a N é o quociente e pertencente a N, < q, é o resto.

Isto é equivalente a escrever:

Podemos concluir então que é a parte inteira de

No segundo passo, acrescenta-se um 0 à direita do resto , o que corresponde a multiplicá-lo por 10, e divide-se o número obtido novamente por q.

Assim, obtém-se em que é o quociente e , é o resto. Isso é equivalente à:

Donde se pode concluir que .

Logo, podemos escrever a expressão acima da seguinte forma:

Juntando (i) e (ii), obtemos:

Generalizando o raciocínio acima, podemos concluir que:

Se o processo de divisões sucessivas for continuado indefinidamente, obteremos a expressão decimal do número .

As dízimas periódicas surgiram como um recurso para transformar certas frações ordinárias em frações decimais. [3]

3.5.3 - Casos em que Frações não Decimais Geram Dízimas Periódicas Simples

Primeiramente, vamos estudar os seguintes resultados:

Lema 1: Todo número natural q, primo com 10, tem um múltiplo cuja Representação decimal é formada apenas por noves.

Demonstração

Há uma infinidade de números, tais como 9, 99, 999, etc, formados apenas por algarismos 9. Quando divididos por q, esses números deixam restos que vão de 0 a q – 1, ao todo um número finito de restos possíveis. Logo, existem dois números formados por noves, os quais divididos por q deixam o mesmo resto. A diferença entre esses dois números é, por um lado divisível por q e, por outro lado, um número formado por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. Tem-se então que n.q = 99... 90 .... 0 = 999....9 x . Assim, q divide o produto 99....9 x e, como é primo com , concluímos que q divide 99....9.

Lema 2: Todo número natural q tem um múltiplo cuja representação decimal é formada por uma série de noves seguidos de uma série de zeros. O menor múltiplo de q desta forma termina com um número de zeros igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou de 5 pela qual q é divisível.

Demonstração

Temos q = , onde é primo com 10. Para fixar idéias, suponhamos . Então a é o maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual q é divisível. Seja n o menor número natural tal que n. = 99....9. Então o menor múltiplo de q formado por noves seguidos de zeros é

(com a zeros no final)

Desses Lemas resulta imediatamente;

Teorema. Toda fração irredutível – é equivalente a uma fração cujo denominador tem uma das formas 100...0, 999....9 ou 999...90...0. Ocorrem os seguintes casos:

1) Se q = então – —— ;

2) Se q é primo com 10 então – —— ;

3) Se q = onde é primo com 10, então – ——— ;

Nos casos 1 e 3, se o numerador n não terminar em zero, o número de zeros do denominador é igual ou maior dos expoentes de a ou b.

Demonstração

Basta multiplicar o numerador e o denominador da fração – pelo mesmo número, escolhido de modo que o novo denominador tenha a forma desejada, o que é possível em virtude dos lemas anteriores.

Vejamos alguns exemplos:

Dada a fração —. Para obter uma fração do tipo – —— equivalente a ela, devemos efetuar a divisão de 99 por 37, (acrescentando noves ao dividendo até que o resto seja 0, o que sempre é possível em virtude do lema 1). Como 37 x 27 = 999, podemos escrever — —— ——

Dada a fração ——. Temos 260 = . Começamos com — a divisão prolongada acrescentando noves ao dividendo nos dá que 13 x 76923 = 999999. Daí resulta que .

Vejamos agora o que ocorre quando se procura transformar a fração ordinária em decimal. Em primeiro lugar, se q = então

se e se . Neste caso obtemos uma decimal exata ou finita.

Em seguida, suponhamos que o denominador q da fração seja primo com 10. Pelo teorema acima, é equivalente a uma fração da forma .

Sem perda de generalidade, podemos supor que a fração dada é própria. Se for imprópria, separamos a parte inteira para colocar antes da vírgula.

Temos a fração , cujo denominador tem m algarismos iguais a 9. Sendo ela própria, seu numerador n é um número de, no máximo m algarismos.

Completando com zeros a esquerda, podemos admitir que n tem exatamente m algarismos. Com esta convenção, podemos afirmar, que transformando em fração decimal, obtemos a dizima periódica 0,nnn...

A prova se baseia na fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, segundo ela, então em particular, temos:

[3]

3.5.4 - Casos em que Frações não Decimais Geram Dízimas Periódicas Compostas

Se a fração própria irredutível tem o denominador divisível por 2 ou por 5 e, além disso, por outro primo diferente desses, então é equivalente a uma fração do tipo onde podemos admitir que o numerador n não termina em zero .

Neste caso, ao transformar em decimal, obtemos uma dizima periódica composta na qual a parte não periódica tem tantos algarismos quantos são os zeros do denominador acima.

e recair no caso anterior. Evidentemente, não pode ser uma fração própria mas sua parte inteira tem no máximo m algarismos (já que a fração original era própria). Então completando a parte inteira de com zeros a esquerda, podemos admitir que ela tem m algarismos e estes serão precisamente os algarismos não periódicos.

Exemplos :

[3]

3.5.5 - Conceito de Séries para Mostrar a Convergência das Expressões Decimais Infinitas e Periódicas para sua Fração Geratriz

Ao fazermos operações com dízimas periódicas para obter frações geratrizes, estamos na verdade efetuando operações com limites – que só são legítimas porque sabemos de antemão que as séries envolvidas (expressões decimais), são convergentes. [6]

Sejam as sequências

= 0,6 ;

= 0,6 + 0,06 = 0,66 ;

= 0,6 + 0,06 + 0,006 = 0,666 ;

= 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 = 0,6666

.

.

.

= 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + … = 0,6666...

Escrevendo as parcelas da soma infinita (série) como frações ordinárias, temos:

Que podemos escrever;

Onde é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q = — , e por conseguinte:

Assim, = –.

Daí = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + ... = 0,6666... = – [5]

Vejamos outro exemplo:

Sejam as sequências:

= 2 ;

= 2 + 0,3 = 2,3 ;

= 2 + 0,3 + 0,01 = 2,31 ;

= 2 + 0,3 + 0,01 + 0,007 = 2,317

.

.

.

= 2 + 0,3 + 0,01 + 0,007 + 0,0001... = 2,3171...

Podemos escrever

= 2,3 + 0,0171… = — + —

Aplicando limite tendendo ao infinito, teremos

[2]

3.6 - DENSIDADE DOS RACIONAIS

A Propriedade Arquimediana: “Dado um número real , sempre existe um número natural n tal que n > , nos diz que os números racionais formam um conjunto denso nos números reais, ou seja, dados α e β reais, com $\alpha < \beta$, existe um racional r tal que $\alpha < r < \beta$.

No contexto dos números reais, a densidade em Q é mais útil que a densidade em R \ Q.

Um ponto a favor dos racionais em relação aos irracionais é a escrita simples que estes números representam – .

Um outro ponto a favor dos racionais é a sua enumerabilidade (a existência de uma função bijetora de N em Q, capaz de informar sua cardinalidade).

Assim, em muitos casos, para provar que um resultado é valido para todo número real, provamos para os racionais a partir da validade do resultado para os inteiros, e só depois provamos para os irracionais usando aproximações por racionais, ou seja, usando a densidade de Q em R.[1]

3.7. - A EXISTÊNCIA DE MAIOR NÚMERO DE IRRACIONAIS QUE DE RACIONAIS

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), matemático russo, foi a primeira pessoa a provar que existem diferentes números cardinais infinitos.

Mais precisamente, os conjuntos N e R são ambos infinitos mas ele mostrou que não pode existir uma função sobrejetiva f: N R.

Em particular, não pode existir uma correspondência biunívoca entre N e R. Como existe uma função injetiva de N em R, (função identidade), diz-se que a cardinalidade de N é estritamente menor que a de R.

Quando um conjunto é finito ou tem o mesmo número cardinal que N, diz-se que ele é enumerável.[6]

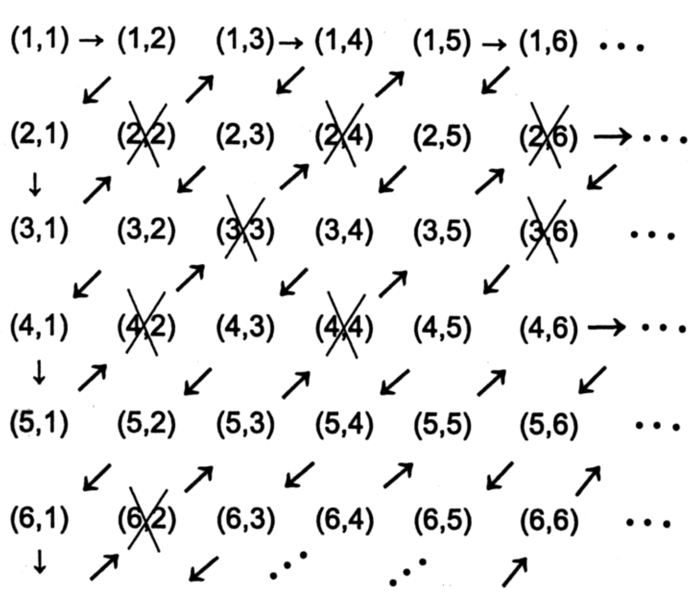
3.7.1 - Os Números Racionais Podem ser Enumerados

Isto significa que podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma   com uma infinidade de elementos. Podemos interpretar este fato como significando que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é de uma "ordem de infinitude" equivalente a dos números naturais 1, 2, 3….

O argumento para a demonstração desse fato é devido a *Georg Cantor*.

Como todo racional tem uma representação única como fração – com *p* e *q* inteiros positivos primos entre si, basta que saibamos enumerar os pares ordenados (*p*, *q*) de naturais primos entre si.

A forma de obter essa enumeração está descrita pela figura abaixo:



A enumeração é obtida seguindo-se o caminho indicado pelas flechas, iniciando a partir de (1,1), tendo o cuidado de descartar os pares de naturais que não são primos entre si, como, por exemplo, (2,2), (4,2), (3,3) etc..

Com isso, teríamos:

– – – – – etc.

3.7.2 - Os Irracionais não Podem ser Enumerados

Isto significa que não podemos dispor os números irracionais numa sucessão mesmo admitindo uma infinidade de elementos. Quer dizer, diferentemente dos racionais, a “ordem de infinitude” da quantidade dos números irracionais é maior que a dos números naturais. Concluímos daí que existem muito mais números irracionais do que racionais!

Vamos tentar justificar nossa afirmação sobre a não-enumerabilidade dos irracionais. O argumento é uma adaptação de uma ideia também devida a *G*. *Cantor*. Suponhamos que fosse possível dispor os irracionais numa sucessão . Basta considerarmos apenas os irracionais entre 0 e 1. Criamos um número irracional *x*, também entre 0 e 1, através de uma representação decimal (portanto, uma dízima não periódica) da seguinte forma. O número *x* tem representação decimal dada por x = 0, onde é escolhido dentro do conjunto {0, 1, … 9} de modo que é diferente de onde este último é o algarismo que aparece na casa decimal de ordem *p* do irracional (*p*-ésima elemento da sucessão . A escolha de cada também deve atender a condição de não permitir que nenhum grupo de algarismos dentre os já escolhidos possa se tornar o gerador de uma dízima periódica. Desta forma obtemos uma dízima não periódica representando um único irracional que, no entanto, não pode constarna lista .

De fato, se x = s, para algum r então como teríamos um absurdo (uma contradição)! [4]

3.7.3 - Os Reais não Podem ser Enumerados

A demonstração de Cantor consiste em mostrar que, dada qualquer função f:N R, é sempre possível achar um número real y que não pertence a imagem de f(N), isto é, tal que f(n) ≠ y, seja qual for n N.

Basta tomar um número real y cuja representação decimal tenha seu n-ésimo dígito diferente do n-ésimo dígito de f(n), onde n = 1, 2, 3, …. Isto garante que y ≠ f(n), seja qual for n N, portanto y f(N).

Com este argumento, Cantor mostra que R é não enumerável.

A reunião de conjuntos enumeráveis é também um conjunto enumerável, se chamarmos de o conjunto dos números irracionais, teremos R = , como é enumerável e R não é, resulta que o conjunto dos números irracionais é não enumerável.

Isto significa que existem muito mais números irracionais do que racionais.

Se pensarmos na representação decimal de um número real, como os racionais são expressos por dízimas periódicas e os irracionais não, podemos verificar do ponto de vista intuitivo o seguinte: se pudéssemos formar uma expressão decimal infinita, sorteando ao acaso, dígito por dígito de 0 a 9, a probabilidade de obtermos um irracional é muito maior que a de obtermos um racional. Isto seria como jogar um dado honesto infinitamente e esperar que os dígitos obtidos aleatoriamente se repetissem em um mesmo padrão para sempre!

De fato, a probabilidade de obtermos um número racional com este processo é igual a zero. [6]

3.8 - CORRESPONDENCIA ENTRE EXPRESSÕES DECIMAIS E NÚMEROS REAIS

A correspondência que associa a cada expressão decimal um número real é uma função sobrejetiva e quase injetiva.

É sobrejetiva pois, dado arbitrariamente um número real positivo α, existe uma expressão decimal tal que

Considerando , obtemos a expressão decimal de , tomando sucessivamente:

= maior numero natural ≤

= o maior dígito tal que

= o maior dígito tal que

.
.
.

= o maior dígito tal que

Por exemplo, quando escrevemos que estamos dizendo que:

3 < < 4;

3,1 < < 3,2;

3,14 < < 3,15 , etc

É quase injetiva pois, se 0 ≤ ≤ 8, então as expressões decimais e definem o mesmo número real.

Por exemplo, 3,275999.... = 3,276000…

Cabe dizer que apenas nestas situações há a quebra da injetividade, daí, para se ter uma correspondência biunívoca entre os reais e as expressões decimais, basta descartar aquelas que terminam por uma sequência infinita de noves. [1]

4 - CONCLUSÕES

Toda expressão decimal representa um número real a todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.

Expressões decimais finitas e infinitas - periódicas (simples ou compostas) representam números racionais, e reciprocamente todo número racional – é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica (simples ou composta).

Uma fração ordinária irredutível – , quando transformada em decimal, gera uma expressão decimal exata (finita) quando q é da forma .

Uma fração ordinária irredutível – , quando transformada em decimal, gera uma dízima periódica quando q é divisível por algum número primo diferente de 2 ou 5.

Uma fração ordinária irredutível – , quando transformada em decimal, gera uma dízima periódica simples (quando o período começa no primeiro algarismo decimal) quando q é primo com 10.

Uma fração ordinária irredutível – , quando transformada em decimal, gera uma dízima periódica composta (quando a parte decimal começa com alguns algarismos não periódicos, seguidos de alguns algarismos periódicos) quando q é divisível por 2 ou por 5 e além disso, por outro número primo.

O Conjunto dos Números Racionais é denso nos Reais.

Existe um número superior de irracionais em relação aos racionais dentro do conjunto dos números reais.

5 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Unidade 5 e 6 da MA – 11, PROFMAT 2012. Arquivo hospedado no site http://moodle.profmat-sbm.org.br/course.

[2] Unidade 1 da MA – 22, PROFMAT 2011. Arquivo hospedado no site http://moodle.profmat-sbm.org.br/course.

[3] Lima, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática, 1991.

[4] Frid, Hermano. Os Números Irracionais. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Artigo hospedado no site http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos, consultado em 16/01/2013 às 16h50min.

[5] Matos, Marivaldo, P. Séries e Equações Diferenciais. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

[6] Unidade 3 e 4 da MA – 11, PROFMAT 2011. Arquivo hospedado no site http://moodle.profmat-sbm.org.br/course.