Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos

Alexsandra Cândida Gonçalves

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:________________________

Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos

Alexsandra Cândida Gonçalves

Orientadora: **Profa. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA.*

USP – São Carlos
Março de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G635a Gonçalves, Alexsandra Cândida
Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos / Alexsandra Cândida Gonçalves; orientadora Esther Pacheco de Almeida Prado. -- São Carlos, 2015.
106 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Ensino do conceito de funções. 2. Ensino Médio. 3. Representações de funções. I. Pacheco de Almeida Prado, Esther , orient. II. Título.

À minha mãe Lázara que me apoiou desde quando decidi investir nessa profissão e me incentivou a transpor mais um obstáculo.

À minha irmã Lucinéia que me incentivou e deu força nos momentos mais importantes e decisivos de minha vida.

Ao Alberto, por sua paciência, tolerância e compreensão durante todo esse tempo em que estive me dedicando a essa formação.

Um trabalho dedicado a vocês!

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu força e fé para continuar trilhando esse caminho, principalmente nos momentos de angústia e apreensão em que pensei em desistir.

À Professora Doutora Esther Pacheco de Almeida Prado por toda colaboração e orientação durante esse trabalho, pela paciência e compreensão perante minhas limitações e dificuldades. Eterna gratidão...

Aos professores do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da USP São Carlos pela dedicação e paciência que tiveram durante esse trajeto, pelos ensinamentos e pelas experiências compartilhadas. Em especial, à Professora Doutora Ires Dias, que acreditou em cada um de nós e que nos apoiou e incentivou em todos os momentos.

Aos colegas do PROFMAT – 2011, pelas contribuições, amizade, incentivos, companheirismo e inquietações que vivenciamos.

Às minhas irmãs Carmem e Sandra, que mesmo distante, souberam apoiar no momento certo.

Aos amigos que me confortaram, apoiaram e incentivaram em todos os instantes, principalmente meus queridos companheiros Joe e Teodora.

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer."

Albert Einstein (1879 - 1955) - tradução própria

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos discutir questões relacionadas à formação do professor e ao ensino de funções no Ensino Médio, que respondam à questão: **Quais aspectos da história do conceito de funções podem contribuir para a compreensão desse conceito e das suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos?** É uma pesquisa bibliográfica na qual tomamos como base os materiais disponibilizados nas escolas públicas paulistas como, documentos de orientações oficiais e livros didáticos, e a contribuição de autores como Boyer (1974), Caraça (1984) e Courant e Robbins (2000) para entender a história desse conceito até sua formalização e compor uma Unidade de Ensino que possibilite ao professor (a) propor um trabalho com exemplos do cotidiano que mostrem claramente a relação de dependência entre duas variáveis, isto é, quais são as ideias iniciais do conceito de funções (b) entender como explicitar a lei que define uma função em uma relação que antecede a linguagem algébrica, (c) relacionar os itens anteriores com o conceito formal de funções, (d) propor o estudo dos gráficos de funções à identificação do domínio, contradomínio e imagem (e) relacionar as diversas representações de função mantendo a identidade dos elementos fundamentais do conceito de funções: variáveis dependentes e independentes; lei de formação; domínio-contradomínio-imagem; a relação entre as linguagens algébricas e a representação gráfica, por diagramas e gráficos cartesianos. Tal Unidade de Ensino procura enfatizar a importância de um ensino que priorize a articulação entre o conceito de funções e suas diversas representações, como forma de aprimorar o processo de ensino e de aprendizagem do conceito de funções.

Palavras-chave: Ensino do conceito de funções. Ensino Médio. Representações de funções.

ABSTRACT

This paper aims to discuss issues related to teacher education and teaching functions in high school, responding to the question: What aspects of the history functions can contribute to the understanding of their representations by diagrams, algebraic language and Cartesian graphs? It is a literature in which we take as a basis the materials available in the São Paulo public schools as documents of official guidelines and textbooks, and the contribution of authors such as Boyer (1974), Caraça (1984) and Courant and Robbins (2000) to understand the history of this concept to its formalization and compose a Teaching Unit that allows the teacher (a) to propose a work with everyday examples that clearly shows the dependency relationship between two variables, that is, what are the initial ideas of the concept of functions (b) to understand how to explain the law that defines a function in a relationship before the algebraic language, (c) to relate the above items with the formal concept of functions, (d) to propose the study of graphs of functions to the field of identification, range and image (e) to relate the various function representations keeping the identity of the key elements of the concept of functions: independent and dependent variables; law training; domain-range-image; the relationship between languages and algebraic graphing, by diagrams and Cartesian graphs. This Teaching Unit seeks to emphasize the importance of an education that prioritizes the relationship between the concept of functions and their various representations as a way to enhance the teaching and learning of the concept of functions.

Keywords: Concept Teaching functions. High school. Representations of functions.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

MEC - Ministério da Educação

PCN+EM - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PNLD - EM – Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

REDEFOR – Programa Rede São Paulo de Formação Docente

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na trajetória como professora de Matemática, desde a formação inicial em Licenciatura em Matemática pela UFSCar (1994 – 2000), o início da docência, como professora temporária, na rede de ensino estadual de São Paulo, em 1999, e a partir de 2004 como professora efetiva na rede estadual e a partir de 2009, na rede municipal de São Carlos, a busca por um melhor ensino de matemática que resultasse em um melhor aprendizado do estudante foi constante. Nesse processo, na busca de melhorar o modo de ensinar, foi possível acumular certa experiência e, obter algumas informações sobre como os estudantes aprendem alguns conteúdos e como o professor pode melhorar seu ensino. Muitas inquietações e dúvidas surgiram durante essa trajetória e permaneceram sem respostas, algumas necessitam ser melhor estudadas. Por exemplo, como se ensina um conteúdo específico para que o estudante tenha uma aprendizagem significativa? Como ser um professor que facilita a aprendizagem e faz com que os estudantes aprendam um conteúdo que inicialmente acham difícil?

Para tanto, com o intuito de solucionar essas dificuldades, tanto do ensino quanto da aprendizagem, algumas estratégias foram modificadas, tais como no desenvolvimento do estudo de funções, com a inserção das tecnologias para auxiliar a construção e interpretação de gráficos, a apresentação e a resolução de situações-problema que se aproximassem do cotidiano do estudante. Tais inserções pareceram ser insuficientes, pois solucionavam o problema de forma pontual, porque o conceito de funções[1] era tratado da mesma forma que com o giz e lousa. Se, por um lado, os estudantes se envolviam com as tecnologias dos softwares propostos, por outro, as dúvidas quanto ao conceito de funções permaneciam. Sendo assim, as reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem do conceito de funções, a busca por entender a origem das dificuldades desse processo de formação do conceito e as alternativas para o ensino e a prática em sala de aula definiram a minha procura por cursos, propostas e diretrizes de ensino, pesquisas e estudos publicados, sobre os conceitos matemáticos, em particular do conceito de funções.

A participação em diversos cursos que propunham a formação continuada do professor foi uma forma de buscar apoio e subsídio para prática, tais como, Teia do Saber[2] em 2005, Rede Aprende com a Rede[3] em 2008, Implementação do Currículo de Matemática no Estado

[1] Muitos autores utilizam em suas obras e publicações o termo “conceito de função”, neste trabalho utilizaremos “conceito de funções”- salvo em citações que seguiremos o autor.
[2] Programa de Formação Continuada Presencial promovido pela Secretaria Estadual da Educação de São Paulo e realizado por meio de parcerias com Universidades entre 2003 e 2007.
[3] Programa de Formação Continuada à distância promovido pela Secretaria Estadual da Educação de São Paulo a partir de 2008.

de São Paulo[4] em 2009, Programa Pré-Iniciação Científica[5] em 2009, na Rede São Paulo de Formação Docente em 2010 (REDEFOR[6]). E atualmente, na Pós-graduação *stricto sensu* – PROFMAT[7], formação profissional de professores de educação básica, que proporcionou um estudo mais detalhado e aprofundado do tema desta pesquisa.

Saber Matemática ou especificamente um conteúdo não garante ao professor que seu estudante aprenda, pois o processo de ensino e aprendizagem vai além do professor saber bem esse conteúdo, é necessário que a cada conteúdo o professor saiba também ensiná-lo de forma a garantir que o estudante compreenda-o e internalize-o.

No sentido de aprender mais profundamente sobre um conteúdo para ensiná-lo, o tema que gerou inquietação a esta professora, que é também pesquisadora desse trabalho, foi sobre a compreensão mais profunda do conceito de funções e suas diversas representações por meio de diagramas, gráficos cartesianos e linguagem algébrica, pois é um conceito importante uma vez que permeia todo o ensino médio. As questões que levaram a refletir sobre "como o professor aprende para ensinar esse conteúdo", foram tomando forma e se transformando em uma inquietação e delineando a questão da pesquisa.

Ainda quando aluna do ensino médio, esse conceito foi abordado de forma a priorizar excessivamente a linguagem algébrica com o objetivo de se compreender a interdependência entre as variáveis e calcular o valor de uma das variáveis quando atribuído um valor à outra, ou seja, o procedimento parecia mais importante que o conceito. Tal prioridade, talvez tenha sido o início de muitas dificuldades no curso de graduação no que diz respeito ao conhecimento e embasamento do conceito de funções.

Enquanto professora da educação básica e atuando por vários anos no ensino médio, quando o estudo do conceito de funções é sistematizado, foi possível observar algumas dificuldades dos estudantes tanto nas modelagens e resolução de situações-problema quanto na construção e interpretação de gráficos cartesianos, levando a dificuldades e contribuindo para a pouca compreensão do conceito por esses estudantes, também foi possível perceber algumas dificuldades quanto ao ensino e integração dos aspectos do conceito que permeiam o estudo de funções, tais como, (a) trabalhar com exemplos do cotidiano que mostram a relação de

[4] Curso Presencial de Formação Continuada para professores de Matemática, promovido pela Diretoria de Ensino de São Carlos em 2009 e 2010.
[5] Iniciativa da Pró- Reitoria de Pesquisa Universidade de São Paulo em parceria com a Secretaria Estadual da Educação de São Paulo e Banco Santander, com o intuito de ofertar aos estudantes e professores oportunidades de participar de atividades de pesquisa desenvolvidas por grupos de pesquisa científica dessa Universidade.
[6] Formação Continuada de professores - Cursos de especialização à distância com encontros presenciais por meio de convênio entre a Secretaria Estadual da Educação de São Paulo e as três Universidades estaduais: UNESP, UNICAMP e USP .
[7] PROFMAT - Pós-graduação stricto sensu para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica. Programa semipresencial, com bolsas CAPES para professores em exercício na rede pública.

interdependência entre duas variáveis, (b) a lei que a define, (c) articular as situações do cotidiano com o conceito formal de funções, (d) trabalhar gráficos com o objetivo de associar o conceito de funções ao estudo das suas propriedades das diversas representações. Essas dificuldades, tanto do professor para o ensino quanto na aprendizagem manifestada pelos estudantes, indicaram a necessidade de pesquisar mais profundamente o conceito de funções e suas representações, utilizando diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos que contribuam com a reflexão da prática docente.

Ao estudar mais detalhadamente esse tema nesta pesquisa, surgiram algumas ideias que podem colaborar ativamente para o ensino, isto é, na formação enquanto professor e na aprendizagem do conceito de funções. Sendo assim, a proposta é apresentar no Capítulo 2 a justificativa desta pesquisa, no Capítulo 3 apresentar a metodologia desse estudo, no Capítulo 4 analisar as propostas para o ensino de funções nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo e em quatro dos sete livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLD – EM, 2011), procurando exemplificar e detalhar as experiências vividas em sala de aula no ensino de funções e as principais dificuldades detectadas e no Capítulo 5 conceituar funções e suas diversas representações de acordo com diversos autores, como Caraça (1984), Courant e Robbins (2000) e Eves (2011), descrever e analisar a teoria que apoia esse estudo, analisar as contribuições da História da Matemática para o tema proposto e apresentar uma proposta de atividades para o ensino de funções para o ensino médio tendo como apoio Lima e Moisés (2010).

Nas considerações finais (Capítulo 6) a proposta é analisar os fatores que podem contribuir para a melhoria na prática em sala de aula, que subsidiem o professor no ensino de funções e que fortalecem o ensino de Matemática na educação básica.

2 JUSTIFICATIVA

Na História da Matemática, o conceito de funções modificou-se por muitas vezes até solidificar-se e ser aceito pela comunidade acadêmica, essas modificações são indicada por Eves (2011)

> O conceito de função, como as noções de espaço e geometria, passou por evoluções acentuadas. O estudante de matemática perceberá bem esse fato ao atentar para os vários refinamentos desse processo evolutivo que acompanham seus progressos escolares, desde os cursos mais elementares da escola secundária até os mais avançados e sofisticados em nível de pós-graduação. (Eves, 2011, p.660).

Caraça (1984) considera que o conceito de funções está relacionado à compreensão dos mais variados fenômenos naturais, como por exemplo, a Lei de Kepler, a Lei da gravitação de Newton e a Lei da queda livre.

Courant e Robbins (2000) observam que os fenômenos periódicos como– marés, vibrações de uma corda, emissão de ondas luminosas por um filamento incandescente – são regidos por funções trigonométricas.

Essas considerações se refletem fortemente nos textos para o ensino de funções na educação básica.

O estudo de funções é indicado para ser abordado no ensino médio, pelos documentos de orientações curriculares oficiais federal, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM (Brasil, 2000)e pelo Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo, 2010) o início, em uma abordagem menos abrangente, deve ocorrer no 9º ano. Portanto, entender o desenvolvimento do conceito de funções por meio de sua história pode contribuir para a melhor compreensão do conceito e consequentemente um melhor ensino nesse segmento da educação básica.

O fato é que ao consultarmos a literatura podemos perceber que o ensino de funções realizado de modo desarticulado de sua história tem tido como consequência uma separação entre as diversas representações desse conceito. Talvez esse fato tenha contribuído para as dificuldades que temos observado em sala de aula nas manifestações dos estudantes.

Consideramos aqui que um dos aspectos importantes na compreensão do conceito de funções é entender seus significados – **interdependência, variável, regularidade, correspondência e generalização**. Nesse sentido, o objetivo dessa pesquisa é entender e fundamentar os aspectos da história do conceito de funções que nos auxiliem a entender as relações entre seus significados e as suas representações atuais, pela linguagem algébrica, por diagramas, e por gráficos cartesianos.

Os aspectos históricos do conceito de funções e suas relações com várias contribuições científicas serão analisados no sentido de contribuir para o processo de ensino na educação básica.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa é um estudo bibliográfico, desenvolvida com base em pesquisas de livros, artigos científicos, documentos e publicações periódicas que por ora subsidiam e fundamentam o desenvolvimento do tema proposto.

Para Marconi e Lakatos (1992), a pesquisa bibliográfica abrange todo o levantamento da bibliografia que já foi publicada sobre o assunto pesquisado, seja em forma de livros, revistas, publicações avulsas, jornais, boletins, publicações da internet, monografias, pesquisas - teses e dissertações. Para os autores, a finalidade da pesquisa bibliográfica é fazer com que haja o contato direto entre o pesquisador e todo o material produzido, escrito e publicado referente assunto, auxiliando-o na análise de suas pesquisas ou até mesmo na manipulação das informações, podendo até ser considerada um primeiro passo de toda a pesquisa científica.

Também Fiorentini e Lorenzato (2012) entendem que a pesquisa bibliográfica é:

> (...) aquela que se faz preferencialmente sobre documentação escrita. O campo pode ser caracterizado pelas bibliotecas, pelos museus, pelos arquivos e pelos centros de memória (...). Esse tipo de pesquisa é também chamado de estudo documental. Os documentos para estudo apresentam-se estáveis no tempo e ricos como fonte de informação, pois incluem: filmes, fotografias, livros, propostas curriculares, provas (testes), cadernos de alunos, autobiografia, revistas, jornais, pareceres, programas de TV, listas de conteúdos de ensino, planejamentos, dissertações, ou teses acadêmicas, diários pessoais, diários de classe, entre outros documentos. (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 102-103)

Nesta pesquisa bibliográfica, a primeira parte foi dedicada para acrescentar as experiências vividas pela pesquisadora no ensino de funções, bem como os exemplos e as principais dificuldades percebidas, além disso, analisamos o que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, no Currículo Oficial do Estado de São Paulo, no guia dos livros didáticos e nos livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (2012) e na ferramenta de avaliação do PNLD.

Na segunda parte foi realizada uma pesquisa na matemática acadêmica em Caraça (1984) e Courant e Robbins (2000), no intuito de conceituar cientificamente funções, ou seja, procuramos saber o que os matemáticos consideram importante que o estudante de ensino superior saiba sobre o estudo de funções. Ainda na segunda parte, foi realizada uma pesquisa na História da Matemática em Boyer (1974) e Eves (2011) buscando as características que são mais significativas na origem do conceito de funções e identificando as diversas intepretações e representações que estiveram presentes no desenvolvimento desse conceito, como forma de contribuir para a compreensão e ensino do conceito de funções na educação básica.

Procuramos responder à nossa questão central: **Quais aspectos da história do conceito de funções podem contribuir para a compreensão desse conceito e das suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos?** Para isso dividimos nosso estudo para responder a essa questão, nas seguintes subquestões: (a) como propor o trabalho com exemplos do cotidiano que mostrem claramente a relação de interdependência entre duas variáveis, (b) como explicitar a lei que a define como uma relação que antecede a linguagem algébrica, (c) como relacionar os itens anteriores com o conceito formal de funções, (d) como propor o estudo dos gráficos com o objetivo de associar o conceito de funções à determinação do domínio, contradomínio e imagem (e) como relacionar as diversas representações de função mantendo a identidade dos elementos fundamentais do conceito de funções: identificação das variáveis dependentes; lei de formação; domínio-contradomínio-imagem; a relação entre as linguagens algébricas e a representação gráfica, por diagramas e por gráficos cartesianos.

Ao final dessa pesquisa procuramos destacar em Lima e Moises (2010) quais aspectos da história do conceito de funções podem contribuir para a compreensão desse conceito e das suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos no ensino médio, além de apresentar uma sequência didática aplicada em sala de aula que tem como objetivo, trabalhar o conceito de função.

4 CONCEITO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA, OS DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS E OS LIVROS DIDÁTICOS

4.1 O ensino de funções nos documentos curriculares PCNEM (2000), PCN + EM (2002) e no Currículo do Estado de São Paulo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (2000), PCNEM, consideram que o conceito de funções desempenha um importante papel no estudo de muitos fenômenos que envolvem as diversas áreas do conhecimento, tais como, Biologia, Geografia, Física, Química, Economia, seja descrevendo, interpretando ou construindo gráficos que representam esses fenômenos, além de propiciar conexões com a própria Matemática. Indicam também que o ensino do conceito de funções deve ser suficiente para que os estudantes possam tanto estabelecer as conexões com a própria Matemática como adquirir certa flexibilidade para associá-lo às diversas situações em que possa estar presente, em que o estudante possa ser incentivado a buscar soluções e ajustar seus conhecimentos sobre funções para então, construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (PCN + EM, 2002, p.121)

As indicações acima como, linguagem algébrica, expressar a relação entre grandezas, modelar situações-problema, construir modelos descritivos de fenômenos e estabelecer conexões dentro e fora da própria matemática são questões que tem espaço nos materiais propostos a alunos e professores da educação básica e que podem ser explorados pelo professor em sala de aula de forma a colaborar com a integração do conceito de funções e suas diversas representações.

Pensar no ensino de matemática no ensino médio, principalmente no que diz respeito ao conceito de funções, significa primeiramente rever e redimensionar o tema e rever a forma e metodologia de ensino, mas também repensar em um ensino que ultrapasse o conhecimento matemático restrito à informação, com definições e exemplos, exercícios de aplicação e fixação. Os conceitos que são apresentados de forma fragmentada não garantem ao estudante o estabelecimento de significação para as ideias isoladas e desconectadas, mesmo que trabalhados de forma aprofundada e completa (PCNEM, 2000, p.43).

Mas talvez as dificuldades que os estudantes apresentam frente ao estudo de funções possam nos dar indícios de que, apesar de acreditarmos que ele seja capaz de compreender as relações existentes entre o conceito e suas diversas representações, tais como, linguagem algébrica, diagramas e os gráficos cartesianos, na prática não ocorrem. Acreditamos também que é necessário que o conceito de funções e seu caráter integrador, seja compreendido por quem vai ensiná-lo e desenvolvido em sala de aula de forma a explorá-los de formas diversificadas.

O Currículo do Estado de São Paulo propõe a formalização do conceito de funções no 9º ano do ensino fundamental, a maioria dos autores dos livros didáticos que circulam e auxiliam o professor em suas aulas propõe iniciar na 1ª série do ensino médio. O Currículo do Estado de São Paulo é acompanhado por dois materiais para a sala de aula, o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno.

No Caderno do Professor (2014) estão presentes recomendações e explicações para a abordagem e aprofundamento da noção de funções que retomam o que já foi trabalhado em anos anteriores,

> (...) uma retomada da noção de função, que traduz uma **relação de interdependência entre duas grandezas**, explorando-se especialmente as funções de 1º grau e de 2º grau, bem como suas aplicações em diferentes contextos. Tais assuntos já foram apresentados aos alunos em séries/anos anteriores. Na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, foram exploradas situações envolvendo a **proporcionalidade direta e inversa entre grandezas**, e que conduzem a relações do tipo $y = kx$, ou, então, $y = k/x$, onde k é uma constante não nula. Na 8ª série/9º ano, foram estudadas as funções $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, além da **representação destas em gráficos**. Agora, o estudo dessas funções será apresentado de **modo mais sistematizado**. Tudo será feito, no entanto, de tal forma que, mesmo se o professor estiver tratando desse assunto pela primeira vez, o aluno provavelmente não terá grandes dificuldades em acompanhar as atividades propostas. Como já foi dito anteriormente, as **funções referidas são capazes de traduzir matematicamente todos os processos que envolvem relações de proporcionalidade direta (gráficos lineares), ou relações em que uma grandeza é proporcional ao quadrado de outra (gráficos com a forma de uma parábola)**. Muitos exercícios envolvendo situações concretas em que a consideração das grandezas envolvidas conduz a uma função de 1º grau ou de 2º grau serão contemplados, com especial destaque para problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem a obtenção do máximo ou do mínimo de uma função, em determinado contexto. De modo geral, os conteúdos estudados neste Caderno são meios para o desenvolvimento de importantes competências básicas: **o recurso à linguagem das funções para representar interdependências** conduz a um aumento na capacidade de expressão, favorecendo a construção de um discurso mais eficaz para enfrentar problemas em diferentes contextos; a capacidade de compreensão de uma variada gama de fenômenos é ampliada,

> uma vez que muitas **situações de interdependência estão naturalmente associadas a modelagens** que conduzem a explicações dos referidos fenômenos; o reconhecimento das funções envolvidas em um fenômeno possibilita a sistematização de propostas de intervenção consciente sobre a realidade representada.
> (..) **reapresentaremos a ideia de função por meio de múltiplos exemplos de situações de interdependência entre grandezas**. (Caderno do Professor, 2014, p.7) (Grifos nossos)

Portanto, os elaboradores indicam que para a compreensão da ideia de funções é necessário entender as situações de interdependência entre grandezas. Como também foi indicado por Caraça (1984) e Courant e Robbins (2000).

No Currículo do Estado de São Paulo, tido como um currículo em espiral, pois aborda os diversos conteúdos em todos os segmentos do ensino e com aprofundamentos diferentes, seguem-se múltiplos exemplos que apresentam a relação de interdependência entre duas grandezas, como os presentes nas Figuras 1, 2 e 3.

Analisaremos então, as situações de aprendizagem propostas no Caderno do Professor e/ou do Aluno, volume 1 do quadriênio 2014- 2017.

A primeira situação de aprendizagem do Caderno do Professor (2014) propõe analisar e discutir a relação de existência ou não de proporcionalidade entre duas grandezas:

> Em cada um dos casos apresentados a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade. Se existir, expresse tal fato algebricamente, indicando o valor da constante de proporcionalidade. Em caso negativo, justifique sua resposta.
> a) A altura a de uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade t?
> b) A massa m de uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade t?
> c) O perímetro p de um quadrado e diretamente proporcional ao seu lado a?
> d) A diagonal d de um quadrado e diretamente proporcional ao seu lado a?
> e) O comprimento C de uma circunferência e diretamente proporcional ao seu diâmetro d? (Caderno do Professor, 2014, p. 57)

A segunda atividade, ainda da primeira situação de aprendizagem do Caderno do Professor (2014) e do Aluno (2014) continua discutindo a relação de existência ou não de proporcionalidade entre duas grandezas.

Figura 1 – Tabela para análise da existência da relação de dependência entre duas grandezas

a) Produção de automóveis e produção de tratores (anual, em milhares).

Países	Automóveis	Tratores
A	100	8
B	150	12
C	200	16
D	225	18
E	250	20
F	300	24
G	350	28
H	400	32
I	450	36

Fonte: Caderno do Professor, 2014, p.57

Na Figura 1, a proposta é discutir o crescimento simultâneo entre as grandezas número de automóveis e números de tratores e sua relação de proporcionalidade. Já na Figura 2, a relação de dependência é discutida entre as grandezas área destinada à agricultura e área destinada à pecuária, que apesar de crescerem simultaneamente, não são proporcionais.

Figura 2 – Tabela para análise da existência da relação de dependência entre duas grandezas.

b) Área destinada à agricultura e área destinada à pecuária (em 1 000 km²).

Países	Agricultura	Pecuária
A	80	60
B	100	70
C	110	80
D	120	98
E	150	100
F	160	124
G	180	128
H	200	132
I	250	136

Fonte: Caderno do Professor, 2014, p.57

Figura 3 – Tabela para análise da existência da relação de dependência entre duas grandezas.

c) Produto Interno Bruto (PIB, em milhões de dólares) e Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

Países	PIB	IDH
A	300	0,90
B	400	0,92
C	510	0,80
D	620	0,88
E	750	0,78
F	760	0,89
G	880	0,91
H	1 000	0,80
I	1 100	0,86

Fonte: Caderno do Professor, 2014, p.58

A Figura 3 pretende discutir que as grandezas PIB – produto Interno Bruto e o IDH – Índice de Desenvolvimento Humano não são nem diretamente proporcionais e nem inversamente proporcionais.

Nossa observação da sala de aula nos tem indicado que os alunos manifestam dificuldades para entender quais são as grandezas indicadas nesses exemplos e também em justificar por que elas são ou não interdependentes, já que não há uma explicação clara do que significa interdependência entre as grandezas.

4.2 Guia do livro didático - análise da distribuição dos campos da Matemática nas propostas dos livros didáticos que compõem o PNLD 2012

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica, o ciclo para escolha e troca de livros didáticos é trienal. O Ministério da Educação (MEC) publica e envia um Guia de Livros Didáticos que subsidia a escolha do professor e da escola, com resenhas das obras que foram aprovadas.

De acordo com Guia de PNLD 2012 de Matemática, para avaliar as obras de Matemática do ensino médio, os tópicos foram divididos em seis campos: números e operações; funções; equações algébricas; geometria analítica; geometria; estatística e probabilidades. Sendo que

> (...) Em funções consideramos: o conceito de função; sequências; funções afins e afins por partes; funções quadráticas; funções exponencial e logarítmica; funções trigonométricas; matemática financeira; e cálculo diferencial. (Guia PNLD, 2012, p.18)

Ao todo foram sete coleções aprovadas pelo Guia PNLD 2012 e em todos os livros que compõe o PNLD 2012 de Matemática do Ensino Médio, o ensino de funções ocorre em maior parte na 1ª série e diminui a cada ano/série. Em torno de 65% do conteúdo da 1ª série está concentrado no campo de funções, o que gera ainda uma fragmentação e uma repetitividade de casos particulares de funções. Na 2ª série, o ensino de funções está pautado nas funções trigonométricas e na 3ª série, exceto por duas coleções- não listadas no Guia PNLD 2012, as obras omitem ou dedicam-se pouco às funções.

A análise sobre a introdução e sistematização do conceito de funções em cada um das sete obras aprovadas foi descrita de forma minuciosa no Guia PNLD 2012,

> (...) todas as obras aprovadas introduzem a **noção de função de modo intuitivo**, apoiando-a nas ideias de: **relação ou associação entre grandezas variáveis; dependência entre grandezas; correspondência entre elementos de dois conjuntos; "regra" ou "lei de formação" envolvendo grandezas ou números, entre outras**. Todas as obras sistematizam o conceito de função utilizando conjuntos, o que é apropriado. Por outro lado, em duas das obras adota-se a definição de função como um tipo especial de relação e esta como subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos. Embora matematicamente seja possível adotar este caminho, ele pouco contribui para a compreensão do conceito de função. (Guia PNLD, 2012, p.30) (Grifos nossos)

Quanto à análise sobre a apresentação de definições consideradas fundamentais o Guia PNLD 2012 esclarece que todas as coleções as fazem,

> (...) nas explanações teóricas relativas a funções, todas as coleções apresentam as definições fundamentais de: **domínio, contradomínio, imagem,** função injetiva, sobrejetiva, bijetiva, composta, inversa, entre outras. Em algumas delas, é dada muita atenção preliminar a esses conceitos e, quando nos momentos posteriores eles se fazem importantes, não são devidamente valorizados. Com relação ao conceito de domínio, um dos exemplos dessa falha é observado quando na definição é escolhido um domínio e, nos exemplos, usam-se outros domínios sem nenhum comentário sobre essa alteração, que muitas vezes é imposta pelo contexto. (Guia PNLD, 2012, p.30) (Grifos nossos)

Quanto às diversas formas de representações de funções, a análise é pautada na importância dessa diversificação para a compreensão do conceito de funções,

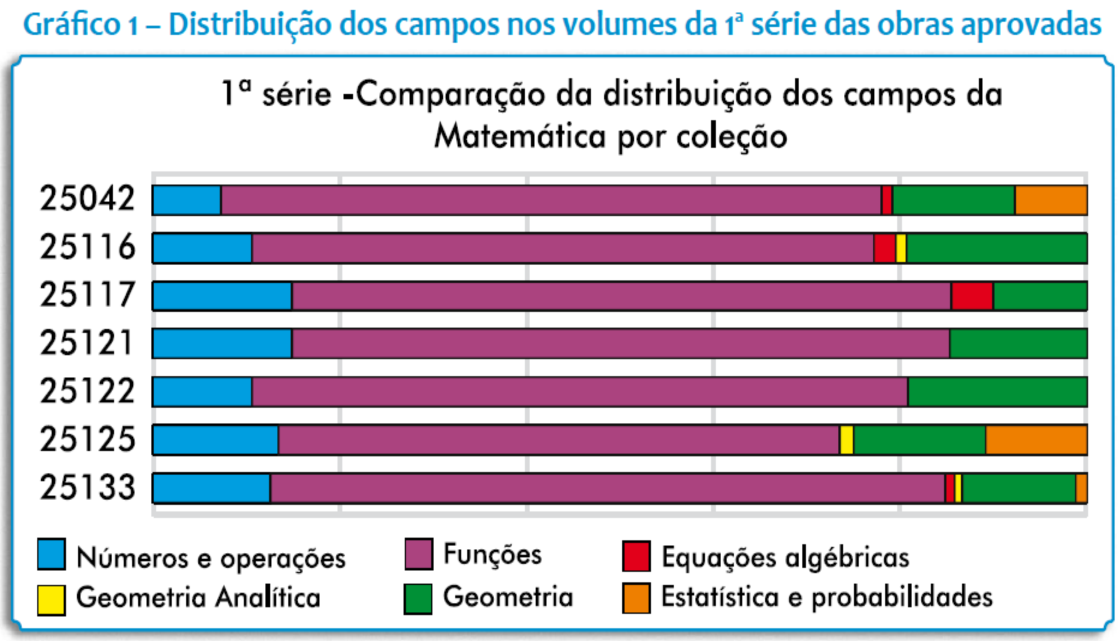
> (...) no estudo de funções, é importante representá-las de diferentes modos – **tabelas, gráficos, representações analíticas (algébricas) – estabelecendo relações entre eles**. Frequentemente, um problema inicialmente formulado de maneira algébrica pode ser mais facilmente resolvido ou compreendido se o interpretarmos geometricamente, e vice-versa. Por exemplo, a simetria axial presente nas funções quadráticas é facilmente perceptível no gráfico e, no entanto, pode exigir esforço de cálculo quando se trabalha com sua representação algébrica. Convém mencionar que o uso de aplicativos computacionais permite visualizar o gráfico de funções e ajuda a perceber propriedades por meio de experimentos com maior riqueza de exemplos.
> No estudo das funções, os seus gráficos no plano cartesiano desempenham um papel importante. Na avaliação das obras inscritas no PNLD 2012, observamos que não são tomados os devidos cuidados quando se constroem gráficos de funções. Por exemplo, com um número reduzido de valores da variável independente, induz-se o aluno a considerar que é possível construir o gráfico cartesiano de uma função. É comum encontrar nos livros didáticos, uma tabela com três ou quatro valores de x, associada ao desenho de uma parábola, sem explicações adicionais. (Guia PNLD, 2012, p.31) (Grifos nossos)

O Guia também aponta algumas possíveis falhas que podem ocorrer quanto ao uso de gráficos estatísticos para construir funções e a importância de inserir a matemática financeira como contextualização de algumas funções,

> (...) outra falha é recorrer a gráficos estatísticos para construir funções reais de variável real. No caso das variáveis discretas, o gráfico estatístico pode ser constituído por pontos isolados no plano cartesiano ou por barras verticais. Isso não permite que, sem nenhum comentário explicativo, passemos para o gráfico de uma função com variável independente contínua. Na estatística, muitas vezes, utiliza-se o procedimento de ligar os pontos isolados de um gráfico discreto por uma curva contínua. No entanto, trata-se apenas de um procedimento para auxiliar a visualização do comportamento da variável estatística.
> Na classificação dos conteúdos adotada no PNLD 2012, consideramos a matemática financeira no campo das funções pela importância das funções linear e exponencial como modelos para os problemas dessa área. No entanto, apenas uma das coleções aprovadas faz, explicitamente, tais conexões. Na matemática financeira, os conteúdos mais abordados são porcentagem, acréscimo e desconto, juros simples e compostos. Observamos, na abordagem desses tópicos, muita ênfase ao emprego direto de fórmulas, o que não é desejável. Esse é um assunto que deveria instrumentalizar o aluno para a cidadania, e isso pode ser feito por meio da exploração de problemas adequados e atuais. Dentre as coleções aprovadas, três destacam-se pelas contextualizações sugestivas. (Guia PNLD, 2012, p.31)

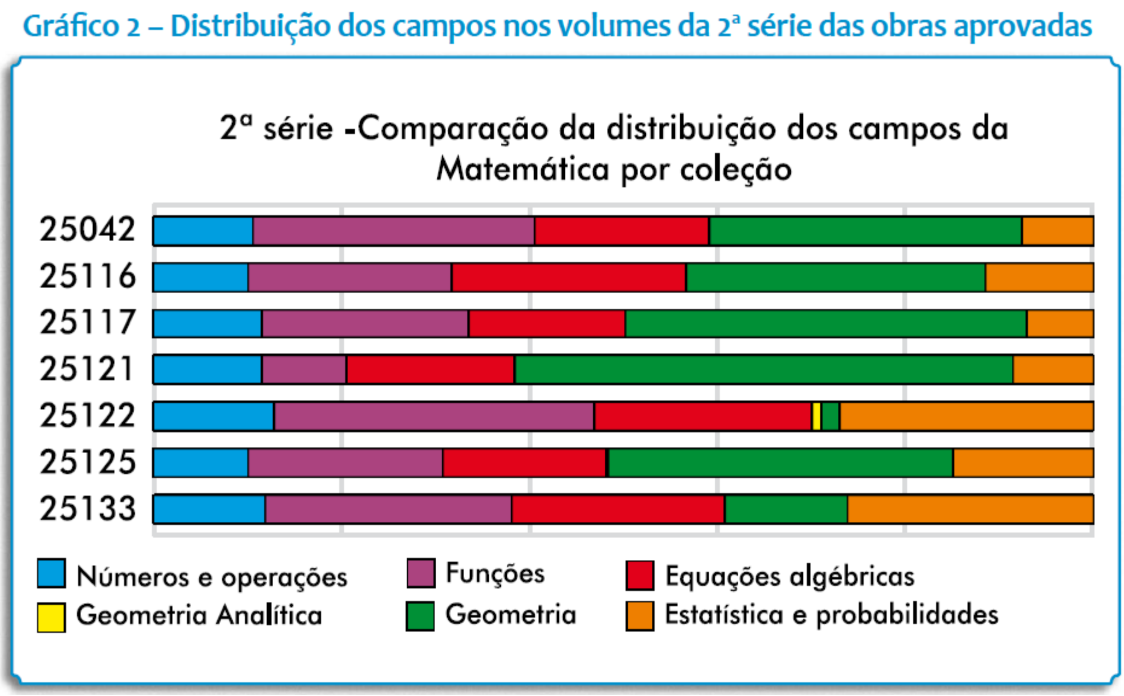
Os gráficos das Figuras 4 a 6 mostram a distribuição dos campos nos livros que compõem o PNLD – 2012.

Figura 4 – Obras aprovadas e distribuição nos campos da matemática V.1.



Fonte: Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática.

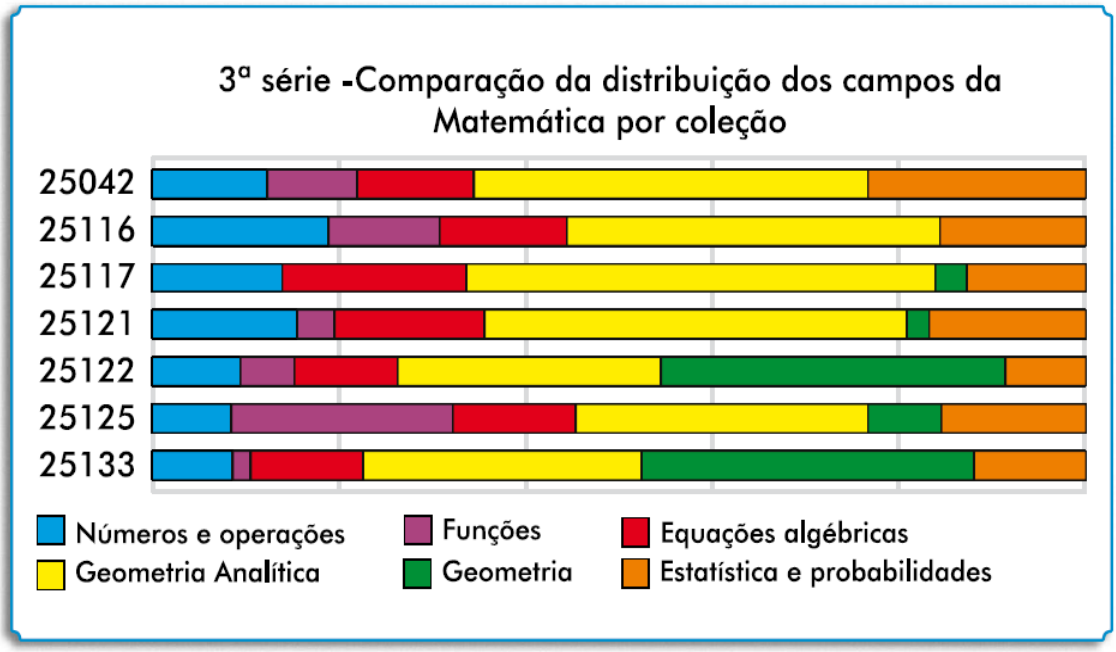
Figura 5 - Obras aprovadas e distribuição nos campos da matemática V.2.



Fonte: Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática.

Figura 6 - Obras aprovadas e distribuição nos campos da matemática V.3.

Gráfico 3 – Distribuição dos campos nos volumes da 3ª série das obras aprovadas



Fonte: Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática.

Segundo Guia PNLD 2012, é possível perceber que em cada série do ensino médio ocorre um excesso em relação a alguns conteúdos e prejuízo aos demais, o que pode gerar uma falta de conexão entre os conteúdos e, no caso das funções, o predomínio ocorre na 1ªsérie e diminui até a 3ª série.

Considerando que as novas tecnologias devem permear o ensino de Matemática e que o ensino de funções deve capacitar os estudantes para que estes saibam empregar conceitos de funções e de suas várias representações, tais como, gráficos, tabelas, fórmulas, diagramas, etc. e a utilização de suas equações, o professor pode planejar suas aulas, utilizando os recursos didáticos e tecnológicos, de forma a estabelecer conexões entre o conceito de funções e suas diversas representações.

O PCNEM (2000) orienta que no ensino médio o estudante deve perceber que as definições e demonstrações, juntamente com os encadeamentos conceituais e lógicos, constroém novos conceitos e estruturas e servem para validar intuições e dar sentido às técnicas. E que aprender Matemática vai além de memorizar resultados, uma vez que a aquisição do conhecimento matemático está vinculada ao domínio de um saber fazer e de um saber pensar matemático. Cabe ao professor da educação básica elaborar propostas para a sala de aula que favoreçam tal compreensão, procurando subsídios nos livros didáticos, nas tecnologias e nas formações de professores.

4.3 Análise das propostas para o ensino de funções – livros didáticos

O trabalho em sala de aula, da professora, aqui também pesquisadora, evidenciou o quanto é difícil desenvolver o ensino de funções, conceituar, articular e integrar com as mais diversas situações, o que não é uma tarefa simples. Pode-se, a partir das experiências vividas, entender que o ensino de matemática fragmentado e desarticulado, onde o professor acaba por priorizar uma determinada vertente, ainda que de maneira não intencional, contribui para o baixo índice de aprendizado e rendimento dos estudantes.

Como observado nos documentos oficiais de âmbito federal e do Estado de São Paulo, o ensino de funções inicia-se com a abordagem ou retomada de conjuntos numéricos e em seguida, introduz-se a noção intuitiva de funções por meio de exemplos que mostram a relação de interdependência entre as variáveis, como nos exemplos a seguir, retirados de livros didáticos.

Neste trabalho foram analisados quatro livros didáticos, disponíveis na biblioteca da escola de atuação da professora/pesquisadora, doados pelas editoras no momento da escolha do livro didático. Para análise foram consideradas as primeiras propostas de atividades dos autores, aquelas que iniciam o estudo de funções na 1ª série do ensino médio.

Os quatro livros analisados, são livros do professor, que contém além das atividades propostas no livro do aluno, recomendações pedagógicas, formas de avaliação, apoio e sugestão de materiais e recursos que podem auxiliar o professor em suas aulas.

Em 4.3.1 faremos a apresentação e a análise das atividades propostas por Luiz Roberto Dante em Matemática, Contexto & Aplicações, volume 1, Editora Ática, (2008), contendo 504 páginas das quais 40 páginas são dedicadas ao início do estudo de funções.

Em 4.3.2 faremos a apresentação e a análise das atividades propostas por Jackson Ribeiro em Matemática, Ciência, Tecnologia e Linguagem, volume 1, Editora Scipione (2010), contendo 384 páginas das quais 41 páginas são dedicadas à introdução ao estudo de funções.

Em 4.3.3 faremos a apresentação e a análise das atividades propostas por Manoel Paiva em Matemática, volume 1, Editora Moderna, (2005), contendo 256 páginas das quais 20 páginas são dedicadas à introdução ao estudo de funções.

Em 4.3.4 faremos a apresentação e a análise das atividades propostas por Maria Ignez Diniz e Katia Stocco Smole em Matemática Ensino Médio, volume 1, Editora Saraiva, (2010), contendo 320 páginas das quais 26 páginas são dedicadas à introdução do estudo de funções.

4.3.1 Atividades do livro Matemática, Contexto & Aplicações, volume 1, Luiz Roberto Dante, 2008, Editora Ática

O autor inicia o estudo de funções com quatro exemplos e não define o que são grandezas, trabalhando de forma intuitiva. Nos dois primeiros exemplos, utiliza tabelas que apresentam a variação entre duas grandezas para introduzir o conceito de funções e no terceiro exemplo, a noção de variável independente e de variável dependente.

Figura 7 – Exemplos do conceito intuitivo de funções.

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis. Vejamos alguns exemplos.

1º) **Número de litros de gasolina e preço a pagar**

Considere a tabela ao lado que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em maio de 2009).

Observe que o preço a pagar é dado *em função* do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar *depende* do número de litros comprados.

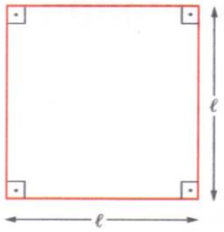
preço a pagar = R$ 2,40 vezes o número de litros comprados ou

$p = 2{,}40x$ → *lei da função* ou *fórmula matemática da função* ou *regra da função*

Número de litros	Preço a pagar (R$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
⋮	⋮
40	96,00
x	2,40x

2º) **Lado do quadrado e perímetro**

Veja agora a tabela que relaciona a medida do lado de um quadrado (ℓ) e o seu perímetro (**P**):



Medida do lado (ℓ)	Perímetro (P)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
ℓ	4ℓ

Para refletir

p é símbolo de semiperímetro. Não existe um símbolo para perímetro. Muitas pessoas utilizam 2p para representá-lo. Aqui usaremos **P** para indicar perímetro.

Observe que o perímetro do quadrado é dado *em função* da medida do seu lado, isto é, o perímetro *depende* da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro.

perímetro = 4 vezes a medida do lado ou

$P = 4\ell$ → *lei da função* ou *fórmula matemática da função* ou *regra da função*

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a *variável dependente*, e a medida do lado é chamada de *variável independente*.

3º) **A máquina de dobrar**

Observe ao lado o desenho imaginário de uma máquina de dobrar números.

Veja que os números que saem são dados *em função* dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem *dependem* dos números que entram. Assim, a *variável dependente* é o número de saída e a *variável independente* é o número de entrada.

Neste caso, temos:

número de saída (**n**) é igual a duas vezes o número de entrada (**x**) ou

$n = 2x$ → *regra da função* ou *lei da função*, ou, ainda, *fórmula matemática da função*

4º) Numa rodovia, um carro mantém uma velocidade constante de 90 km/h. Veja a tabela que relaciona o tempo **t** (em horas) e a distância **d** (em quilômetros):

Tempo (h)	0,5	1	1,5	2	3	4	t
Distância (km)	45	90	135	180	270	360	90t

Observe que a distância percorrida é dada *em função* do tempo, isto é, a distância percorrida *depende* do intervalo de tempo. A cada intervalo de tempo considerado corresponde um único valor para a distância percorrida. Dizemos, então, que a distância percorrida é *função* do tempo e escrevemos:

distância = 90 · tempo

$d = 90t$

t → variável independente

d → variável dependente

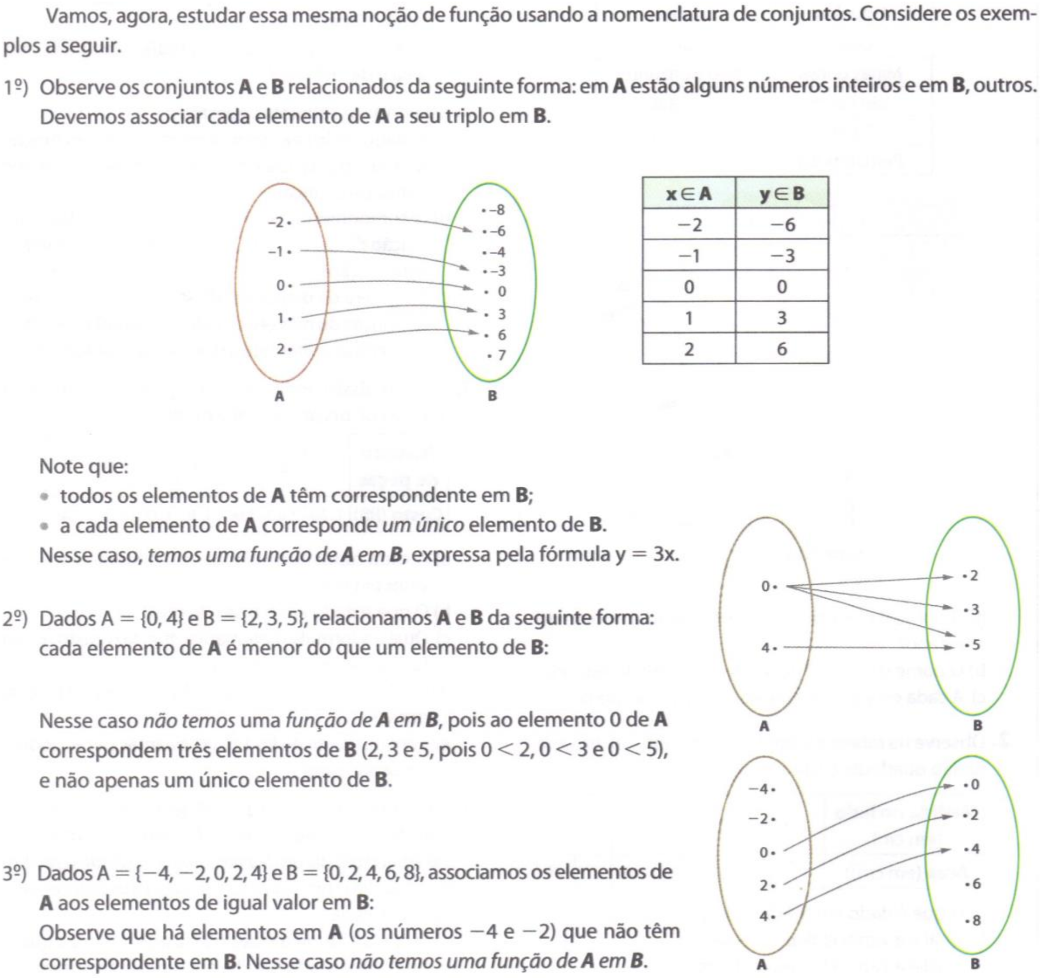
Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 73.

No exemplo 1, Figura 7, o autor procura relacionar duas grandezas, número de litros e preço a pagar, e encontrar, por meio de observações de uma tabela já organizada, a lei da função que já vem expressa por uma equação algébrica. Mas não retoma a ideia de grandeza, que não é simples para os alunos do ensino médio. Também não explicita por que número de litros e dinheiro são grandezas e tão pouco evidencia a interdependência entre essas grandezas. Nos exemplos subsequentes, a noção intuitiva de funções continua sendo trabalhada, porém não há ainda, a formalização de conceitos essenciais ao ensino de funções, tais como, variável, grandezas, lei da função e a interdependência.

No exemplo 2 (Figura 7), do mesmo livro didático, o autor relaciona conceitos geométricos com funções, pressupõe-se que o estudante saiba relacionar a medida do lado do quadrado com o seu perímetro e o autor expressa essa relação de dependência em uma tabela entre as grandezas medida do comprimento do quadrado e seu perímetro.

Os próximos exemplos - 3 e 4 (Figura 7) do mesmo livro didático diferem dos anteriores apenas na utilização da tabela de valores para relacionar a interdependência entre duas grandezas A e B e a lei da função em linguagem algébrica.

Figura 8 – Conceito de funções: exemplo por meio de conjuntos.


Vamos, agora, estudar essa mesma noção de função usando a nomenclatura de conjuntos. Considere os exemplos a seguir.

1º) Observe os conjuntos **A** e **B** relacionados da seguinte forma: em **A** estão alguns números inteiros e em **B**, outros. Devemos associar cada elemento de **A** a seu triplo em **B**.

$x \in A$	$y \in B$
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

Note que:
- todos os elementos de **A** têm correspondente em **B**;
- a cada elemento de **A** corresponde *um único* elemento de **B**.

Nesse caso, *temos uma função de **A** em **B***, expressa pela fórmula $y = 3x$.

2º) Dados $A = \{0, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, relacionamos **A** e **B** da seguinte forma: cada elemento de **A** é menor do que um elemento de **B**:

Nesse caso *não temos* uma *função de **A** em **B***, pois ao elemento 0 de **A** correspondem três elementos de **B** (2, 3 e 5, pois $0 < 2$, $0 < 3$ e $0 < 5$), e não apenas um único elemento de **B**.

3º) Dados $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, associamos os elementos de **A** aos elementos de igual valor em **B**:
Observe que há elementos em **A** (os números −4 e −2) que não têm correspondente em **B**. Nesse caso *não temos uma função de **A** em **B***.

Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 73.

Após trabalhar com exemplos do cotidiano, em que a quantidade comprada de um produto e preço a pagar, envolvem dinheiro e quantidade a ser paga, medida do lado de um quadrado e seu perímetro, Dante (2008) introduz a noção de funções por meio de diagramas, introduzindo a nomenclatura para conjuntos e formalizando o conceito logo após a apresentação de diversos exemplos, com a seguinte definição:

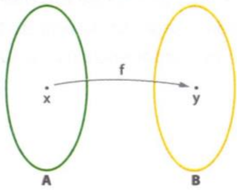
> Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Usamos a seguinte notação: $f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B). Escrevemos Assim: $y = f(x)$. (Dante, 2008, p.75).

Dante (2008) conceitua domínio da função como sendo o conjunto A, o contradomínio da função o conjunto B e, para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ como sendo a imagem de

$x\ pela\ função\ f$ ou o valor assumido pela função f para $x \in A$ e representada por $f(x)$, onde $y = f(x)$ e o conjunto de todos os y obtidos é chamado de conjunto imagem da função f $(Im(f))$.

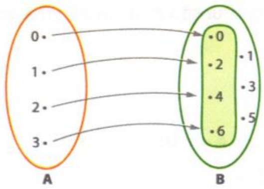
Figura 9 – Domínio, contradomínio e imagem.

Dada uma função **f** de **A** em **B**, o conjunto **A** chama-se *domínio* da função (**D**) e o conjunto **B**, *contradomínio* (**CD**) da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se *imagem de **x** pela função **f*** ou o valor assumido pela função **f** para $x \in A$, e o representamos por f(x) (lê-se **f** de **x**). Assim, $y = f(x)$.



O conjunto de todos os **y** assim obtidos é chamado *conjunto imagem da função **f*** e é indicado por Im(f).
Observe os exemplos:

1º) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vamos considerar a função $f: A \rightarrow B$ que transforma $x \in A$ em $2x \in B$.



Para refletir

Em toda função **f** de **A** em **B**, $Im(f) \subset B$.

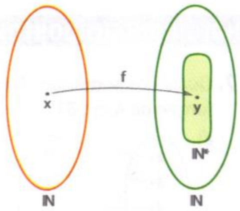
Dizemos que $f: A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = 2x$ ou por $y = 2x$. A indicação $x \xrightarrow{f} 2x$ significa que **x** é transformado pela função **f** em 2x.

Veja que para caracterizar uma função é necessário conhecer seus três componentes: o domínio (**A**), o contradomínio (**B**) e uma regra que associa cada elemento de **A** a um único elemento $y = f(x)$ de **B**. Nesse exemplo o domínio é $A = \{0, 1, 2, 3\}$, o contradomínio é $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a regra é dada por $y = 2x$ e o conjunto imagem é dado por $Im(f) = \{0, 2, 4, 6\}$.

2º) Vamos considerar a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$.
Nesse caso a função **f** transforma todo número natural **x** em outro número natural **y**, que é o sucessor de **x**, indicado por $x + 1$.

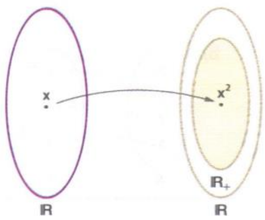
- a imagem de $x = 0$ é $f(0) = 0 + 1 = 1$
- a imagem de $x = 1$ é $f(1) = 1 + 1 = 2$
- a imagem de $x = 2$ é $f(2) = 2 + 1 = 3$

e assim por diante.



Portanto, o domínio é $\mathbb{N}$ ($D = \mathbb{N}$), o contradomínio é $\mathbb{N}$ ($CD = \mathbb{N}$), a regra é $y = x + 1$ e o conjunto imagem é $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, isto é, $Im(f) = \mathbb{N}^*$.

3º) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = x^2$.
Nesse caso a função **f** transforma cada número real **x** em um outro número real **y**, que é o quadrado de **x**. Como todo número real maior ou igual a zero possui raiz quadrada real, então o conjunto imagem é
$Im(f) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$, o domínio é $\mathbb{R}$ ($D = \mathbb{R}$), o contradomínio é $\mathbb{R}$ ($CD = \mathbb{R}$) e a regra que associa todo $x \in \mathbb{R}$ a um único **y** de $\mathbb{R}$ é dada por $y = x^2$.



Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 76.

Dante (2008) ainda exemplifica o conceito de funções na representação pela linguagem algébrica, chamada em sua obra de fórmulas matemáticas e por gráficos cartesianos, introduz o conceito de par ordenado, sistema de eixos ortogonais, construção de gráficos e determinação do domínio e imagem de uma função por meio do gráfico, discutindo também se um conjunto de pontos é gráfico de uma função. Os itens posteriores ao estudo de funções por fórmulas matemáticas discutem a função par e a função ímpar (Figura 11), função crescente e função decrescente (Figura 12), função injetiva, sobrejetiva e bijetiva (Figura 13).

Figura 10 – Funções e linguagem algébrica.

Grande parte das funções que estudamos é determinada por fórmulas matemáticas (regras ou leis).

No início do capítulo vimos uma correspondência entre o número de litros de gasolina e o preço a pagar expressa por:

preço a pagar = 2,40 vezes o número de litros comprados

em que o preço de 1 ℓ é R$ 2,40. Essa função pode ser expressa pela fórmula matemática:

$$y = 2{,}40x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2{,}40x$$

Veja outras funções expressas por fórmulas matemáticas:

- f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa o seu dobro $\to f(x) = 2x$ ou $y = 2x$;
- f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa o seu cubo $\to f(x) = x^3$ ou $y = x^3$;
- f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa o seu triplo somado com 1 $\to f(x) = 3x + 1$ ou $y = 3x + 1$;
- f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ que a cada número real diferente de 0 associa o seu inverso $\to f(x) = \frac{1}{x}$ ou $y = \frac{1}{x}$ ou $y = x^{-1}$.

Para refletir

Por que neste último exemplo a função não pode ser de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

Exemplos:

1º) Numa indústria, o custo operacional de uma mercadoria é composto de um custo fixo de R$ 300,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade fabricada. Portanto, o custo operacional, que representaremos por **y**, é dado em função do número de unidades fabricadas, que representaremos por **x**. Vamos expressar, por meio de uma fórmula matemática, a lei dessa função.

custo operacional = custo fixo + custo variável $\Rightarrow y = 300{,}00 + 0{,}50x$

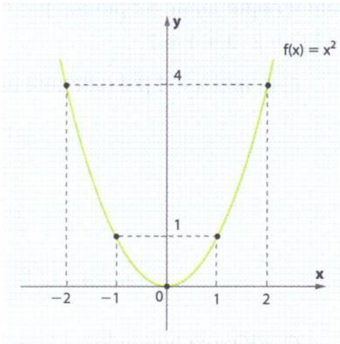
Então, a fórmula matemática é $f(x) = 300{,}00 + 0{,}50x$ ou $y = 300{,}00 + 0{,}50x$.

Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 77.

Figura 11 – Função par e função ímpar

Função par

Consideremos a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Veja ao lado o gráfico correspondente.



Observe que:

- $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ f(-1) = (-1)^2 = 1 \end{array}\right\}$ $f(1) = f(-1)$, ou seja, 1 e -1 têm a mesma imagem
- $\left.\begin{array}{l} f(2) = 2^2 = 4 \\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(2) = f(-2)$, ou seja, 2 e -2 têm a mesma imagem

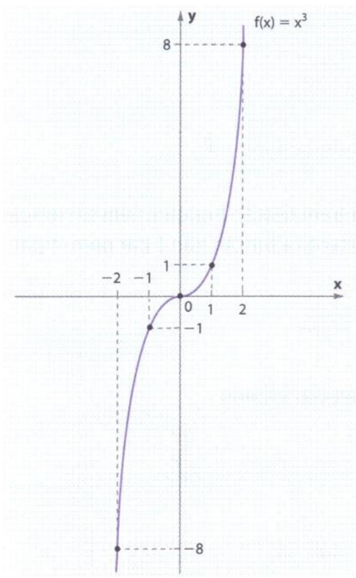
O gráfico de $f(x) = x^2$ é *simétrico em relação ao eixo* **y**. Para uma função qualquer, podemos escrever:

f é função par se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, para qualquer $x \in D$, em que o domínio é simétrico em relação à origem, isto é, $x \in D$ acarreta $-x \in D$.
O gráfico de **f** é simétrico em relação ao eixo **y**.

Assim, $f(x) = x^2$ é par, pois para qualquer $x \in D$ temos $f(x) = x^2$ e $f(-x) = (-x)^2 = x^2$, ou seja, $f(x) = f(-x)$.

Função ímpar

Vamos considerar a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$.



Pela análise do gráfico, observe que:

- $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 = 1 \\ f(-1) = (-1)^3 = -1 \end{array}\right\}$ $f(1) = -f(-1)$, ou seja, 1 e -1 têm imagens opostas
- $\left.\begin{array}{l} f(2) = 2^3 = 8 \\ f(-2) = (-2)^3 = -8 \end{array}\right\}$ $f(2) = -f(-2)$, ou seja, 2 e -2 têm imagens opostas
- Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, se $f(x) = m$, então $f(-x) = -m$, pois $x^3 = -(-x)^3$.

Por isso, o gráfico de $f(x) = x^3$ é *simétrico em relação ao ponto* **O**, origem do sistema cartesiano, e dizemos que a função **f** é ímpar. De modo geral:

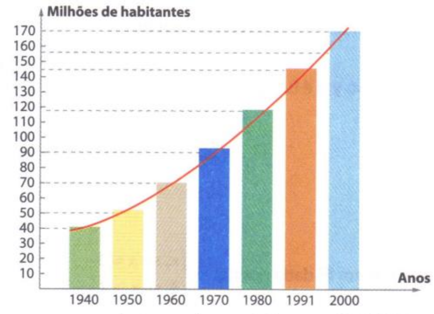
f é função ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$.
O domínio é simétrico em relação à origem, isto é, $x \in D$ acarreta $-x \in D$.
O gráfico de **f** é simétrico em relação à origem **O**.

Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 87.

Figura 12 – Função crescente e função decrescente

Vamos analisar as seguintes situações.

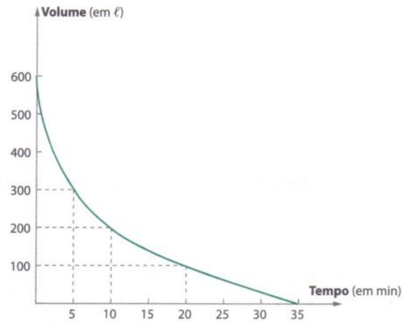
- O gráfico abaixo mostra a população brasileira de 1940 a 2000.



Fonte: www.ibge.gov.br. Acesso em 22/11/2006.

Pelo gráfico notamos o aumento da população em função do aumento do tempo (dado em anos), ou seja, a curva é crescente.

- Este gráfico mostra um tanque de água sendo esvaziado:



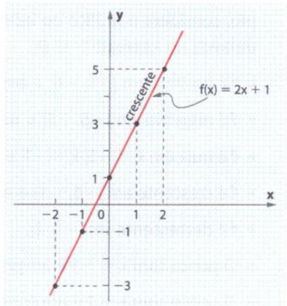
Pelo gráfico notamos a diminuição do volume de água em função do aumento do tempo (dado em min), ou seja, a curva é decrescente.

Analisando gráficos

Vamos analisar os gráficos que já construímos.

Observe o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$: é uma reta.

Dizemos que essa função é *crescente*, pois, quanto maior o valor dado a **x**, maior será o valor correspondente a $y = f(x) = 2x + 1$.



Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 89.

Figura 13 – Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

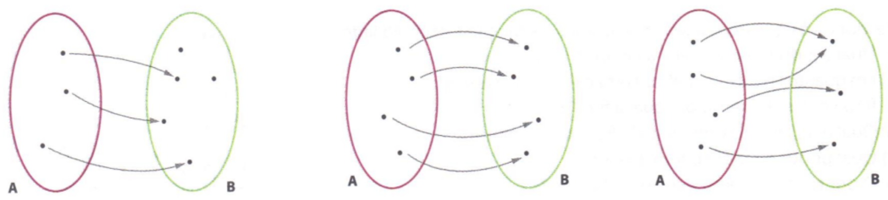
Função injetiva ou injetora

Uma função f: A → B é *injetiva* (ou *injetora*) quando elementos diferentes de **A** são transformados por **f** em elementos diferentes de **B**, ou seja, não há elemento em **B** que seja imagem de mais de um elemento de **A**. Assim, **f** é injetiva quando:

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } \mathbf{A} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } \mathbf{B}$$

ou equivalentemente usando a contrapositiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ em } \mathbf{B} \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ em } \mathbf{A}$$



função injetiva | função injetiva | função não injetiva

(Não há elemento em **B** que seja imagem de mais de um elemento de **A**.)

(Há um elemento em **B** que é imagem de dois elementos distintos em **A**.)

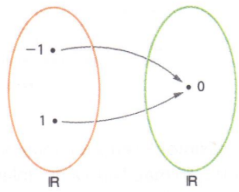
Exemplos:

1º) A função f: ℝ → ℝ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetiva, pois:

- para x = 1 corresponde f(1) = 0;
- para x = −1 corresponde f(−1) = 0.

Neste caso, para dois valores diferentes de **x** encontramos um mesmo valor para a função.

No diagrama:



2º) A função f: ℝ → ℝ dada por f(x) = 2x é injetiva, pois faz corresponder a cada número real **x** o seu dobro 2x e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro. Simbolicamente:

$$\text{Para quaisquer } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Observação: Podemos verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico. Sabemos que, se a função é injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando linhas horizontais cortando o gráfico, essas linhas só podem cruzar o gráfico uma única vez para cada valor de **y**.

Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 94.

Ao final do capítulo o autor propõe mais alguns exemplos de funções, utilizando as sequências (Figura 14), assim como o Currículo oficial do Estado de São Paulo.

Figura 14 – Função e sequências

Uma *sequência* é uma função cujo domínio é o conjunto IN*, conjunto dos naturais excetuando-se o zero:

$$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

A cada número natural diferente de zero corresponde um único número real $\mathbf{x_n}$:

$$1 \to x_1;\ 2 \to x_2;\ 3 \to x_3;\ ...;\ n \to x_n;\ ...$$

Uma sequência é indicada por:

$$(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \text{ ou } (x_n)$$

Por exemplo, a função de IN* em IR dada por $f(x) = 3x$ determina a sequencia (3, 6, 9, 12, ...) dos múltiplos positivos de 3.

Dois importantes exemplos de sequências são as progressões aritmética e geométrica.

Para refletir

Podemos ter também sequências finitas. Neste caso, a função é $f: \{1, 2, 3, ..., n\} \to \mathbb{R}$ e a sequência $x_1, x_2, ..., x_n$ tem **n** termos.

Progressão aritmética

A sequência 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, ... é uma *progressão aritmética* (PA). Observe que cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Neste caso, essa constante 7 chama-se *razão* da PA. A razão de uma PA pode ser um número positivo, negativo ou igual a zero. Por exemplo:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ... é uma PA de razão 4 (crescente)

15, 12, 9, 6, 3, 0, −3, −6, ... é uma PA de razão −3 (decrescente)

8, 8, 8, 8, 8, ... é uma PA de razão 0 (constante)

Observe também que na PA:

$$1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...$$

temos

$$8 = 1 + 7;\ 15 = 8 + 7 = 1 + 2 \cdot 7;\ 22 = 15 + 7 = 1 + 3 \cdot 7;\ 29 = 22 + 7 = 1 + 4 \cdot 7; \text{etc.}$$

Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 104.

Figura 15 – Função e sequências

De modo geral, em uma progressão aritmética como $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ de razão **r**, temos:

$$x_{n+1} - x_n = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{e } x_2 = x_1 + r;\ x_3 = x_2 + r = x_1 + 2r;\ x_4 = x_1 + 3r;\ ...;$$

$$x_{n+1} = x_1 + nr \text{ ; etc.}$$

Progressão geométrica

A sequência:

$$2, 6, 18, 54, 162, 486, ...$$

é uma *progressão geométrica* (PG). Observe que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por 3. Neste caso, essa constante 3 chama-se *razão* da PG.

Observe que:

$$6 = 2 \cdot 3;\ 18 = 6 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2;$$

$$54 = 18 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3;$$

$$162 = 54 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4; \text{etc.}$$

De modo geral, em uma progressão geométrica como $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ de razão $q \neq 0$, temos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = q \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{e } x_2 = x_1 \cdot q;\ x_3 = x_2 \cdot q = x_1 \cdot q^2;$$

$$x_4 = x_3 \cdot q = x_1 \cdot q^3;\ ...;\ x_{n+1} = x_1 \cdot q^n \ ;\ ...$$

Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 104.

Sobre o ensino de funções e a proposta deste livro didático, o autor explica no manual do professor que optou por apresentar o conteúdo como variação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza, pois esse enfoque é o que aparece na Matemática, nas ciências em geral e no cotidiano e que a ênfase do trabalho com funções foi dada nos gráficos e nas propriedades observadas (DANTE, 2008, p.44). Para Dante (2008), a forma como está apresentado no livro, o conceito de funções assume um papel unificador relevante entre os vários campos da Matemática e que a interdisciplinaridade se faz presente de modo marcante, pois as funções constituem a linguagem que expressa os fenômenos das ciências naturais e sociais. Esses exemplos possibilitam aos professores e alunos da educação básica compreender de modo amplo que as funções expressam a linguagem dos fenômenos das ciências naturais e sociais? É possível compreender as grandezas e suas interdependências? É possível estabelecer relação entre esses exemplos e o conceito de funções e suas diversas representações?

4.3.2 Atividades do livro Matemática, Ciência, Tecnologia e Linguagem, volume 1, Jackson Ribeiro, 2010, Editora Scipione

Ribeiro (2010) discute as noções básicas de funções introduzindo-as por meio de algumas situações-problema que objetivam dar significado ao conceito de funções. Segundo o autor, ao trabalhar as noções do conceito de funções, o aluno será capaz de reconhecer

> (...) as relações entre grandezas variáveis dadas por gráficos, tabelas e fórmulas, desenvolver e reconhecer o conceito de funções, analisar e determinar o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função, construir, ler e interpretar gráficos de funções, analisar gráficos para verificar o crescimento e decrescimento de uma função, resolver problemas que envolvam o conceito de função e reconhecer função injetora, sobrejetora, bijetora, inversa e composta. (Ribeiro, 2010, p.43).

Ribeiro inicia o trabalho do conceito de funções utilizando-se de exemplos que relacionam a variação entre as grandezas por meio de tabelas, linguagem algébrica e gráficos (Figuras 16 e 17).

Figura 16 – Conceito de funções: exemplo por meio de tabela.

Ricardo foi a um posto abastecer seu carro. No quadro ao lado está representado o preço do litro de combustível nesse posto.

A partir das informações do quadro, vamos construir uma tabela que mostra o preço a ser pago pela gasolina de acordo com a quantidade de litros.

Posto Parada Certa	
Combustível	**Preço por litro**
Gasolina	R$ 2,65
Álcool	R$ 2,08
Diesel	R$ 1,95

Litros (x)	1	2	3	4	5	6
R$ (y)	2,65	5,30	7,95	10,60	13,25	15,90

Note que estão sendo relacionadas duas grandezas: a quantidade de litros de combustível x e a quantia em reais y.

Cada quantidade de litros de gasolina corresponde a um único valor em reais, ou seja, a cada valor que atribuímos à variável x, obtemos um único valor para a variável y. Essa situação constitui um exemplo de **função**. Nesse caso, x é a variável **independente** e y a variável **dependente**, pois y depende de x.

Podemos escrever uma fórmula que permite calcular a quantia y a ser paga pela gasolina em função da quantidade x de litros.

$$\underbrace{y}_{\text{quantia a ser paga}} = \overbrace{x}^{\text{quantidade de litros}} \cdot \underbrace{2{,}65}_{\text{preço de 1 L de gasolina}}$$

Utilizando esta fórmula, podemos calcular quantos reais serão pagos por 18,6 L de gasolina.

$$y = x \cdot 2{,}65 = 18{,}6 \cdot 2{,}65 = 49{,}29 \rightarrow \text{R\$ } 49{,}29$$

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 45.

Na atividade acima (Figura 16), este autor também apresenta o conceito de funções como relação de dependência entre duas grandezas, quantidade de litros de combustível e preço a pagar por meio de uma tabela organizada, expressando ao final, essa relação por meio da linguagem algébrica.

Figura 17 – Relação de interdependência entre duas variáveis por meio de gráfico.

Exemplo 2

No gráfico a seguir, está representada a produção de autoveículos no Brasil nos seis primeiros meses de 2009.

Por meio deste gráfico, podemos obter várias informações; por exemplo, o mês em que houve a maior produção de autoveículos, a média de produção durante os seis meses etc.

Note que a produção depende do mês que está sendo analisado, ou seja, a produção está em função do mês. Nessa relação o mês é a variável independente e a produção, a variável dependente.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 46.

Já nesta atividade (Figura 17), o autor propõe relacionar a produção de autoveículos por mês, sugerindo a interdependência entre essas grandezas – produção e meses do ano. Mas também não propõe discussão sobre o que são essas grandezas e por que são interdependentes. Nos parece que nesses livros didáticos, a ideia de interdependência é função do professor explicar e o aluno observar a tabela e entender. Acreditamos que essas ideias não são tão simples e intuitivas.

Após os exemplos, o autor conceitua e define produto cartesiano e relação, exemplificando a relação com o diagrama de flechas (Figura 18) e explica que também pode ser representada por um plano cartesiano ortogonal, apresentado alguns detalhes sobre esse plano, tais como, quadrantes, origem, par ordenado e coordenadas (Figura 19).

Figura 18 – Função: produto cartesiano e relação

Antes de definirmos função, vamos utilizar alguns conceitos de conjuntos e estudar o que é produto cartesiano e relação.

Produto cartesiano

Considere dois conjuntos A e B não vazios. Denominamos **produto cartesiano de A por B**, indicado por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), em que x pertence a A e y pertence a B.

$$\underline{A \times B} = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

lê-se: A cartesiano B ou produto cartesiano de A por B

O número de elementos de $A \times B$ é dado por $n(A) \cdot n(B)$.

Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{-1, 3\}$, veja como podemos representar $A \times B$ por meio de um conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(2, -1), (2, 3), (4, -1), (4, 3), (6, -1), (6, 3)\}$$

Note que este conjunto tem 6 elementos, ou seja, $n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 2 = 6$.

Relação

Dados os conjuntos A e B não vazios, denominamos **relação R** de A em B qualquer subconjunto de $A \times B$.

R é relação de A em B se, e somente se, $R \subset A \times B$.

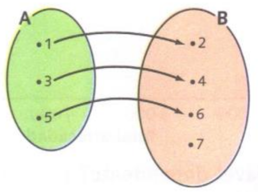
Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 7\}$, e a relação R de A em B definida por $y = x + 1$, sendo $x \in A$ e $y \in B$, vamos escrever os elementos da relação R.

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2;\ (1, 2)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4;\ (3, 4)$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 5 + 1 = 6;\ (5, 6)$$



Portanto, $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$.

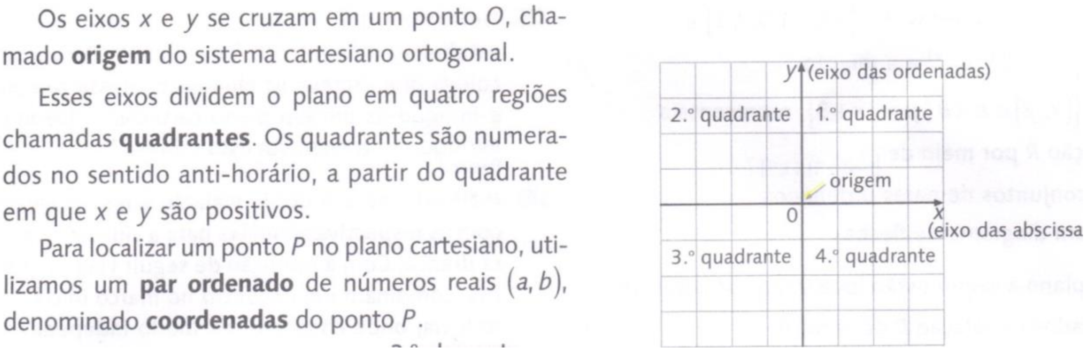
Veja ao lado como podemos representar esta relação por meio de um **diagrama de flechas**.

Uma relação também pode ser representada por meio de um **plano cartesiano ortogonal**.

Sejam x e y dois eixos perpendiculares entre si. Chamamos o eixo horizontal x de **eixo das abscissas** e o eixo vertical y de **eixo das ordenadas**.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 48.

Figura 19 – Plano cartesiano ortogonal



Os eixos x e y se cruzam em um ponto O, chamado **origem** do sistema cartesiano ortogonal.

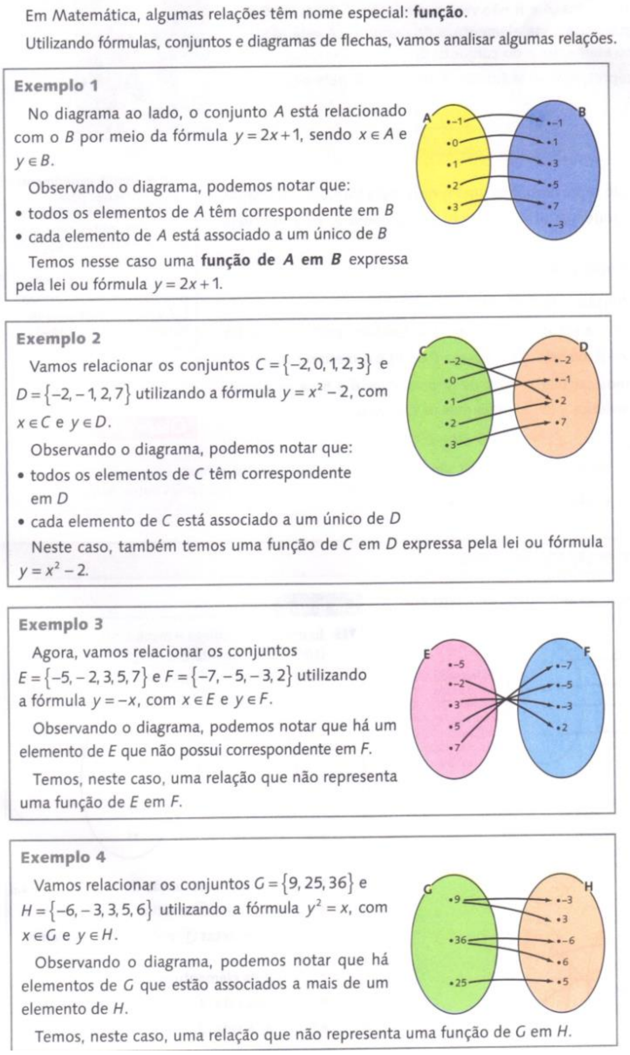
Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**. Os quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do quadrante em que x e y são positivos.

Para localizar um ponto P no plano cartesiano, utilizamos um **par ordenado** de números reais (a, b), denominado **coordenadas** do ponto P.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 49.

Na figura 20, o autor explica que algumas relações podem ser chamadas de função e exemplifica com diagramas de flechas, procurando levar o leitor ao conceito intuitivo de função por meio de observações realizadas nos diagramas.

Figura 20 – Definição de função



Em Matemática, algumas relações têm nome especial: **função**.

Utilizando fórmulas, conjuntos e diagramas de flechas, vamos analisar algumas relações.

Exemplo 1

No diagrama ao lado, o conjunto A está relacionado com o B por meio da fórmula $y = 2x + 1$, sendo $x \in A$ e $y \in B$.

Observando o diagrama, podemos notar que:

- todos os elementos de A têm correspondente em B
- cada elemento de A está associado a um único de B

Temos nesse caso uma **função de A em B** expressa pela lei ou fórmula $y = 2x + 1$.

Exemplo 2

Vamos relacionar os conjuntos $C = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ e $D = \{-2, -1, 2, 7\}$ utilizando a fórmula $y = x^2 - 2$, com $x \in C$ e $y \in D$.

Observando o diagrama, podemos notar que:

- todos os elementos de C têm correspondente em D
- cada elemento de C está associado a um único de D

Neste caso, também temos uma função de C em D expressa pela lei ou fórmula $y = x^2 - 2$.

Exemplo 3

Agora, vamos relacionar os conjuntos $E = \{-5, -2, 3, 5, 7\}$ e $F = \{-7, -5, -3, 2\}$ utilizando a fórmula $y = -x$, com $x \in E$ e $y \in F$.

Observando o diagrama, podemos notar que há um elemento de E que não possui correspondente em F.

Temos, neste caso, uma relação que não representa uma função de E em F.

Exemplo 4

Vamos relacionar os conjuntos $G = \{9, 25, 36\}$ e $H = \{-6, -3, 3, 5, 6\}$ utilizando a fórmula $y^2 = x$, com $x \in G$ e $y \in H$.

Observando o diagrama, podemos notar que há elementos de G que estão associados a mais de um elemento de H.

Temos, neste caso, uma relação que não representa uma função de G em H.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 51.

Após propor a realização de exercícios com os conceitos trabalhados, o autor define função (Figura 21) como "Dados dois conjuntos A e B não vazios, a relação *f* de A em B que associa cada elemento x do conjunto A a um único elemento y do conjunto B."

Figura 21 – Conceito de função

Resumindo, definimos função como:

Dados os conjuntos A e B não vazios, a relação f de A em B é uma **função** quando a cada elemento x do conjunto A está associado um único elemento y do conjunto B.

Podemos representar uma função f de A em B pela seguinte notação:

$$f: A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

(lê-se: função f de A em B)

Em geral, quando representamos uma função pela fórmula, utilizamos a letra f. Porém, podemos utilizar outras letras, como g, h, j etc. Veja alguns exemplos:

- $g: A \to B$ (lê-se: função g de A em B)
- $A \xrightarrow{h} B$ (lê-se: função h de A em B)

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 52.

Na sequência (Figura 22), o autor começa a trabalhar com as definições de domínio, contradomínio e imagem de uma função, exemplificando por meio de diagramas.

Figura 23 – Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Quando escrevemos uma função $f: A \to B$, denominamos o conjunto A de **domínio** e o conjunto B, de **contradomínio**. Cada elemento y de B associado ao elemento x de A, denominamos **imagem** de x pela função f. Ao conjunto desses valores de y denominamos **imagem da função**.

Para indicar esses conjuntos, utilizamos a seguinte notação:

$D(f)$: lê-se domínio da função f

$CD(f)$: lê-se contradomínio da função f

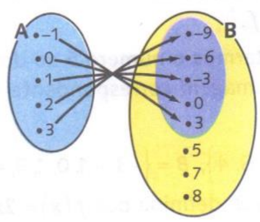
$Im(f)$: lê-se imagem da função f

Exemplo

A função $f: A \to B$, em que $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-9, -6, -3, 0, 3, 5, 7, 8\}$, é definida pela regra de correspondência $f(x) = -3x$.

Nesta função, o domínio corresponde ao conjunto A, o contradomínio ao conjunto B, e o conjunto imagem é $Im(f) = \{-9, -6, -3, 0, 3\}$.

Note que $Im(f) \subset CD(f)$.



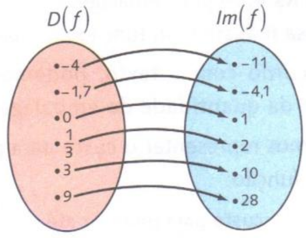
Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 53.

Ribeiro (2010) explica que dentre as funções exemplificadas anteriormente, algumas podem ser representadas por fórmulas, também chamadas de leis ou regras, de acordo com a definição de função aqui já apresentada. A Figura 23 apresenta três exemplos dados pelo autor para exemplificar funções determinadas por fórmulas.

Figura 23 – Funções determinadas por fórmulas

Exemplo 1

No esquema representado ao lado, cada número $x \in D(f)$ está associado a um número $y \in Im(f)$ pela fórmula $y = 3x + 1$ ou $f(x) = 3x + 1$, isto é, y é igual ao triplo de x somado com 1.



De acordo com essa função:

- para $x = 3$, temos $y = 3 \cdot 3 + 1 = 10$, ou seja, $f(3) = 10$
  para $x = -1{,}7$, temos $y = 3 \cdot (-1{,}7) + 1 = -4{,}1$, ou seja, $f(-1{,}7) = -4{,}1$
- -11 é a imagem de $x = -4$, pois $f(-4) = 3 \cdot (-4) + 1 = -11$

Exemplo 2

Em uma loja, as impressões de fotografias digitais de certo tamanho custam R$ 0,65 cada uma. Na tabela ao lado está indicada a quantia a ser paga de acordo com a quantidade de impressões.

Impressões	R$
1	0,65
2	1,30
3	1,95
4	2,60
5	3,25
10	6,50
20	13,00

Com base nessas informações, é possível escrever uma fórmula que permite calcular a quantia a ser paga em função da quantidade de fotografias impressas.

- para 2 impressões, temos $2 \cdot 0{,}65 = 1{,}30$
- para 3 impressões, temos $3 \cdot 0{,}65 = 1{,}95$

...

- para 20 impressões, temos $20 \cdot 0{,}65 = 13{,}00$

Dessa forma, para x impressões, temos $x \cdot 0{,}65 = y$. Isto é, nesse caso, cada número natural x está associado a um número racional não negativo y, tal que y é igual a x multiplicado por 0,65, que podemos representar por: $f(x) = x \cdot 0{,}65$ ou $y = x \cdot 0{,}65$.

$D(f)$ é o conjunto cujos elementos são as quantidades de fotografias a serem impressas e a $Im(f)$ é o conjunto das quantias a serem pagas pelas impressões.

Exemplo 3

Para imprimir 100 painéis, uma gráfica cobra R$ 150,00 por painel. Porém, se a encomenda for superior a 100 painéis, o preço é reduzido em R$ 1,00 por painel adicional.

De acordo com as informações é possível escrever uma fórmula que permite obter o faturamento dessa gráfica com a produção de painéis.

Representando por p a quantidade de painéis acima de 100, temos que a encomenda é representada por $100 + p$. Além disso, o preço cobrado será de R$ $(150 - p)$ por painel. Dessa forma, o faturamento da gráfica será obtido a partir da fórmula: $f(p) = (100 + p)(150 - p) = -p^2 + 50p + 15000$.

Nesse caso, p deve ser não negativo, e $150 - p \geq 0$, ou seja, $p \leq 150$.

Portanto, a função obtida é $f(p) = -p^2 + 50p + 15000$ com domínio $[0, 150] \cap \mathbb{N}$ e a imagem é o conjunto das quantias a serem pagas pelos painéis.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 55.

O autor explica que uma função definida por *f: A → B* deve ter domínio, contradomínio e uma regra e que o domínio é formada pelos elementos do conjunto A e o contradomínio pelos elementos do conjunto B, exemplificando em seguida (Figura 24).

Figura 24 – Estudo do domínio de uma função

Veja a seguir outros exemplos cujo domínio está evidente.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $D(f) = \mathbb{R}$
- $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $D(g) = \mathbb{N}$
- $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+$, $D(h) = \mathbb{R}^*$

Nos casos em que o domínio não está evidente, consideramos que ele seja o maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$. No caso do contradomínio, consideramos que ele seja $\mathbb{R}$ $(CD = \mathbb{R})$.

Exemplo

Na função $f(x) = \frac{7}{2x}$ o domínio pode ser todo o conjunto dos números reais com exceção de 0, pois não existe divisão por 0.

$$2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

Em notação matemática, escrevemos:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\} \text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \text{ ou } D(f) = \mathbb{R}^*$$

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 58.

Após exemplificar e propor exercícios sobre o estudo do domínio de uma função, Ribeiro (2010) propõe estudar o gráfico de uma função e apresenta quatro exemplos. O primeiro exemplo (Figura 25) apresenta um gráfico de barras trazendo informações sobre os seis países que mais conquistaram medalhas nas Olimpíadas de Pequim, em 2008. Os demais exemplos também trabalham com gráficos onde aparecem informações que recebem tratamento estatístico.

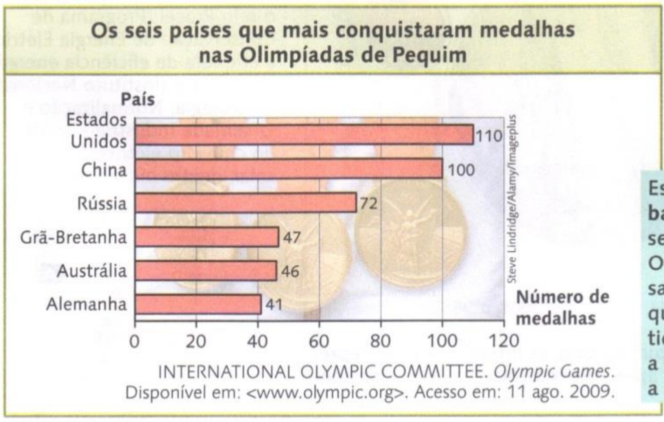
Figura 25 - Gráfico de uma função

Em nosso dia a dia podemos observar em jornais, revistas, livros e na televisão a presença de gráficos das mais variadas formas. Neles, aparece a representação visual de informações relacionando grandezas.

Veja alguns exemplos de gráficos, por meio dos quais podemos determinar o assunto abordado e tirar algumas conclusões.

Bob Rosato/Sports Illustrated/Getty Images

Equipe masculina de basquetebol dos EUA, após receber a medalha de ouro nas Olimpíadas de Pequim, China.



Este gráfico, conhecido como **gráfico de barras**, traz informações acerca dos 6 países que mais conquistaram medalhas nas Olimpíadas de Pequim, em 2008. Analisando-o, podemos notar, por exemplo, que o país que conquistou a maior quantidade de medalhas foram os EUA, e que a Rússia obteve 31 medalhas a mais que a Alemanha.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 59.

A proposta apresenta por Ribeiro (2010) para construir o gráfico de uma função é a de atribuir valores à variável x e calcular os valores correspondentes à variável y, conforma a lei dada (Figura 26), com o auxílio de uma tabela para associar os pares ordenados.

Figura 26 – Construção do gráfico de uma função

Para construir o gráfico de uma função f, utilizamos a ideia de representação de par ordenado de números reais (a, b) em um plano cartesiano, com $a \in D(f)$ e $b \in Im(f)$.

Vamos construir no plano cartesiano o gráfico de uma função $f: A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Atribuímos valores a x e encontramos os valores correspondentes para y, obtendo pares ordenados (x, y). Em seguida, associamos cada par ordenado da tabela a um ponto no plano cartesiano.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 62.

O autor explica que é possível, em alguns casos, determinar o domínio e a imagem da função a partir do gráfico (Figura 27). O domínio é a projeção do gráfico no eixo das abscissas e a imagem é a projeção do gráfico no eixo das ordenadas.

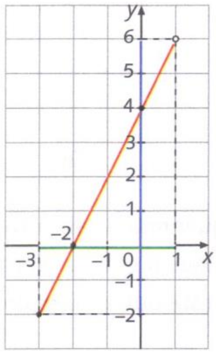
O zero da uma função, explica o autor, é todo valor de *x* (domínio da função) tal que *f(x) = 0* e que no gráfico, esse valor corresponde à abscissa dos pontos em que o gráfico corta o eixo *x* (Figura 28).

Figura 27 – Domínio e imagem de uma função a partir do gráfico

Conhecendo o gráfico de uma função, é possível determinar, em alguns casos, o domínio e o conjunto imagem.

Observe no exemplo ao lado o gráfico da função f.

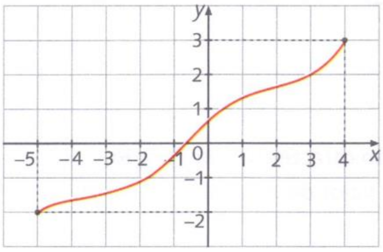
Note que o gráfico ao lado foi projetado nos eixos das abscissas e das ordenadas. A projeção no eixo x corresponde ao domínio e a projeção no eixo y, ao conjunto imagem.



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$$

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y < 6\}$$

Neste outro exemplo utilizamos o mesmo procedimento. Observe o gráfico da função g:



$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 4\}$$

$$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 3\}$$

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 65.

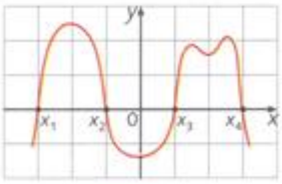
Figura 28 – Zero de uma função

O **zero** de uma função f é todo valor $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$.

Na representação gráfica de uma função, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico corta o eixo x.

Exemplo

Neste exemplo, os zeros da função f correspondem a x_1, x_2, x_3 e x_4.

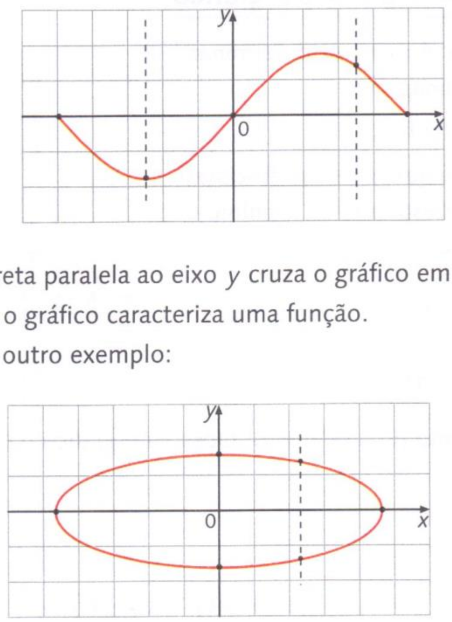


$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 65.

Na sequência, o autor apresenta uma proposta para verificar se um gráfico representa uma função, explicando que para caracterizar uma função, cada valor de *x* do domínio deve ter um único valor correspondente *y* que é a imagem. No gráfico, explica o autor, quando traçar uma reta paralela ao eixo *y*, que cruze o gráfico, esta deve cruzá-lo em um único ponto, para que esse gráfico caracterize uma função e apresenta alguns exemplos (Figura 29).

Figura 29 – Verificar se um gráfico representa uma função



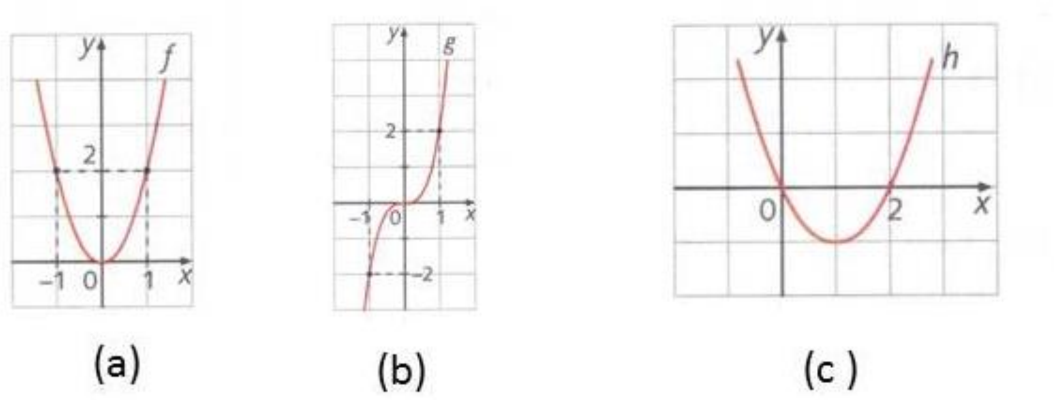
Note que qualquer reta paralela ao eixo *y* cruza o gráfico em um único ponto.
Assim, dizemos que o gráfico caracteriza uma função.
Agora, observe este outro exemplo:

A reta toca o gráfico em dois pontos. Assim, este gráfico não caracteriza uma função, pois temos dois valores correspondentes de *y* para um único valor de *x*.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 66.

O autor explica que o gráfico apresentado na Figura 30 (a) é simétrico porque para todo *x* do domínio, $f(x) = f(-x)$ e por isso, a função é par , o gráfico apresentado Figura 30 (b) é simétrico em relação à origem, e que para todo *x* do domínio, $g(x) = -g(-x)$, então, é uma função ímpar e que o gráfico exemplificado na Figura 30 (c) não é função par e nem função ímpar.

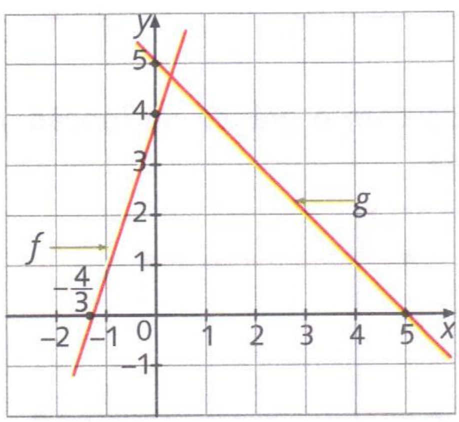
Figura 30 – Função par (a), função ímpar (b) e função nem par nem ímpar (c)



Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 66.

Na sequência do estudo de função, Ribeiro (2010) exemplifica e analisa o comportamento de duas funções, a função crescente $f(x) = 3x + 4$, explicando que nessa função a medida que os valores de x aumentam, os valores de y também aumentam, e a função decrescente $g(x) = - x + 5$, onde os valores de y diminuem a medida que os valores de x aumentam (Figura 31).

Figura 31 – Exemplo de função crescente e de função decrescente



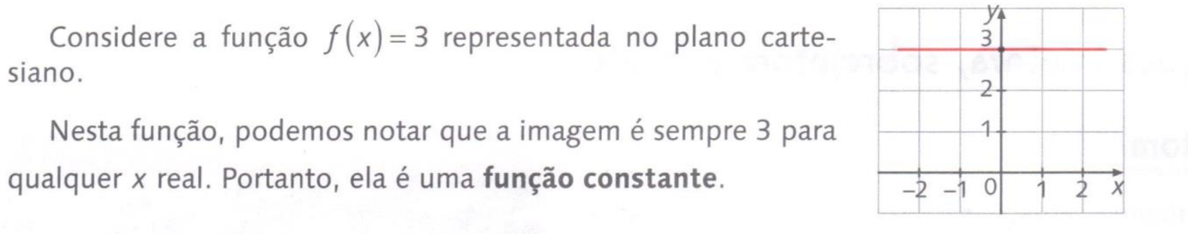
Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 68.

Após os exemplos, o autor define que,

> (...) uma função f *é* crescente em um intervalo contido no domínio de f se, e somente se, para todos x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, obtivermos $f(x_1) < f(x_2)$. E que uma função f *é* decrescente em um intervalo contido no domínio de f se, e somente se, para todos x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, obtivermos $f(x_1) > f(x_2)$*”.* (Ribeiro, 2010, p.67)

Ainda estudando e analisando o comportamento das funções, o autor apresenta um exemplo de função constante (Figura 32) e define-a como “ uma função $f\colon R \rightarrow R$ para todo $x \epsilon R$ tal que $f(x) = k$, com $k \epsilon R$”.

Figura 32 – Exemplo de função constante



Considere a função $f(x) = 3$ representada no plano cartesiano.

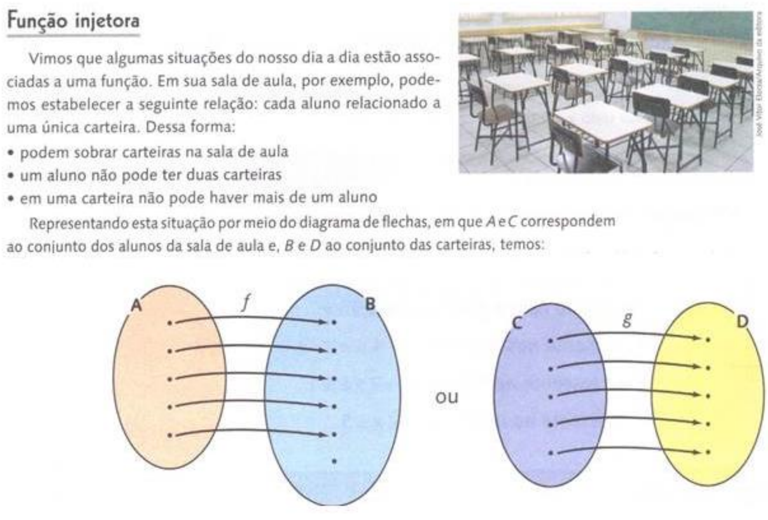
Nesta função, podemos notar que a imagem é sempre 3 para qualquer x real. Portanto, ela é uma **função constante**.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 68.

A proposta segue parecida com o trabalho já desenvolvido, o autor apresenta exemplos, explica-os e define ou conceitua a situação, como na Figura 33, onde a função injetora é exemplificada.

O autor explica que o exemplo caracteriza função injetora, pois não há elemento no contradomínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio e que a função é injetora se diferentes elementos do domínio tiverem imagens diferentes, ou seja, “ uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, para todos x_1 e x_2 pertencentes a A, temos $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$”. Após a definição, são apresentados dois exemplos, o primeiro de uma função injetora e o segundo, de uma função que não é injetora (Figura 34).

Figura 33 – Função injetora



Função injetora

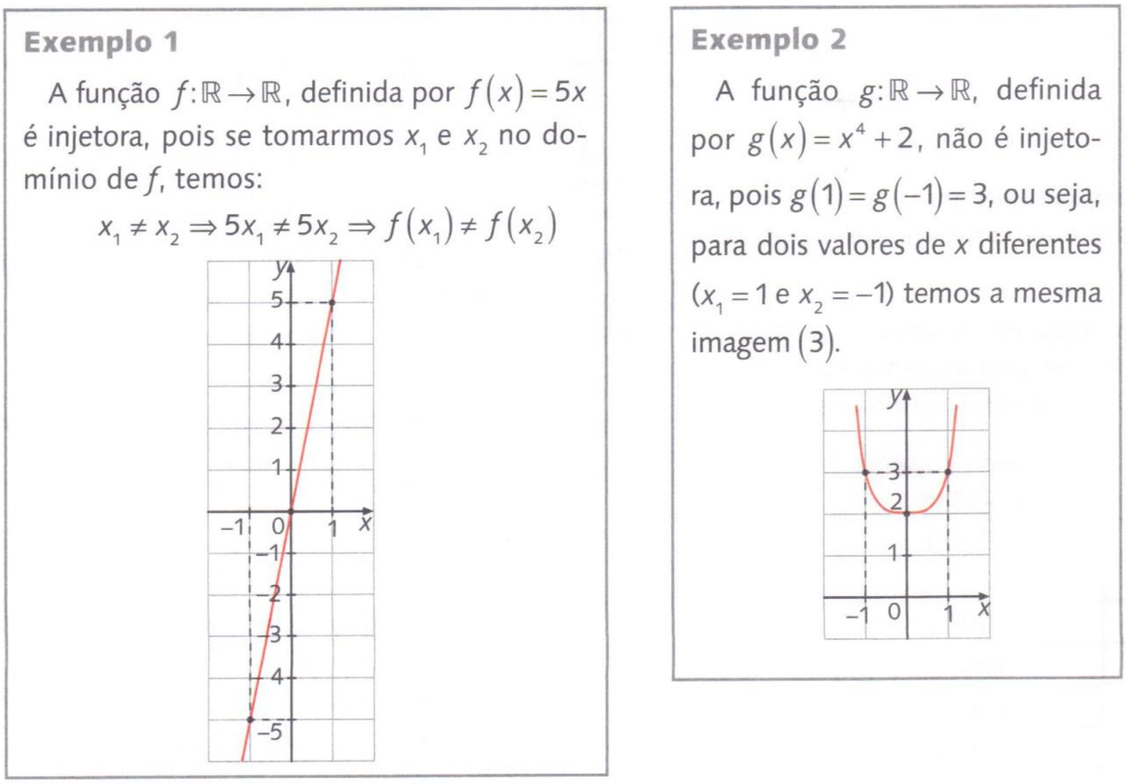
Vimos que algumas situações do nosso dia a dia estão associadas a uma função. Em sua sala de aula, por exemplo, podemos estabelecer a seguinte relação: cada aluno relacionado a uma única carteira. Dessa forma:

- podem sobrar carteiras na sala de aula
- um aluno não pode ter duas carteiras
- em uma carteira não pode haver mais de um aluno

Representando esta situação por meio do diagrama de flechas, em que *A* e *C* correspondem ao conjunto dos alunos da sala de aula e, *B* e *D* ao conjunto das carteiras, temos:

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 70.

Figura 34 – Exemplos de função injetora e não injetora



Exemplo 1

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x$ é injetora, pois se tomarmos x_1 e x_2 no domínio de f, temos:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 5x_1 \neq 5x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

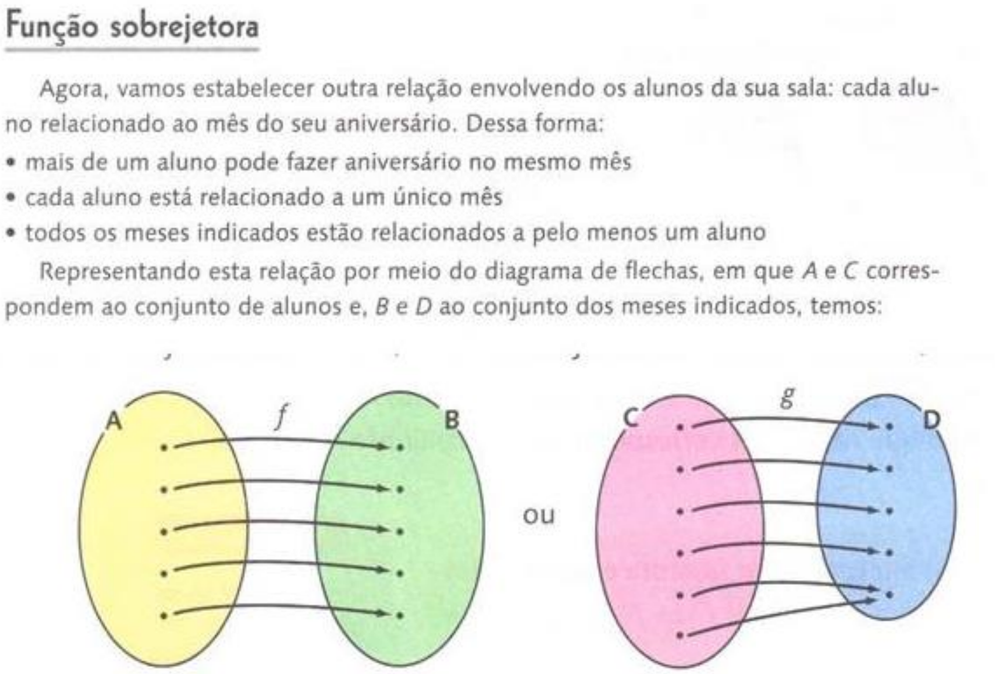
Exemplo 2

A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^4 + 2$, não é injetora, pois $g(1) = g(-1) = 3$, ou seja, para dois valores de x diferentes ($x_1 = 1$ e $x_2 = -1$) temos a mesma imagem (3).

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 70.

Na Figura 35, o autor exemplifica função sobrejetora e explica que a situação apresentada caracteriza função sobrejetora, pois não há elemento do contradomínio que não tenha correspondente no domínio, ou seja, a imagem da função é igual ao seu contradomínio.

Figura 35 – Exemplo de função sobrejetora



Função sobrejetora

Agora, vamos estabelecer outra relação envolvendo os alunos da sua sala: cada aluno relacionado ao mês do seu aniversário. Dessa forma:

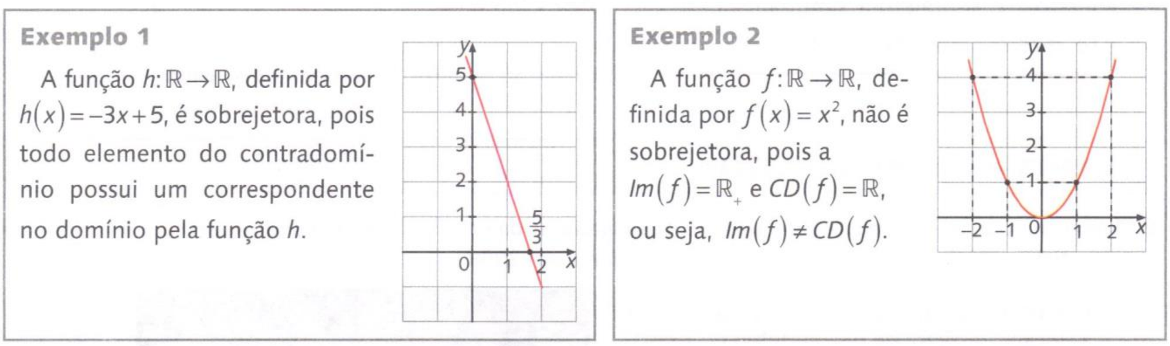
- mais de um aluno pode fazer aniversário no mesmo mês
- cada aluno está relacionado a um único mês
- todos os meses indicados estão relacionados a pelo menos um aluno

Representando esta relação por meio do diagrama de flechas, em que *A* e *C* correspondem ao conjunto de alunos e, *B* e *D* ao conjunto dos meses indicados, temos:

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 71.

A definição apresentada por Ribeiro (2010) para função sobrejetora é de que "uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo *y*, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$". Os exemplos que seguem a seguir (Figura 36) apresentam uma função sobrejetora (à esquerda) e uma função que não é sobrejetora (à direita).

Figura 36 – Exemplos de função sobrejetora



Exemplo 1

A função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = -3x + 5$, é sobrejetora, pois todo elemento do contradomínio possui um correspondente no domínio pela função *h*.

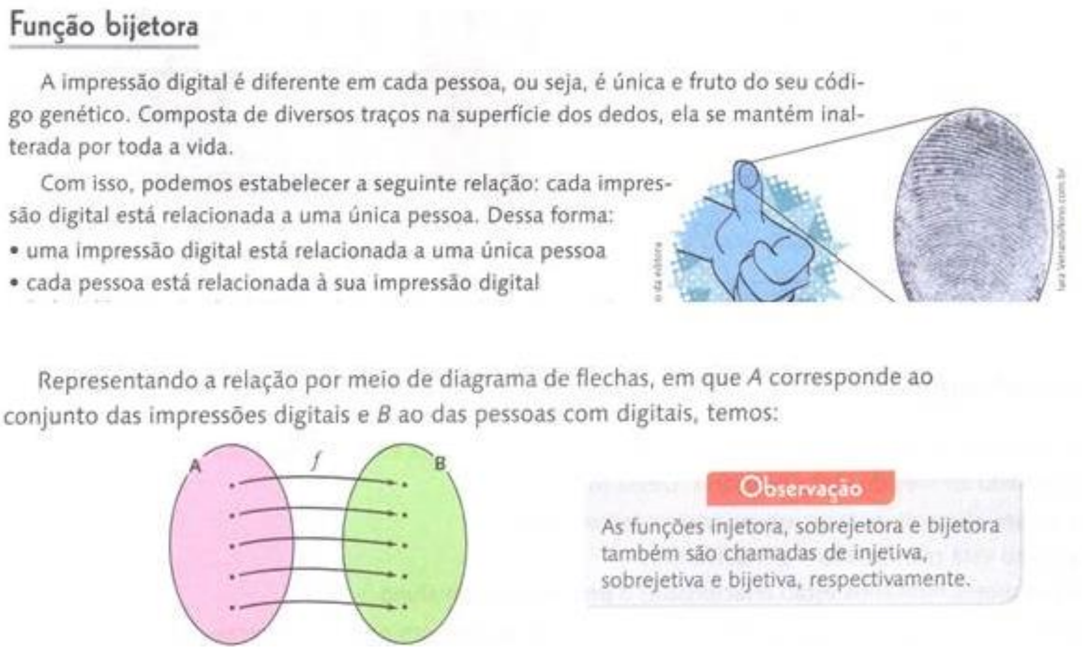
Exemplo 2

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, não é sobrejetora, pois a $Im(f) = \mathbb{R}_+$ e $CD(f) = \mathbb{R}$, ou seja, $Im(f) \neq CD(f)$.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 71.

Para a função bijetora, o autor utiliza a impressão digital como exemplo, explicando que a impressão digital é diferente para cada pessoa, ou seja, é única, cada pessoa está relacionada a uma única impressão digital e cada impressão digital está relacionada a uma única pessoa (Figura 37) e que esta situação caracteriza uma função bijetora, “não há elemento do conjunto B que seja imagem de mais de um elemento do conjunto A (injetora) e não há elemento do conjunto B que não tenha correspondente no conjunto A, ou seja, *Im (f) = CD (f)* (sobrejetora)”

Figura 37 – Exemplo de função bijetora



Função bijetora

A impressão digital é diferente em cada pessoa, ou seja, é única e fruto do seu código genético. Composta de diversos traços na superfície dos dedos, ela se mantém inalterada por toda a vida.

Com isso, podemos estabelecer a seguinte relação: cada impressão digital está relacionada a uma única pessoa. Dessa forma:

- uma impressão digital está relacionada a uma única pessoa
- cada pessoa está relacionada à sua impressão digital

Representando a relação por meio de diagrama de flechas, em que *A* corresponde ao conjunto das impressões digitais e *B* ao das pessoas com digitais, temos:

Observação

As funções injetora, sobrejetora e bijetora também são chamadas de injetiva, sobrejetiva e bijetiva, respectivamente.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p. 72.

Ribeiro (2010) utiliza em sua obra a seguinte definição de função bijetora “ uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora se for injetora e se for sobrejetora, ou seja, para todo $x_1 \neq x_2 \in D(f) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e $Im(f) = CD(f)$”, apresentando dois exemplos, o primeiro que corresponde a uma função bijetora, e o segundo, que não corresponde a uma função bijetora (Figura 38).

Figura 38 – Exemplo de função bijetora

Exemplo 1

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=5x$, vista anteriormente é injetora. Ela também é sobrejetora, pois para todo elemento de $\mathbb{R}$ (contradomínio), há elemento correspondente em $\mathbb{R}$ (domínio) pela função f. Como a função é injetora e sobrejetora simultaneamente, dizemos que ela é bijetora.

Exemplo 2

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, definida por $f(x)=x^2$, é sobrejetora, pois $CD(f)=Im(f)$. Porém, essa função não é injetora, pois $\exists\, x_1 \neq x_2 \in D(f) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$. Logo, f não é bijetora.

Observação

O símbolo $\exists$ lê-se **existe**.

Fonte: Ribeiro, J., 2010, p.72.

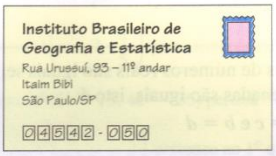
O autor diz que por meio do eixo relacionado aos números e funções e trabalhado dentro de sua obra, é possível desenvolver procedimentos básicos relacionados ao tema, como calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e que as competências trabalhadas, permitem ao estudante, interpretar modelos, perceber o sentido das transformações, buscar regularidades e conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico. O que observamos é que o estudo de função, proposta pelo autor, segue um determinado padrão para promover essas competências: exemplos – conceito – exemplos – exercícios. Para o professor, então, seria interessante complementar esse padrão, diversificando estratégias que levem à compreensão por parte do estudante.

4.3.3 Atividades do livro Matemática, volume 1, Manoel Paiva, 2005, Editora Moderna

Paiva (2005) apresenta a definição formal de função logo após abordar esse tema, por meio de uma revisão do sistema cartesiano ortogonal de coordenadas (Figura 39) e a localização de pontos no plano (Figura 40), Na sequência, para conceituar funções, o autor opta por definir e exemplificar grandezas e trabalhar com as diversas formas de se representar uma função – diagramas, tabelas, gráficos, equações (Figura 41).

Figura 39 – Sistema de coordenadas

Ao enviar uma carta, você deve escrever no envelope um conjunto de informações capazes de localizar o destinatário.



Essas informações são as **coordenadas** do local de destino da carta.

Em muitas outras situações do cotidiano, necessitamos de sistemas de coordenadas. Por exemplo: um ponto de uma estrada é localizado pela marca quilométrica; um ponto sobre a superfície da Terra é determinado por dois números chamados de latitude e de longitude; um ponto do espaço aéreo é localizado por três números — a latitude, a longitude e a altitude.

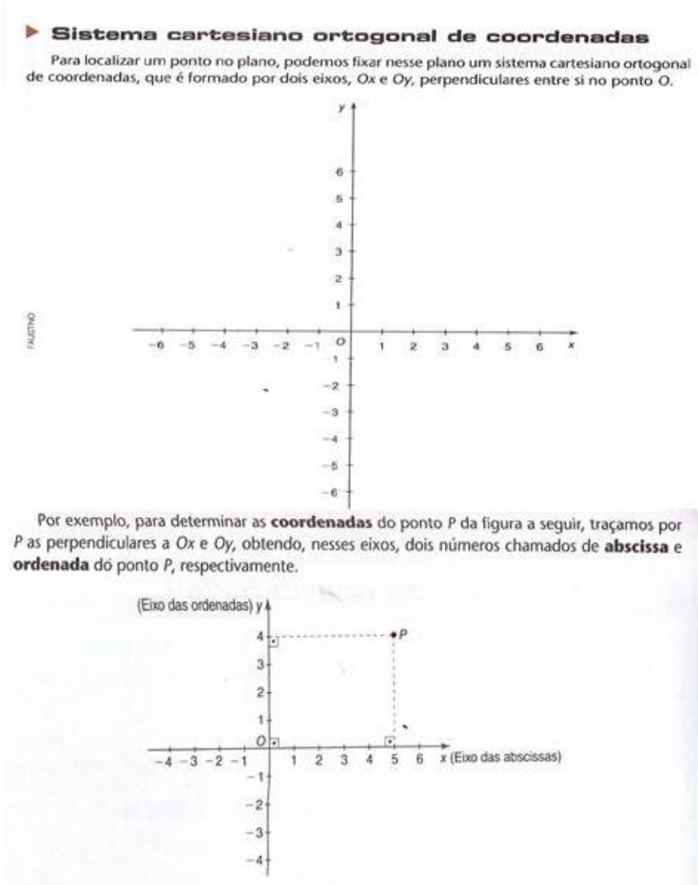
Do mesmo modo, para localizar um ponto em um plano, podemos adotar um sistema de coordenadas, e o mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**, apresentado a seguir.

GARCIA-PELAYO/CID

René Descartes (1596-1650), em gravura do século XIX. Embora o conceito de sistema de coordenadas já fosse utilizado por outros matemáticos, coube a Descartes (*Cartesius*, em latim) a sua formalização na obra *La Géométrie* (1637).

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 83.

Figura 40 – Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas.



▶ **Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**

Para localizar um ponto no plano, podemos fixar nesse plano um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, que é formado por dois eixos, *Ox* e *Oy*, perpendiculares entre si no ponto *O*.

Por exemplo, para determinar as **coordenadas** do ponto *P* da figura a seguir, traçamos por *P* as perpendiculares a *Ox* e *Oy*, obtendo, nesses eixos, dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto *P*, respectivamente.

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 84.

Paiva (2005), explica que uma grandeza é "toda característica de um objeto que pode ser expressa por meio de uma medida", tais como, comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa, vazão, entre outras. No exemplo dado (Figura 41), que relaciona a distância percorrida por um automóvel (d) e o tempo de percurso (*t*), o autor explica que cada valor de *t* pode-se associar um único valor de *d* e que a distância *d* é dada em função do tempo *t* e que a equação $d = 80t$ expressa essa função.

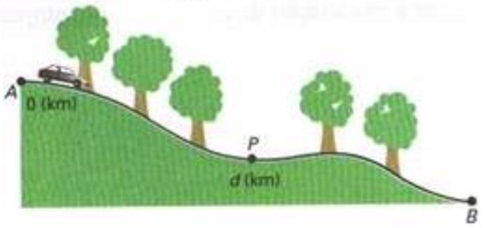
Figura 41 – Conceito de função

Utilizamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc. Toda característica de um objeto que pode ser expressa por meio de uma medida é chamada de **grandeza**. São exemplos de grandezas: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa, vazão etc.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade etc. Para estudar essas dependências, os cientistas usam equações matemáticas relacionando as grandezas envolvidas.

Suponhamos, por exemplo, que um automóvel percorra um trecho *AB* de uma estrada a uma velocidade constante de 80 km/h.

Consideremos *A* como ponto de partida e associemos a ele a marca 0 km. A cada ponto *P*, do trecho *AB*, associemos a marca *d* km, que indica a distância de *P* até *A*, medida ao longo da trajetória.



Que distância terá percorrido o automóvel após duas horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, após duas horas, a distância *d* percorrida, em km, será:

$$d = 80 \cdot 2 \Rightarrow d = 160 \text{ km}$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos construir a tabela a seguir, descrevendo a distância *d* percorrida em vários pontos após *t* horas da partida.

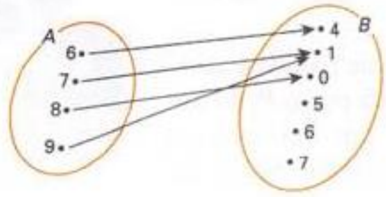
t (horas)	*d* (quilômetros)
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 85.

O autor utiliza, para exemplificar domínio, contradomínio e imagem, a temperatura média, em graus Celsius, em determinados dias do mês, associando o dia à sua respectiva temperatura e explica que cada dia do conjunto *A* corresponde a uma única temperatura do conjunto *B*, concluindo que a correspondência caracteriza uma função *f* de *A* em *B* (Figura 42). Também explica que o conjunto *A* é chamado de domínio (*D(f))*, o conjunto *B* é chamado de contradomínio *(CD(f))* da função *f* e o conjunto {4,0,1} é chamado de imagem *(Im(f))*.

Figura 42 – Formas de representação de uma função, domínio, contradomínio e imagem.

Em cada dia de um determinado mês, a temperatura média de uma região, em graus Celsius, assumiu um dos valores: 0, 1, 4, 5, 6 e 7. Considerando apenas os dias 6, 7, 8 e 9 desse mês, em que as temperaturas médias, em graus Celsius, foram 4, 1, 0 e 1, respectivamente, podemos representar a associação de cada dia à sua temperatura média, por meio do diagrama:



Observando que cada dia do conjunto A corresponde a uma única temperatura no conjunto B, concluímos que essa correspondência é uma função f do conjunto A no conjunto B. Indicamos esse fato por $f: A \rightarrow B$ (lê-se: f é uma função de A em B).

Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio** e **contradomínio** da função f, que indicaremos por D(f) e CD(f), respectivamente. O conjunto $\{4, 1, 0\}$ é chamado de **imagem** da função f, que indicaremos por Im(f).

Além de diagrama, a representação da função f pode ser feita de outras maneiras, conforme mostram os exemplos a seguir.

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 86.

O autor continua sua proposta para o estudo de funções, apresentando outras formas de representação de uma função *f*, como na Figura 43, onde aparecem as representações por tabela, gráfico e equação. Na representação por tabela, o autor coloca na primeira coluna o dia do mês e, na segunda coluna a temperatura associada àquele dia, na representação por meio de gráfico, no eixo das abscissas, os dias, e no eixo das ordenadas, as temperaturas, ressaltando que o domínio está representado no eixo das abscissas e o conjunto imagem no eixo das ordenadas. No exemplo de representação da função *f* por meio de equação, o autor descreve diretamente a lei $y = (8 - x)^2$, explicando que é possível sabê-la, observando atentamente e mostrando alguns valores numéricos dessa função, ressaltando que nem sempre é possível representar uma função por meio de uma equação. Ao final, o autor generaliza os conceitos estudados, função, domínio, contradomínio e imagem.

Figura 43 – Representação de funções.

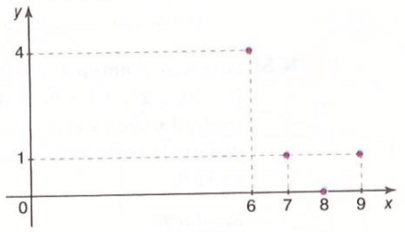
Representação de *f* por uma tabela

Cada linha da tabela associa um dia à temperatura média registrada nesse dia.

Dia	Temperatura média
6	4 °C
7	1 °C
8	0 °C
9	1 °C

Representação de *f* por um gráfico cartesiano

Todos os pontos (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, tal que x e y estão associados por meio de f, constituem a representação gráfica de f no plano cartesiano, isto é:



É importante ressaltar que o domínio de f é representado no eixo das abscissas e o conjunto imagem de f é representado no eixo das ordenadas.

Representação de *f* por uma equação

Observando atentamente a relação entre cada dia x, com $x \in A$, e a temperatura correspondente y, com $y \in B$, constatamos que essa relação pode ser descrita pela equação:

$$y = (8 - x)^2$$

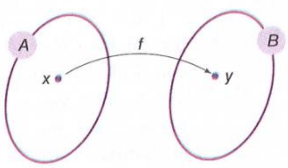
pois:

- para $x = 6$, temos: $y = (8 - 6)^2 \Rightarrow y = 4$;
- para $x = 7$, temos: $y = (8 - 7)^2 \Rightarrow y = 1$;
- para $x = 8$, temos: $y = (8 - 8)^2 \Rightarrow y = 0$;
- para $x = 9$, temos: $y = (8 - 9)^2 \Rightarrow y = 1$.

A equação $y = (8 - x)^2$, juntamente com $D(f)$ e $CD(f)$, representa a função f. Destacamos, porém, que nem sempre é possível representar uma função por meio de uma equação.

Generalizando:

Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se **função** de A em B toda correspondência f que associa cada elemento de A a um único elemento de B.



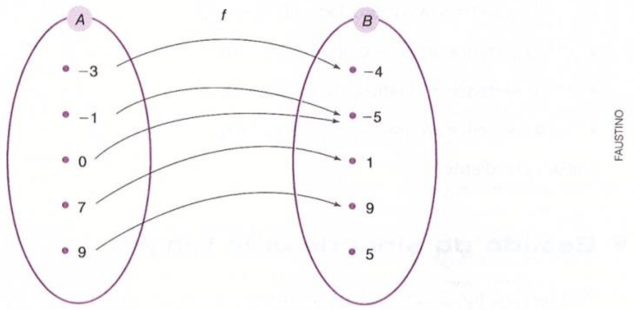
- Os conjuntos A e B são o domínio e o contradomínio da função f, respectivamente.
- Indica-se que f é uma função de domínio A e contradomínio B por meio do símbolo $f: A \to B$.
- Cada elemento y de B associado, através de f, a um elemento x de A é chamado de imagem de x. Esse fato é indicado por $y = f(x)$ (lê-se: "y é igual a f de x" ou "y é a imagem de x através de f").
- O subconjunto de B, formado por todos os elementos que são imagens através de f, é chamado de conjunto imagem de f.

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 87.

Em resumo, na Figura 42 podemos verificar que Paiva (2005) busca introduzir os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função, quando aborda as diversas representações de funções, na Figura 43 as diversas formas de representação e na Figura 44, o autor aborda as diversas maneiras de se determinar a imagem de um elemento por meio de diagramas, lei y = f(x) e gráficos.

Figura 44 – Imagem de um elemento por meio de uma função.

Considere a função *f* descrita pelo diagrama de flechas:



Se um elemento *y* de *B* estiver associado, através de *f*, a um elemento *x* de *A*, então diremos que *y* é a imagem de *x* através de *f*.

Assim, temos:

- $-4 = f(-3)$, ou seja, -4 é imagem de -3 através de *f*;
- $-5 = f(-1)$, ou seja, -5 é imagem de -1 através de *f*;
- $-5 = f(0)$, ou seja, -5 é imagem de 0 através de *f*;
- $1 = f(7)$, ou seja, 1 é imagem de 7 através de *f*;
- $9 = f(9)$, ou seja, 9 é imagem de 9 através de *f*.

Imagem de um elemento pela lei $y = f(x)$

Vamos considerar a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que cada elemento *x* do domínio $\mathbb{R}$ é associado a um único elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ através da lei $f(x) = 5x - 2$.

A lei $f(x) = 5x - 2$ informa que a imagem de cada *x* do domínio é o número $5x - 2$ do contradomínio. Assim temos, por exemplo:

- a imagem do elemento 6, através de *f*, é: $f(6) = 5 \cdot 6 - 2 \Rightarrow f(6) = 28$

  Logo, o par ordenado (6, 28) pertence a *f*;
- a imagem do elemento $\frac{3}{5}$, através de *f*, é: $f\left(\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{3}{5} - 2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{5}\right) = 1$

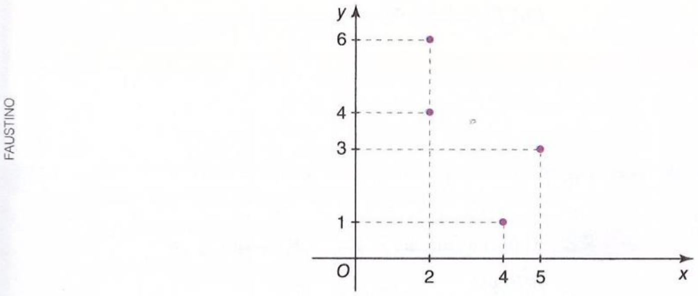
  Logo, o par ordenado $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ pertence a *f*.

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 90.

Ao final, o autor trabalha uma forma de se reconhecer uma função por meio de gráficos (Figura 45).

Figura 45 – Reconhecimento de uma função através da análise gráfica.

Observe o gráfico que representa a correspondência de $A = \{2, 4, 5\}$ em $B = \{1, 3, 4, 6\}$:



Traçando pelos pontos do gráfico as retas paralelas ao eixo *Oy*, determinamos no eixo *Ox* as abscissas desses pontos, ou seja, {2, 4, 5}.

Traçando pelos pontos do gráfico as retas paralelas ao eixo *Ox*, determinamos no eixo *Oy* as ordenadas desses pontos, ou seja, {1, 3, 4, 6}.

Feito isso, concluímos que há elemento de *A* que corresponde a dois elementos de *B*: o elemento 2, visto que (2, 4) e (2, 6) pertencem ao gráfico. Portanto, esse gráfico não representa uma função de *A* em *B*.

Um gráfico representa uma função de *A* em *B* se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo *Oy*, passando por um ponto qualquer de abscissa x, com $x \in A$, intercepta o gráfico em um único ponto.

Fonte: Paiva, M., 2005, p. 94.

Segundo Paiva (2005), ao final do capítulo do livro destinado ao ensino de funções, o estudante será capaz de

> (...) representar pontos no plano cartesiano, reconhecer funções nas diversas situações do cotidiano, formalizar o conceito de funções, reconhecer domínio, contradomínio e conjunto- imagem de uma função, determinar o domínio e o conjunto-imagem por diversas formas – diagrama, lei y = f(x) e gráficos e usar indistintamente as notações y ou f(x) para indicar a imagem de um elemento do domínio de uma função. (Paiva, 2005, p.15).

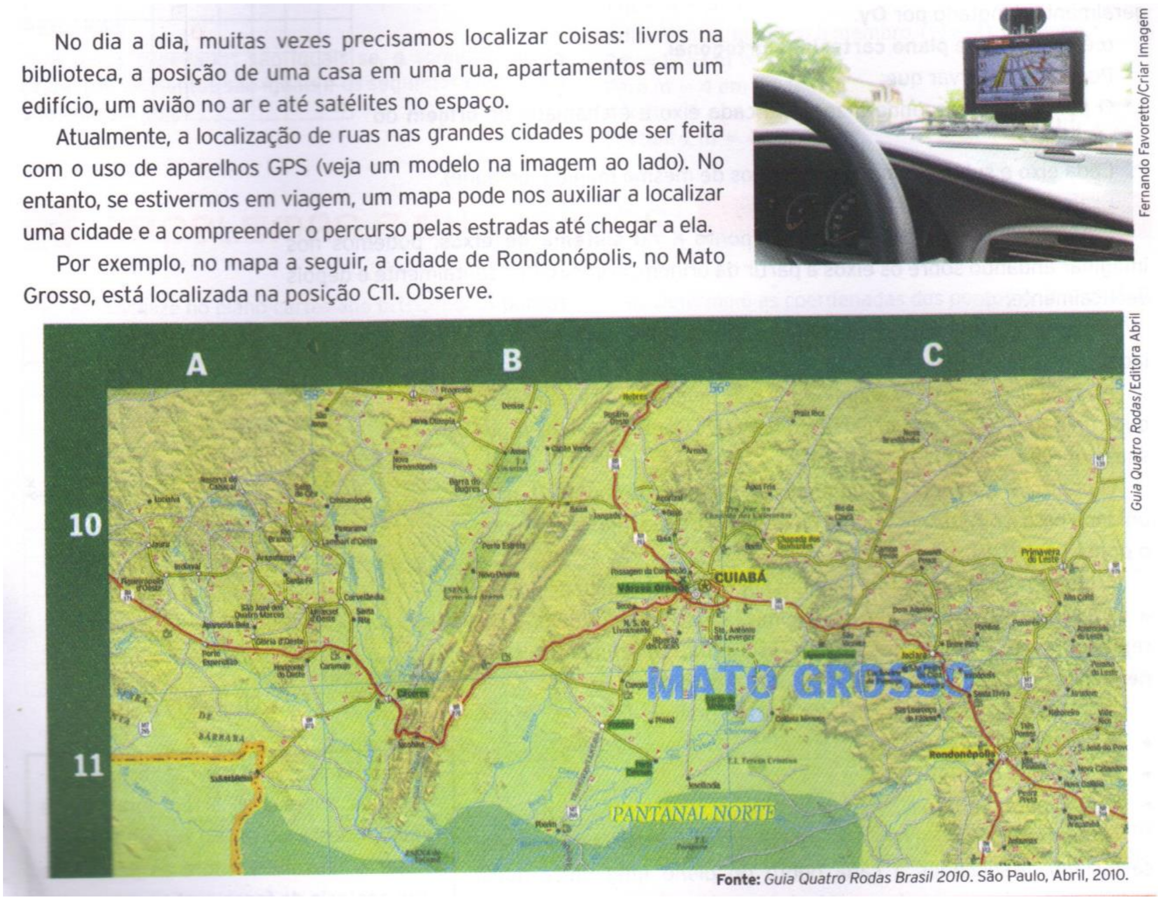
A abordagem que o autor propõe não estimula a investigação por parte do aluno, o que se segue é a explanação de conteúdos, de exemplos, de exercícios resolvidos e propostos. Diferentemente dos autores anteriores, no segundo momento, após retomar o sistema cartesiano ortogonal, o autor define grandezas e variação entre grandezas e, na sequência, conceitua funções.

4.3.4 Atividades do livro Matemática Ensino Médio, volume 1, Maria Ignez Diniz e Katia Stocco Smole, 2010, Editora Saraiva

Diniz e Smole (2010) começam por exemplificar funções por meio de localização e sistema cartesiano ortogonal. Para abordar o conceito Diniz e Smole (2010) definem que função é “um modo especial de relacionar grandezas”. Assim como nos demais livros analisados neste trabalho, o conceito de funções é trabalhado informalmente por meio de exemplos de leitura e interpretação de gráficos, no qual o estudante se familiariza com o conceito de funções, crescimento e decrescimento de uma função, valor de uma função em um ponto, sinal de uma função e raízes e com alguns padrões geométricos que representam uma função.

Num primeiro momento, as autoras apresentam um exemplo de localização por GPS (Figura 46) e explicam que, assim como o GPS, os mapas marítimo e aéreo que utilizam pares para a localização, a Matemática também utiliza pares de números, chamados de coordenadas, para representar pontos em um plano.

Figura 46 – Exemplo de como se localizar


No dia a dia, muitas vezes precisamos localizar coisas: livros na biblioteca, a posição de uma casa em uma rua, apartamentos em um edifício, um avião no ar e até satélites no espaço.

Atualmente, a localização de ruas nas grandes cidades pode ser feita com o uso de aparelhos GPS (veja um modelo na imagem ao lado). No entanto, se estivermos em viagem, um mapa pode nos auxiliar a localizar uma cidade e a compreender o percurso pelas estradas até chegar a ela.

Por exemplo, no mapa a seguir, a cidade de Rondonópolis, no Mato Grosso, está localizada na posição C11. Observe.

Fonte: *Guia Quatro Rodas Brasil 2010*. São Paulo, Abril, 2010.

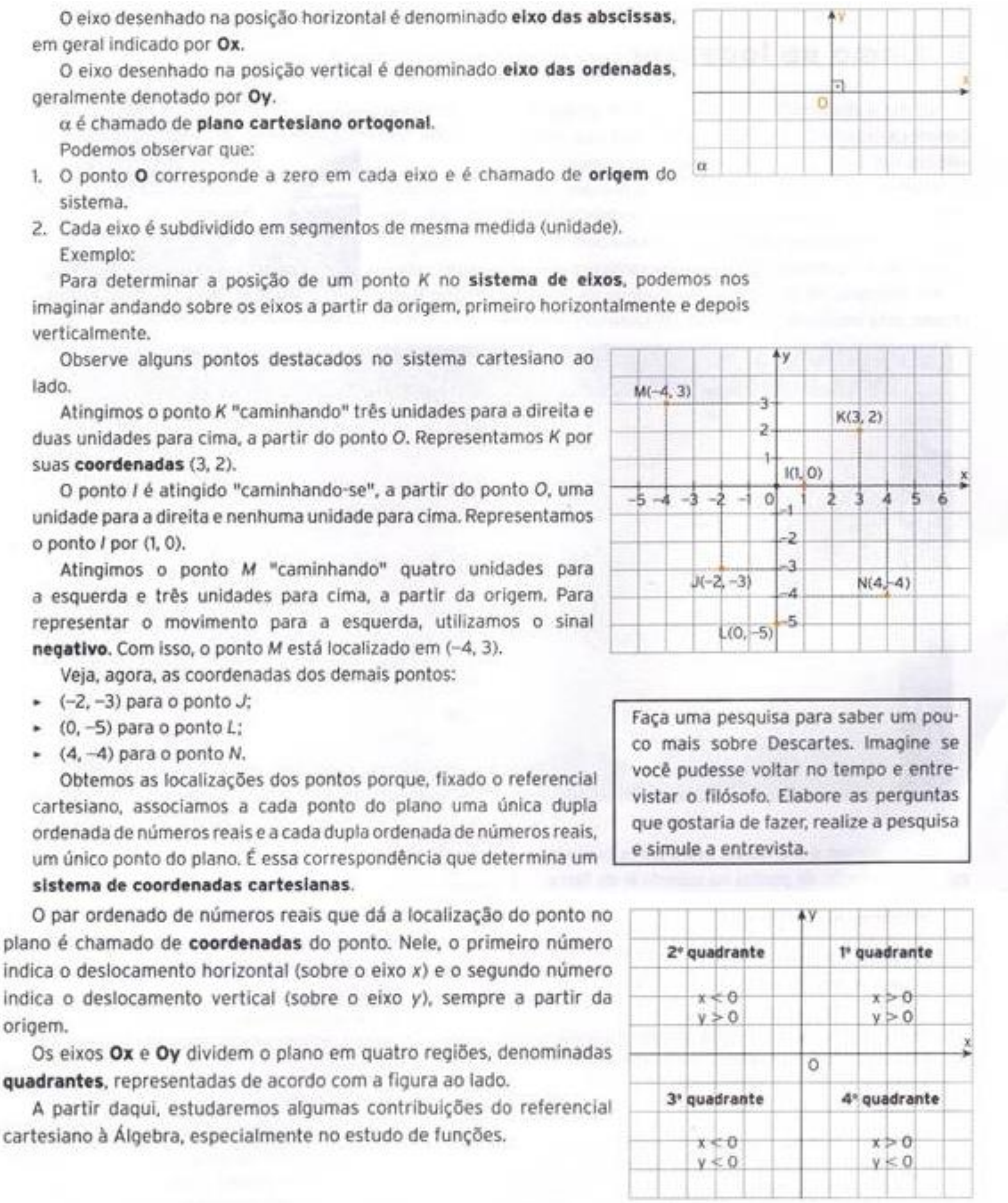
Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.67.

Diniz e Smole (2010) explicam que

> (...) a idéia de localizar pontos em um plano é bem antiga em matemática e, por volta do século III a.C., já havia sido usada pelo geômetra Apolônio de Perga. No entanto, o sistema que utilizamos hoje se originou dos trabalhos do matemático e filósofo René Descartes, que viveu na França, no século XVIII. Descartes adotava o pseudônimo de Cartesius e, por isso, o sistema criado por ele é conhecido como **cartesiano**". (Diniz e Smole, 2010, p.68).

As autoras explicam que para construir um referencial cartesiano, é necessário desenhar duas retas reais- chamadas eixos, perpendiculares entre si, com a mesma origem e detalha essa construção conforme a Figura 47, também mostram o significado do eixo das abscissas, do eixo das ordenadas, do plano cartesiano ortogonal, da origem do sistema, das coordenadas e dos quadrantes. Explicam também que, um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais "é a correspondência que a cada par ordenado de números reais associa um único ponto do plano cartesiano ortogonal".

Figura 47 – Sistema cartesiano ortogonal



O eixo desenhado na posição horizontal é denominado **eixo das abscissas**, em geral indicado por **Ox**.

O eixo desenhado na posição vertical é denominado **eixo das ordenadas**, geralmente denotado por **Oy**.

α é chamado de **plano cartesiano ortogonal**.

Podemos observar que:

1. O ponto **O** corresponde a zero em cada eixo e é chamado de **origem** do sistema.
2. Cada eixo é subdividido em segmentos de mesma medida (unidade).

Exemplo:

Para determinar a posição de um ponto *K* no **sistema de eixos**, podemos nos imaginar andando sobre os eixos a partir da origem, primeiro horizontalmente e depois verticalmente.

Observe alguns pontos destacados no sistema cartesiano ao lado.

Atingimos o ponto *K* "caminhando" três unidades para a direita e duas unidades para cima, a partir do ponto *O*. Representamos *K* por suas **coordenadas** (3, 2).

O ponto *I* é atingido "caminhando-se", a partir do ponto *O*, uma unidade para a direita e nenhuma unidade para cima. Representamos o ponto *I* por (1, 0).

Atingimos o ponto *M* "caminhando" quatro unidades para a esquerda e três unidades para cima, a partir da origem. Para representar o movimento para a esquerda, utilizamos o sinal **negativo**. Com isso, o ponto *M* está localizado em (−4, 3).

Veja, agora, as coordenadas dos demais pontos:

- (−2, −3) para o ponto *J*;
- (0, −5) para o ponto *L*;
- (4, −4) para o ponto *N*.

Obtemos as localizações dos pontos porque, fixado o referencial cartesiano, associamos a cada ponto do plano uma única dupla ordenada de números reais e a cada dupla ordenada de números reais, um único ponto do plano. É essa correspondência que determina um **sistema de coordenadas cartesianas**.

Faça uma pesquisa para saber um pouco mais sobre Descartes. Imagine se você pudesse voltar no tempo e entrevistar o filósofo. Elabore as perguntas que gostaria de fazer, realize a pesquisa e simule a entrevista.

O par ordenado de números reais que dá a localização do ponto no plano é chamado de **coordenadas** do ponto. Nele, o primeiro número indica o deslocamento horizontal (sobre o eixo *x*) e o segundo número indica o deslocamento vertical (sobre o eixo *y*), sempre a partir da origem.

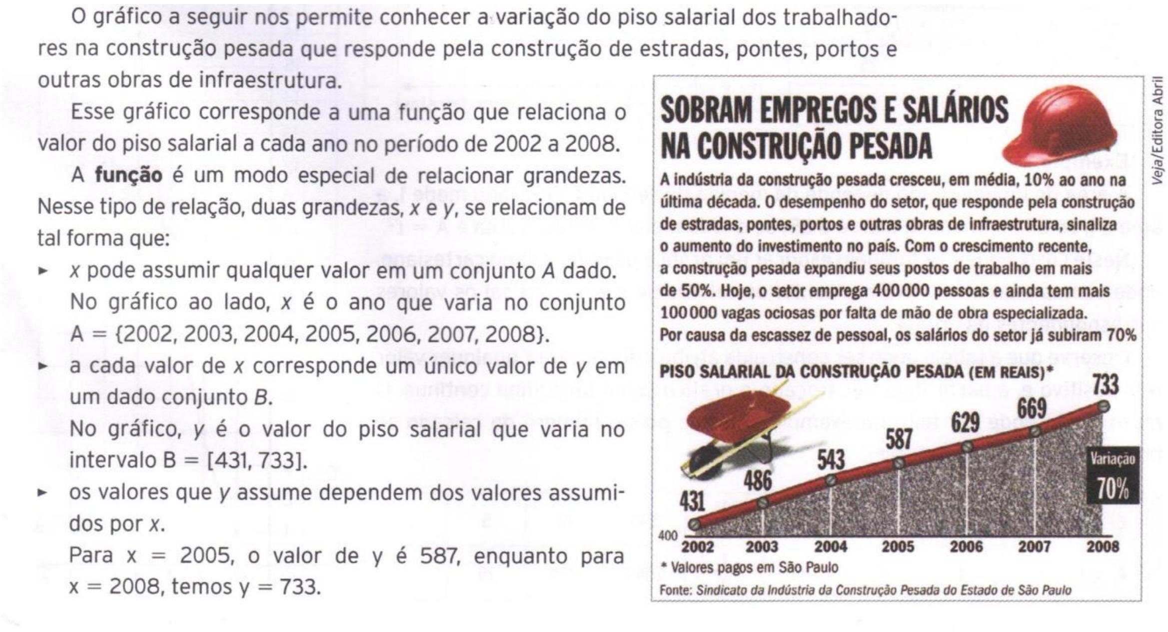
Os eixos **Ox** e **Oy** dividem o plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes**, representadas de acordo com a figura ao lado.

A partir daqui, estudaremos algumas contribuições do referencial cartesiano à Álgebra, especialmente no estudo de funções.

Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.68.

O estudo de função apresentado pelas autoras continua com variados exemplos, apresentados aqui nas Figuras 48, 49, 50 e 51. Na Figura 48, ao apresentar um exemplo que da variação do piso salarial dos trabalhadores na construção pesada, as autoras explicam que uma função é um “modo especial de relacionar grandezas”.

Figura 48 – Exemplo de função


O gráfico a seguir nos permite conhecer a variação do piso salarial dos trabalhadores na construção pesada que responde pela construção de estradas, pontes, portos e outras obras de infraestrutura.

Esse gráfico corresponde a uma função que relaciona o valor do piso salarial a cada ano no período de 2002 a 2008.

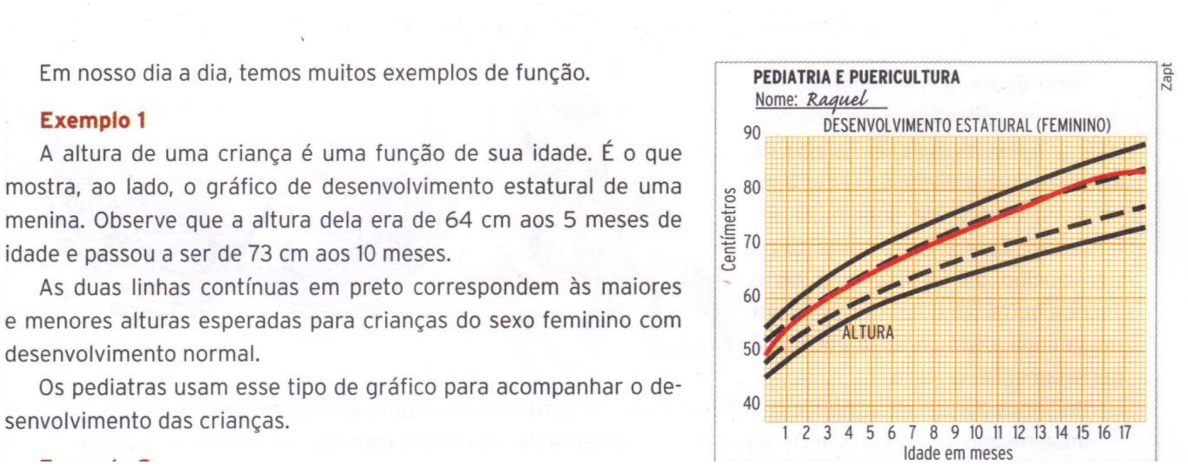
A **função** é um modo especial de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, x e y, se relacionam de tal forma que:

- x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado. No gráfico ao lado, x é o ano que varia no conjunto $A = \{2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008\}$.
- a cada valor de x corresponde um único valor de y em um dado conjunto B. No gráfico, y é o valor do piso salarial que varia no intervalo $B = [431, 733]$.
- os valores que y assume dependem dos valores assumidos por x. Para $x = 2005$, o valor de y é 587, enquanto para $x = 2008$, temos $y = 733$.

Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.70.

Na Figura 49, as autoras apresentam um exemplo de função que relaciona a altura de uma criança com sua idade, apontando algumas alturas e suas respectivas idades e o respectivo gráfico.

Figura 49- Função: exemplo 1


Em nosso dia a dia, temos muitos exemplos de função.

Exemplo 1

A altura de uma criança é uma função de sua idade. É o que mostra, ao lado, o gráfico de desenvolvimento estatural de uma menina. Observe que a altura dela era de 64 cm aos 5 meses de idade e passou a ser de 73 cm aos 10 meses.

As duas linhas contínuas em preto correspondem às maiores e menores alturas esperadas para crianças do sexo feminino com desenvolvimento normal.

Os pediatras usam esse tipo de gráfico para acompanhar o desenvolvimento das crianças.

Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.72.

Na figura 50, o exemplo mostra a correspondência existente entre a quantidade em litros de suco pronto e a quantidade de garrafas de suco concentrado que foi utilizada, na linguagem algébrica, na tabela e no gráfico.

Figura 50 – Função: exemplo 2

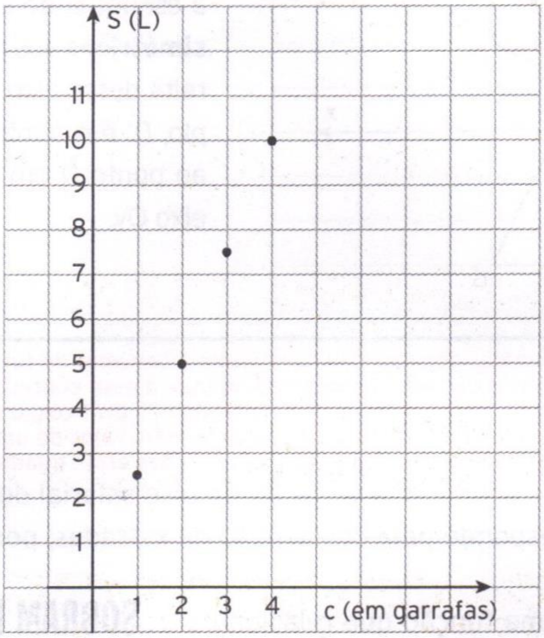
Uma garrafa de 500 mL de suco concentrado deve ser dissolvida em 2 L de água para obtermos o suco reconstituído. Assim, cada garrafa de suco concentrado corresponde a 2,5 L de suco pronto. Podemos estabelecer uma relação entre a quantidade de suco concentrado e a de suco pronto na forma de uma função, que pode ser descrita por uma igualdade algébrica ou por uma tabela cujos valores podemos representar no plano cartesiano e obter um gráfico dessa relação.

Chamando de *S* o número de litros de suco pronto e de *c* o número de garrafas de suco concentrado, temos:

S = (2 L de água + 0,5 L de suco concentrado) × c

S = c × 2,5

Suco concentrado (número de garrafas)	Suco pronto (em litros)
1	2,5
2	5
3	7,5
4	10
10	25
⋮	⋮



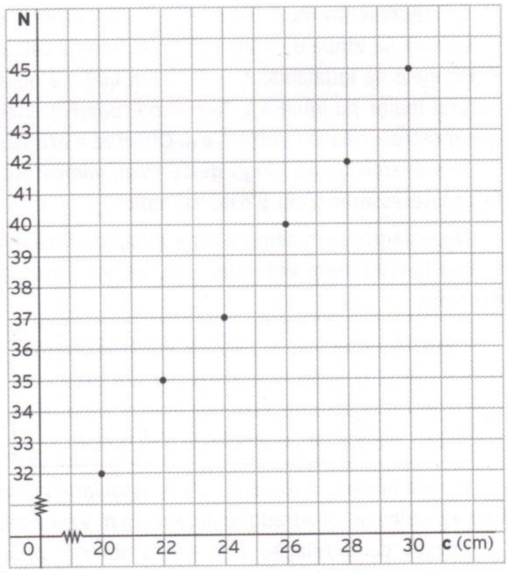
Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.72.

Os exemplos apresentados na Figura 51 mostram outras relações que caracterizam funções, o exemplo 4 dessa figura, mostra como relacionar a numeração do calçado com o comprimento do pé e o exemplo 5, mostra a relação que existe ente o número de triângulos que compõem o tapete e a etapa da construção desse tapete.

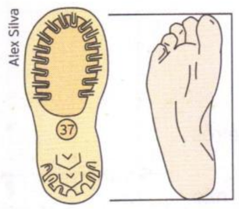
Figura 51– Função: exemplos 4 (numeração de calçados) e 5 (Tapete de Sierpinski[8])[9]

Exemplo 4

A numeração usada na confecção de sapatos depende do comprimento do pé das pessoas. Os fabricantes de calçados brasileiros usam a fórmula $N = \frac{5c + 28}{4}$, em que c é o tamanho do pé em cm e N é o número do calçado. Podemos construir um gráfico para a função entre o tamanho do pé, em cm, e o número do calçado. Vamos observar como seria essa relação para algumas medidas de pés entre 20 cm e 30 cm.



Tamanho do pé (em cm)	Número do calçado
20	32
22	34,5 ≅ 35
24	37
26	39,5 ≅ 40
28	42
30	44,5 ≅ 45



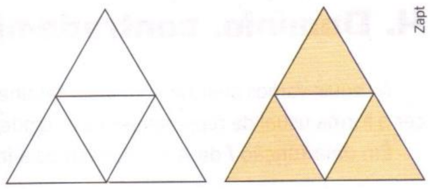
A indústria brasileira não produz números intermediários de calçados, daí a importância de experimentá-los no momento da compra.

Use o gráfico ou a tabela para responder:
Se o valor de c é 23 cm, qual é o número esperado para o calçado?
Qual deve ser a medida do pé de uma pessoa que calça 38?

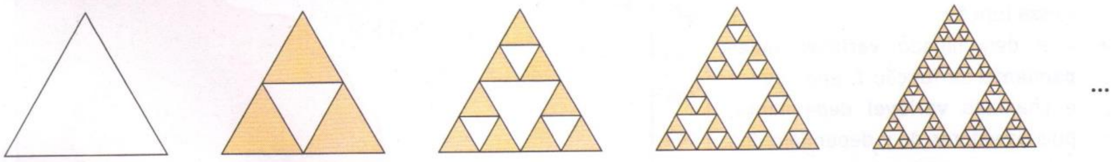
Exemplo 5

Alguns padrões geométricos também estão relacionados com funções. O padrão que vamos descrever é conhecido como **tapete de Sierpinski** e é construído a partir de uma regra que se repete indefinidamente.

Tudo começa com um triângulo equilátero, dividido em 4 triângulos equiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos equiláteros. Veja ao lado.



Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos equiláteros congruentes, desconsiderando sempre o triângulo do centro:



O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do tapete?
É possível desenhar tantos triângulos?

Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.73.

[8] Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático Polaco que criou em 1916 o fractal que recebeu o seu nome Triângulo de Sierpinski.
[9] Tapete de Sierpinski – padrões geométricos, sequências e funções.

Após sugerir e apresentar diversos exemplos, principalmente de gráficos que representam uma função, Diniz e Smole (2010) abordam e exemplificam o conceito de domínio, contradomínio e conjunto imagem (Figura 52) e finaliza com o estudo de funções por meio de gráficos cartesianos (Figura 53).

Figura 52- Definição de domínio, contradomínio e conjunto imagem.

A seguir, vamos analisar com mais detalhes alguns elementos de uma função, estabelecer a forma usual de representá-la e entender melhor o significado do seu gráfico.

Em uma função f de A em B, usamos a indicação:

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Nessa função:

- x é denominado **variável independente** da função f, enquanto y é chamado **variável dependente**, pois os valores de y dependem dos valores escolhidos para x. Já este último pode variar assumindo qualquer valor do conjunto A.
- A é o **domínio** de f (denotado por D(f)), ou seja, é o conjunto dos valores de x para os quais a função é possível. No gráfico da função, D(f) é o período de tempo de abril de 2003 a abril de 2008.
- B é o **contradomínio** de f (denotado por CD(f)), ou seja, é o conjunto dos valores possíveis de y. No gráfico temos CD(f) = [0, 100].
- indicando por x um elemento qualquer de A, seu correspondente y de B é a **imagem** de x pela aplicação f ou é o valor de x pela f (denotado por $y = f(x)$).

  Os elementos de B que são imagens dos elementos de A pela f constituem o **conjunto imagem** de f (indicado por Im(f)). No exemplo do gráfico, Im(f) = [0, 94].

  O conjunto imagem de uma função está contido em seu contradomínio.

  Analisando os exemplos das páginas 72 a 74, temos:

- **Exemplo 1**: O domínio da função é o intervalo [0, 17], pois para cada valor deste período de tempo corresponde um valor para a altura da criança. Como neste intervalo de tempo a altura da criança varia de 49 cm a 84 cm, a imagem dessa função é o intervalo [49, 84].
- **Exemplo 2**: A função desse exemplo tem como domínio possível o conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ correspondendo aos possíveis valores de garrafas de suco concentrado. A imagem dessa função é o conjunto de números da forma $\{2,5; 5; 7,5; 10; ...\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2,5 \times c$, em que $c \in \mathbb{N}^*\}$.
- **Exemplo 3**: No caso, os possíveis valores para o lado ℓ de um quadrado são todos os números reais positivos. Assim, o domínio da função A é $]0, +\infty[$ e a imagem correspondente aos valores de A também é o conjunto $]0, +\infty[$.
- **Exemplo 4**: Nesse caso nos limitamos a considerar valores para o comprimento dos pés no intervalo [20, 30], que passa a ser o domínio da função N. De acordo com os dados da tabela e considerando que usualmente não são fabricados calçados com tamanho de valor não inteiro, a imagem da função N é $\{32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45\} = \{N \in \mathbb{N} \mid 32 \leq N \leq 45\}$.
- **Exemplo 5**: A função T tem como domínio $\mathbb{N}^*$, que corresponde aos possíveis valores das etapas de construção do tapete de Sierpinski, e a imagem de T é o conjunto $\{1, 3, 9, 27, 81, ...\} = \{T \in \mathbb{R} \mid T = 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*\}$.

Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.74.

.

Figura 52- Gráfico de função

Nos exemplos de funções, representamos algumas delas por gráficos no plano cartesiano. Mais precisamente, o gráfico de uma função

$f: A \to B$
$x \mapsto f(x)$

é o conjunto dos pontos (x, f(x)) de um plano cartesiano onde no eixo das abscissas Ox representamos os valores de *x*, $x \in A$, e no eixo das ordenadas Oy, os valores de $y = f(x)$, $y \in B$.

A partir de gráficos, podemos obter diferentes informações sobre as funções por eles representadas. Veja, por exemplo, o gráfico ao lado relativo a ocorrências sofridas por usuários de computador.

Observando o gráfico, podemos afirmar que:

- ele representa o número de notificações feitas por usuários de computador em **função** do tempo (de 2003 a 2009);
- o número de notificações **cresceu** muito no período de 2005 a 2006 e **decresceu** entre 2006 e 2007;
- como diz o cabeçalho do gráfico, o número de notificações quase quadruplicou no período de 2003 a 2009, porque $4 \cdot 54\,607 = 218\,428$;
- o número de notificações em 2009 corresponde apenas ao 1º trimestre desse ano.

Conforme já vimos, também podemos representar uma função por meio de uma tabela de valores ou, em alguns casos, de uma fórmula do tipo $y = f(x)$, mas, na maioria dos casos, o gráfico revela informações que seriam menos perceptíveis em uma fórmula ou tabela.

Estudo de funções por meio de gráficos cartesianos

Estudamos anteriormente como localizar pontos e construir gráficos em um **referencial cartesiano**. Esse será o tipo de gráfico que mais usaremos para estudar funções.

Para representar graficamente uma função, devemos:

- fixar um referencial cartesiano;
- fazer uma tabela de dupla entrada, com números que satisfaçam à equação $y = f(x)$, onde $x \in D(f)$;
- localizar no referencial os pontos associados aos pares ordenados.

Exemplos:

a) Seja $f: A \to B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1{,}5; 2{,}5; 3{,}5; 4{,}5\}$.
$x \mapsto y = x \neq 0{,}5$

Nessa função, é possível calcular as imagens de todos os elementos de D(f):

x	1	2	3	4
y	1,5	2,5	3,5	4,5

O gráfico de *f* é formado apenas por 4 pontos, uma vez que *A* e *B* são finitos. Os valores f(x) crescem à medida que *x* cresce.

Fonte: Diniz, M. I. e Smole, K. C. S., 2010, p.78.

Diniz e Smole (2010) explicam que a proposta é trabalhar funções partindo diretamente de seu significado como relações entre grandezas e que ao explorar essas relações, o estudante aprenda a identificar a relação de dependência entre as grandezas, a resolver situações-problema envolvendo a variação de grandezas, a identificar expressões algébricas, a ler, interpretar e construir gráficos que expressem relação entre grandezas e a interpretar a localização e a movimentação de objetos/pessoas no plano.

4.3.5 Quadro comparativo – como cada autor inicia o conceito de funções?

Autor (es)	Título da obra	Como inicia o conceito de funções.
Luiz Roberto Dante	Matemática	Dante inicia o conceito de funções, utilizando dois tipos de exemplos, aqueles que apresentam a dependência entre variáveis e aqueles que relacionam elementos de dois conjuntos.
Jackson Ribeiro	Matemática: ciência, linguagem e tecnologia.	Ribeiro inicia o trabalho do conceito de funções utilizando-se de exemplos que relacionam a variação e dependência entre duas grandezas e, ao definir função, utiliza como exemplos. Conjunto de pares ordenados.
Manoel Paiva	Matemática	Para conceituar funções, Paiva define e exemplifica grandezas e trabalha com as diversas formas de se representar uma função – diagramas, tabelas, gráficos, equação.
Katia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez de Souza Vieira Diniz	Matemática: ensino médio	Smole e Diniz iniciam o conceito de funções por meio de pares ordenados e da relação de dependência entre duas variáveis.

O conceito de funções trabalhado tanto nos livros didáticos quanto no Currículo do Estado de São Paulo é a de relação que define a interdependência entre duas variáveis. O objetivo de se trabalhar com variados exemplos é de que o estudante possa compreender a relação de interdependência entre as variáveis e descrever as leis que definem essa interdependência, as leis de associação.

Nos livros didáticos analisados nesta pesquisa e que subsidiam o ensino médio das redes públicas brasileiras, verificamos que o tema proposto – funções- é trabalhado de forma que o conceito e suas diversas representações são apresentados separadamente. Em sua maioria, os livros analisados priorizam a linguagem algébrica, deixando de lado as demais representações do conceito de funções, pormenorizando o caráter integrador do tema.

Nestes quatro livros didáticos, aprovados pelo PNLD, observamos que os autores entendem que já fazem parte do conhecimento do aluno do ensino médio as ideias de (a) grandeza; (b) interdependência; (c) lei de formação, (d) do significado da palavra domínio do senso comum para a matemática como se fossem similares.

O que temos observado na nossa experiência de sala de aula é que, ao desenvolver os exemplos do conceito de funções com os estudantes e buscar a integração com o conceito formal de funções, como proposto nos documentos curriculares oficiais – Currículo do Estado de São Paulo, PCNEM e nos livros didáticos do PNLD EM (2012), os estudantes não conseguem fazê-lo, não entendem ou não associam os exemplos ao conceito, ocorrendo assim um distanciamento entre o que os estudantes conseguem fazer e compreender e o que era esperado após o ensino do conceito de funções.

As ideias de grandeza, interpendência, lei de formação, variável dependente e independente, domínio, contradomínio e imagem, e as diversas linguagens que representam essas ideias, têm sido abordadas de forma breve. O que talvez proporcione as dificuldades dos professores para ensinar e dos alunos para aprender o conceito de funções.

Percebemos em sala de aula que as dificuldades apresentadas pelos estudantes, ao trabalhar com gráficos que representam uma função, é que eles analisam o gráfico no sentido de indicar o crescimento e decrescimento, o valor máximo e mínimo – nas funções onde é possível determiná-los, mas a associação de uma lei de formação ou a conexão do gráfico com o conceito formalizado de funções, os estudantes nem sempre conseguem estabelecer as relações adequadas.

Essa percepção, do exemplo e da sistematização do conceito ou a associação da situação problema com a lei de formação, ocorre muitas vezes em sala de aula, o que nos parece que a formalização do conceito e as relações com as representações apresentam uma dificuldade no ensino e na aprendizagem de funções pelos alunos e pelos professores, que não conseguem elaborar suas atividades para o ensino com os aspectos que poderiam superar tais dificuldades.

A partir das observações citadas acima, o tema que é objeto desta pesquisa foi escolhido como forma de contribuir para o ensino e a aprendizagem do conceito de funções. Nesse sentido, uma vez que já indicamos nossas observações sobre as dificuldades que os estudantes desse nível manifestam, sentimos a necessidade de entender o conceito de funções na história da Matemática e suas possibilidades de inserção nas questões que, acreditamos, possam delinear um campo de discussão para a educação básica.

5 FUNÇÕES: HISTÓRIA DO CONCEITO E DE SUAS REPRESENTAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Até o presente momento desta pesquisa, algumas experiências da professora/pesquisadora, analisamos o que propõem os documentos curriculares oficiais federal e estadual, e os livros didáticos. O que percebemos é que esses textos escolares colaboram para a desarticulação do ensino de funções. E o professor busca nesses materiais formas de abordar o conteúdo que seja significativo para ele e para o estudante.

Para responder à nossa questão central: **Quais aspectos da história do conceito de funções podem contribuir para a compreensão desse conceito e das suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos?** dividimos nosso estudo nas seguintes subquestões: (a) como propor o trabalho com exemplos do cotidiano que destaquem a relação de dependência entre duas variáveis, isto é, quais são as ideias iniciais do conceito de funções? (b) como explicitar a lei que a define uma relação que antecede a linguagem algébrica?, (c) como relacionar os itens anteriores com o conceito formal de funções?, (d) como propor o estudo dos gráficos com o objetivo de associar o conceito de funções à determinação do domínio, contradomínio e imagem? (e) como relacionar as diversas representações de função mantendo a identidade dos elementos fundamentais do conceito de funções: identificação das variáveis dependentes e independentes; lei de formação; domínio-contradomínio-imagem; a relação entre as linguagens algébricas e as representações por diagramas e por gráficos cartesianos?.

A resposta a algumas dessas subquestões buscamos na história da Matemática e nas atividades de Lima e Moisés (2010).

5.1 História do conceito de funções

Azcárate e Deulofeu (1996, p. 15) estão convencidos da importância do conhecimento da história de um conceito para o seu ensino, e, particularmente, sobre a evolução desse conceito. Entendem que, embora a história não seja diretamente didática, pois não se trata de ensinar a história de um conceito nem de um determinado período, não deixa de ser uma ferramenta básica para o professor e, em muitos casos, é um conhecimento essencial para o desenvolvimento de uma didática determinada.

> (...) [quando] o professor sabe como um conceito foi sendo formado até os dias de hoje, poderá avaliar melhor a dificuldade intelectual que significou sua aquisição para a humanidade e isso permitirá formar uma ideia inicial dos

> obstáculos que encontrão seus alunos. Ao mesmo tempo, este conhecimento permitirá a ele adquirir uma visão muito mais ampla do que a obtida através do estudo das teorias modernas ou das definições mais recentes, a que se chegou após longo caminho, e cuja simples reprodução nos níveis elementares, pode levar a erros epistemológicos e didáticos. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 15) (tradução nossa)[10]

Para Sousa (2009, p. 3) "a história assume o papel de elo entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades do conceito, que permitam compreender os nexos internos e externos dos conceitos, nexos conceituais, presentes nos conteúdos matemáticos" da educação básica.

Entendemos que alguns desses nexos são aqueles nos quais Janvier (1987 apud Goñi, 2011 p. 154) discute, que ao longo da evolução histórica do conceito de funções, as diferentes representações que foram utilizadas-, e classifica as quatro que considera como principais: expressão verbal, expressão algébrica, linguagem gráfica e a tabela de valores. O que valida nossa discussão das representações por diagramas e gráficos cartesianos.

Durval (2006, apud Goñi, 2011 p.154) acredita que ao realizar as atividades matemáticas a respeito de funções, trocar de uma representação para outra pode facilitar ou dificultar a tarefa, por este motivo considera que as diferentes representações, suas compreensões e conversões são essenciais tanto para o ensino quanto para a aprendizagem do conceito de funções.

Nesta pesquisa, a história do conceito de funções tem o papel de evidenciar as dificuldades da sua formação e indicar os possíveis caminhos para a elaboração de atividades para o ensino de funções na educação básica. Buscamos compreender a história da formação deste conceito nos três seus períodos principais: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno (Moura e Moretti (2003), Rossini (2006) e Azcárate e Deulofeu (1996). Não se trata de ensinar a história do conceito de funções, mas sim delinear um campo de ideias que contribuem para a compreensão do conceito.

Azcárate e Deulofeu (1996) indicam que existem poucos trabalhos dedicados especificamente à história da origem do conceito de funções e que as opiniões dos autores da área de história da matemática, sobre essa origem, são distintas e contraditórias. Enquanto uns

---

[10] (…) el enseñante sabe cómo dicho concepto se ha ido formando hasta llegar a nuestros días, podrá evaluar mejor la dificultad intelectual que ha supuesto su adquisición para la humanidad y ello le permitirá formarse una primera idea de los obstáculos que encontrarán sus alumnos. Al mismo tiempo, este conocimiento le permitirá adquirir una visión mucho más amplia que la obtenida a través del estudio de las teorías modernas o de las últimas definiciones, a las cuales se ha llegado después de un largo camino y cuya simple reproducción en niveles inferiores suele conducir a graves errores epistemológicos y didácticos. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 15).

admitem certo caráter funcional em algumas operações matemáticas da Antiguidade, como nos trabalhos de astronomia dos babilônios, de Ptolomeu ou dos árabes, outros situam seu nascimento na geometria analítica de Descartes, e alguns atribuem sua autêntica aparição no século XIX com as definições clássicas de função de Dirichlet e Lobatchevsky. Mas se tiverem que fixar um período para o nascimento do conceito de funções, seria em meados do século XVII, de Descartes, Fermat, Newton e Leibniz, onde ocorreu um conjunto de circunstâncias que permitiu abordar a ideia de função com generalidade suficiente para formular as primeiras definições do conceito, a época em que o termo "função" aparece pela primeira vez, começa a se desenvolver a análise matemática e a ser abordados os conceitos de diferencial e integral que constituem o núcleo fundamental do cálculo infinitesimal.

Entendem também, que

> a ideia de função no século XVII ainda era muito restrita, pois se reduzia a funções analíticas, primeiro as que podiam ser expressas por uma equação algébrica e depois as desenvolvidas em séries de potência, e só no século seguinte Euler deu a primeira definição da função. A partir do momento que Euler deu a primeira definição e função as generalizações se sucederam, como resultado da tentativa de incluir funções cada vez mais complexas que apareciam, até as últimas definições que incorporam a linguagem de conjuntos. (Azcárate e Deulofeu,1996, p. 37).

ANTIGUIDADE

A Antiguidade é considerada por Moura e Moretti (2003), Rossini (2006) e Azcárate e Deulofeu (1996) como o período em que estão presentes estudos de casos particulares de dependências entre duas quantidades, mas não aparecem noções gerais sobre quantidades variáveis e funções. Os documentos conhecidos da Babilônia e do Egito, não ultrapassam a aritmética e a geometria elementares, de caráter empírico, como as tábuas de cálculo e as coleções de problemas resolvidos, sem explicação de métodos ou justificativas de resolução, ficando difícil intuir sobre aspectos relevantes da existência de conceitos como variável ou função.

Azcárate e Deulofeu (1996) indicam que o caráter dos dados dos babilônios sobre astronomia são interessantes para entender a origem das funções, pois astronomia e astrologia estavam estritamente relacionadas, mesclavam observações e profecias**,** tentando predizer determinados acontecimentos, para o qual realizavam observações sistemáticas de diversos fenômenos que se repetiam periodicamente, entrelaçando-os através de relações aritméticas. Assim esses registros mostram algumas relações, como os períodos de visibilidade de um planeta e o ângulo que ele forma com o Sol.

Os autores consideram que as ações para aritmetizar observações dificilmente mensuráveis, vai além de uma simples anotação de resultados empíricos, mostram um aspecto avançado da astronomia babilônica e o predomínio da aritmética, mas entendem que, embora buscassem regularidades em determinados fenômenos naturais, não avançaram na formulação do conceito de funções. “Não está presente a noção de variação”. (Roque, 2012 p. 389).

Para Azcárate e Deulofeu (1996), o legado da Grécia estava centrando nos conceitos fundamentais, como a ideia de proporção, o problema da incomensurabilidade e a dissociação entre número e grandeza. Consideram também que a ideia que temos hoje de número, não era a mesma dos gregos antigos, pois a ausência do conceito número racional dificultava a compreensão da razão 2:3 como igual à fração $\frac{2}{3}$.

Para esses autores, a determinação das leis simples da acústica que representam a busca de relações quantitativas de dependência entre variáveis físicas, como por exemplo, os comprimentos das cordas e os tons das notas emitidos ao pulsá-las, não é um fato importante para o desenvolvimento posterior da matemática grega, pois este aspecto das leis da natureza foi pouco desenvolvido na ciência grega. Em contrapartida, o papel preponderante das proporções foi um dos sérios obstáculos para o avanço do conceito geral de função. Argumentam que quando se “trabalha com proporções é difícil distinguir a relação que existe entre grandezas distintas, pois o que se compara é sempre da mesma natureza, de forma que as proporções escondem a dependência que existe entre grandezas distintas.” (AZCÁRATE E DEULOFEU, 1996, p. 41). Nas proporções

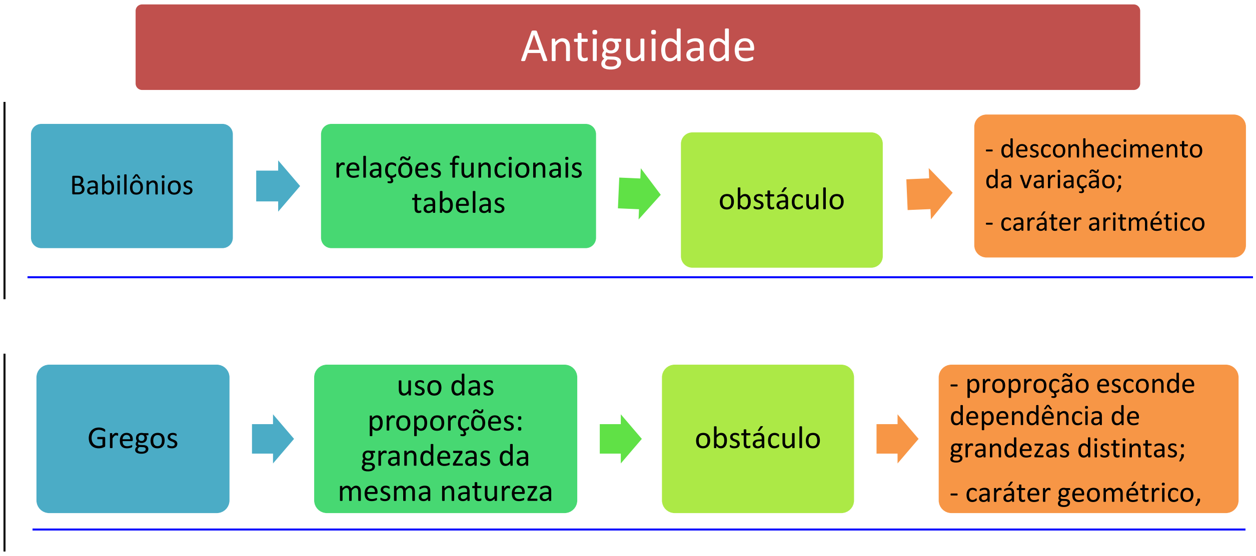
> (...) o que se compara é sempre da mesma natureza, de modo que **as proporções escondem a dependência entre grandezas distintas**. Por exemplo, quando se comparam as áreas de dois círculos e se estabelece que estão na mesma proporção que os quadrados de seus diâmetros, se esconde a dependência que existe entre o diâmetro e área de um círculo, relação que nos levaria à ideia de função. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 41)(tradução nossa)(grifos nossos)[11]

[11] En efecto, cuando se trabaja con proporciones es difícil distinguir la relación que existe entre magnitudes distintas, puesto que lo que se compara es siempre de la misma naturaleza, de forma que las proporciones esconden la dependencia que existe entre magnitudes distintas. Así, por ejemplo, cuando

O fato dos gregos estabelecerem sempre as proporções de forma homogênea, com razões de mesma grandeza, talvez seja a busca pelo significado geométrico que tinham das grandezas, “comparavam comprimentos com comprimentos ou áreas com áreas, de forma que uma razão entre grandezas distintas não tinha significado.” (Azcárate e Deulofeu, 199, p. 41). O método foi eficaz e utilizado por mais de dois milênios, inclusive por Galileu quando estudou o movimento e estabeleceu as proporções de forma homogênea, $e : e' = t : t'$ para o movimento uniforme. Para os autores, se Galileu tivesse utilizado $e : t = e' : t'$, teria manifestado a ideia de velocidade constante desse movimento.

Sintetizamos as ideias deste período na Figura 53 a seguir,

Figura 53



Fonte própria

Podemos concluir que o estudo de fenômenos de variação era muito elementar na Antiguidade, as aproximações quantitativas e qualitativas desses fenômenos estavam totalmente dissociadas, não sendo possível elaborar formulações explícitas de noções de variável, dependência ou função. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 43).

IDADE MÉDIA

Para Azcárate e Deulofeu (1996, p.43) a Idade Média do mundo ocidental, final do império romano até século XV, se preocupou com o estudo das coisas que estavam sujeitas a

---

se comparan las áreas de dos círculos y se establece que están en la misma proporción que los cuadrados de sus diámetros, se esconde la dependencia que existe entre el diámetro y el área de un círculo, relación que nos acercaría a la idea de función. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 41).

variações, em particular o movimento, e a maior contribuição desse período não foi tanto as respostas que obtiveram às suas questões, mas sim o modo como alteraram as questões sobre os fenômenos que observavam. Perguntas como: por que o vento sopra, por que a chuva cai e o fogo sobe, para entender como essas variações acontecem, sofreram alterações.

> (...) ao invés de perguntar por que uma pedra cai quando solta no ar, perguntaram como esta pedra cai, a que velocidade. Esta alteração e o surgimento da ciência experimental permitiram uma aproximação entre a matemática e as ciências da natureza, que será a base para o avanço da ciência a partir do século XIV. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 44)(tradução nossa)(grifos nossos)[12]

Nesse período, foram várias as contribuições dos matemáticos e Boyer (1974) destaca que Nicole Oresme (1323?-1382), da Escola de Paris, contribuiu para "uma visão mais ampla da proporcionalidade." (Boyer, 1974, p. 191). Oresme deu continuidade ao estudo dos fenômenos de variação e abriu um novo caminho ao propor uma aproximação geométrica para os estudos cinemático-aritméticos desenvolvidos até então. (Azcárate e Deulofeu, 1996).

Boyer (1974) sugere que Oresme tenha questionado

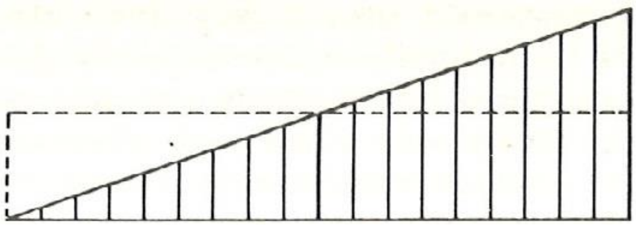
> (...) por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. (...) Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos de ordenadas) preencherá um triângulo retângulo [Figura 54]. Como a área desse triângulo representa a distância percorrida,

---

[12] (...) en lugar de preguntar-se por qué cae una piedra cuando la echamos al aire, se preguntarán como cae esta piedra, a qué velocidad. Este cambio, junto a la progresiva aparición de una ciencia experimental, permitirá un acercamiento entre las matemáticas y las ciencias de la naturaliza, y será la base del impulso que la ciencia sufrirá a partir del siglo XIV. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 44)

> Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton[13], pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final. Além disso, o diagrama leva obviamente à lei de movimento usualmente atribuída a Galileu no século dezessete. (Boyer, 1974, p. 192)

Figura 54: Gráfico velocidade-tempo de Oresme



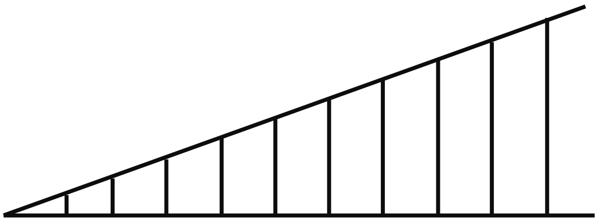
Fonte: Boyer (1974, p.193)

A análise da representação geométrica de Oresme, Figura 54, ao mesmo tempo em que se aproxima dos gráficos que nos são familiares, se afasta deles. Essa análise nos levou a refletir sobre as dificuldades que temos observado nos nossos alunos durante as atividades com gráficos de funções. Pode ser que para o professor que tem experiência com as construções e análise dos gráficos de funções, as atuais representações são claras e evidentes. O que pode levar esse professor a não se ater aos detalhes das dificuldades dos alunos.

A interpretação dessa representação geométrica não é intuitiva, mesmo com as considerações de Boyer (1974, p. 193) sobre a herança que recebemos de Oresme, como, os termos longitude e latitude que são, em sentido amplo, equivalentes às nossas abscissas e ordenadas.

Para melhor compreender a representação de Oresme, pesquisamos em Azcárate e Deulofeu (1996, p. 45), que a princípio nos pareceu uma representação gráfica mais simples.

Figura 55: Gráfico velocidade-tempo de Oresme



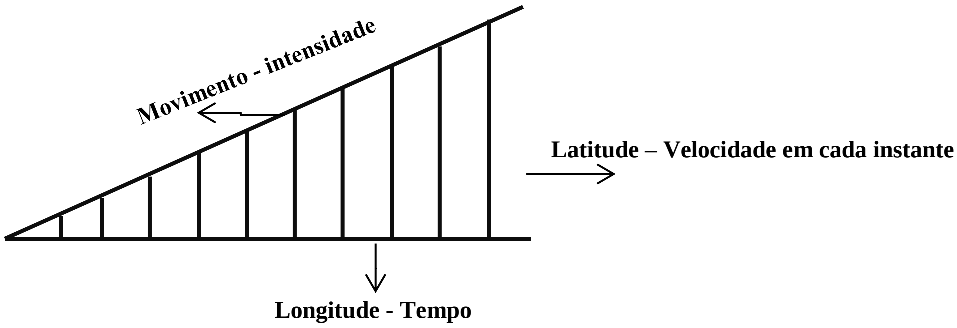
Fonte: Azcárate e Deulofeu (1996, p. 45)

[13] Regra de Merton: “Qualquer qualidade uniformemente irregular tem a mesma quantidade total que teria se ela afetasse uniformemente o sujeito conforme o grau de seu ponto central”. (BRAGA, GUERRA E REIS, Breve história da ciência moderna. v1:convergência de saberes (Idade Média). Ed Zahar. 2003, p. 58)

Os autores descrevem que Oresme, para representar a velocidade de um móvel durante certo tempo, traçou um segmento horizontal cujos pontos representam os sucessivos instantes de tempo (longitudes) e para cada instante traçou um segmento perpendicular (latitude) cujo comprimento representa a velocidade naquele instante. Os extremos superiores das latitudes determinam uma curva, neste exemplo uma reta, e se o movimento parte do repouso, a totalidade das latitudes forma um triângulo retângulo. (idem).

O desconforto permanece e talvez devêssemos interpretar com indicações mais concretas.

Figura 56: Nossa interpretação do Gráfico de Oresme



Fonte: Azcárate e Deulofeu (1996), adaptação nossa.

Parece-nos menos confuso e nos deixa um pouco mais confortáveis quando Azcárate e Deulofeu (1996) analisam que não podemos considerar as representações de Oresme como a expressão de uma dependência no sentido atual, mas podemos pensar que o caminho estava preparado para Galileu, Descartes e depois Newton ou Leibniz, porém atentam que as evidências não são claras. Os autores concluem que se, no final da Idade Média não foi possível maior avanço, foi devido ao desequilíbrio entre o nível de abstração das teorias abordadas e a falta de um aparato matemático mais consistente para seu desenvolvimento, que só foi possível alguns séculos depois, no século XVIII.

IDADE MODERNA: o desenvolvimento do conceito de funções

Durante o século XVI a falta de um simbolismo matemático adequado foi sendo superada com os algebristas italianos e mais fortemente com contribuição de Viète (1540-1603) com a criação da álgebra simbólica, o cálculo literal. (Boyer, 1974 e Azcárate e Deulofeu, 1996).

Outra grande contribuição foi a de Galileu, não tanto como matemático ou no estudo de função, mas pelo valor de sua obra para a ciência moderna. Azcárate e Deulofeu (1996) consideram que Galileu, ao estudar o movimento de forma quantitativa com justificativas experimentais das leis estabelecidas, que descrevendo detalhes dos experimentos com o uso de instrumentos de medidas, permitiu que se estabelecesse leis entre grandezas que são verdadeiras relações funcionais. Indicam que esta foi a grande diferença entre Galileu e Oresme, para quem o caminho da experimentação era inexistente.

Descartes (1596-1650) contribui com a geometria analítica que permitiu interpretar curvas e superfícies por meio de equações, o que levou a algebrização da geometria, afetando a forma das funções, pois “aparece pela primeira vez uma equação em x e y como forma de expressar uma dependência entre duas quantidades variáveis, a partir de então é possível calcular os valores de uma variável que correspondem a determinados valores de outra”. (Azcárate e Deulofeu, 1996, p. 47).

Abordar a ideia de função com generalidade suficiente para formular as primeiras definições do conceito donde foi utilizado o termo "função", foi possível por meio das contribuições de Fermat, Newton e Leibniz, Bernoulli e Euler, Lagrange e outros.

A ideia de função era muito restrita no século XVII, se reduzia a funções analíticas. Quando Euler deu a primeira definição da função, foi possível realizar as generalizações sucessivas como resultado da tentativa de incluir funções cada vez mais complexas, até as últimas definições que incorporam a linguagem de conjuntos, onde estas últimas se distanciam da educação básica. (Azcárate e Deulofeu, 1996).

Expressão verbal – tabela – gráfico – expressão algébrica – definições de função

Portanto o conhecimento formal e sistematizado de funções não foi elaborado rapidamente e nem de forma isolada, nem foi um caminho linear, é necessário fazermos um recorte desse campo geral de ideias para elaborarmos atividades para o ensino de funções. É o que faremos nos próximos itens.

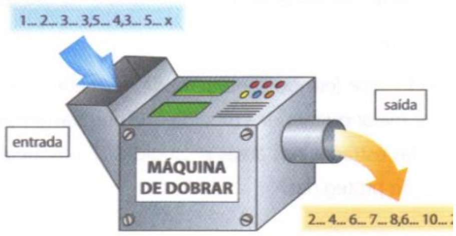
5.2 Proposta de atividade para o ensino do conceito de funções

Esta sequência didática teve como objetivo levantar conhecimentos adquiridos pelos alunos acerca do conceito de funções, após 4 aulas de introdução ao conceito de funções. Foi aplicada em duas turmas da primeira série do ensino médio em 2014. Para realizar as atividades, a sala foi dividida em grupos com três alunos.

A atividade “ A máquina de dobrar” (Dante, p.73) subsidiou a sequência didática descrita abaixo:

1) Observe o desenho imaginário de uma máquina de dobrar números:

Figura 57 – A máquina de dobrar



Fonte: Dante, L. R., 2008, p. 73

2) Preencha a tabela abaixo para relacionar a entrada e a saída dos números:

Número de entrada	1	2	3	3,5	4,3	5
Número de saída						

3) Como calcular o número de saída, se o número de entrada for 13,5? Mostre seus cálculos.

4) Como calcular o número de saída, para o número de entrada x? Como chegou à resposta?

5) Chamando o número de entrada de x e o número de saída de y, descreva a regra que relaciona o número de saída com o número de entrada.

6) Construa um gráfico que represente a tabela do item 2. Que tipo de gráfico esses dados geraram?

Após o término das atividades, os grupos socializaram suas respostas e o percentual de acerto está descrito abaixo:

	Acerto (%)	
	Turma A	Turma B
Questão 2	100	100
Questão 3	70%	85%
Questão 4	65%	70%
Questão 5	55%	65%
Questão 6	60%	75%

Para completar o desenvolvimento da atividade o gráfico (questão 6) foi trabalhado no software GEOGEBRA, seguindo as instruções:

Na caixa de comando, inserir a função encontrada na questão 6.

a) Os pontos estão alinhados?
b) Se colocarmos na caixa de comando y = 2x + 1, o que muda nesse gráfico em relação ao anterior? E se colocarmos y = 2x – 1?
c) Construa uma tabela que represente as duas funções dadas no item b.

	Acerto (%)	
	Turma A	Turma B
Item a	100	100
Item b	25%	20%
Item c	85%	80%

A questão do software não foi problema, pois os alunos conseguiram introduzir corretamente os dados pedidos e observar que houve mudança. A análise em relação às mudanças apresentou um percentual elevado de erros, apesar da tabela do item c) ter sido respondida corretamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Historicamente o ensino de funções ocorre de forma isolada, não permitindo a exploração de seu caráter integrador, tanto interno quanto externo. Interno quando integra funções com sequências – progressões aritméticas e geométricas, funções trigonométricas e seus gráficos, propriedades de retas e parábolas com propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Externo quando descreve e estuda fenômenos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, tais como, Física, Geografia ou Economia.

Entendemos que o ensino de Matemática, em especial de funções – objeto de estudo, deve garantir que o estudante adquira conhecimentos de forma a estabelecer conexões entre o conceito de funções e situações diversas.

Acreditamos que não é suficiente rever a forma de ensinar se todo o ensino em Matemática for informação, com definições, exemplos e exercícios. Se cada conceito apresentado for apresentado de forma fragmentada, os estudantes não farão a conexão entre as ideias apresentadas e não estabelecerão algum significado a essas ideias, um dos motivos do fracasso escolar e dificuldades perante a Matemática.

Um dos pontos importantes na elaboração de um currículo em matemática é a contextualização, que permite fazer conexões entre os diversos conceitos matemáticos e as diferentes formas de pensamento. Nesse sentido, é necessário repensar na elaboração de materiais que subsidiam a prática do professor, na formação que leve o professor a elaborar e reelaborar conceitos e definições, para que esse professor possa, junto a seus estudantes, promover um ensino de funções de qualidade, que seja significativo.

REFERÊNCIAS

AZCÁRATE Giménez, Carmen e DEULOFEU Piquet, Jordi. **Funciones e Graficas**. 1ª reimp. Madrid: Editorial Sínteses, S.A. Colección: Matematicas: cultura y aprendizaje. 1996.

BOYER, C. J. **História da matemática.** São Paulo: Blucher, 1984.

BRASIL (2011). Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2012: matemática. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de educação Básica, 2011. 104p. ISBN 978-85-7783-050-3. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio>. Acesso em 10 jan. 2013.

BRASIL . Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ ensino médio** - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**.** Brasília: MEC/ SEF/FNDE/CENPEC, 2002.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio.** Brasília: MEC/ SEF/FNDE/CENPEC, 2000.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática:** volume único. 1.ed. São Paulo: Ática, 2008.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FIORENTINI, Dario. **Investigação em educação matemática**: **percursos teóricos e metodológicos** / Dario Fiorentini, Sérgio Lorenzato. - 3. ed. rev. - Campinas, SP: Autores associados, 2012. – (Coleção formação de professores)

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOÑI, J. M. (org.) et al. **Matemáticas:** complementos de formácion disciplinar. Barcelona: Graó, 2011.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar.** 8.ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 1.

LIMA, E. L., et al. **A matemática do ensino médio** / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.1.

LIMA, L. C. e MOISÉS, R. P. (2010) *Relação, a teia Universal de nexos.* Mimeo: São Paulo, Brasil. 2010.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia do trabalho científico**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 1992.

PAIVA, M. **Matemática**. 1.ed. São Paulo: Moderna, 2005. v.1.

PRADO, E. P. A., USTSUMI, M. C. e ZUFFI, E. M. **O conceito de relação no texto matemático para o ensino de função na formação inicial.** VIII Congresso de Docência Universitaria e de nível superior. Disponível em http://www.iberoamericano2014.unr.edu.ar/imag/libro_de_resumenes_de_comunicaciones.pdf. Acessado em 07/07/2014.

PRADO, Esther P. de A. Anotações para aulas de funções na licenciatura em matemática, mimeo. 2012. São Carlos, SP.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia**.** 1.ed. São Paulo: Scipione, 2010. V.1.

ROQUE, Tatiana **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

ROSSINI, R. Os professores e o conceito de função: uma investigação à luz da teoria antropológica do didático. **GT: Educação Matemática** / n.19, 2007. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/professores.pdf>. Acesso em 20 dez. 2013.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Cadernos do aluno, matemática.** Coordenação geral, Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2011.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Cadernos do professor, matemática.** Coordenação geral, Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. Coordenação geral, Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2010.

SMOLE, K. C. S. **Matemática:** ensino médio / Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUSA, Maria do Carmo de **Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica**. Revista Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 32, 2009, p. 83 a 99

ZUFFI, E.M. e PACCA, J.L.A. (2000). **Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio**, Zetetiké, Campinas, SP: UNICAMP-FE-CEMPEM, Vol.8, Nº.13/14, p.7-28.

ANEXO A – Atividade proposta para formação de professores

Embora Courant e Robbins (2000, p. 335) considerem que “Uma função matemática é simplesmente uma lei que rege a interdependência de quantidades variáveis.”, observamos quatro subconceitos aí envolvidos: lei, interdependência, quantidades e variáveis. Os autores entendem que para o matemático nenhuma outra relação deve ser considerada, tais como tempo, temperatura, etc., pois estes são do interesse dos físicos.

A visão de Courant e Robbins (2000) não é a mesma visão de Caraça (1984) para compreender os fenômenos da natureza e suas relações, pois Caraça (1984) entende que são necessárias formas para interpretar e prever a realidade por meio de “quadros ordenados explicativos” que duram enquanto estiver de acordo com as observações e interpretações da realidade. E a realidade que o homem tenta compreender apresenta como características essenciais a “interdependência”, que é a relação que existe entre as coisas e a forma como se relacionam e a “fluência”, onde tudo está em permanente evolução, onde todas as coisas evoluem e se transformam em todo momento (Caraça, 1984 p.119).

O autor entende que é difícil para um observador analisar a totalidade do Universo, portanto supõe ser necessário *recortar, destacar*

> (...) dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados. A um tal conjunto daremos o nome de *isolado*; um *isolado* é, portanto, uma *secção* da realidade, nela recortada arbitrariamente (...). (Caraça, 1984, p.112)

Para elaborar o texto para a formação de professores consideramos que (a) a história assume o papel de elo entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades do conceito, nexos conceituais. (Sousa, 2009); (b) é necessário criar isolados (Caraça, 1984) para estudar determinados fenômenos naturais.

Como não existe um caminho único para desenvolver o conceito de funções, optamos pela sequência inicial proposta por Prado, Utsumi e Zuffi (2014) para o subconceito de relação, na formação de professores, contendo: a) a diferenciação entre associação livre e relação, b) a relação no Universo, c) o par na relação, d) o elemento do par que ordena a relação, e, acrescentando o aspecto da invisibilidade das marcas dos registros de funções.

A proposta de atividade para o ensino de funções na educação básica tem como base os seis isolados de Caraça (1984):

Primeiro i*solado*: Associação Livre e Relações Humanas

Segundo *isolado*: Universo e Relação

Terceiro *isolado*: O par da relação

Quarto *isolado*: analisar um dos elementos do par de uma relação

Quinto *isolado*: Estudo da variação da relação entre os pares espaço e tempo

Sexto *isolado*: Relacionando diferentes registros e a invisibilidade das marcas

Primeiro *isolado*: Associação Livre e Relações Humanas

Neste isolado será discutida a diferença entre *associação livre* e *relação*. Foram propostas discussões sobre (i) associação livre, com situações nas quais nos é permitido pensar e imaginar livremente, como na realização de desejos, sonhos e anseios; e (ii) relações humanas, com situações nas quais vivemos a necessidade de nos relacionar com os outros seres humanos, como na sala de aula, trabalho, jogos esportivos, etc., nestas existe tempo, espaço, obrigação, juízo, causa, efeito, deveres etc..

Atividade 1

Dois momentos dois contrários: liberdade e necessidade.

(adaptação de Lima e Moisés, Mimeo, 2010)

Ao observar o quadro à direita, podemos pensar: *Reunião de família! Comida gostosa! Brincadeiras animadas! Olho e imagino o tempo passando, todos os meus pensamentos se voltam para a minha infância:* *"tempos bons aqueles ..."*	 *Norman Rockwell, The Saturday Evening* (EUA) http://store.nrm.org/prodimg/thumbnails/200_0_GDS60939-C.jpg

 *School Teacher Coaster- Norman Rockwell* (EUA) http://store.nrm.org/browse.cfm/4,564.html	*Observando o quadro à esquerda a primeira relação pode ser a relação chamada aula.*

- ✓ No primeiro momento, vivemos a liberdade total de ser humano, de permitir-se sonhar com a realização de todos os sonhos, desejos e anseios. É de onde todos nós, crianças, homens, mulheres, jovens, velhos, partimos para a vida. É a ***associação livre***. Nele não existe tempo, espaço, obrigação, juízo, repressão, causa, efeito e deveres.

- ✓ No segundo momento, vive a necessidade de se relacionar com os outros seres humanos. É onde todos nós, crianças, homens, mulheres, jovens, velhos, vivemos, onde nos encontramos com os outros para juntos combinarmos as nossas ações para a satisfação das nossas necessidades vitais. É o mundo das ***Relações humanas.*** Aí existe tempo, espaço, obrigação, juízo, repressão, causa, efeito, deveres e tudo mais.

Sintetizando:

Associação livre		***Relações humanas***
↓		↓
Liberdade		Necessidades

Atividade 2: Identifique qual figura apresenta situação de *associação livre* e qual ilustra *relações*, justificando a resposta.

"O Pensador" Auguste Rodin (França 1840-1917)

"O basquete" Norman Rockwell (EUA)

Discussões:

- ✓ "O Pensador"– esta imagem está mais próxima da *associação livre*, pois supõe a liberdade do pensamento.

- ✓ "O basquete" – esta imagem está mais próxima das *relações humanas*, pois o jogo pressupõe regras, controle de tempo e de espaço, causa, efeito, deveres, etc.

Segundo isolado: *Universo e Relação*

A proposta neste isolado é discutir as várias concepções de mundo e de leitura do universo, que valem mais pela provocação do pensamento do que pelas respostas, como em

Heráclito com o *Tudo é* fluência, Pitágoras com o *Tudo é número,* Platão com o *Tudo é triângulo...* E com Capra *Tudo é relação,* onde a concepção de mundo e leitura do universo concebe a natureza a partir da conexão de dois movimentos quaisquer. *Dois* é a palavra chave porque entre duas coisas quaisquer podemos identificar, imaginar e pensar uma conexão, possível de ser concretizada ou apenas uma fantasia. A consciência identifica uma relação visualizando um *par*. Assim, do *tudo é relação* resulta *tudo no universo existe aos pares*. A relação forma o par e os mantêm ligados.

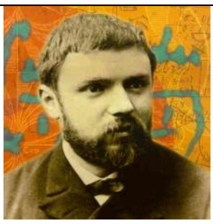
Tudo é ...

Há dois mil e quinhentos anos Pitágoras garantia que ***tudo é número***: as coisas existem por causa dos números que trazem em si; é o *número que ordena* o Universo. São as chamadas *teorias do "**tudo é**":*

- ✓ ***tudo é*** *fluência* de Heráclito;
- ✓ ***tudo é*** *número* de Pitágoras;
- ✓ ***tudo é*** *triângulo* de Platão;
- ✓ ***tudo é*** *microorganismo* dos adoradores do solo;
- ✓ ***tudo é*** *relação* diz Fritjof Capra (1986): as coisas existem por causa das relações que estabelecem entre si. A relação *ordena o universo.*

Todos do ***tudo é*** se indagam sobre a origem de todas as coisas e buscam a chave da compreensão do universo.

Mas há outros que, como Henri Poincaré, questionam: será que existe esta chave geral? Será que existe um princípio único que explica *tudo*? *Mesmo que a fonte seja desconhecida, ainda assim o regato flui.* (Poincaré).



Jules Henri Poincaré (França -1854-1912)
http://www.devoir-de-philosophie.com/

A visão do universo como um *cosmo,* como uma totalidade harmônica e ordenada é, antes e acima de ***tudo***, uma necessidade humana de criar, exercitar e desenvolver a própria consciência.

O princípio *capriano "**tudo é relação**"* é uma concepção de mundo, uma *leitura* do universo. Ainda que pretenda ter encontrado a *fonte* do universo, o mais importante é que oferece uma compreensão de como *o regato flui.*

A *relação* é a ação mútua e recíproca entre duas coisas.

O ***tudo é*** *relação* concebe a natureza a partir da conexão de dois movimentos quaisquer, certamente duas outras relações, resultantes, por sua vez de outros pares de relações e assim *ad infinitum.*

Dois é a palavra chave porque entre duas coisas quaisquer pode-se identificar, imaginar, e pensar uma conexão, seja ela dada diretamente pela natureza ou criada pelo homem, possível de ser concretizada ou que jamais sairá da fantasia.

A Relação

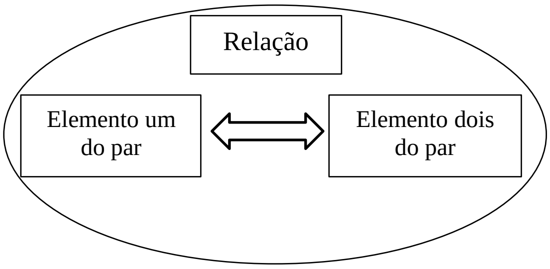
A consciência identifica uma relação visualizando um *par*. Assim, do ***tudo é*** *relação* resulta *tudo no universo existe aos pares*.

A relação forma o par e os mantêm ligados.

Terceiro isolado: ***O par da relação***

O fato é que a nossa espécie sente o mundo, toma consciência dele e o pensa fazendo relações entre as coisas, formando pares. Podemos representar o par de uma relação qualquer pelo diagrama de Lima e Moisés (2010).

Figura 57



Fonte: Lima e Moises, 2010

O *par* é o fundamento de todas as áreas do pensamento:

A *dialética* é o conhecimento feito a partir da luta dos contrários. (*di* dois, *letos* contrários)  *"Yin Yang" representação da luta dos contrários*	A reprodução humana se baseia no par masculino-feminino, no casal.  *"Adão e Eva" Rafael Sanzio (1483-1520)*

Atividade 3

Use o diagrama abaixo para descrever as ilustrações que seguem:

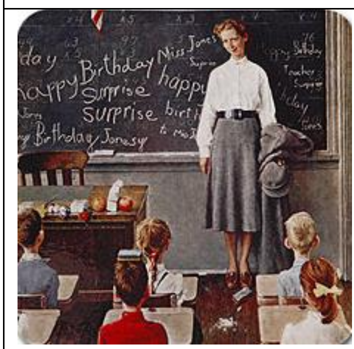
a) Substitua a palavra **relação** pela que melhor nomeia a relação ilustrada.

b) Substitua *elemento um do par* pela palavra que o nomeia.

Faça o mesmo com *elemento dois do par*.

Relação

Elemento um do par ⟺ Elemento dois do par

	JOGO Elemento um do par ATAQUE ⟺ Elemento dois do par DEFESA
	AULA Elemento um do par ENSINO ⟺ Elemento dois do par APRENDIZAGEM

Ao nos fixarmos apenas em um ou nos dois elementos da relação, criamos um *isolado*. ***Isolado*** é um conjunto de seres e fatos que recortamos arbitrariamente da Realidade. (Caraça, 1984).

Quarto *isolado*: analise um dos elementos do par de uma relação

Quando um dos elementos do par é o *TEMPO.*

1) Um objeto cai do alto de uma torre.

(*Adaptado de Caraça (1984, p. 126)*

a) Quais os possíveis pares?

i) *altura da torre e tamanho do objeto,*

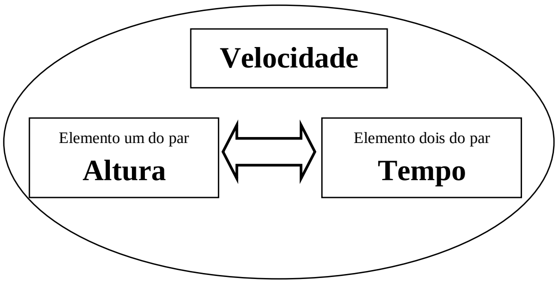
ii) *peso do objeto e altura da torre;*

iii) <u>*tempo que o objeto demora a cair e altura da torre.*</u>

iv) *Etc.*

b) Para cada uma desenhe o diagrama.

iii) <u>*tempo que o objeto demora a cair e altura da torre.*</u>



c) Qual é a **relação**? *A relação é a velocidade.*

d) Como o par se relaciona? *Quanto maior for o tempo maior será o espaço percorrido*

Quinto *isolado*: *Estudo da variação da relação entre os pares espaço e tempo*

Se a relação é uma ação mútua e recíproca entre duas coisas, então tais coisas são interdependentes, pois "*Todas* as coisas estão relacionadas umas com as outras; (...)." (Caraça, 1984, p. 109). Analisaremos a situação do movimento em queda livre de um corpo, de Galileu (1564-1642): *Um objeto cai do alto de uma torre* e as questões são baseadas em (Caraça, 1984, p. 126).

Relação queda do objeto no vácuo. (Caraça, 1984, p. 126)

1) As condições físicas necessárias será um **isolado conveniente**: o vácuo;
2) Procuramos **a *regularidade*** do fenômeno, isto é, a sua ***lei quantitativa;***

3) **Como devemos proceder?**
   a) Medimos as alturas da queda em intervalos de tempo iguais e registramos em uma tabela, Tabela.
   b) Estudamos depois a variação dessas alturas de queda: quanto menores os intervalos de tempo em que fazemos as medições, melhor se conhecerá a variação.

Tabela A

Tempo (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
Espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Fonte: Caraça (1984, p. 126)

Nesta simples tabela não se encontra toda a regularidade do movimento, a sua *lei quantitativa*; mas ela dá uma primeira ideia dessa lei.

4) **Em que consiste, no fundo, esta tabela?**

Em duas sucessões, dois conjuntos, de números:

a) O dos tempos, que representaremos por conjunto t, que é único.
b) O dos espaços, que representaremos por conjunto s.

Ao colocarmos esses dois conjuntos numéricos em correspondência um com o outro, *a correspondência é unívoca no sentido de* ***t*** *para* ***s.***

tempo* → *espaço

[*correspondência unívoca*]

Como não podemos, conceber um movimento de queda em que, ao fim de um certo tempo, o mesmo corpo tenha percorrido dois espaços diferentes, essa correspondência é *unívoca*. *O tempo é o seu elemento ordenador*.

$$\boldsymbol{t \longrightarrow s}$$

$\downarrow$

[tempo** é o elemento ordenador**]

5) Onde está a lei quantitativa de que aquela tabela, Tabela A, nos dá apenas uma primeira aproximação?

A lei está na forma como essa correspondência do conjunto ***t*** ao conjunto ***s*** se realiza. Se a correspondência mudar, mudarão os consequentes – aqui os espaços – mudará, por consequência, a variação e mudará a lei.

antecedente A e *consequente* B:

$\downarrow$ $\downarrow$

t (antecedente)→ s (consequente)

$$\boldsymbol{t \rightarrow s}$$

6) Então em que consiste, afinal, a lei?

A lei é a forma de correspondência entre os dois conjuntos. Se, por consequência, queremos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.

Definição: *Chamaremos lei natural a toda regularidade dos fenômenos naturais.* (Caraça, 1984)

E conforme a natureza do isolado e do fenômeno natural pode haver dois tipos fundamentais de lei:

- ✓ **Lei qualitativa :** diz respeito a variação de qualidade
- ✓ **Lei quantitativa**: diz respeito a variação de quantidade

Para não cairmos no verbalismo, isto é, descrever um fenômeno apenas pelas suas qualidades, como por exemplo, na carta do jesuíta Padre Noel dirigida a Pascal "A luz, ou antes, a iluminação é um movimento luminar de raios compostos de corpos luminosos que enchem os corpos transparentes e que são movidos liminarmente por outros corpos luminosos". (Caraça, 1984, p. 123).

Pela descrição acima não é possível saber **quanto** de luminosidade essa luz tem. Por isso é necessário o aspecto quantitativo do fenômeno, a explicação quantitativa vem da observação e da experimentação, ambas procuram medir um fenômeno. E para acompanhar a medição do fenômeno necessitamos do novo simbolismo matemático, que podemos traduzir pelos símbolos algébricos:

$$t \longrightarrow s \qquad f(t) = s \quad ou \quad s = f(t)$$

$$generalizando \quad f(x) = y \quad ou \quad y = f(x)$$

A interdependência de grandezas variáveis na Matemática

Em geral a lei do movimento expressa **a distância percorrida no tempo *t***.

tempo *t* distância *s*	variável "independente" (organizador) variável "dependente"	cada instante ***t*** corresponde uma distância definida ***s***	Dizemos: a distância ***s*** é função do tempo ***t***

Os conceitos matemáticos de variável e função são generalizações abstratas de:

- ✓ **variáveis concretas**, tais como tempo, distância, ângulo de rotação e área de uma superfície,
- ✓ e as **interdependências entre elas**, a distância depende do tempo, etc.

Para Aleksandrov et al (1994, p. 65) assim como o conceito de número real e as imagens abstratas do valor real de uma grandeza arbitrária, uma "variável" é a imagem abstrata de uma grandeza que varia, o que supõe distintos valores numéricos. Este é o sentido geral de variável; em particular podemos entender por ela o tempo, a distância ou qualquer outra grandeza variável.

Número	Variação da quantidade numérica	Imagem abstrata da variação numérica	Variável

Expressão matemática da imagem da variação numérica, a variável	Palavra → um número Figurada → um segmento Simbólica → símbolo	→ ***ahá*** dos egípcios → ——— dos gregos → ***x,*** moderno

Uma função é a imagem abstrata da dependência de uma grandeza a respeito da outra.

Em matemática a afirmação "y é função de x" significa unicamente que a cada correspondência entre os valores de y e os valores de x se chama função.

Assim temos:

Grandezas	Dependência entre as grandezas	Imagem abstrata da dependência das grandezas
tempo *espaço*	***espaço (s) é função do tempo (t)***	***s função de t*** ***t → s*** ***(antecedente) (consequente)***

A expressão matemática da imagem abstrata da dependência é y = f (x).

Foram correspondências desta classe que originaram o conceito de funções (Aleksandrov et al,1994):

- ✓ a longitude dos lados de um retângulo determina completamente sua área;
- ✓ o volume de uma quantidade conhecida de gás à temperatura dada vem determinado pela pressão,
- ✓ a dilatação de uma barra metálica está determinada por sua temperatura.

Definição de função aceita pela matemática atual (Aleksandrov et al,1994, p. 103)

A variável dependente y é função da variável independente x se existe uma regra pela qual a cada valor de x, pertencente a um certo conjunto de números, corresponde um valor definido de y.

O conjunto dos valores x que aparece nesta definição se chama **domínio da função**.

O novo simbolismo

"Todo novo conceito dá lugar a um novo simbolismo." (Aleksandrov et al, 1994, 103)

A transição da aritmética para a álgebra foi possível graças à construção de fórmulas que eram válidas para números arbitrários, e a busca de soluções gerais deu lugar ao simbolismo literal da álgebra.

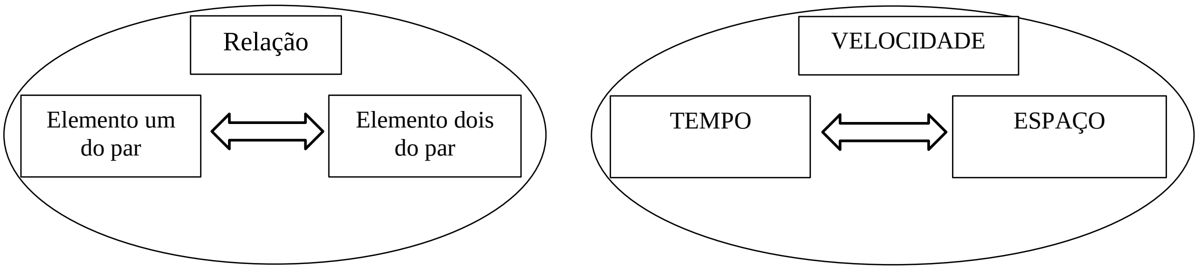
$$y = f(x)$$

Sexto isolado: Relacionando diferentes registros e a invisibilidade das marcas

Neste isolado será possível observar alguns aspectos da matemática escolar que Prado (2012) considera importante para a formação de professores, pois as marcas dos registros construídos, até nossos dias, vão se tornando invisíveis na matemática escolar. Acreditamos que essa invisibilidade pode ser um dos fatores das dificuldades dos professores para ensinar e dos alunos para aprender a relacionar as diversas representações das funções.

(a) **A invisibilidade das marcas da relação no Diagrama de Venn**

Retomando o exemplo de Caraça (1984)/Galileu, *Um objeto cai do alto de uma torre*, e o diagrama de Lima e Moisés (2010) para relações, vamos analisar suas marcas e como elas ficam invisíveis, mas podem ficar no nosso pensamento.

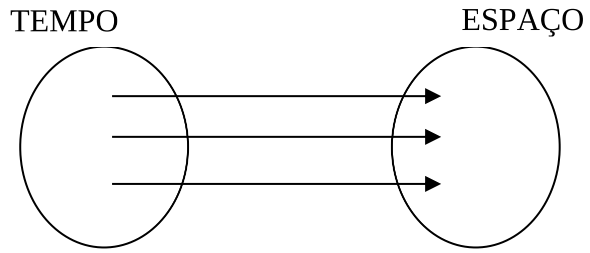


Nesta relação *o elemento um do par*, o tempo, tem as seguintes características: é o antecedente desta relação, ordena e organiza o movimento, é uma grandeza que varia independentemente de qualquer outro fator, será denominado por **variável independente**. O tempo domina o movimento, portanto seus elementos formam o **conjunto domínio**.

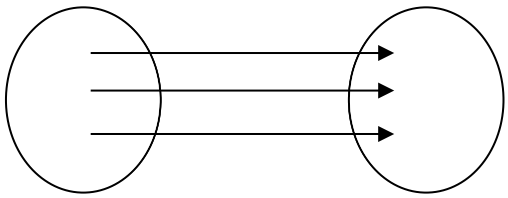
E o elemento dois do par, o espaço percorrido, é o consequente desta relação, é uma grandeza cuja variação depende do elemento anterior, será denominado por **variável dependente**. Ele é consequência da lei de formação e do elemento dominante do movimento, seus elementos formam o **conjunto imagem**.

O diagrama de Lima e Moisés (2010) pode ser simplificado, desde que alguns de seus indicadores fiquem no nosso pensamento:

(I) A relação está invisível:



(II) A relação e os seus elementos estão invisíveis.



Nesta última representação ficaram invisíveis os nomes da relação e dos seus elementos, é necessário que essas indicações fiquem no nosso pensamento, pois suas marcas agora não existem mais. Mas o que garante o papel que cada um desses elementos tem nessa situação? Talvez possamos fazer uma analogia com o nosso sistema de numeração decimal, onde a posição que cada algarismo ocupa, determina o seu valor.

Assim, teríamos que os elementos à esquerda são os antecedentes ou domínio, e os elementos à direita são os consequentes e imagem. O que sustenta esta ordem? Nesta pesquisa, até o momento, não localizamos uma justificativa para tal ordem. Talvez possamos atribuir ao fato de nossa escrita ser da esquerda para a direta? Escrevemos primeiro o antecedente e depois o consequente? É uma questão em aberto.

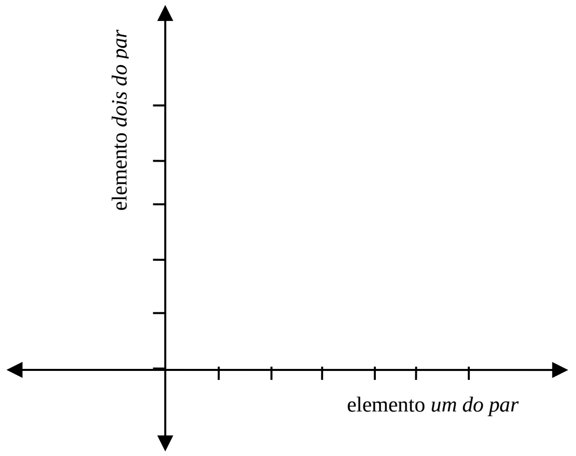
Esse modo de representar relações é denominado por DIAGRAMA DE VENN[14].

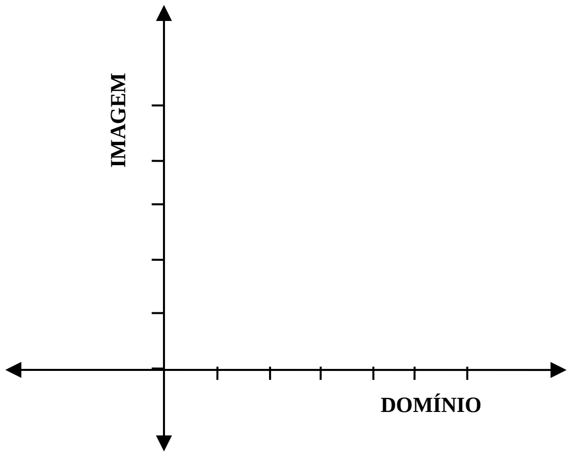
(b) **A invisibilidade das marcas no gráfico cartesiano**

Como relacionar as coordenadas de Descartes com o problema de Galileu? Aqui também será necessário observarmos a posição de cada elemento. O antecedente/domínio fica no eixo horizontal e o consequente/imagem, no eixo vertical.

---

[14] Podemos considerar que o diagrama de Venn é a representação de uma relação, seu antecedente ou domínio e seu consequente ou imagem.





(c) **A invisibilidade das marcas no gráfico do estudo da função**

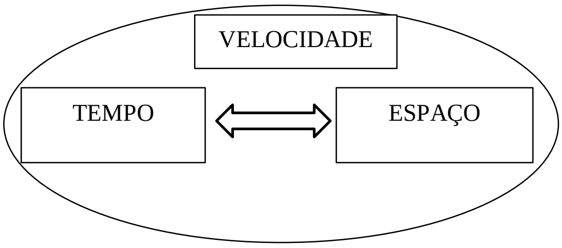
Aqui vamos tratar de modo amplo as diferentes representações da função e da invisibilidade das suas marcas, para tentarmos um caminho que contribua para a explicitação de alguns dos elementos indicados por Zuffi e Pacca (2000, p. 24) da não explicitação, na educação básica, no ensino dos (iii) critérios de escolha e localização de elementos para a identificação desta correspondência no gráfico cartesiano. Baseado em Caraça (1984)/Galileu, *Um objeto cai do alto de uma torre* suponhamos que nossa observação indicou o seguinte registro:

Tempo (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
Espaços (em metros)	0	2	4	6	8	10	...

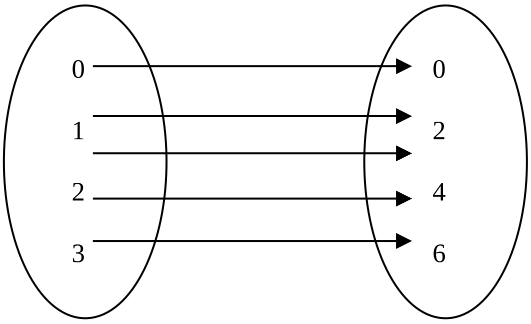
A partir desta tabela podemos identificar:

- Duas grandezas: tempo e espaço percorrido;
- Uma relação entre as grandezas: para cada tempo o espaço percorrido é o seu dobro;
- A expressão algébrica da lei de formação dessa relação: f (x) = 2x;
- A variável independente é o tempo;
- A variável dependente é o espaço percorrido.
- As representações gráficas seriam:

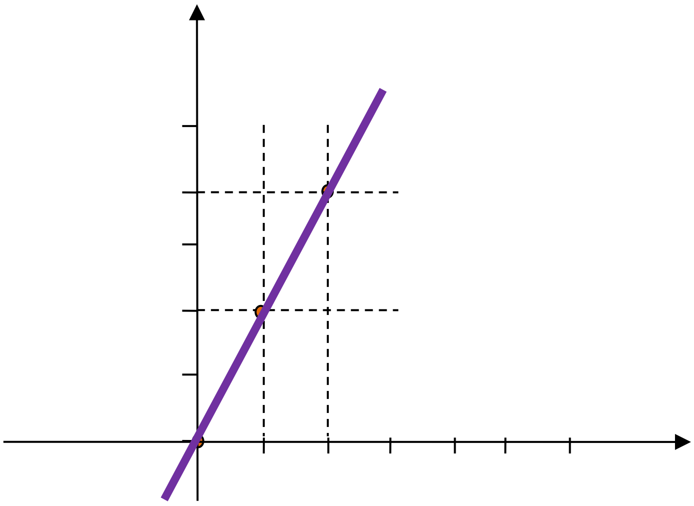
(I) Diagrama Lima e Moises (2010)



(II) Diagrama de Venn

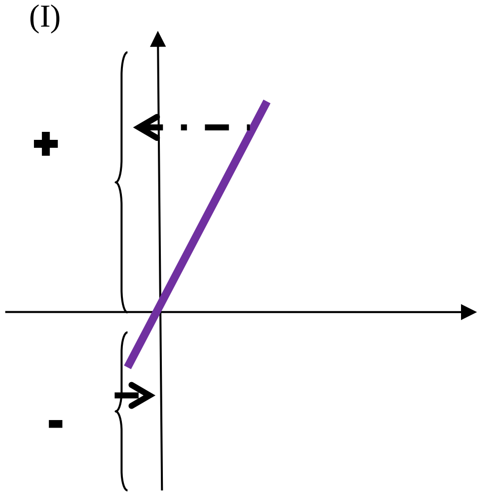


(III) Gráfico cartesiano

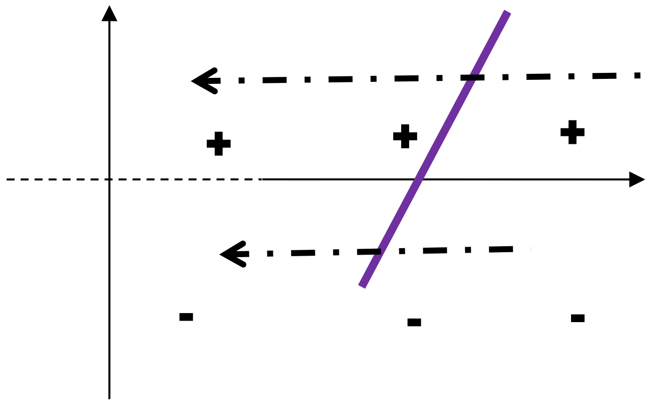


(IV) E para o estudo do sinal da função outras marcas ficam invisíveis, como o eixo vertical:

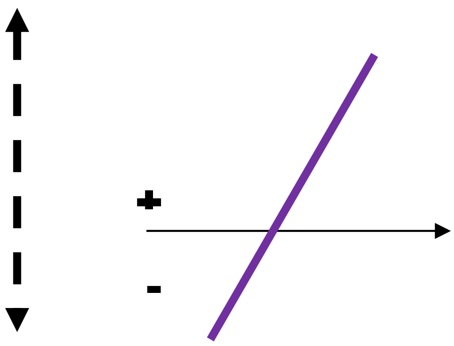
(I)



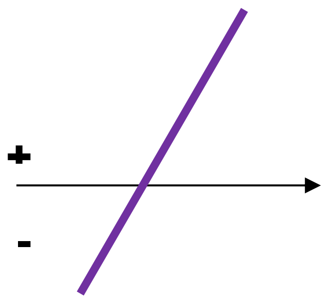
(II)



(III)



(IV)



Na representação IV, ficaram invisíveis as marcas do elemento dois do par, isto é, a variável dependente, portanto elas devem estar no pensamento.

Pra o professor pode ser que essas representações sejam familiares, mas não podemos afirmar que para o aluno elas não causem estranheza, pois o que ficou invisível, o aluno deve preencher.