



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GEOMETRIA PROJETIVA: MATEMÁTICA E ARTE

LUIS SÉRGIO CUNHA MALTEZ

Salvador - Bahia

MARÇO DE 2015

# GEOMETRIA PROJETIVA: MATEMÁTICA E ARTE

LUIS SÉRGIO CUNHA MALTEZ

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima.

Salvador - Bahia

Março 2015

# GEOMETRIA PROJETIVA: MATEMÁTICA E ARTE

LUIS SÉRGIO CUNHA MALTEZ

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de março de 2015.

## Banca Examinadora:

---

Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima (Orientadora)  
UFBA

---

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey  
UFBA

---

Profa. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão  
UEFS

*A Alice e Fernando, minha família, o meu legado: a vida é um misterioso caminho,  
nem sempre longo, porém nunca é tarde para apostar nos nossos sonhos.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus a oportunidade de ter feito esse mestrado, ele que me guia e me protege. Agradeço a meus pais, com um beijo de saudade, o dom da vida e o exemplo. À minha família, Alice, minha esposa e Fernando, meu filho, obrigado pela paciência e incentivo. Aos professores que ministraram as disciplinas do Mestrado, muito obrigado pelos conhecimentos que adquiri. A Ana Lucia, orientadora e amiga, um agradecimento especial pela paciência com o marinheiro de primeira viagem, pelo zelo no trato e também pela competência que demonstrou ao indicar o caminho e a execução deste trabalho. A Joseph, pela disponibilidade sempre para ajudar, um abraço. à Professora Ana Carla, pela participação na banca e pelas sugestões à esse trabalho. A Marco Antônio, nosso coordenador, amigo de longas datas, muito obrigado. Aos colegas, que juntos atravessamos esse caminho, um abraço de reconhecimento e de amizade, especialmente Mário Sérgio, um novo e querido amigo. Uma palavra de saudade para Israel, que nos deixou antes de concluir esse mestrado.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é contribuir para uma melhor introdução ao estudo de Geometria Espacial no que tange a visão da figura tridimensional vista no plano bidimensional por intermédio da sua construção. O meio para atingir esse objetivo é o estudo da Geometria Projetiva, que tem como principal instrumento a Perspectiva. O trabalho foi dividido cinco capítulos, enfatizado no primeiro os conceitos gerais de Álgebra Linear, pois a linguagem escolhida foi a vetorial. Os três subsequentes referem-se as teorias das Geometrias Euclidiana, Elíptica e Projetiva com seus axiomas e modelos matemáticos tendo como prioridade apresentar as diferenças entre elas, notadamente o Axioma das Paralelas. Finalmente, no último capítulo, é lançado uma proposta de noções de Geometria Projetiva como introdução ao estudo de Geometria Espacial, que consiste em apresentar as técnicas de Perspectiva, usando como fator motivacional as obras de arte da Renascença que originaram o tratamento matemático da Geometria Projetiva e, também, propostas de atividades em sala de aula, principalmente construções de figuras utilizando o programa Geogebra.

Palavras-chave: plano bidimensional, perspectiva, Geometria Projetiva.

# Abstract

In this work we want to contribute to the study of Spatial Geometry in the schools, using the Projective Geometry, and Perspective techniques in order to improving the spatial vision of the students. This text is divided in five chapters, where we present an introduction of Linear Algebra, the Axioms and models of Euclidean, Spherical and Projective Geometries, and finally in the last chapter we suggest activities using the computational program Geogebra and paintings and architecture projects made in the period of the Renaissance.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introdução</b>   | <b>9</b>  |
| <b>1 O Espaço Vetorial <math>\mathbb{R}^n</math></b>                                | <b>11</b> |
| <b>2 Geometria Euclidiana</b>   | <b>18</b> |
| 2.1 Axiomas da Geometria Euclidiana . . . . .                                       | 19        |
| 2.2 Modelo para a Geometria Euclidiana: o Plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ . . . . . | 21        |
| <b>3 Geometria Elíptica</b>   | <b>27</b> |
| 3.1 Axiomas da Geometria Elíptica . . . . .   | 27        |
| 3.2 Modelo para a Geometria Elíptica: o Plano Elíptico $\mathbb{S}^2$ . . . . .     | 28        |
| <b>4 Geometria Projetiva</b>  | <b>34</b> |
| 4.1 Axiomas da Geometria Projetiva . . . . .  | 35        |
| 4.2 Modelo para a Geometria Projetiva: o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ . . . . .  | 35        |
| <b>5 A Geometria Projetiva e as Artes na Educação Básica</b>                        | <b>39</b> |
| 5.1 História da Geometria Projetiva . . . . .                                       | 40        |
| 5.1.1 Elementos da Perspectiva . . . . .  | 44        |
| 5.1.2 Geometria Projetiva, o desenvolvimento da teoria matemática . . . . .         | 44        |
| 5.1.3 Perspectiva na Arquitetura e no Cinema . . . . .                              | 45        |
| 5.2 Sugestões de Atividades em sala de aula envolvendo Perspectiva . . . . .        | 47        |
| 5.2.1 Desenhos em Perspectiva utilizando o Geogebra . . . . .                       | 48        |
| 5.2.2 Desenho do cubo em Perspectiva Paralela, com um ponto de fuga . . . . .       | 49        |
| 5.2.3 Desenho do cubo em Perspectiva Oblíqua, com dois pontos de fuga . . . . .     | 51        |
| 5.2.4 Desenho do Quadrado em Perspectiva . . . . .                                  | 53        |
| 5.2.5 Desenho da Pirâmide reta em Perspectiva . . . . .                             | 54        |
| <b>Referências</b>  | <b>55</b> |



# Introdução

Os professores de Matemática no Ensino Médio, ao apresentar os conceitos de Geometria Espacial aos alunos, ouvem geralmente o seguinte questionamento: "as retas paralelas se encontram no infinito?". Boa parte desses alunos, certamente, receberam dos professores alguma informação sobre esse fenômeno que naturalmente aparece em situações da vida cotidiana.

De fato, quando nos situamos em um trecho muito longo de uma estrada em linha reta, nossos olhos percebem que no final do horizonte as duas margens parecem se tocar. Será que existe efetivamente um ponto de encontro, ou existe uma outra explicação para isso?

A busca por respostas a essas perguntas foi que nos levou a elaboração desse trabalho. Ao fazer uma pesquisa inicial, descobrimos que existe uma Geometria que trata de responder tais questionamentos, ou seja, que existe uma teoria matemática fundamentada em um modelo axiomático para uma geometria bidimensional, sem retas paralelas, chamada de *Geometria Projetiva* ou *Geometria Elíptica Simples*.

O processo histórico é fundamental para se entender o porquê da existência de tal teoria. Na Itália do século XV, os pintores da *Renascença* (Alenti, da Vinci, Durer e outros) tinham descoberto uma maneira de representar, de modo mais próximo da realidade, a imagem suscitada em nossos olhos pelos objetos do mundo exterior. Os artistas, buscando mais realismo para as suas obras, introduziram os conceitos de *ponto de fuga* e *perspectividade*. Porém, demorou mais de dois séculos para que essas ideias pudessem ser formuladas matematicamente. A Geometria Projetiva forneceu a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas, concentrando-se no interesse sobre as propriedades visuais da figura e, afastando algumas das propriedades dos "*Elementos*" de Euclides, criando assim uma das Geometrias Não-Euclidiana.

Neste trabalho, em uma primeira etapa, o principal objetivo é apresentar os fundamentos da Geometria Projetiva. Para isso, segue-se uma linha histórica. Isto significa que, a partir da apresentação da Geometria Euclidiana Plana, serão construídos modelos para outros sistemas axiomáticos derivados deste, até chegarmos ao modelo da Geometria Projetiva. Como os modelos estarão contidos no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , necessitaremos do

produto interno canônico. Ele será uma ferramenta essencial, pois possibilitará a definição de vários termos, bem como utilizar processos algébricos para verificar que os conjuntos considerados nas definições feitas realizam, de fato, os axiomas estabelecidos em cada. Uma vez que a linguagem escolhida foi a vetorial, iniciamos com um capítulo de Álgebra Linear para fixar notações e, a seguir, nos capítulos posteriores, verificaremos os axiomas de cada modelo das Geometrias Euclidiana Plana, Elíptica e da Geometria Projetiva de dimensão 2, sempre observando as diferenças entre a Geometria Projetiva e as Geometrias Euclidiana e Elíptica.

Na apresentação do modelo para a Geometria Projetiva de dimensão 2, definiremos o chamado *Plano Projetivo*, denotado por  $\mathbb{RP}^2$ . Para isto, consideraremos o conjunto  $\mathbb{R}^3$  sem a origem, chamado  $\mathbb{R}^3$  *perfurado na origem* e indicado por  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , e nesse conjunto os chamados *reta* e *plano perfurados* que são exatamente a interseção entre retas e planos de  $\mathbb{R}^3$  com o conjunto  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ .

No conjunto  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , definiremos a relação de equivalência  $v \sim w \Leftrightarrow$  existe um número real  $\lambda \neq 0$  tal que  $v = \lambda w$ . O conjunto quociente, de  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$  por essa relação de equivalência é o que chamamos de *Plano Projetivo* que denotamos por  $\mathbb{RP}^2$ , ou seja,  $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 - \{o\} \setminus \sim$ .

Finalmente, na segunda etapa do trabalho, apresentaremos sugestões de atividades a serem aplicadas em salas de aula do ensino médio, onde as ideias envolvidas no estudo da Geometria Projetiva estejam presentes. Pensamos que uma boa oportunidade de aplicá-las é na 2ª série do Ensino Médio, com o estudo de Geometria Euclidiana Espacial, onde deveremos lidar com as figuras de três dimensões, que devem ser desenhadas em duas dimensões. Para isso, será importante a realização preliminar de atividades de desenho em perspectiva, onde sejam ressaltadas as formas de uma figura de dimensão três representada em um papel na mesa, ou seja, em duas dimensões. Esse tipo de atividade pode ser feita utilizando o programa computacional Geogebra, que tem se mostrado um excelente recurso para apoiar a aprendizagem e, também, despertar o interesse dos alunos. Além disso, sugerimos uma pesquisa sobre obras de arte de expoentes da pintura, principalmente da *Renascença*, onde a Geometria Projetiva, intuitivamente, começou a ser utilizada pelos grandes mestres e, em seguida, estudada por matemáticos da época, como Desargues, Pascal e Saccheri, com o objetivo de estabelecer a estrutura matemática formal desse assunto. A nossa pretensão é motivar os alunos a pesquisarem a História da Arte e daí fazer a bela ligação da Matemática com a Arte.

A principal bibliografia utilizada para a fundamentação matemática foi o livro [2]. A internet foi a fonte para a pesquisa sobre o desenvolvimento histórico do conteúdo, bem como, das figuras que aparecem nesse texto.

# Capítulo 1

## O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo inicial, vamos apresentar os principais conceitos e notações de Álgebra Linear, pois a linguagem vetorial será utilizada durante todo o texto, especialmente no contexto da Geometria Projetiva. Trataremos aqui, especificamente, do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão  $n$ .

Todos os resultados a seguir são clássicos e podem ser encontrados em todos os principais livros de Álgebra Linear usados em um primeiro curso universitário desse conteúdo.

O conjunto de  $n$ -uplas ordenadas de números reais se denomina  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n\}.$$

Dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  e  $c \in \mathbb{R}$ , definiremos as duas seguintes operações binárias em  $\mathbb{R}^n$ .

- *soma de  $x$  e  $y$* , representada por  $x + y$ :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$

- *produto de  $x$  por  $c$* , representado por  $c \cdot x$ :

$$c \cdot x = cx = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n).$$

Com essas definições, o  $\mathbb{R}^n$  fica munido de uma estrutura de *espaço vetorial* sobre  $\mathbb{R}$  e cada elemento passa a ser chamado de *vetor*.

O vetor  $v = (0, 0, \dots, 0)$  é chamado *vetor nulo*. Dois vetores  $v$  e  $w$  quaisquer de  $\mathbb{R}^n$  são ditos *colineares*, quando existe um escalar  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $v = cw$ , ou seja, um dos vetores é múltiplo do outro.

Um subconjunto não vazio  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ , fechado para as operações de adição e multiplicação por um escalar, definidas acima, será chamado *subespaço vetorial* de  $\mathbb{R}^n$ . Podemos citar, como exemplo, o subconjunto  $W$  do  $\mathbb{R}^3$  formado por todos os vetores da

forma  $(a, b, 0)$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais arbitrários. De fato, sejam  $x = (x_1, x_2, 0)$  e  $y = (y_1, y_2, 0)$ . Evidentemente,  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0 + 0)$  é elemento de  $W$  e sendo  $c$  um escalar, temos que  $c \cdot x = (cx_1, cx_2, c0)$  também pertence a  $W$ . Logo,  $W$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .

O subconjunto  $\{0\}$ , formado pelo vetor nulo, é chamado *subespaço trivial* e o conjunto  $\mathbb{R}^n$  será o *subespaço próprio*,  $W = \mathbb{R}^n$ .

Seja  $x$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $x$  é uma *combinação linear* de vetores  $v_1, v_2, \dots, v_i$  de  $\mathbb{R}^3$ , se  $x$  puder ser escrito como

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k,$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  são escalares reais. Como exemplo, temos que em  $\mathbb{R}^3$ , o vetor  $x = (1, 1, 1)$  é uma combinação linear dos vetores  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (-1, 1, 0)$  e  $v_3 = (0, 0, 1)$ , pois podemos escrever

$$(1, 1, 1) = c_1(1, 0, 1) + c_2(-1, 1, 0) + c_3(0, 0, 1),$$

fazendo

$$c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -1.$$

Dado um conjunto de vetores  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $S$  *gera* um subconjunto  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , ou que  $W$  é *gerado por*  $S$ , se qualquer vetor de  $W$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de  $S$ . Denotamos tal  $W$  por  $[[v_1, v_2, \dots, v_k]] \subset \mathbb{R}^n$ . Ou seja,

$$[[v_1, v_2, \dots, v_k]] = \{w \in \mathbb{R}^n; w = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k, a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Tal conjunto é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .

Um conjunto de vetores  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$  é dito *linearmente independente*, *LI*, quando a combinação linear nula de  $v_1, v_2, \dots, v_k$  acontece apenas quando os coeficientes são todos nulos. Quando é possível escrever uma combinação linear nula com os elementos de  $S$ , cujos coeficientes não são todos nulos, diz-se que o conjunto  $S$  é *linearmente dependente*, *LD*.

Observamos que a noção de combinação linear relaciona-se com a consistência de um sistema linear. O fato é que o sistema linear associado a uma combinação linear se resume a um *sistema homogêneo* que sempre terá solução. Assim, se houver somente a solução trivial para o sistema, os vetores de  $S$  serão *LI* e se tiver mais de uma solução serão *LD*.

Dizemos que o conjunto  $S$  é uma *base de*  $\mathbb{R}^n$  se ele gera o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  e é linearmente independente.

Um subconjunto  $S$  com  $n$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  é uma base, se verificarmos que o determinante da matriz quadrada  $M$ , cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores de  $S$ , é tal que  $\det(M) \neq 0$ .

Como exemplo, conjunto  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , em que  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ ,  $v_3 = (0, 2, 2, 1)$  e  $v_4 = (1, 0, 0, 1)$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$ . De fato, o sistema homogêneo  $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$ , resulta  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$  o que significa que os vetores são LI e, além disso, também  $S$  gera o  $\mathbb{R}^4$  pois todos os vetores de  $\mathbb{R}^4$  podem ser escritos como uma combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_4$ .

Chamamos de *base canônica* do  $\mathbb{R}^n$  ao conjunto de vetores  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . sendo  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ . Sendo  $x$  escrito como combinação linear de  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , com coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , teremos  $v = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_n e_n$  e, portanto,  $v = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

Todo subespaço não trivial  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  possui uma base  $S$ , onde o número de elementos de  $S$  é menor que  $n$ . A *dimensão* de  $\Gamma$  é o número de elementos de uma de suas bases, ressaltando que toda base  $S$  de  $\Gamma$  possui o mesmo número de elementos.

Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  dois vetores do  $\mathbb{R}^n$ . A aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

é chamada de *produto interno* ou *produto escalar canônico* do  $\mathbb{R}^n$ .

O resultado a seguir apresenta as principais propriedades do produto escalar em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 1.0.1.** *O produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  possui as seguintes propriedades, válidas para quaisquer vetores  $x, w \in \mathbb{R}^n$  e qualquer escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$*

- $\langle v, v \rangle \geq 0$  e  $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ , *positiva definida*;
- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ , *simetria*;
- $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$ , *aditividade*;
- $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ , *linearidade*.

Além disso, também é válido a seguinte importante desigualdade:

**Teorema 1.0.2** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Para quaisquer  $v, w \in \mathbb{R}^n$  vale a desigualdade  $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$  e a igualdade ocorre se, e somente,  $v$  e  $w$  são vetores colineares.*

Chamamos de *norma* a aplicação definida por  $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty[$  tal que  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Se  $\|v\| = 1$ ,  $v$  é dito *vetor unitário*.

O único ângulo  $\phi$ , com  $\phi \in [0, \pi]$ , satisfazendo

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

será chamado de *medida do ângulo entre os vetores não nulos  $v$  e  $w$* .

Portanto, para dois vetores não nulos  $v$  e  $w$ , podemos escrever a seguinte fórmula que relaciona *produto interno, norma e medida do ângulo*, ou seja,

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \phi,$$

onde  $\phi \in [0, \pi]$  é a medida do ângulo entre os dois vetores. Usaremos a notação  $\phi(v, w)$ .

Convém observar que se  $\langle v, w \rangle = 0$ , então  $v$  e  $w$  são ditos *ortogonais*. O vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor.

O espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  admite uma operação especial entre dois vetores chamada de *produto vetorial* de  $v$  por  $w$ , indicado por  $v \times w$ , onde  $v$  e  $w$  são vetores do  $\mathbb{R}^3$ . Geometricamente,  $v \times w$  tem a propriedade de ser perpendicular a  $v$  e a  $w$  ao mesmo tempo. O produto vetorial citado é o vetor em  $\mathbb{R}^3$  tal que, para qualquer vetor  $u \in \mathbb{R}^3$ , vale a identidade  $\langle u, v \times w \rangle = \det[u, v, w]$ .

É válido o seguinte resultado.

**Proposição 1.0.3** (Fórmula de Lagrange). *Para quaisquer dois vetores  $v$  e  $w$  do  $\mathbb{R}^3$ , vale a identidade*

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2.$$

*Em particular, se  $\theta(v, w)$  é a medida do ângulo entre os vetores  $v$  e  $w$ , então*

$$\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \theta(v, w),$$

*onde  $\sin \theta(v, w)$  é o seno do ângulo entre os vetores.*

Chama-se *transformação linear*  $A$  de  $V$  em  $W$ , onde  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais, uma função  $A$  que faz corresponder um único vetor  $A(x)$  de  $W$  a cada  $x$  de  $V$  de tal forma que,  $A(x + y) = A(x) + A(y)$ , para quaisquer vetores  $x$  e  $y$  em  $V$ , e, além disso,  $A(cx) = cA(x)$ , para todo vetor  $x$  em  $V$  e todo escalar  $c$  em  $\mathbb{R}$ .

As aplicações soma e multiplicação em  $\mathbb{R}^n$  são exemplos de transformações lineares.

Outro exemplo de transformação linear é a aplicação  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ .  $A$  satisfaz às duas condições, pois

$$\begin{aligned} A(x + y) &= A((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= A(x) + A(y) \end{aligned}$$

e, além disso, se  $c$  é um número real qualquer,

$$A(cx) = A(cx_1, cx_2, cx_3) = (cx_1, cx_2) = c(x_1, x_2) = cA(x).$$

Portanto,  $A$  é uma transformação linear, que é chamada de *projeção*.

Para cada transformação linear  $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ , destacamos dois subconjuntos, um no contradomínio e o outro no domínio da transformação, que serão chamados de *imagem* e *núcleo* da transformação linear. São eles, respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \{w \in \mathbb{R}^n; w = A(v) \text{ para algum } v \in \mathbb{R}^m\}, \\ \text{Nuc}(A) &= \{v \in \mathbb{R}^m; A(v) = 0\}. \end{aligned}$$

Mostra-se que, dada uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ , seu núcleo e imagem são subespaços do domínio e do contradomínio, respectivamente. Observamos que  $\text{Im}(A) = [[A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_m)]]$ , ou seja,  $\text{Im}(A)$  é o conjunto formado pelos vetores que são a combinação linear dos vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^m$ .

O seguinte importante resultado é conhecido como o *Teorema do Núcleo e da Imagem* de uma transformação linear.

**Teorema 1.0.4.** *Se  $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear, então*

$$\dim \mathbb{R}^m = \dim \text{Nuc}(A) + \dim(\text{Im}(A)).$$

Dadas duas transformações lineares  $A$  e  $C$ , temos que a função composta  $C \circ A$  também é uma transformação linear. O fato da composição de transformações lineares ser também linear nos permite fixar um novo conceito.

Dizemos que uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  é *invertível*, se existe uma aplicação  $B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  tal que  $B \circ A = Id : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  e  $A \circ B = Id : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , onde o símbolo  $Id$  indica a aplicação identidade do espaço considerado. Quando existir tal aplicação, diremos que  $B$  é a inversa de  $A$ .

Se  $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear, então a sua matriz associada  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ . Caso  $A$  seja invertível, a inversa também é uma transformação linear e a matriz inversa é uma matriz quadrada. Recordamos que uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante for não nulo.

Uma transformação linear  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  será chamada de *operador linear* ou apenas *operador*, quando existem um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  e existe um escalar  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $A(v) = cv$ . Diz-se, neste caso, que o vetor  $v$  é um *autovetor* de  $A$  associado ao *autovalor*  $c$ . Se  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é um operador linear, o polinômio de grau  $n$ ,  $p(\lambda) = \det[Id - \lambda A]$  é chamado de *polinômio característico* de  $A$ .

Diz-se que um operador linear  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é *simétrico*, se a matriz dos vetores do operador linear  $A$  é igual à sua *simétrica*, ou seja,  $A = A^t$ .

Enunciaremos agora o seguinte importante resultado.

**Teorema 1.0.5** (Teorema Espectral). *Se o operador linear  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é simétrico, então o polinômio característico do operador linear,  $p(t)$ , possui  $n$  raízes reais, contando as repetições,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  e existe uma base ortonormal de autovetores  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , onde  $A(u_i) = c_i u_i$ .*

Uma *distância*  $d$ , definida em um conjunto  $S$  é uma função  $d: S \times S \mapsto \mathbb{R}$ , possuindo as propriedades:

- $d(a, b) \geq 0$  e  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ;
- $d(a, b) = d(b, a)$ ;
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b), \forall a, b, c \in S$ .

Em geral, considerando-se  $d$  uma função distância num conjunto  $S$ , diz-se que uma função  $f: S \mapsto T$  é uma *isometria*, se  $f$  for *biunívoca* e  $d(f(s), f(t)) = d(s, t), s, t \in S$ .

Seja  $\| \cdot \|$  a norma definida pelo produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$ . Então é verdade que a aplicação

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(v, w) = \|w - v\|,$$

é uma distância em  $\mathbb{R}^n$ . Podemos, então, falar de isometrias em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma *isometria de  $\mathbb{R}^n$* , se  $f$  for biunívoca e  $\|f(w) - f(v)\| = \|w - v\|, \forall w, v \in \mathbb{R}^n$ .

Encerrando o capítulo, apresentaremos o teorema que classifica as isometrias do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Para enunciá-lo precisamos definir a noção de aplicação ortogonal. Diz-se que uma aplicação  $U: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é *ortogonal* se  $\langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, uma *aplicação ortogonal* é aquela que preserva o produto interno.

Temos, então, o seguinte resultado:



**Teorema 1.0.6** (Classificação das isometrias de  $\mathbb{R}^n$ ). *Uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma isometria, se e somente se, existe uma translação  $T_a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  e um operador ortogonal  $U : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = T_a \circ U(x)$ .*

# Capítulo 2

## Geometria Euclidiana

Os objetivos desse capítulo são, inicialmente, apresentar os axiomas que regem a Geometria Euclidiana e, além disso, apresentar um modelo para a essa geometria, ou seja, vamos fixar um conjunto aritmético específico e verificar que os axiomas propostos por vários matemáticos no final do século XIX, destacando-se o matemático alemão *Hilbert*, são válidos nesse conjunto. Utilizamos o livro [2] como principal referência.

A grande contribuição do matemático alemão David Hilbert à Geometria Euclidiana foi apresentá-la de uma maneira axiomática, ou seja, apresentou um conjunto de axiomas que

- é consistente, isto é, os axiomas obedecem ao princípio da não-contradição uns em relação aos outros;
- é completo, ou seja, os axiomas são suficientes para provar que são verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria;
- é independente, no sentido de que cada um dos axiomas não é consequência dos demais.

Após vários matemáticos apresentarem modelos para outras geometrias, chamadas *não-euclidianas*, tais como as *Geometrias Elíptica, Afim, Hiperbólica e a Projetiva*, cujas diferenças, levando em conta o *postulado das paralelas*, tais geometrias ganharam credibilidade. Mas, todas elas se baseavam na Geometria Euclidiana e, nesse momento, ao tentar provar a consistência da geometria de Euclides, viu-se que os postulados deste, relatados na obra em *Elementos*, eram insuficientes para provar teoremas conhecidos; ou seja, a axiomática era incompleta e que em algumas provas apresentadas, apelava-se para fatos alheios aos postulados em alguns casos. Foi daí que surgiu a necessidade de reorganizar a própria Geometria Euclidiana e, em 1898-99, Hilbert apresentou um sistema de axiomas completo para as Geometrias Euclidianas Plana e Espacial, numa série de conferências

na Universidade De Göttingen; uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da Geometria Euclidiana. Paralelamente, este rigor fazia-se presente também na *análise*, na *álgebra*, enfim, em toda Matemática. A *aritmética* começava a ganhar também, a partir dos números naturais, uma apresentação lógica e consistente. Hilbert estabelecera uma correspondência entre os elementos geométricos do plano - pontos, retas e círculos - com os entes numéricos da *Geometria Analítica*. Por exemplo, os pontos são caracterizados por pares ordenados de números reais, e as retas e círculos por equações. A partir desse momento, a Geometria, que desde a antiguidade era considerada o modelo de rigor lógico, estava dependendo da própria aritmética para sua fundamentação.

## 2.1 Axiomas da Geometria Euclidiana

Apresentaremos agora os axiomas da Geometria Euclidiana Plana segundo a axiomática de Hilbert.

### I. Termos Indefinidos

- Ponto, Reta, Plano, Pertence, Está Entre e Congruência.

### II. Axiomas de Incidência

- Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
- Toda reta contém pelo menos dois pontos.
- Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

### III. Axiomas de Ordem

- Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$ .
- Para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente ao segmento de reta  $\overline{AC}$ , tal que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ .
- Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.
- Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se  $l$  interseca o segmento  $\overline{AB}$ , ela também interseca o segmento  $\overline{AC}$  ou o segmento  $\overline{BC}$ .

#### IV. Axiomas de Congruência

- Se  $A$  e  $B$  são dois pontos de uma mesma reta  $l$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto  $B'$  em (um dado lado da reta)  $l'$ , tal que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes.
- Se um segmento  $\overline{A'B'}$  e um outro segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$  então os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si.
- Sobre uma reta  $l$ , sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos da mesma que, exceto por  $B$ , não tem pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta  $l'$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$ , não têm pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ , então  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ .
- Se  $\angle ABC$  é um ângulo e se  $\overrightarrow{B'C'}$  é um raio, então existe exatamente um raio  $\overrightarrow{A'B'}$  em cada lado de  $\overrightarrow{B'C'}$  tal que  $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$ . Além disto, cada ângulo é congruente a si mesmo.
- Se para dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  as congruências  $\overline{AB} \cong \overline{A'C'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'B'}$  e  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  são válidas, então a congruência  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  é satisfeita.

#### V. Axioma das paralelas

- Seja  $l$  uma reta e  $A$  um ponto não em  $l$ . Então existe apenas uma reta no plano que passa por  $A$  e não intersesta  $l$ .

#### VI. Axiomas da Continuidade

- Axioma de Arquimedes: Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  cópias de  $\overline{CD}$  construídas contiguamente de  $A$  ao longo do raio  $\overrightarrow{AB}$  passará além do ponto  $B$ .

#### VII. Axioma da Completude

- Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas), é impossível.

## 2.2 Modelo para a Geometria Euclidiana: o Plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$

Nessa seção, apresentaremos alguns dos principais fatos e conceitos que fazem o conjunto  $\mathbb{R}^2$  ser um modelo para a Geometria Euclidiana de dimensão 2. Assim, chamaremos o conjunto  $\mathbb{R}^2$  de plano euclidiano e seus elementos de pontos euclidianos. Uma reta em  $\mathbb{R}^2$  será representada pela notação  $l_\eta(p)$ , onde  $p$  e  $\eta$  são vetores de  $\mathbb{R}^2$  satisfazendo a relação

$$l_\eta(p) : \langle v - p, \eta \rangle = 0, \forall v \in l_\eta(p).$$

Observemos que, se for considerado um vetor  $\lambda\eta$ , múltiplo de  $\eta$ , com  $\lambda \neq 0$ , teremos  $l_{\lambda\eta}(p) = l_\eta(p)$  e que  $p \in l_{\lambda\eta}(p)$ , pois  $\langle p - p, \eta \rangle = \langle 0, \eta \rangle = 0$ . Dizemos que  $\eta$  é o *vetor normal a reta*  $l_{\lambda\eta}(p)$ .

No caso particular das retas que passam pela origem, podemos simplesmente escrever a equação homogênea

$$l_\eta : \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 = 0, \quad \text{onde } \eta = (\eta_1, \eta_2), v = (v_1, v_2).$$

Convém destacar que esta mesma denominação foi feita para um subespaço vetorial, portanto, a reta  $l_\eta$  é um subespaço vetorial próprio de  $\mathbb{R}^2$  com dimensão igual a 1.

Com os termos fixados acima, podemos verificar que o grupo de axiomas de incidência é satisfeito em  $\mathbb{R}^2$ .

Começaremos mostrando que, *para cada dois euclidianos pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Prova. Dados  $p = (p_1, p_2)$  e  $q = (q_1, q_2)$  dois pontos distintos de  $\mathbb{R}^2$ , provaremos, inicialmente, que existe uma reta de  $\mathbb{R}^2$ ,  $l_\eta$ , que os contém. Para isso, consideremos os vetores não nulos,  $q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$  e  $\eta = (-q_2 + p_2, q_1 - p_1)$  e a reta  $l_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v - p, \eta \rangle = 0\}$ .

Temos que  $p$  e  $q$  são pontos de  $l_\eta(p)$ , pois,  $\langle p - p, \eta \rangle = 0$  e

$$\begin{aligned} \langle q - p, \eta \rangle &= \langle (q_1 - p_1, q_2 - p_2), (-q_2 + p_2, q_1 - p_1) \rangle \\ &= -q_1 q_2 + p_2 q_1 + p_1 q_2 - p_1 p_2 + q_1 q_2 - p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_1 p_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, para provarmos que  $l_\eta(p)$  é a única reta que contém  $p$  e  $q$ , suporemos que existe outra reta  $l_\nu(p)$  que os contém, ou seja,  $\{p, q\} \subset l_\eta(p) \cap l_\nu(p)$ . Neste caso,  $\eta$  e  $\nu$  não são múltiplos, pois, se fossem múltiplos, teríamos  $l_\eta = l_\nu$ . Portanto,  $\eta$  e  $\nu$  são LI e  $\det[\eta \nu] \neq 0$ , onde  $[\eta \nu]$  representa a matriz  $2 \times 2$  cujas colunas são os vetores normais às retas.

Escrevendo  $v = (v_1, v_2)$ , as equações das duas retas formam o sistema,

$$\begin{cases} \langle v - p, \eta \rangle = 0, \\ \langle v - p, \nu \rangle = 0. \end{cases}$$

Como  $\{p, q\} \subset l_\eta(p) \cap l_\nu(p)$ , então  $p$  e  $q$  são soluções desse sistema. Mas, por outro lado, como  $\det[\eta \nu] \neq 0$ , o sistema tem apenas uma solução, o que vem a ser uma contradição. Concluimos assim, que  $l_\eta(p)$  é a única reta contendo  $p$  e  $q$ . ■

O segundo axioma de incidência diz que *toda reta contém pelo menos dois pontos euclidianos*.

Prova. Consideremos a reta  $l_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v - p, \eta \rangle = 0\}$  e seja  $\{\eta, \xi\}$ , base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$ , onde  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  e  $\xi = (-\eta_2, \eta_1)$ .

Temos que o ponto  $q = p + c\xi$ ,  $c \in \mathbb{R}$  é um ponto de  $\mathbb{R}^2$  diferente de zero e, como  $\langle q - p, \eta \rangle = \langle p + c\xi - p, \eta \rangle = c \langle \xi, \eta \rangle = 0$ , podemos afirmar que  $q \in l_\eta(p)$  e portanto, toda reta de  $\mathbb{R}^2$  contém pelo menos dois pontos. ■

Pelo terceiro axioma de incidência, *existem pelo menos três pontos euclidianos que não estão numa mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano*.

Prova. Consideremos a reta  $l_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v - p, \eta \rangle = 0\}$  e o ponto  $q = p - c\xi$ , com  $\xi = (-\eta_2, \eta_1)$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

Temos que

$$\langle v - q, \eta \rangle = \langle v - (p + c\xi), \eta \rangle = \langle v - p, \eta \rangle - c \langle \xi, \eta \rangle = 0,$$

logo  $q \in l_\eta(p)$ .

Seja  $x = p + c\eta$ . Temos que  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $\langle x - p, \eta \rangle = \langle p + c\eta - p, \eta \rangle = c \langle \eta, \eta \rangle \neq 0$ , ou seja,  $x \notin l_\eta(p)$  e, como  $l_\eta(p)$  é a única reta que contém  $p$  e  $q$ , podemos afirmar que  $p, q$  e  $x$  não pertencem à mesma reta e todos pertencem ao plano  $\mathbb{R}^2$ .

Para que os axiomas de ordem sejam demonstrados, é necessário que façamos algumas definições preliminares.

Fazendo com  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ , Seja  $f$  a função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow l_\eta(p); f(t) = p + t\eta^\perp,$$

onde  $\eta^\perp = (-\eta_2, \eta_1)$ . Tal função  $f$  é uma função biunívoca.

Utilizando tal  $f$ , estabelecemos a noção de *está entre* na Geometria Euclidiana. Assim, diremos que  $p = f(t_1)$  *está entre*  $n = f(t_0)$  e  $q = f(t_2)$ , se, e somente se,  $t_0 < t_1 < t_2$ . Essa definição não depende do vetor normal, nem do ponto  $p$ .

Seja  $l_\eta(p)$  uma reta de  $\mathbb{R}^2$  e sejam  $A = f(t_1)$  e  $B = f(t_2)$  dois pontos de  $l_\eta(p)$ , com  $t_1 < t_2$ . Chamaremos de *segmento*  $AB$  ao conjunto

$$\overline{AB} = \{f(t) \in l_\eta(t); t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

O primeiro axioma de ordem estabelece que, *se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então os três pontos pertencem à mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$ .*

Prova. Dados  $A$  e  $C$  dois pontos de  $\mathbb{R}^2$ , então existe uma única reta  $l_\eta$  que os contém. Consideremos a função  $f$  como definida acima. Se o ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então

$$\exists t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1 < t_2 \text{ tais que } f(t_0) = A, f(t_1) = B, f(t_2) = C.$$

Então, por definição,  $B$  também pertence a  $l_\eta(p)$  e os três pontos pertencem à mesma reta. ■

Consideremos agora o vetor  $-\eta^\perp$  e a função  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow l_\eta(p)$ ,  $\bar{f}(t) = p + t(-\eta^\perp)$

Temos que  $\bar{f}(t) = p + t(-\eta^\perp) = p - t(\eta^\perp) = f(-t)$ . Então, as imagens de  $-t_0$ ,  $-t_1$  e  $-t_2$ , pela função  $\bar{f}$ , satisfazem

$$\begin{aligned} \bar{f}(-t_0) &= p - t_0(-\eta^\perp) = p + t_0\eta^\perp = f(t_0) = A; \\ \bar{f}(-t_1) &= p - t_1(-\eta^\perp) = p + t_1\eta^\perp = f(t_1) = B; \\ \bar{f}(-t_2) &= p - t_2(-\eta^\perp) = p + t_2\eta^\perp = f(t_2) = C. \end{aligned}$$

Agora, como  $t_0 < t_1 < t_2$ , temos  $-t_2 < -t_1 < -t_0$ , e daí podemos afirmar que  $\bar{f}(-t_1)$  está entre  $\bar{f}(-t_2)$  e  $\bar{f}(-t_0)$ , ou seja,  $B$  está entre  $C$  e  $A$ . ■

Provaremos que, *para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente ao segmento  $\overline{AC}$ , tal que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ .*

Prova. Seja  $l_\eta(p)$  a reta passando por  $A$  e  $C$ . Como  $A$  e  $C$  são distintos, então  $A = f(t_0)$  e  $C = f(t_2)$ , com  $t_0, t_2 \in \mathbb{R}$  distintos.

Seja  $t_1 \in \mathbb{R}$ , com  $t_0 < t_1 < t_2$  e seja  $B = f(t_1)$ .

Como  $\overline{AC} = \{f(t) \in l_\eta(p); t \in [t_0, t_2]\}$ , temos que  $B \in \overline{AC}$ , e além disso,  $B$  está entre  $A$  e  $C$ . ■

O terceiro axioma de ordem afirma que, *se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois*

Prova. Sejam  $A = f(t_0)$ ,  $B = f(t_1)$  e  $C = f(t_2)$ , três pontos distintos de uma reta  $l_\eta(p)$ , onde  $f(t) = p + t\eta$  com  $t \in \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , ou seja, que  $t_0 < t_1 < t_2$ . Se supormos que  $A$  está entre  $B$  e  $C$ , teremos  $t_1 < t_0 < t_2$  e, conseqüentemente, é válido que  $t_0 + t_1 < t_1 + t_0 < t_1 + t_2$ , o que é um absurdo, pois  $t_0 + t_1 = t_1 + t_0$ . Analogamente, mostramos que não é possível termos  $B$  entre  $A$  e  $C$  e  $C$  entre  $A$  e  $B$ .

III.4. *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se  $l$  intersecta o segmento  $\overline{AB}$ , ela também intersecta o segmento  $\overline{AC}$  ou o segmento  $\overline{BC}$ .*

Para provarmos os axiomas de congruência, será necessário definirmos congruência entre segmentos e também ângulo e congruência entre ângulos.

Dizemos que *dois segmentos de reta são congruentes* se existe uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  que aplica biunivocamente um segmento no outro.

Provaremos, agora, os três primeiros axiomas de congruência.

É verdade que *se  $A$  e  $B$  são dois pontos de uma mesma reta  $l$  do plano euclidiano e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então, é possível encontrar um ponto  $B'$  em  $l'$  tal que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes.*

Prova. De fato, a validade desse axioma no conjunto  $\mathbb{R}^2$  é consequência da existência de uma isometria de  $\mathbb{R}^2$ , composição de uma translação e de uma rotação (ver Teorema 1.0.6), que leva os pontos do segmento  $\overline{AB}$  de  $l$  nos pontos de um segmento  $\overline{A'B'}$  de  $l'$ , de modo que  $A$  é levado em  $A'$ . ■

O segundo axioma de congruência afirma: *se o segmento  $\overline{A'B'}$  e um outro segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$ , então  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si.*

Prova. Se  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes a  $\overline{AB}$ , então existem isometrias  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que aplicam biunivocamente  $\overline{A'B'}$  em  $\overline{AB}$  e  $\overline{A''B''}$  em  $\overline{AB}$ , respectivamente.

Consideremos  $g^{-1} \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Essa aplicação é uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  que leva, biunivocamente,  $\overline{A'B'}$  em  $\overline{A''B''}$  e, assim, tais segmentos são congruentes. ■

Segundo o terceiro axioma de congruência, temos que *se considerarmos uma reta  $l$  de  $\mathbb{R}^2$  e dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  de  $l$ , tais que, exceto por  $B$ , não possuem pontos em comum e uma outra reta  $l'$ , sendo  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos de  $l'$ , tais que, exceto por  $B'$  não tem pontos em comum, então, se  $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$ , então  $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$ .*



Prova. Se  $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$ , então existem isometrias biunívocas  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$  e  $g(\overline{BC}) = \overline{B'C'}$ .

Seja  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\alpha|_{\overline{AB}} = f, \alpha|_{\overline{BC}-B} = g \text{ e } \alpha|_{\mathbb{R}^2-\overline{AC}} = id.$$

Temos que  $\alpha$  é isometria de  $\mathbb{R}^2$ , com  $\alpha(\overline{AC}) = f(\overline{AB}) \cup g(\overline{BC} - \{B\}) = \overline{A'C'}$  e daí,  $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$ . ■

Para definirmos ângulos, precisamos estabelecer o conceito de orientação. Assim, dada uma base ordenada  $\beta = \{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , consideraremos uma matriz,  $2 \times 2$ ,  $[M] = [v_1 \ v_2]$ , cujas colunas são as coordenadas dos vetores de  $\beta$ . Como consequência de  $\beta$ , o determinante da matriz associada  $[M]$  é não-nulo. Dizemos que  $\beta$  é uma base positiva, se  $\det[M] > 0$ . Se  $\det[M] < 0$ , diz-se que  $\beta$  é uma base ordenada negativa.

Consideremos o conjunto  $\underline{O}$  formado por todas as bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$ . Podemos afirmar, portanto, que  $\underline{O} = \underline{O}^+ \cap \underline{O}^-$ , onde os conjuntos  $\underline{O}^+$  e  $\underline{O}^-$  são não-vazios, disjuntos, cujos elementos são, respectivamente, todas as bases ordenadas positivas e negativas de  $\mathbb{R}^2$ . Quando escolhermos o par  $(\mathbb{R}^2, \underline{O}^+)$ , dizemos que  $\mathbb{R}^2$  está orientado positivamente.

Seja  $l_\eta(p)$  uma reta em  $\mathbb{R}^2$  e consideremos o conjunto  $\underline{O}_\eta$  e consideremos o conjunto  $\underline{O}_\eta$  constituído por todas as bases ordenadas  $\beta_{\lambda, \eta, \nu}$  de  $\mathbb{R}^2$  da forma

$$\beta_{\lambda, \eta, \nu} = \{\lambda, \eta, \nu\},$$

onde  $\lambda > 0$  e  $u \in l_\eta(p)$ . O conjunto  $\underline{O}_\eta$  pode ser decomposto nos dois seguintes conjuntos disjuntos, não-vazios

$$\underline{O}_\eta^+ = \underline{O}_\eta \cup \underline{O}^+ \text{ e } \underline{O}_\eta^- = \underline{O}_\eta \cup \underline{O}^-.$$

Chamamos de *reta orientada positivamente* o par  $(l_\eta(p), \underline{O}_\eta^+)$ .

Ao menos que seja dito o contrário, consideraremos que as retas são retas orientadas positivamente e, por simplicidade, continuaremos a usar a notação  $l_\eta(p)$  em lugar de  $(l_\eta(p), \underline{O}_\eta^+)$ .

Definimos o *semi-plano positivo* determinado pela reta orientada  $l_\eta(p)$ , como sendo o conjunto

$$\mathbb{H}_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v - p, \eta \rangle \geq 0\}.$$

O conjunto obtido pela interseção entre dois semi-planos positivos  $\mathbb{H}_\eta(p) \cap \mathbb{H}_\nu(q)$  é chamado *ângulo*.

Agora, utilizando as definições acima, dizemos que *dois ângulos são congruentes* se existe uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  que aplica biunivocamente um ângulo no outro. A medida do ângulo  $\mathbb{H}_\eta(p) \cap \mathbb{H}_\nu(q)$  é, por definição, o ângulo entre os vetores  $\eta$  e  $-\nu$ , denotado por  $\theta(\eta, -\nu)$ .

Dados uma reta  $l_\eta(p)$  e um ponto  $q \in \mathbb{R}^2$ , que não pertence a  $l_\eta(p)$ , então temos que a reta  $l_\eta(q)$  é uma reta paralela à primeira reta e é a única reta do plano Euclidiano que satisfaz isso e que incide em  $q$ . A prova dessa afirmação, e, conseqüentemente, do Axioma das Paralelas segue do fato do sistema de equações lineares formado pelas equações que definem as duas retas não ter solução.

Assim, concluímos a apresentação do modelo para a Geometria Euclidiana.

# Capítulo 3

## Geometria Elíptica

A chamada Geometria Elíptica, ou Esférica, é uma geometria onde, dada uma reta  $l$  e um ponto  $P$  não pertencente a essa reta, não existe reta paralela a  $l$  passando por  $P$ . Ou seja, nessa geometria o quinto postulado de Euclides não vale.

Neste capítulo, apresentaremos os Axiomas da Geometria Elíptica e estudaremos o seu caso bidimensional apresentando a superfície esférica  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  como modelo. Chamaremos  $\mathbb{S}^2$  de *plano elíptico*. Usaremos esse caso no nosso estudo da Geometria Projetiva, feito no próximo capítulo. A principal referência utilizada ao longo desse capítulo foi [2].

### 3.1 Axiomas da Geometria Elíptica

Nessa geometria, são considerados todos os grupos de axiomas de Hilbert, exceto os de ordem. Além disso, nega-se a existência do paralelismo, como foi dito acima; e não é exigida a unicidade da interseção de retas.

Assim, temos

#### I. Termos Indefinidos

- Ponto, Reta, Plano, Pertence e Congruência.

#### II. Axiomas de Incidência

- Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
- Toda reta contém pelo menos dois pontos.
- Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

#### III. Axiomas de Congruência

#### IV. Axioma das paralelas

- Seja  $r$  uma reta e  $A$  um ponto que não pertença a  $r$ . Então toda reta que passa por  $A$  intersecta  $r$ .

## VI. Axiomas da Continuidade

- Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

## 3.2 Modelo para a Geometria Elíptica: o Plano Elíptico $\mathbb{S}^2$

Nesta seção, mostraremos os principais resultados que fazem da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  um modelo para a Geometria Elíptica de dimensão 2.

O primeiro fato que precisamos destacar é que, nesse modelo, as *retas elípticas* serão os grandes círculos de  $\mathbb{S}^2$ , ou seja, os subconjuntos  $r_\eta \subset \mathbb{S}^2$  tal que  $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ , onde  $\Gamma_\eta$  é o plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem e tem vetor normal  $\eta$ .

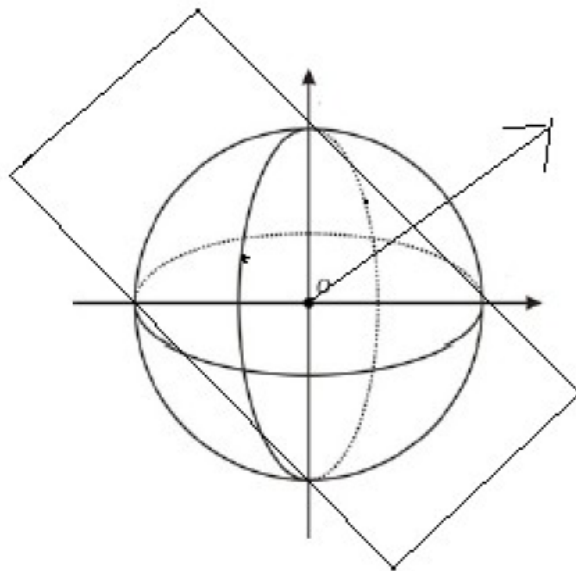


Figura 3.1: Reta Elíptica

Os elementos das retas elípticas serão os chamados *pontos elípticos*. E assim, fica entendido o conceito de um ponto pertencer a uma reta, ou *incidência*.

Observamos que, de fato, dados três pontos distintos de uma reta elíptica, não é possível estabelecer uma ordem entre eles; quem vem primeiro ou por último? Sempre

podemos dizer que cada um deles está entre os outros dois. Assim, fica evidente a razão dos Axiomas de Ordem não valerem nesse caso.

Antes de provarmos o primeiro axioma de incidência, será estabelecido um critério para determinar se uma reta elíptica incide sobre um ponto. É válido o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.1** (Condição de Incidência). *Uma reta elíptica  $r_\eta$  incide no ponto  $v \in \mathbb{S}^2$  se, e somente se,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ . Essa condição não depende da indexação da reta elíptica.*

Prova. Sejam  $r_\eta = \Gamma \cap \mathbb{S}^2$  uma reta elíptica e  $v \in r_\eta$  um ponto elítico. Como  $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ , temos que  $v \in r_\eta$  se, e somente se,  $v \in \Gamma_\eta$ .

Mas,  $v \in \Gamma_\eta \subset \mathbb{R}^3$ , significa que  $\langle v, \eta \rangle = 0$ . O que prova a afirmação.

Observemos que essa condição não depende do índice  $\eta$ , pois, se a reta elíptica for indexada por  $\lambda\eta$ , com  $\lambda \geq 0$ , teremos o mesmo resultado. ■

Verifiquemos, então, o Primeiro Axioma de Incidência, ou seja, provaremos que *dois pontos distintos determinam uma reta*.

De fato, dados  $u, v$  dois pontos distintos do Plano Elíptico  $\mathbb{S}^2$ , temos que o produto vetorial  $u \times v$  é não-nulo se, e somente se,  $u$  e  $v$  não são linearmente dependentes, ou seja, se  $u \neq -v$ .

Suponhamos que  $u \neq -v$  e consideremos o plano  $\Gamma_\eta$ , onde  $\eta = u \times v$ , e a correspondente reta elíptica  $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ . Pela Condição de Incidência, Proposição 3.2.1, temos  $\langle u, \eta \rangle = 0 = \langle v, \eta \rangle$ . Logo, os pontos  $u$  e  $v$  pertencem à reta  $r_\eta$ .

Convém observar ainda que a reta é única pois só existe um plano contendo  $u$ ,  $v$  e passando pela origem de  $\mathbb{R}^3$ . Concluimos assim a verificação do primeiro axioma da incidência.

Consideremos o caso em que  $u = -v$ . Seja  $\eta \in \mathbb{R}^3$  um vetor, tal que  $\langle u, \eta \rangle = 0$ . Consequentemente, também é válido que  $\langle v, \eta \rangle = 0$ . Portanto, pela Condição de Incidência, temos  $u, v \in r_\eta$ .

Observamos que, neste último caso,  $u$  e  $v$  não determinam uma única reta, pois existem infinitos planos de  $\mathbb{R}^3$  contendo os pontos  $u, v = -u$  e a origem deste espaço, desde que os três pontos são colineares em  $\mathbb{R}^3$ . ■

A verificação dos *Segundo* e *Terceiro Axiomas de Incidência* é imediata, considerando que  $\mathbb{S}^2$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ .

Agora, vamos estabelecer os principais conceitos que aparecem no grupo dos Axiomas de Congruência.

Para definirmos *congruência* no plano elíptico, utilizaremos o conceito de *isometria*, que passaremos a tratar agora.

Sejam  $u, v \in \mathbb{S}^2$  dois pontos elípticos e seja  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$  a medida do ângulo entre os vetores unitários  $u$  e  $v$  de  $\mathbb{R}^3$ . Como  $u$  e  $v$  são unitários, temos que

$$\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle \quad \text{e} \quad \sin \theta(u, v) = \|u \times v\|.$$

Definimos *distância elíptica* como sendo a aplicação

$$d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(u, v) = \theta(u, v).$$

O próximo resultado garante que a distância elíptica, definida acima, é uma função distância. Ou seja,

**Proposição 3.2.2.** *A distância elíptica  $d$ , satisfaz*

- $d(u, v) \geq 0$  e  $d(u, v) = 0$  se, e só se,  $u = v$ ; (*positiva definida*)
- $d(u, v) = d(v, u)$ ; (*simetria*)
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ ; (*desigualdade triangular*).

Ou seja,  $d$  é uma função distância em  $\mathbb{S}^2$ .

Prova. Mostraremos que a função  $d$  satisfaz a desigualdade triangular.

Sejam  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ . Pela definição de distância elíptica, temos que

$$\theta(u, v) = d(u, v), \quad \theta(u, w) = d(v, w), \quad \theta(u, w) = d(u, w).$$

Devemos mostrar que

$$\theta(u, w) = \theta(u, v) + \theta(v, w).$$

Suponhamos, inicialmente, que  $\pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$ . Nesse caso, a afirmação segue da definição de  $\theta$ , pois  $\theta(u, w) \leq \pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$ .

Suponhamos, agora que  $\theta(u, v) + \theta(v, w) \leq \pi$ . Observando que a função  $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é decrescente, provar a desigualdade triangular é equivalente a provar que

$$\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) \leq \cos \theta(u, w).$$

Como os vetores são unitários, temos

$$\begin{aligned} \cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) &= \cos \theta(u, v) \cos \theta(v, w) - \sin \theta(u, v) \sin \theta(v, w) \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \cdot \|v \times w\|. \end{aligned}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.0.2) garante que

$$-\langle u \times v, v \times w \rangle \geq -\|u \times v\| \|v \times w\|,$$

e a Fórmula de Lagrange, (1.0.3), implica que

$$\langle u \times v, v \times w \rangle = \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, v \rangle .$$

Agora, como,  $\|v\| = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) &\leq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v, v \times w \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - (\langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, v \rangle) \\ &= \langle u, w \rangle \\ &= \cos \theta(u, w), \end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

Podemos agora considerar a noção de isometria no plano elíptico. Assim, dizemos que uma aplicação  $U : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma *isometria elíptica* se  $U$  preserva a distância do plano elíptico, ou seja, se

$$\theta(U(u), U(v)) = \theta(u, v), \forall u, v \in \mathbb{S}^2 .$$

O próximo resultado, devido a Leonhard Euler, classifica as isometrias elípticas.

**Teorema 3.2.3** (Classificação das isometrias elípticas). *Uma função  $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma isometria elíptica se, e somente se,  $U_0$  for a restrição de um operador ortogonal  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

Estabelecemos a definição de congruênciaa em  $\mathbb{S}^2$  dizendo que *dois segmentos elípticos são congruentes* se existe uma isometria elíptica que aplica biunivocamente um segmento no outro.

Observamos que, como os axiomas de ordem não são válidos, para falarmos de *segmento de reta elíptico*, cujos extremos são os pontos  $A$  e  $B$ , precisaremos deixar claro qual o interior do segmento, uma vez que os pontos  $A$  e  $B$  distintos definem dois segmentos no grande círculo que os contém. Além disso, estando clara a definição de segmento elíptico e sendo estabelecida a definição de congruência nessa geometria, os axiomas que se referem a congruência poderão ser demonstrados, mas a expressão "um dado lado da reta", que aparece no primeiro desses axiomas, não terá sentido sem a noção de ordem.

Denota-se por  $\underline{Q}$  o conjunto de todas as bases ordenadas de  $\mathbb{R}^3$ . Podemos escrever  $\underline{Q}$  como a união de dois subconjuntos distintos e não vazios, denotados por  $\underline{Q}^+$  e  $\underline{Q}^-$ , onde  $\underline{Q}^+$  é o conjunto formado por todas as bases ordenadas positivas. Esses dois conjuntos são *ditos orientações do  $\mathbb{R}^3$* . Orientar positivamente o  $\mathbb{R}^3$  é escolher o par ordenado  $(\mathbb{R}^3, \underline{Q}^+)$ .

Seja  $\underline{Q}_\eta$  o conjunto constituído por todas as bases ordenadas  $\beta_{\lambda\eta, u, v_1}$ , onde  $\lambda > 0$  e  $u \in r_\eta$ . Chamamos de *reta elíptica orientada positivamente* ao par ordenado

$$(r_\eta, \underline{Q}_\eta^+), \text{ onde } \underline{Q}_\eta^+ = \underline{Q}_\eta \cup \underline{Q}^+ .$$

Consideremos uma reta elíptica orientada positivamente,  $r_\eta$ . O *semiplano elíptico positivo*  $\mathbb{H}_\eta$ , definido por  $r_\eta$  é o conjunto constituído pelos pontos  $u \in \mathbb{S}^2$  tais que  $\langle u, \eta \rangle \geq 0$ . O *semiplano elíptico negativo* é o conjunto constituído pelos pontos  $u \in \mathbb{S}^2$  tais que  $\langle u, \eta \rangle \leq 0$ .

Nesse novo contexto, a noção de ângulo será substituído pelo o que chamaremos de lua. Assim, uma *ângulo*, ou *lua*, no plano elíptico  $\mathbb{S}^2$ , determinado por duas retas elípticas distintas e orientadas positivamente, digamos  $r_\eta$  e  $r_\nu$ , é o conjunto  $\mathbb{L}_{\eta\nu} = \mathbb{H}_\eta \cup \mathbb{H}_\nu$ .

Os vértices da lua  $\mathbb{L}_{\eta\nu}$  são os pontos

$$u = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|}(\eta \times \nu) \quad \text{e} \quad -u = \frac{-1}{\|\eta \times \nu\|}(\eta \times \nu).$$

A *medida de um ângulo*, ou a *medida de uma lua*  $\mathbb{L}_{\eta\nu}$  é definida como sendo o ângulo entre  $\eta$  e  $-\nu$ , ou seja,  $\theta(\eta, -\nu)$ .

Dois *luas ou ângulos são ditos congruentes*, se existe uma isometria elíptica que aplica biunivocamente uma lua na outra.

Para finalizar a lista de definições relativas aos axiomas de congruência, apresentamos a definição de triângulo elítico, bem como, de congruência entre tais triângulos.

Um triângulo elítico será determinado por três pontos elípticos  $u, v$  e  $w$  tais que o conjunto ordenado  $u, v, w$  é uma base ordenada positiva de  $\mathbb{R}^3$ , ou equivalentemente,  $\det[u, v, w] \geq 0$ . Tais pontos serão chamados de *vértices do triângulo elítico*. Os lados do triângulo são arcos das retas elípticas  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$ , orientadas positivamente, onde

$$\eta = u \times v, \quad \mu = v \times w \quad \text{e} \quad \nu = w \times u$$

Assim, dados  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ , dizemos que um subconjunto  $\Delta_{uvw} \subset \mathbb{S}^2$  é um triângulo elítico quando são válidas as seguintes condições:

- $u, v, w$  é uma base positiva de  $\mathbb{R}^3$ ;
- $\Delta_{uvw} = H_\eta \cap H_\mu \cap H_\nu$ .

Finalmente, dois *triângulos elípticos são ditos congruentes* se existe uma isometria elíptica que aplica biunivocamente um triângulo sobre o outro.

O Axioma das Paralelas na Geometria Elíptica afirma que sempre ocorre interseção entre quaisquer duas retas elípticas. Provaremos que tal interseção é formada por dois pontos distintos. Daí, também o uso da denominação *Geometria Elíptica Dupla*, para essa geometria.



**Proposição 3.2.4** (Concorrência de duas retas elípticas). *Duas retas elípticas distintas,  $r_\eta$  e  $r_\nu$ , sempre se intersectam. Mais ainda, a interseção ocorre nos pontos*

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|}(\eta \times \nu) \quad e \quad u_2 = \frac{-1}{\|\eta \times \nu\|}(\eta \times \nu).$$

*Esses pontos não dependem das indexações das retas elípticas.*

Prova. Se  $r_\eta$  e  $r_\nu$  são retas elípticas, então  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$  e  $r_\nu = \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2$  e, conseqüentemente, a interseção entre  $r_\eta$  e  $r_\nu$  é o conjunto

$$r_\eta \cap r_\nu = \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2.$$

Como a interseção de dois planos distintos de  $\mathbb{R}^3$ , contendo a origem, é uma reta euclidiana passando pela origem, cujo vetor diretor é paralelo a  $\eta \times \nu$ , temos

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{\lambda(\eta \times \nu); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Assim,

$$r_\eta \cap r_\nu = \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2 = \left\{ \frac{1}{\|\eta \times \nu\|}(\eta \times \nu), \frac{-1}{\|\eta \times \nu\|}(\eta \times \nu) \right\},$$

como afirmado.

Mudando os vetores normais aos planos consideramos, a reta contida na interseção entre elas não muda. Logo, a interseção  $r_\eta \cap r_\nu$  também não muda, ou seja, independe da indexação as retas elípticas. ■

A validade do Axioma de Continuidade segue do fato de existir uma bijeção entre cada grande círculo de  $\mathbb{S}^2$ , menos um ponto, e o círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  menos um ponto e este último está em correspondência biunívoca com a reta real.

# Capítulo 4

## Geometria Projetiva

Quando nos situamos em um trecho muito longo de uma estrada em linha reta notamos que no final as margens se tocam, o que vem a ser uma ilusão de ótica, porém matematicamente pode significar que muito longe existe um ponto de encontro entre as duas margens.

Ao longe também, se um viaduto cruza a estrada anterior, teremos a sensação que este viaduto toca a estrada em um ponto. Este ponto, chamado de *ponto de fuga*, é captado através de uma fotografia, uma pintura, portanto longe da realidade que podemos perceber. Estamos notando então, a possibilidade de que pode existir um tipo de espaço onde quaisquer duas retas se interceptam num único ponto.

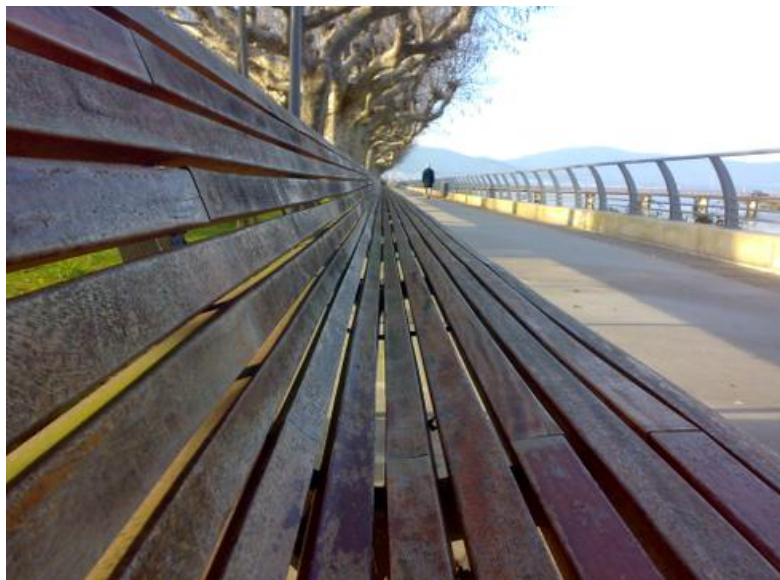


Figura 4.1: Retas que se encontram

Apresentaremos, neste capítulo, um modelo para uma geometria bidimensional, sem retas paralelas, chamada de *Geometria Projetiva* ou *Geometria Elíptica Simples*.

Utilizamos o livro [2], como principal fonte de pesquisa.

## 4.1 Axiomas da Geometria Projetiva

### I. Termos Indefinidos

- Ponto, Reta, Plano e Pertence.

### II. Axiomas de Incidência

### III. Axiomas de Ordem (não existem)

### IV. Axiomas de Congruência (não existem)

### V. Axioma das paralelas

- Seja  $l$  uma reta e  $A$  um ponto que não pertença a  $l$ . Então toda reta que passa por  $A$  intersecta  $l$ .

### VI. Axiomas da Continuidade

- Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

## 4.2 Modelo para a Geometria Projetiva: o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$

Nessa seção, apresentaremos um conjunto onde os axiomas da Geometria Projetiva valem.

Inicialmente, consideremos o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  subtraído do seu vetor nulo  $\vec{o}$ , ou seja,  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$  que será chamado de  $\mathbb{R}^3$  *perfurado na origem* ou, simplesmente,  $\mathbb{R}^3$  *perfurado*.

Diremos que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3 - \{o\}$  é um *plano em*  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , se ele é a interseção do plano  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  com  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ . Logo, se  $\Gamma$  contiver a origem, ele será um plano perfurado. De modo análogo, definimos uma *reta perfurada em*  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , ou seja,  $l \subset \mathbb{R}^3 - \{o\}$  é chamada *reta em*  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , se  $l = \mathbb{R}^3 \cap (\mathbb{R}^3 - \{o\})$ . Assim,  $l$  pode ou não ser perfurada, caso incida ou não na origem.

Agora, no conjunto  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , o  $\mathbb{R}^3$  *perfurado*, consideraremos a relação de equivalência definida por

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \text{ tal que } v = \lambda w$$

e, consideremos o conjunto quociente dessa relação de equivalência, ou seja,

$$\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 - \{o\}) / \sim .$$

Destacamos o fato de que o  $\mathbb{R}^3$  *perfurado* pode ser descrito como o conjunto dos vetores não-nulos de  $\mathbb{R}^3$  e, além disso, que  $\mathbb{RP}^2$  pode ser descrito como o conjunto das direções de  $\mathbb{R}^3$ .

O conjunto quociente  $\mathbb{RP}^2$  será chamado de *Plano Projetivo* e cada um dos seus elementos será um *ponto projetivo*. Um ponto projetivo, que é uma classe de equivalência, será denotado por uma letra minúscula com uma barra sobreposta, por exemplo  $\bar{v}$ , onde  $v$  é um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^3$ .

Como consequência da definição da relação de equivalência  $\sim$  feita acima, podemos interpretar um ponto projetivo  $\bar{v}$ , que é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , como o conjunto dos múltiplos de  $v$ , ou seja,

$$\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\} .$$

Portanto, o ponto projetivo  $\bar{v}$  é uma reta perfurada em  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ .

A aplicação quociente  $\Psi$  definida por

$$\Psi : \mathbb{R}^3 - \{o\} \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad \Psi(v) = \bar{v},$$

será chamada *projeção*.

Se  $v = (v_1, v_2, v_3)$  é um ponto de  $\mathbb{R}^3 - \{o\}$ , então, por simplicidade, a sua imagem pela aplicação quociente  $\Psi$ , isto é, a classe de equivalência associada a  $v$ , representada por  $\bar{v}$ , será denotado por  $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$ . O terno  $(v_1 : v_2 : v_3)$  recebe o nome de *coordenadas homogêneas de  $\bar{v}$* .

Consideraremos agora, a restrição da função projeção  $\Psi$  ao plano elíptico  $\mathbb{S}^2$ , que denotaremos por  $\Psi_0$ , ou seja,  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , e, usando-a como ferramenta, estabeleceremos alguns fatos sobre o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$ .

Mostraremos que a aplicação  $\Psi_0$  é sobrejetiva. Assim, sendo  $\bar{v}$  um ponto projetivo temos que a reta perfurada  $\Psi^{-1}(\bar{v}) = \{\lambda v; \lambda \neq 0\}$  intersesta o plano elíptico no pontos

$$u = \frac{1}{\|v\|}v \quad \text{e} \quad -u = -\frac{1}{\|v\|}v,$$

e, tais pontos, não dependem do representante da classe de equivalência  $\bar{v}$ .

Como  $u \in \bar{v}$ , se calcularmos  $\Psi_0(u)$  e  $\Psi_0(-u)$  obteremos o mesmo vetor  $\bar{v}$ , o que significa que a restrição acima é sobrejetiva.

Na verdade, o argumento acima mostra mais. Provamos, na verdade, que o conjunto  $\Psi_0^{-1}(\bar{v})$  é constituído por dois pontos antípodas do plano elíptico, isto é,  $\Psi_0^{-1}(\bar{v})$  é formado por um par de pontos de  $\mathbb{S}^2$  que são simétricos em relação à origem. Por esse fato, em geral, usa-se a expressão *recobrimento duplo* para denotar a aplicação  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Podemos afirmar, pelo visto até aqui, que qualquer ponto  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  pode ser representado por um ponto  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$ , onde  $u_3 \geq 0$ . Consequentemente, se considerarmos o hemisfério norte da esfera unitária, que denotaremos por

$$\mathbb{H}_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle \geq 0\},$$

temos que a restrição da função projeção  $\Psi_0 : \mathbb{H}_{e_3} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  é sobrejetiva.

Assim, podem ocorrer duas situações para a pré-imagem de um ponto projetivo  $\bar{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$  pela aplicação  $\Psi_0$ . São elas:

- $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u\}$ , se  $u_3 > 0$  ou
- $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u, -u\}$ , se  $u_3 = 0$ .

A imagem da reta elíptica  $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$ , pela projeção  $\Psi_0$ , é chamada de conjunto de *pontos ideais*, que denotamos  $I_\infty$ . Observamos que a projeção  $\Psi_0$  aplica o conjunto  $\mathbb{H}_{e_3} \setminus r_{e_3}$  biunivocamente sobre  $\mathbb{RP}^2 \setminus I_\infty$ .

Definimos *reta projetiva* como sendo um subconjunto de  $\mathbb{RP}^2$  que é a imagem de uma reta elíptica pela projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ . Ou seja, uma reta projetiva, denotada por  $r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2$ , se refere à imagem pela aplicação projeção da reta elíptica  $r_\eta \subset \mathbb{S}^2$ , assim,

$$r_{\bar{\eta}} = \Psi_0(r_\eta).$$

Para provarmos o primeiro axioma de incidência, precisaremos estabelecer um resultado que nos fornece um critério de incidência entre uma reta projetiva e um ponto projetivo. A prova usará o produto interno de  $\mathbb{R}^3$ .

Uma reta projetiva  $r_{\bar{\eta}}$  incide no ponto projetivo  $\bar{v}$ , se e somente,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ . Essa condição não depende dos representantes do ponto projetivo e da indexação.

Prova. Observamos, inicialmente, que afirmar que  $r_{\bar{\eta}}$  incide em  $\bar{v}$  equivale a termos

$$\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left\{ \frac{1}{\|v\|}v, -\frac{1}{\|v\|}v \right\} \subset r_\eta.$$

Mas,  $\left\{ \frac{1}{\|v\|}v, -\frac{1}{\|v\|}v \right\} \subset r_\eta$  ocorre se, e somente se,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ , o que conclui a prova. ■

A validade do primeiro axioma de incidência, que afirma *para cada dois pontos projetivos distintos existe uma única reta projetiva que os contém*, será consequência imediata da próxima Proposição, onde é usada a definição de *plano projetivo dual*, denotado por  $\mathbb{RP}^{2*}$ , que é o conjunto constituído por todas as retas projetivas.

Por dois pontos projetivos distintos  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  incide uma única reta projetiva

$$r_{\bar{\eta}}, \quad \text{com } \bar{\eta} = \overline{v \times w} \in \mathbb{RP}^2.$$

Essa reta não depende dos representantes dos pontos projetivos.

Prova. Consideremos dois pontos distintos  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$ . Os subconjuntos do plano elíptico  $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u - u\}$  e  $\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \{v - v\}$  estão contidos numa única reta elíptica, digamos  $r_\eta \subset \mathbb{S}^2$ , onde  $\bar{\eta} = \overline{u \times v}$ . Assim, os pontos projetivos estão sobre  $\Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}$ . ■

Agora, provaremos que *não existem retas projetivas paralelas*, como afirma o VI Axioma.

Duas retas projetivas distintas,  $r_{\bar{\eta}}$  e  $r_{\bar{\nu}}$  concorrem no ponto

$$\bar{v} = \overline{\eta \times \nu} \in \mathbb{RP}^2.$$

Tal ponto não depende dos representantes das indexações.

Prova. Suponhamos que  $r_\eta$  e  $r_\nu$  projetam-se em  $r_{\bar{\eta}}$  e  $r_{\bar{\nu}}$ , respectivamente. Então,  $\Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\nu}}) = r_\eta \cap r_\nu$ .

Mas, por outro lado, vimos que

$$r_\eta \cap r_\nu = \left\{ \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu, -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \right\}.$$

Portanto, as retas  $r_{\bar{\eta}}$  e  $r_{\bar{\nu}}$  se intersectam na projeção desses dois pontos e as projeções são iguais a  $\overline{\eta \times \nu}$ . ■

Encerraremos esse capítulo, apresentando a identificação que também faz do plano projetivo dual  $\mathbb{RP}^{2*}$  um modelo para a Geometria Projetiva de dimensão 2.

Para isso, definimos, para cada  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ , o seguinte subconjunto  $r_{\bar{v}}^*$  de  $\mathbb{RP}^{2*}$ , chamado de *reta projetiva dual*, utilizando a relação

$$r_{\bar{v}}^* = \{\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^{2*}; \langle \eta, \nu \rangle = 0\}.$$

Agora, a identificação

$$r_{\bar{v}}^* \in \mathbb{RP}^{2*} \longleftrightarrow \bar{v} \in \mathbb{RP}^2$$

faz com que o plano projetivo dual seja  $\mathbb{RP}^2$ .

## Capítulo 5

# A Geometria Projetiva e as Artes na Educação Básica

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar algumas atividades que poderão ser usadas para mostrar aos alunos do Ensino Médio, ou das séries finais do Ensino Fundamental, as principais ideias envolvidas na Geometria Projetiva. São atividades simples e dinâmicas, tais como representar uma figura do espaço tridimensional, ou seja, objetos com três dimensões, no espaço bidimensional, ou seja, em duas dimensões. usando, para isso, técnicas de Perspectiva. Também sugerimos a observação e análise de obras de arte e de projetos de Arquitetura que usam a técnica de Perspectiva, em especial pinturas Renascentistas, para identificação dos principais conceitos envolvidos. De fato, os artistas da Renascença foram os primeiros a utilizar, na prática, elementos de Perspectiva. Apresentamos ainda, cenas de filmes onde a Perspectiva é utilizada para alcançar o objetivo do diretor. Stanley Kubrick é o principal nome entre os diretores que usam essa técnica.

Acreditamos que um primeiro contato com a Geometria Projetiva e, em particular, com as técnicas de Perspectiva, poderá colaborar para que os alunos se familiarizem com a representação das figuras espaciais, isto é, de três dimensões, no plano bidimensional, e assim espera-se que eles tenham mais facilidade em visualizar as situações-problemas que são estudadas na Geometria Euclidiana Espacial e também na Geometria Analítica.

Destacamos, que, em 2008, a Secretaria da Educação do Estado do Paraná incluiu o tema *Geometria Projetiva* entre os conteúdos matemáticos, nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (ver [5]). A partir disso, muitos textos foram escritos com o objetivo de orientar os professores a como realizarem atividades interessantes e, ao mesmo tempo eficientes, de modo que os estudantes tenham um primeiro contato com o assunto. Na bibliografia, citamos alguns dos vários trabalhos que encontram-se disponibilizados na rede, e que foram usados como fonte de pesquisa para a elaboração desse texto. Entre eles [1], [6], [9], [10]. [12].

## 5.1 História da Geometria Projetiva

Embora os gregos tivessem dado ao mundo as primeiras noções das aplicações da teoria da Perspectiva nas artes; como por exemplo, nas representações das grandes tragédias de Sófoles(496-406) através de grandes cenários desenhados e pintados com o objetivo de criar efeitos naturais gerando a ilusão de que o espaço tridimensional era transportado para a cena da peça; a história da Geometria Projetiva tem sua origem na Itália, mais precisamente no século XV, quando o mundo acadêmico sentiu a extraordinária contribuição de pintores da Renascença, entre os quais Leonardo da Vinci, representando nos seus quadros, com duas dimensões, as imagens tridimensionais vistas por nossos olhos em relação a objetos, pessoas e construções.



Figura 5.1: Épido e a Esfinge

O italiano Filippo Brunelleschi, 1377-1446, foi o pioneiro nos estudos das propriedades dos objetos tridimensionais e foi quem redescobriu os princípios da perspectiva linear, que, estudados por gregos e romanos, ficaram esquecidos durante toda a Idade Média.

Brunelleschi foi um dos principais arquitetos da Renascença e foi o responsável pelo projeto da cúpula, Duomo em italiano, da catedral Santa Maria del Fiore, em Florença. Construída em 1434, foi a primeira cúpula de grandes dimensões, erguida na Itália, desde a Antiguidade sobre uma enorme base octogonal.

Aproximadamente em 1420, Masaccio realizou o que é considerado sua obra prima, o afresco “A Santíssima Trindade”, também localizado na Igreja de Santa Maria Novella, Florença, Itália.

Trata-se de um grande mural e foi uma das primeiras pinturas onde as ideias de perspectivas foi utilizada. O efeito foi tão surpreendente que pessoas pensavam que havia



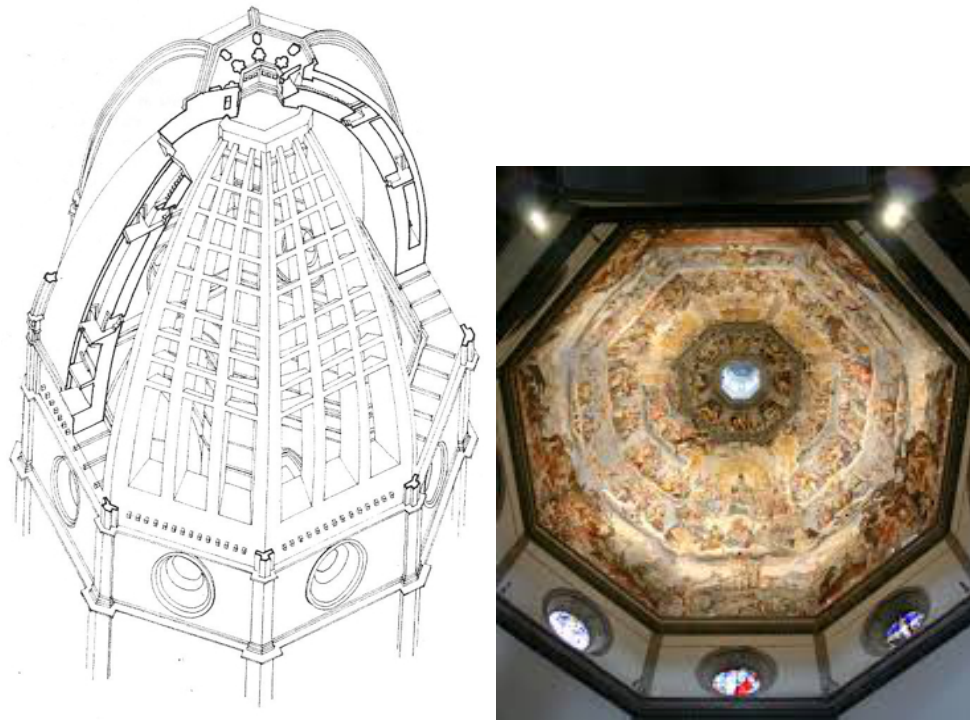


Figura 5.2: Duomo, por Brunelleschi - projeto e vista do interior da igreja

sido aberta uma cavidade na parede, onde havia sido construído um altar.

Masaccio usou as teorias desenvolvidas por Brunelleschi para sugerir profundidade numa superfície plana.

Observa-se na pintura, que a abóbada, as colunas e as pilastras referem-se à arquitetura clássica, tão buscada pelos renascentistas italianos. E, além disso, estão representados: o Deus-Pai, Cristo na Cruz, o Espírito Santo (em forma de pomba), a Virgem Maria, São João, os dois patronos. Deus-Pai encontra-se no plano mais alto, com os braços abertos, sustentando a cruz do Filho nos braços. Entre eles, uma pomba branca com as asas abertas simboliza o Espírito Santo. Em toda a composição só existe um movimento: a Virgem aponta para o Filho crucificado como um pungente gesto, enquanto olha para o observador. São João ergue os olhos para o alto, em direção ao Cristo Crucificado. Os dois patronos da pintura, Gonfaloniere Lenzi e sua esposa, são representados do lado de fora, ambos ajoelhados e com as mãos em postura de oração.

A obra apresenta três planos:

- no superior, a Trindade (Deus-Pai, Deus Filho e o Espírito Santo);
- no plano médio encontra-se a Virgem e São João;
- no plano inferior estão os doadores da obra, membros da Família Lenzi.

Na base da composição encontra-se um sarcófago, onde foi pintado um esqueleto que representa todos os seres humanos, com uma inscrição:

*O que és, já fui eu; o que sou tu virás a ser.*

Sobre o ponto de fuga, visto na figura menor, o crítico de arte Pierre Santos explica:

O leitor vai observar também que Masaccio pôs o ponto de fuga, como disse, na base da cruz, pelo seguinte: tratando-se de um grande afresco feito em parede, o ponto de vista do espectador está abaixo da imitação de altar, em cujo bojo só há o esqueleto de alguém que ali foi inumado, com a legenda: Já fui o que tu és; ora sou o que tu serás. Este ponto de vista obriga quem olha o afresco de frente a erguer bem os olhos para ver direito, o que amplia a profundidade da composição num efeito de estéreo-perspectiva, como se pudéssemos subir até ali e, passando por trás da cruz e ir encostar-se à parede de fundo.

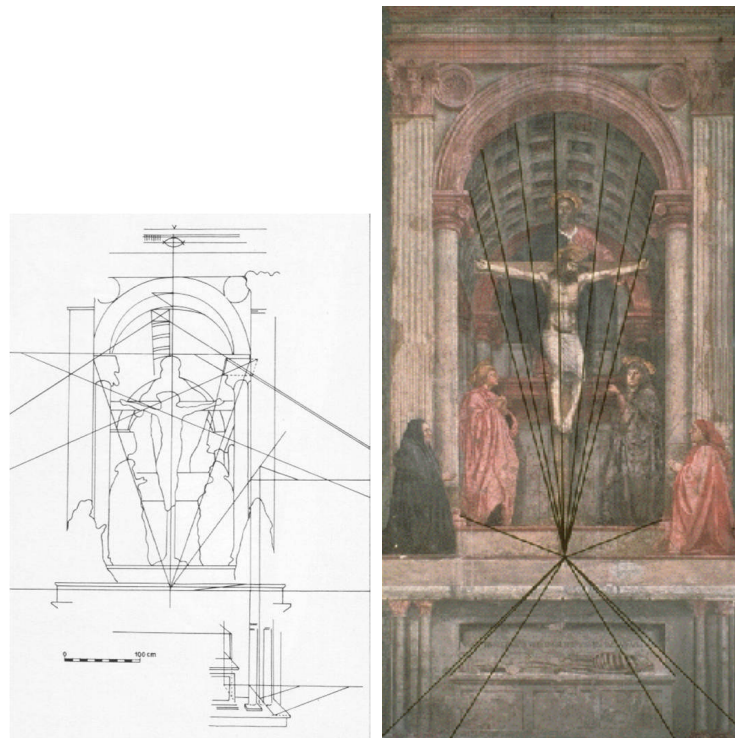


Figura 5.3: A Santíssima Trindade, por Masaccio - projeto e destaque para as linhas de fuga

O maior expoente do Renascimento, Leonardo da Vinci 1452-1519, também utilizou a técnica de perspectiva em seus trabalhos. Um dos mais famosos é "A Ceia". No desenho abaixo estão identificados as linhas e o ponto de fuga, que se localiza na testa do Cristo. Durante os últimos restauros, realizada nos anos 1990, que encontraram na cabeça de Jesus um prego, usado para marcar o ponto de fuga usado por Leonardo para compor a perspectiva perfeita da obra.

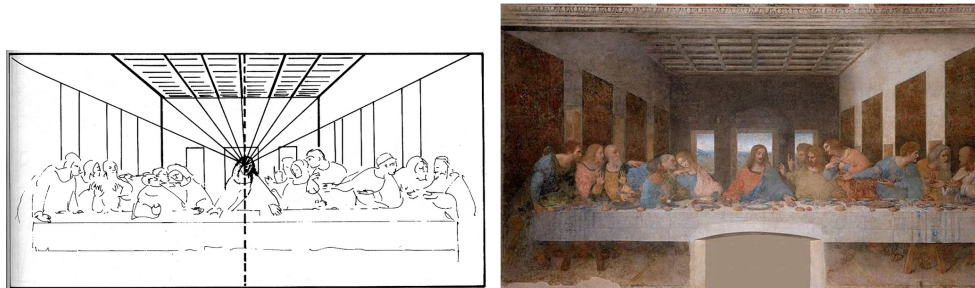


Figura 5.4: A Ceia, por Leonardo da Vinci - projeto e destaque para as linhas de fuga

Alguns outros nomes importantes da Renascença que utilizaram a mesma técnica em seus trabalhos foram Dürer, Rafael e outros. Algumas de suas obras.



Figura 5.5: São Jerônimo em seu escritório, por Dürer, e A Escola de Atenas, por Rafael

A obra *A Escola de Atenas* é uma alegoria profana do conhecimento filosófico. Mostra um grupo de filósofos de várias épocas históricas ao redor de Aristóteles e Platão. Ela ilustra a continuidade histórica do pensamento platônico. Observa-se o ponto de fuga no centro, onde estão as cabeças dos dois filósofos.

### 5.1.1 Elementos da Perspectiva

O Piero della Francesca, 1416 - 1492, foi o primeiro a elaborar um tratado sobre perspectiva, chamado "De Prospectiva Pingendi", onde apresenta uma rigorosa elaboração científica da perspectiva, no qual especifica que o espaço delimitado para a pintura é determinado por linhas paralelas à base do quadro e outras que convergem para um ponto, chamado ponto de fuga. Os principais elementos da Perspectiva são os seguintes.

- O *Quadro*, espaço delimitado para representar a cena (que pode ser uma folha de papel, uma tela, uma parede);
- A *Linha de Terra* (LT), a posição dos pés do observador, a base do quadro;
- A *Linha do Horizonte* (LH), o elemento da perspectiva que representa o nível dos olhos do observador;
- O *Ponto de Vista* (PV), obtido a partir do olhar do observador; se ele estiver posicionado no centro e olhando bem à sua frente, este ponto estará bem no meio do quadro, no cruzamento da linha do horizonte com uma linha vertical;
- O *Ponto de Fuga* (PF), localiza-se na linha do horizonte e é o ponto para o qual todas as linhas paralelas convergem quando vistas em perspectiva. Pode ser necessário mais de um ponto de fuga;
- As *Linhas de Fuga* (LF), que são linhas de apoio do desenho que convergem para o ponto de fuga. São essas linhas que geram a sensação de profundidade nos desenhos.

### 5.1.2 Geometria Projetiva, o desenvolvimento da teoria matemática

As ideias envolvidas na Perspectiva foram formuladas matematicamente apenas dois séculos depois do início do seu uso pelos artistas da Renascença. Em 1639, Gerard Desargues, 1591-1661, escreveu seu trabalho pioneiro sobre a teoria das cônicas, onde formalizou os conceitos da Perspectiva, surgindo assim a Geometria Projetiva.

Seguindo suas ideias, a Geometria Projetiva era o estudo das propriedades dos objetos que não são alteradas na sua projeção. Porém, suas ideias não foram muito bem aceitas e entendidas, talvez devido a linguagem imprópria para a época. Somente no início do século XIX, Jean Victor Poncelet (1788-1867), recomeçou o estudo, publicando, em 1822, um trabalho com o título "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Na verdade, as geometrias não-euclidianas só efetivamente receberam um tratamento matemático depois que Hilbert conseguiu axiomatizar e estabelecer um modelo matemático

para a Geometria Euclidiana. Logo surgiram contestações principalmente ao axioma das paralelas e assim aquelas geometrias começaram a se impor.

Evidentemente, a Geometria Projetiva facilita o entendimento da noção de perspectiva utilizada pelos renascentistas, porém a base axiomática, o modelo do espaço, os entes geométricos considerados tais como ponto, reta, plano enfim, as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos têm escasso valor em uma obra, por exemplo, pois não se transmitem às imagens pois o que é importante conhecer são as propriedades visuais das figuras. É por isso que a teoria axiomática contida em “ Os Elementos”, de Euclides, foram reviradas e algumas delas se concentraram nas citadas propriedades visuais. Durante a segunda metade do século XVIII, quando os geômetras finalmente eliminaram ideias métricas da Geometria Projetiva, foi que a mesma se solidificou como ciência moderna.

Diante de tudo isso, fazendo uma comparação com a Geometria Euclidiana, pode se afirmar que, enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a Geometria Projetiva se preocupa com o mundo que vemos.

### 5.1.3 Perspectiva na Arquitetura e no Cinema

As técnicas de Perspectiva são amplamente utilizadas em projetos de Arquitetura. Abaixo, apresentamos algumas figuras que exemplificam esse fato.

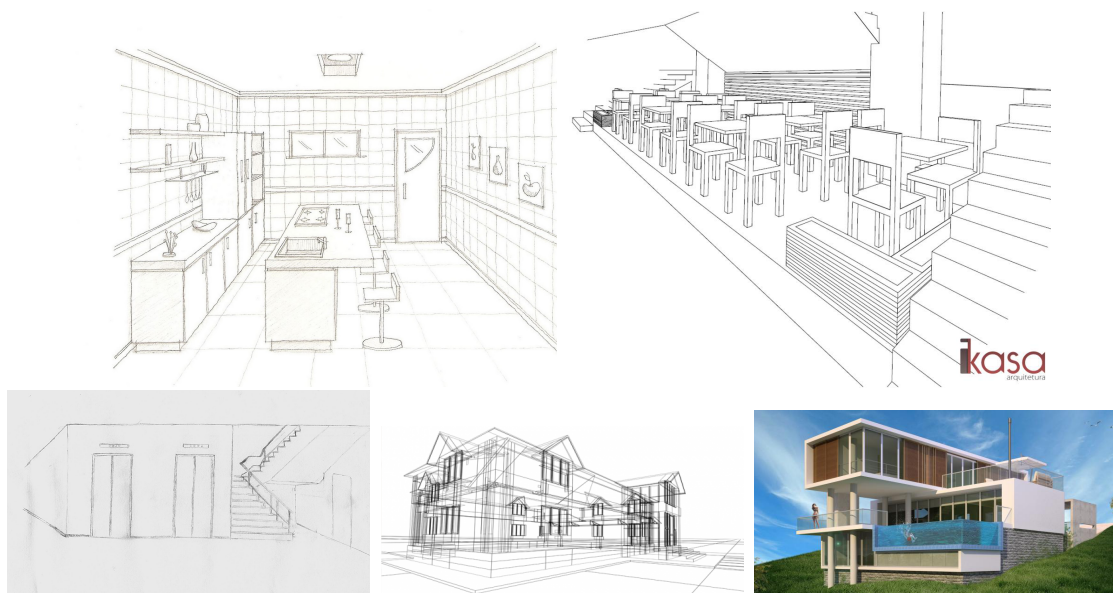


Figura 5.6: Projetos de Arquitetura

Na linguagem do cinema, uma fotografia perspectiva de um ponto, é aquela em que existe apenas um único ponto de fuga em toda a cena. Todas as linhas paralelas na cena convergem para aquele único ponto, puxando a atenção do espectador. Essa é uma

marca registrada do diretor Stanley Kubrick (1928-1999), que a utilizava em todos os seus filmes, com o objetivo de aumentar a tensão durante as cenas.

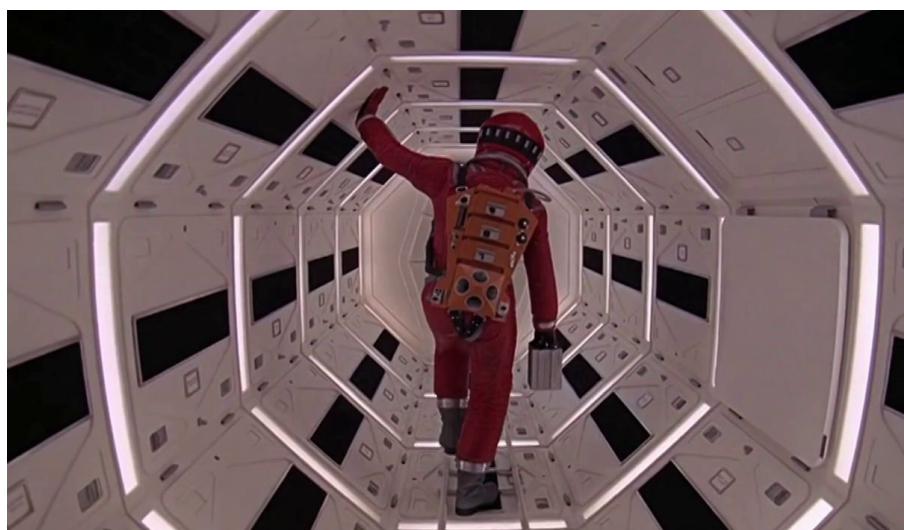


Figura 5.7: O 2001 - Uma odisséia no Espaço

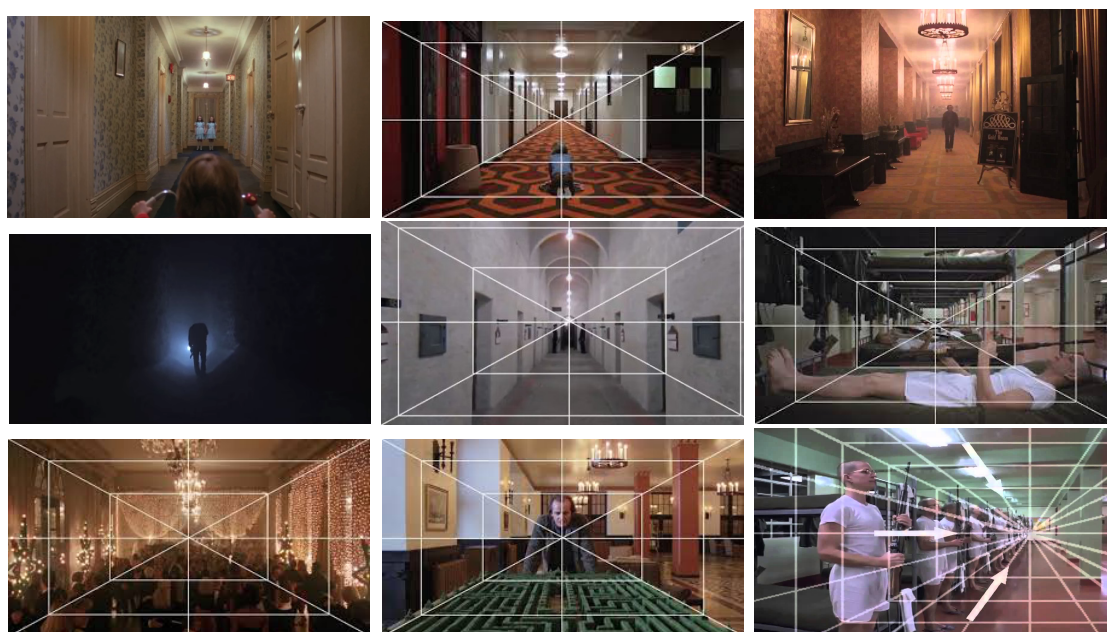


Figura 5.8: Cenas de filmes dirigidos por Kubrick

## 5.2 Sugestões de Atividades em sala de aula envolvendo Perspectiva

Para a maioria dos alunos do Ensino Básico, nos níveis Fundamental e Médio, a Matemática é um conhecimento pronto, que aos seus olhos pouco tem utilidade, e mesmo conexão, com a sua vida prática. Estudar a história da arte no período da Renascença se mostra como uma excelente oportunidade para que esses alunos, adolescentes em sua maioria, percebam que as teorias matemáticas são desenvolvidas a partir de problemas de surgem no cotidiano. Além disso, como através da pintura, da música, da Arte em geral o espírito humano alcança níveis mais elevados de desenvolvimento, o contato com a história da Renascença poderá ser um contra-ponto à vida agitada que hoje vivemos.

Assim propomos como atividade, que os alunos pesquisem sobre a história da arte, no período da Renascença, olhando de modo especial, para as novas técnicas usadas pelos pintores da época.

A partir dessa pesquisa, os alunos deverão listar os principais conceitos que envolvidos na técnica da Perspectiva e identificar esses objetos em pinturas feitas na época. Essa atividade pode ser estendida para pinturas feitas em outras épocas e também para outros tipos de expressão artística, como é o caso dos projetos de arquitetura e o cinema.

Observa-se que esse tipo de atividade permite que conteúdos de várias disciplinas sejam explorados simultaneamente. História e Geografia, através da contextualização do período; Biologia, através dos trabalhos desenvolvidos por Leonardo da Vinci, são exemplos.

Um ponto importante, que merece destaque, é enquanto a pesquisa estiver sendo feita, o professor deve questionar os alunos de modo que eles percebam o principal ponto que marca a diferença entre a Geometria Euclidiana e Geometria Projetiva. Uma forma motivadora para introduzir a ideia de interseção de retas no infinito e através de uma fotografia de uma estrada em linha reta.



Figura 5.9: Retas paralelas que se encontram

Esse tipo de imagem gera questionamentos sobre dizermos que as retas paralelas não se encontram. Na teoria da Geometria Euclidiana, as retas, que são as margens das estradas, são paralelas, porém os nossos olhos dizem que elas se encontram na linha do horizonte, no infinito, num ponto que, na teoria da Perspectiva, é chamado ponto de fuga. Como vimos no capítulo anterior, na Geometria Projetiva, duas retas sempre se interceptam, é axiomático.

Na próxima seção, sugerimos atividades utilizando o programa Geogebra.

### 5.2.1 Desenhos em Perspectiva utilizando o Geogebra

No momento em que forem realizadas as atividades de traçar desenhos em Perspectiva, utilizando o programa Geogebra, que propomos aqui, os alunos já devem estar familiarizados com as ideias e conceitos envolvidos na técnica, bem como, a nomenclatura utilizada. A intenção é desenvolver, ou aprimorar, a percepção espacial do aluno para que ele possa calcular de forma mais perceptiva, sem o uso de fórmulas, as áreas e volumes das diversas figuras geométricas espaciais.



## 5.2.2 Desenho do cubo em Perspectiva Paralela, com um ponto de fuga

1. Trace a *linha do horizonte* ( $LH$ ) e tome um ponto dessa linha, chamado *ponto de fuga* ( $PF$ ). Em seguida, trace uma linha vertical à  $LH$  passando por  $PF$ .
2. Desenhe o quadrado  $ABCD$  abaixo da  $LH$ , de base paralela a esta.

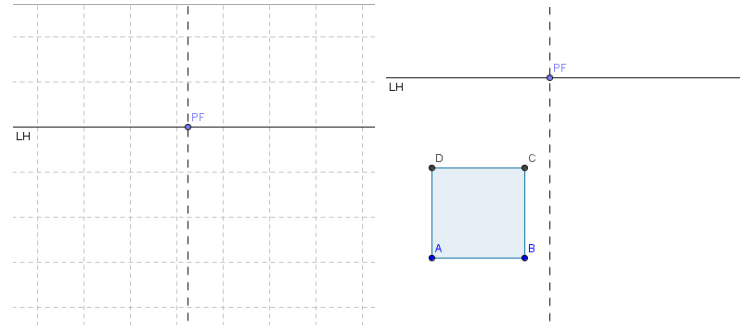


Figura 5.10: CP01 e CP02

3. Ligue, por uma linha tracejada, os vértices do quadrado a  $PF$ . Essas linhas chamam-se *linhas de fuga*.
4. Trace uma reta suporte perpendicular à base  $AB$  do quadrado determinando um segmento sobre ela de extremidades na base  $AB$  e na  $LH$ . Em seguida, sobre  $LH$ , transfira a medida do segmento a partir de  $PF$  encontrando em  $LH$  o ponto  $H$ .

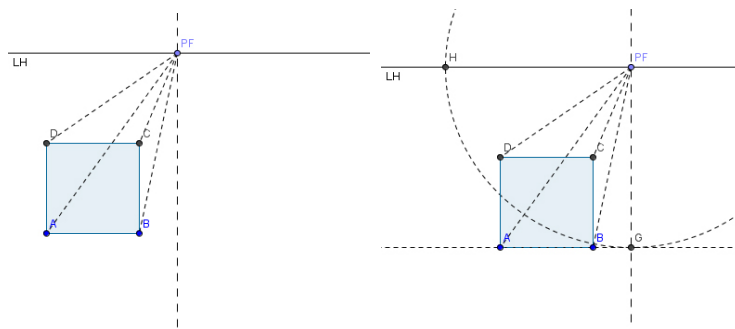


Figura 5.11: CP03 e CP04

5. Transfira a medida da base  $AB$  utilizando uma reta que passa por  $A$  e paralela à  $HB$  encontrando  $LH$  no ponto  $J$ .
6. Ligue  $J$  ao ponto  $B$  encontrando em  $PF$  o ponto  $E$ . Traça-se uma perpendicular a  $LH$  passando por  $E$  encontrando o ponto  $L$  em  $PF$ .

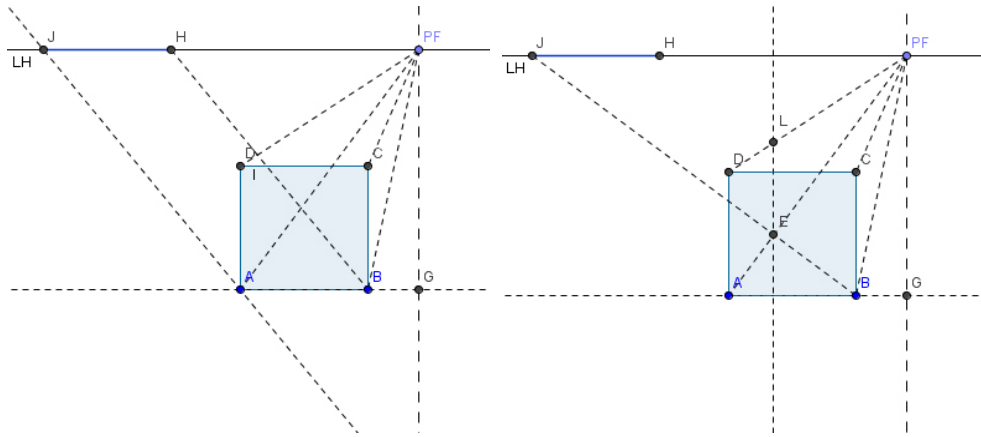


Figura 5.12: CP05 e CP06

- Trace uma reta paralela a LH passando por L determinando o segmento LM e outra reta perpendicular a LH passando por M e determinando na linha de fuga PF B o ponto N. Ligam-se os segmentos formados e está determinado o cubo.

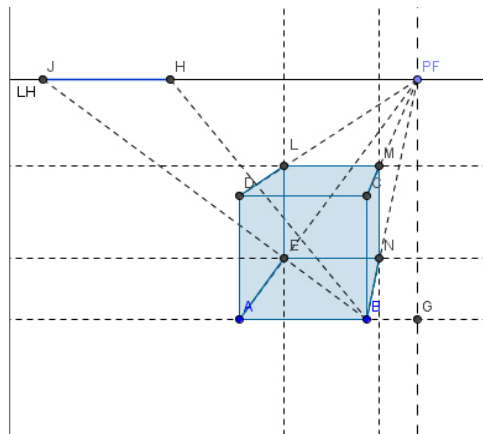


Figura 5.13: CP07

### 5.2.3 Desenho do cubo em Perspectiva Oblíqua, com dois pontos de fuga

1. Trace a LH e nela tomam-se dois pontos afastados, os pontos de fuga PF1 e PF2. Em seguida, pelo ponto médio V do segmento, traça-se uma reta vertical a LH.
2. Traça-se uma reta paralela à reta vertical, suporte do segmento AB, que encontra a LH no ponto W.

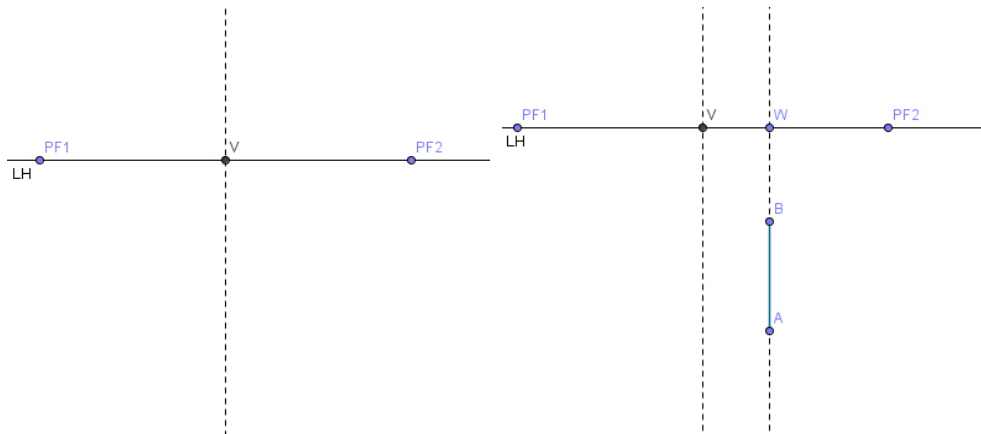


Figura 5.14: CO01 e CO02

3. Ligue os extremos do segmento AB a ambos os pontos PF1 e PF2.
4. Trace a LF a partir de PF1, que encontra o ponto D em PF2 A. Por D trace uma paralela a AB determinando o segmento CD.

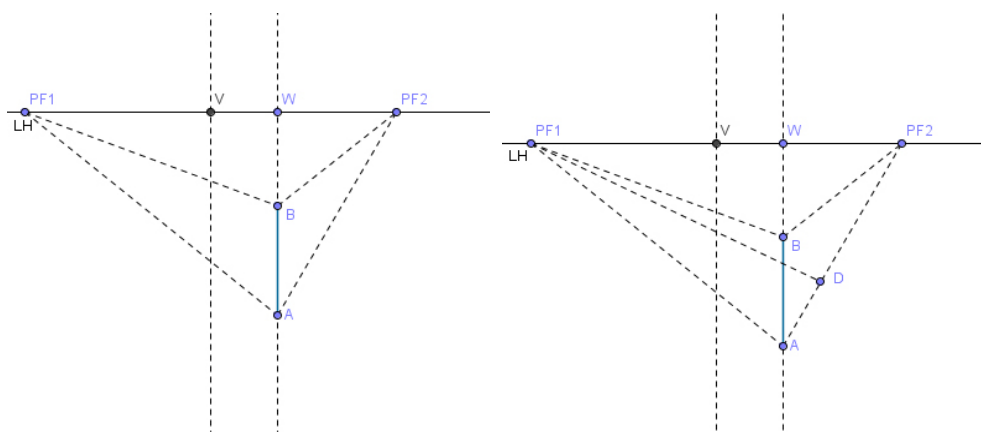


Figura 5.15: CO03 e CO04

5. Prolongue o segmento AB até encontrar a LH no ponto W. Em seguida, tome o ponto M que será o ponto médio de VW.

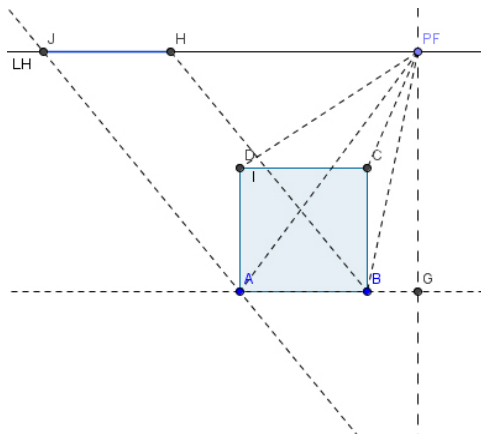


Figura 5.16: CO05

6. Ligue M ao ponto A determinando o ponto H, interseção de MA com PF1 D.
7. Ligue PF2 à linha PF1 A, determinando os pontos H, em PF1 D, e E, em PF1 A.

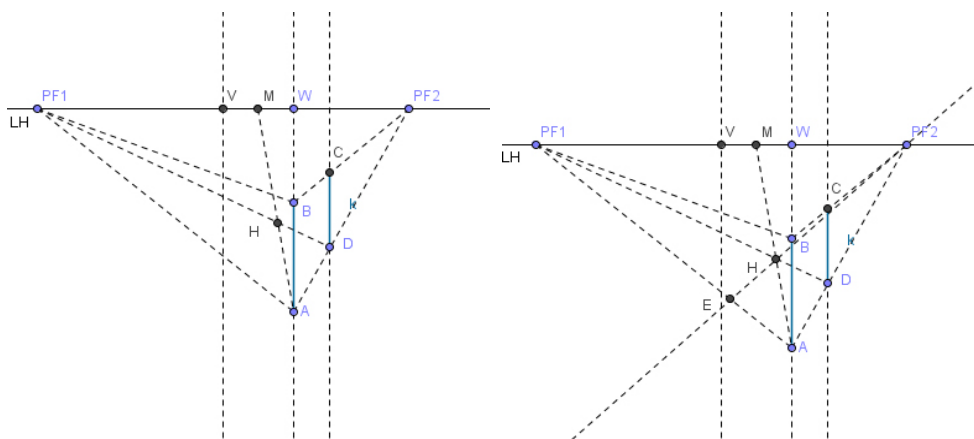


Figura 5.17: CO06 e CO07

8. Trace uma reta perpendicular a LH passando por E que encontra PF1 B no ponto F. Ligue PF1 para C e PF2 para PF1 B, encontrando o ponto G. Em seguida, ligue os pontos e obtenha o cubo.

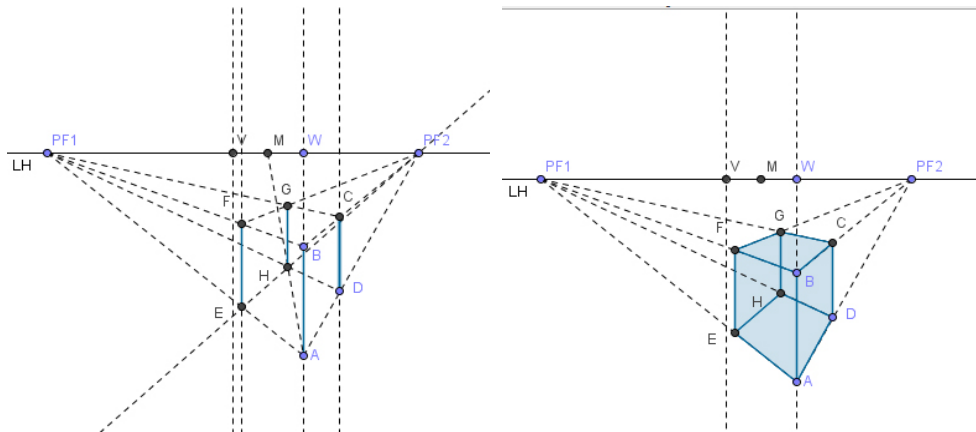


Figura 5.18: CO08 e CO09

### 5.2.4 Desenho do Quadrado em Perspectiva

1. traça-se a linha do horizonte e um ponto qualquer dela, o ponto de fuga.
2. traça-se um segmento horizontal AB paralelo à linha do horizonte, ligando-se as extremidades desse segmento ao ponto de fuga. Na reta suporte de AB traça-se uma reta vertical passando por PF encontrando na reta AB o ponto G. O segmento PFI é igual a medida de PFG em LH. O segmento IJ é de mesma medida que AB com uma das extremidades em I.
3. a interseção de PFB e AJ determina o ponto C e traçando uma reta paralela a AB por C, encontra-se PFA em D, determinando assim o quadrado ABCD ligando-se os pontos.

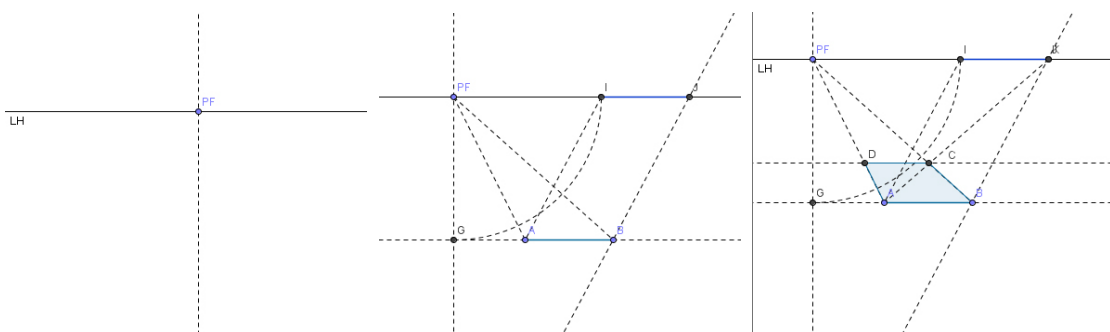


Figura 5.19: PQ01, PQ02 e PQ03

### 5.2.5 Desenho da Pirâmide reta em Perspectiva

1. Usando o quadrado o quadrado em perspectiva ABCD traça-se uma reta perpendicular a LH, de medida PFG, passando pelo ponto O, interseção das diagonais AC e BD. Nessa reta vertical toma-se um ponto qualquer V que não seja do quadrado ABCD.
2. Ligando-se os pontos A, B, C e D a V, obtém-se a pirâmide reta VABCD.

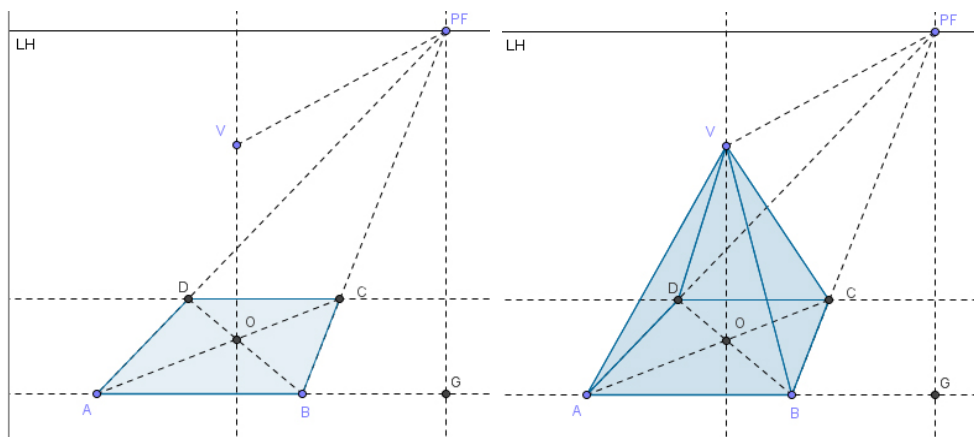


Figura 5.20: PP01 e PP02

# Referências

- [1] Arsie, Keilla C. e Medina, Simone da Silva S., *A Geometria Projetiva e a expressão gráfica nas aulas de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental*, X Congresso Nacional de Educação, PUC-PR, 2011.
- [2] Barros, Abdênago e Andrade, Plácido, *Introdução à Geometria Projetiva*. Textos Universitários, SBM, 2010.
- [3] Boyer, Carl B., *História da Matemática* . Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [4] Caldas, Pedro Rosa Vieira, *Perspectiva e Conhecimento*. Dissertação de Mestrado em História e Filosofia das Ciências, Universidade de Lisboa, 2010.
- [5] Diretrizes da Educação Básica Matemática, Estado do Paraná, <http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/File/matematica.pdf> , 2008
- [6] Devito, André; de Freitas, Araone K. e Pereira, Kênia C. *Geometria Não-Euclidiana*, [http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao\\_euclidiana](http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana) , 2006.
- [7] Ross, André *A perspectiva*, <http://www.inf.ufpr.br/kunzle/disciplinas/metodologia/2009-2/perspectiva.pdf>, 2009
- [8] Santos, Maria M., *A Teoria da Perspectiva fundamentado pela Geometria Projetiva*, [http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs\\_degraf/artigos\\_graphica/A%20TEORIA%20DA%20PERSPECTIVA%20FUNDAMENTADA%20PELA%20GEOMETRIA%20PROJETIV.pdf](http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/A%20TEORIA%20DA%20PERSPECTIVA%20FUNDAMENTADA%20PELA%20GEOMETRIA%20PROJETIV.pdf), 2007
- [9] Seara, Helenice F., *Noções de Geometria Projetiva na Formação de Professores*. V CINFE - Congresso Internacional de Filosofia e Educação, Caxias do Sul, 2010.
- [10] Seara, Helenice F., *Atividades de Geometria Projetiva para a sala de aula*, [http://www.lematec.no-ip.org/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12\\_MC382.pdf](http://www.lematec.no-ip.org/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12_MC382.pdf) , 2010.
- [11] Simões, Carolina Borges, *Perspectiva*, <http://www1.ci.uc.pt/iej/alunos/1998-99/cbs/entrada1/conteudo.htm> , 1999.

- [12] Watermann, Ivone e Fanco, Valdeni S., *Geometria Projetiva no Laboratório de Matemática*, <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-6.pdf> , 2008.