

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

APARECIDA PATRÍCIA ROBERTO MARCHIONI

**UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA MATEMÁTICA FINANCEIRA  
NO ENSINO MÉDIO**

São Carlos

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

APARECIDA PATRÍCIA ROBERTO MARCHIONI

**UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA MATEMÁTICA FINANCEIRA  
NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação:  
Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares

São Carlos

2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M317pa Marchioni, Aparecida Patrícia Roberto.  
Uma proposta de abordagem da matemática financeira no ensino médio / Aparecida Patrícia Roberto Marchioni. -- São Carlos : UFSCar, 2013.  
122 f.

Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Matemática financeira. 3. Ensino médio. 4. Proposta pedagógica. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

APARECIDA PATRÍCIA ROBERTO MARCHIONI

**PROPOSTA DE ABORDAGEM DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO  
ENSINO MÉDIO**

.Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

27 de março de 2013

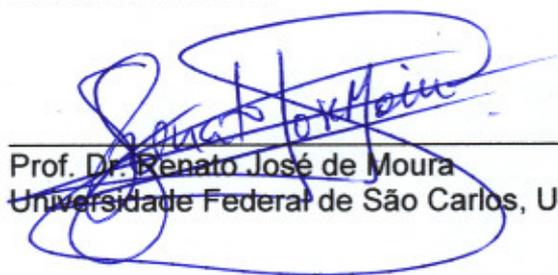
ORIENTADOR:



---

Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares  
Universidade Federal de São Carlos, UFSCar/S

EXAMINADORES:



---

Prof. Dr. Renato José de Moura  
Universidade Federal de São Carlos, UFSCar/São Carlos



---

Prof. Dr. Thiago de Melo  
Universidade Estadual Paulista, UNESP/Rio Claro

*Dedico este trabalho a meu esposo Mário Lúcio e a meus filhos: Júlio, Camila, Artur e Paulo, por estarem sempre ao meu lado, me apoiando nos momentos difíceis e vibrando por cada conquista.*

*Dedico também a meus pais, Domingos e Anna Maria, pela minha vida e pelo acompanhamento incondicional que me permitiu chegar até aqui.*

*“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”*

(Carl Friedrich Gauss)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que sempre me orientou na caminhada desde a escolha da minha profissão até o momento da realização de um sonho: ser Mestre.

A meus pais, pelo acompanhamento durante toda a minha formação e pelo apoio no cuidado dos meus filhos quando necessário. Agradeço também a meu sogro e minha sogra, que me acompanharam e me incentivaram.

A meu esposo, amigo e companheiro, Mário Lúcio, desde a minha formação no ensino médio até o incentivo para cursar a licenciatura e o mestrado. Agradeço pela compreensão e carinho nos momentos difíceis em que me acolheu, compreendeu e me deu forças para continuar.

A meus filhos, Júlio, Camila, Artur e Paulo, que compreenderam minha ausência durante o curso e também foram maravilhosos durante os momentos complicados, mostrando maturidade e demonstrando muito carinho.

Aos professores do Profmat São Carlos, que, com seus ensinamentos e experiências, contribuíram significativamente para minha formação.

A meu orientador, professor Dr. Márcio, pelo apoio e incentivo desde a fase do Exame de Qualificação, sempre acreditando em minha capacidade. Sua atenção e orientação foram muito importantes para a realização deste trabalho.

A meus amigos do mestrado, que compartilharam suas experiências e conhecimentos, seja através do ambiente virtual seja durante as aulas.

À Capes, pela bolsa de estudo, permitindo que pudesse me dedicar mais aos estudos durante o mestrado, e à direção do Colégio Pequeno Príncipe, que compreendeu meu afastamento das aulas.

À direção, coordenação e professores da E.E. “Prof. Aníbal do Prado e Silva”, que me apoiaram durante o curso e também na aplicação deste trabalho.

A meus alunos, um dos motivos de meus estudos. Em especial aos alunos da 3ª série do Ensino Médio da E. E. “Prof. Aníbal do Prado e Silva” do ano 2012, que vibraram comigo desde o momento que ingressei no mestrado até a participação nesta pesquisa.

A todos que auxiliaram na leitura e correção deste trabalho. Bem como aos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão desta etapa.

Muito obrigada!

## RESUMO

O presente trabalho objetiva mostrar a elaboração e aplicação de uma Sequência Didática sobre a Matemática Financeira em duas turmas de alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de São Paulo. A metodologia de pesquisa aplicada foi a Engenharia Didática. Iniciou-se o estudo com a pesquisa de como a matemática financeira foi e é abordada na educação brasileira, principalmente nas propostas do estado de São Paulo e sobre o conhecimento dos alunos das duas turmas concluintes do ensino médio em relação ao tema. Das constatações efetuadas surgiu este trabalho, com o intuito de associar o estudo da matemática financeira com os conceitos matemáticos que a embasam, como as Progressões Aritméticas e Geométricas e o fator de aumento, evitando, assim, o uso de fórmulas “decoradas” e muitas vezes sem sentido para o aluno. Os problemas propostos consistem em aplicações atuais e fundamentais para que o aluno possa analisar e tomar decisões racionais nas opções de compra de produtos, bem como na adesão a financiamentos como os proporcionados pelo FIES (Fundo de Financiamento Estudantil), muito divulgados atualmente.

**Palavras-chave:** Matemática Financeira. Ensino Médio. Proposta.

## **ABSTRACT**

This work intends to show the preparation and application of a Teaching Sequence on Mathematical Finance with two Middle School 3<sup>rd</sup> grade classes of a state school in São Paulo inland. The research methodology applied was Didactic Engineering. The study started by the research about the way Mathematical Finance was and is treated in Brazilian education, especially on the plans of São Paulo State, and about the knowledge of the two Middle School last grade classes on the subject. This work arose from the observations done, intending to relate the Mathematical Finance study with the mathematical concepts in the base, like the arithmetic and the geometric progressions and the increase factor, so avoiding the use of “known by heart” formulas, the most meaningless for the student. The proposed problems consist of current and fundamental applications for the student to analyze and make rational decisions in the product purchase options, as well as adherence to financing like that provided by the FIES (Student Financing Fund), highly publicized today.

**Key-words:** Mathematical Finance. Middle School. Proposal.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Problema proposto inicialmente .....	26
Figura 2: Problema desencadeador .....	27
Figura 3: Problema 2 e 3.....	28
Figura 4: Problema 4.....	29
Figura 5: Diagrama de flechas transportando ao tempo 6 .....	31
Figura 6: Diagrama de flechas transportando ao tempo 5 .....	32
Figura 7: Diagrama de flechas transportando ao tempo 0 .....	33
Figura 8: 1º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	40
Figura 9: Resolução do 1º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	41
Figura 10: 2º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	41
Figura 11: Resolução 2º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	42
Figura 12: 3º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	42
Figura 13: Resolução 3º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	43
Figura 14: 4º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	43
Figura 15: Resolução 4º Problema desencadeador – Atividade 1 .....	44
Figura 16: 1º Problema desencadeador – Atividade 2 .....	44
Figura 17: Resolução 1º Problema desencadeador – Atividade 2 .....	45
Figura 18 2º Problema desencadeador – Atividade 2 .....	45
Figura 19: Resolução 2º Problema desencadeador – Atividade 2 .....	46
Figura 20: Resolução do problema 1 por uma aluna do 3º B – Atividade 2 .....	47
Figura 21: Resolução do problema 2 por uma aluna do 3º B – Atividade 2 .....	48
Figura 22: Resolução do problema 3 por uma aluna do 3º A – Atividade 2 .....	49
Figura 23: Resolução do problema 5 – Atividade 2.....	50
Figura 24: Resolução do problema por uma aluna do 3ºB – Atividade 3 .....	54

Figura 25: Calculadora financeira HP 12C .....	55
Figura 26: Gráfico correto do teste 5 – Atividade 3 .....	56
Figura 27: Resolução dos problemas 1 e 2 por uma aluna do 3ºA – Atividade 4.....	61
Figura 28: Resolução dos problemas 3 e 4 por uma aluna do 3ºA – Atividade 4.....	63
Figura 29: Resolução do problema 1 por uma aluna do 3º A – Atividade 5 .....	65
Figura 30: Resolução do problema 2 por uma aluna do 3º A – Atividade 5 .....	66
Figura 31: Resolução do problema 3 por uma aluna do 3º A – Atividade 5 .....	67
Figura 32: Resolução do problema 4 por uma aluna do 3º A – Atividade 5 .....	68
Figura 33: Resolução do problema 5 por uma aluna do 3º A – Atividade 5 .....	69
Figura 34: Resolução do problema 5 – parte 1 – Atividade 5.....	69
Figura 35: Resolução do problema 5 – parte 2 – Atividade 5.....	70
Figura 36: Resolução do problema 5 – parte 3 – Atividade 5.....	70
Figura 37: Resolução do problema 5 – parte 4 – Atividade 5.....	71
Figura 38: Planilha para cálculo da prestação do problema 5 – Atividade 5 .....	72
Figura 39: Atividade em dupla do sistema francês de amortização .....	77
Figura 40: Planilha financeira nos sistema SAF e SAC construída por um aluno .....	81
Figura 41: Simulação de Financiamento .....	85
Figura 42: Planilha para cálculo da prestação do FIES.....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Juro Simples.....	27
Tabela 2: Juro Composto .....	27
Tabela 3: Juro Simples – Atividade 3 .....	51
Tabela 4: Juro Composto – Atividade 3 .....	52
Tabela 5: Sistema Francês de Amortização – Montagem 1 .....	74
Tabela 6: Sistema Francês de Amortização – Montagem 2.....	74
Tabela 7: Sistema Francês de Amortização – Montagem 3.....	75
Tabela 8: Sistema Francês de Amortização – Montagem 4.....	75
Tabela 9: Sistema de Amortização Constante – Montagem 1 .....	78
Tabela 10: Sistema de Amortização Constante – Montagem 2 .....	79
Tabela 11: Sistema de Amortização Constante – Montagem 3 .....	79
Tabela 12: Tabela parcial gerada pela simulação .....	87

## LISTA DE FOTOGRAFIAS

Fotografia 1: Apresentação aos alunos da planilha SAF.....	72
Fotografia 2: Construção das planilhas SAF e SAC durante a explicação.....	80
Fotografia 3: Fotos dos alunos durante a atividade.....	81
Fotografia 4: Alunos confeccionando a planilha da atividade 7.....	91

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	16
CAPÍTULO 1: PARTICIPANTES E METODOLOGIA DA PESQUISA .....	19
1.1 Participantes da pesquisa .....	19
1.1.1. Trajetória Docente pesquisadora .....	19
1.1.2. Discentes participantes .....	21
1.2 Metodologia da Pesquisa: Engenharia Didática.....	22
CAPÍTULO 2: 1ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISES PRÉVIAS.....	24
2.1. Histórico do tema no ensino médio .....	24
2.2. Matemática Financeira Na Atual Proposta Curricular De São Paulo.....	25
2.3. Conhecimento dos alunos sobre a Matemática Financeira .....	34
CAPÍTULO 3: 2ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISE A PRIORI.....	36
3.1. Sequência Didática: atividades e objetivos .....	36
3.2. Hipóteses .....	38
CAPÍTULO 4: 3ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: EXPERIMENTAÇÃO I .....	40
4.1. Primeira Atividade: Fator de aumento e desconto.....	40
4.2. Segunda Atividade: Aumentos e Descontos Sucessivos .....	44
4.3. Terceira Atividade: Juro Simples e Composto.....	50
4.4. Análise a posteriori e Validação .....	57
CAPÍTULO 5: 3ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: EXPERIMENTAÇÃO II .....	60
5.1. Quarta Atividade: Fluxo de Caixa.....	60
5.2. Quinta Atividade: Comprar à vista ou a prazo? .....	64
5.3. Sexta Atividade: Sistemas de Financiamento - SAC e SAF .....	72
5.3.1 Definições básicas .....	73
5.3.2 SAF – Sistema Francês de Amortização.....	73
5.3.3 SAC – Sistema de Amortização Constante .....	78
5.4. Sétima Atividade: FIES (Fundo de Financiamento Estudantil) .....	83
5.5. Análise a posteriori.....	89

CONCLUSÃO.....	93
REFERÊNCIAS.....	96
APÊNDICE A: ATIVIDADE 1.....	98
APÊNDICE B: ATIVIDADE 2.....	101
APÊNDICE C: ATIVIDADE 3.....	103
APÊNDICE D: ATIVIDADE 4.....	107
APÊNDICE E: ATIVIDADE 5.....	109
APÊNDICE F: ATIVIDADE 6.....	113
APÊNDICE G: ATIVIDADE 7 .....	116
APÊNDICE H: FÓRMULA DO CÁLCULO DA PRESTAÇÃO EM SEQUÊNCIAS UNIFORMES (SISTEMA PRICE) SEM ENTRADA .....	121

## INTRODUÇÃO

A matemática financeira é um assunto recente na educação básica brasileira. Atualmente, sua abordagem, quando ocorre, geralmente acontece de forma desconectada dos conteúdos matemáticos que a embasam, apoiando-se em fórmulas prontas e decoradas.

Entende-se também que o tema ainda é desconhecido por muitos professores, que não estudaram este conteúdo em sua licenciatura devido à abordagem recente no ensino médio ou ainda o estudaram de forma superficial e nem sempre conectados aos conceitos matemáticos relevantes para sua compreensão efetiva.

Trabalhando com duas turmas da 3ª série do Ensino Médio da E. E. “Prof. Aníbal do Prado e Silva”, percebeu-se a necessidade de abordar o tema matemática financeira, já que muitos alunos desconheciam seus conceitos básicos, embora este seja proposto na 1ª série do Ensino Médio na atual proposta do Estado de São Paulo.

Inicialmente, a ideia consistia em abordar de maneira diferenciada apenas os seguintes temas: fator de aumento e desconto, juros simples e composto, análise de opções de pagamento na compra à vista ou a prazo com cálculo de prestação.

Todavia, a visita de um diretor de uma faculdade particular às classes da 3ª série do Ensino Médio motivou a ampliação do trabalho. Sua visita tinha como objetivo divulgar a existência do FIES (Fundo de Financiamento Estudantil) e na oportunidade usou termos próprios, como amortização da dívida e período de carência, e percebeu-se que alguns alunos desconheciam os termos.

Diante disso, foi incluído o tema Sistemas de Financiamento com o objetivo de focar os dois sistemas de financiamento mais utilizados no Brasil: SAF (Sistema Francês de Amortização) e SAC (Sistema de Amortização Constante).

Importante ressaltar que os sistemas de financiamento não são abordados nos livros didáticos do ensino médio e nem mesmo na proposta curricular do Estado de São Paulo. Mas entende-se que o aluno que conclui a educação básica precisa ter noção do que se trata para que possa tomar decisões, já que estamos rodeados de propagandas sobre financiamentos. Ao acessar o *site* do

FIES, por exemplo, é possível fazer a simulação do financiamento, aparecendo uma tabela com a evolução da dívida e as amortizações realizadas, e saber interpretar estes dados é de suma importância.

Desta maneira elaborou-se uma sequência didática que foi aplicada aos alunos e será descrita neste trabalho no capítulo 3.

No capítulo 1, consta a trajetória docente que nos motivou para o estudo mais aprofundado da matemática financeira bem como a descrição dos alunos participantes da pesquisa. Há ainda a definição da metodologia de pesquisa adotada: Engenharia Didática e suas quatro fases.

No capítulo 2, será apresentada a 1ª etapa da Engenharia Didática, denominada Análises Prévias, apresentando um estudo da abordagem da matemática financeira no ensino médio de 1992 até os dias atuais, ressaltando a atual proposta estadual de São Paulo em relação ao tema, bem como a análise do conhecimento sobre a matemática financeira dos alunos participantes desta pesquisa

A 2ª etapa da Engenharia Didática, Análise *a priori*, é relatada no capítulo 3, ou seja, diante das constatações realizadas no capítulo anterior verificou-se que o estudo da matemática financeira ainda é apresentado de maneira inconveniente. Diante disso, foi realizado um plano de ação, composto por uma sequência didática que torne o estudo da matemática financeira mais produtivo e compreensível para o aluno.

As 3ª e 4ª etapas da Engenharia Didática correspondem, respectivamente, à Experimentação e à Análise *a posteriori* e estão relatadas nos capítulos 4 e 5. Nestas etapas ocorreu a aplicação da sequência didática elaborada na fase anterior a duas turmas da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de São Paulo seguidas da análise de sua validade. Todas as atividades aplicadas aos alunos durante a Experimentação encontram-se no Apêndice.

No capítulo 6, mostraremos as conclusões deste trabalho, ressaltando os desdobramentos possíveis desta nossa proposta no tocante à elaboração e aplicação da sequência didática apresentada.

Enfim, este trabalho pretende contribuir para o estudo da matemática financeira, compreendendo os conceitos matemáticos envolvidos e motivando os alunos a respeito da importância do estudo deste tema para a tomada de decisões a

serem realizadas mediante a análise racional, e não apenas através do senso comum que muitas vezes leva a decisões equivocadas.

Este trabalho, assim, além de ter contribuído para uma abordagem diferenciada dos alunos participantes da pesquisa, possa ser analisado e aperfeiçoado por docentes que busquem construir sua própria prática voltada para a construção do estudo da matemática financeira alicerçada nos conteúdos que a tornam compreensível e aplicável em situações reais.

# CAPÍTULO 1

## PARTICIPANTES E METODOLOGIA DA PESQUISA

### 1.1 Participantes da pesquisa

#### 1.1.1. Trajetória Docente pesquisadora

Em 1995, no último ano do curso de Licenciatura em Matemática, iniciamos o trabalho como docente na rede estadual de Educação de São Paulo trabalhando a disciplina Matemática com os alunos do CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério).

Naquela oportunidade, tivemos contato com a 3ª edição (1996) da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, 2º Grau, do Estado de São Paulo, vigente na época. Esta apresentava a inclusão do tema Matemática Financeira como um desafio aos professores, por não ser um tema até então tratado no ensino médio, e sua sugestão era abordar o tema no último ano do ensino médio, então chamado 2º grau.

Da mesma forma alguns livros didáticos começaram a apresentar a Matemática Financeira no final do ensino médio como conteúdo completamente independente dos demais. Era um progresso, já que até então este assunto não era sequer abordado.

Neste processo alguns autores de livros didáticos foram incluindo problemas financeiros juntamente com o estudo das funções, particularmente problemas envolvendo juros compostos como aplicações das funções exponenciais.

Trabalhando e acompanhando todas estas mudanças, começamos a trabalhar também em 1997 numa escola técnica e uma das disciplinas ministradas era justamente matemática financeira no curso técnico de Assessoramento e Gerenciamento Empresarial, o que nos permitiu aprofundamento do tema.

Nesta mesma escola trabalhávamos também com turmas do Ensino Médio Técnico e foi a dificuldade dos alunos na aula de informática de uma das

turmas que fez com que tivéssemos necessidade de elaborar uma aula específica para tratar do fator de aumento e desconto.

O professor de informática solicitou ajuda porque os alunos da 1ª série do ensino técnico estavam trabalhando com planilhas do Excel e não conseguiam digitar a fórmula para calcular o produto com aumento porcentual, ou seja, não compreendiam que para encontrar o valor de um produto com um aumento de 5% basta multiplicá-lo por 1,05. Não entendiam o porquê do número 1 no fator. Observamos que os alunos desconheciam o fator de aumento e percebemos que seria impossível compreender ou mesmo deduzir a fórmula para o cálculo do montante no juro composto sem entender este conceito. Assim foi elaborada a 1ª atividade: fator de aumento e desconto que foi sendo trabalhada com outras turmas e especificamente com os alunos participantes desta pesquisa.

Em 2000, com a aprovação em concurso, ingressamos como professora efetiva da E. E. "9 de Julho", em Taquaritinga e continuamos o trabalho no CEFAM. Dois anos depois, solicitamos remoção para o CEFAM, reduzindo assim uma escola. Com o término do CEFAM, em 2005 pedimos remoção para a E. E. "Prof. Aníbal do Prado e Silva", onde trabalhamos até hoje e foi com alunos desta escola realizada a presente pesquisa.

Em 2008 trabalhamos a Matemática Financeira com uma turma do curso Agronegócios da FATEC Taquaritinga e nesta oportunidade pudemos retomar o estudo buscando metodologias apropriadas para a compreensão do tema.

Ingressando no Mestrado Profissional PROFMAT na UFSCAR em 2011, a Matemática Financeira foi novamente objeto de estudo já no começo do curso, reforçando e aprofundando conceitos.

Neste curso, assistindo ao vídeo do professor Augusto César Morgado (*in memoriam*), novamente pudemos refletir sobre a ausência da Matemática Financeira na educação básica, sentimento este, que vivenciamos como aluna da educação básica e no início da profissão. Ainda constatamos a apresentação equivocada da Matemática Financeira desconectada dos conceitos matemáticos que a embasam.

Concomitantemente com o Mestrado, trabalhamos com duas turmas do Ensino médio e constatamos as dificuldades dos alunos em relação ao tema e o interesse em conhecer o FIES (Fundo de Financiamento Estudantil), o que nos motivou a criar a sequência didática apresentada neste trabalho.

Importante ressaltar que como docente é necessário o estudo permanente da matemática, de como ela está inserida nos problemas atuais e atenção constante às dificuldades dos alunos para que a matemática seja compreendida em sua essência e realmente auxilie as pessoas na tomada de decisões. Esta postura tem norteado as nossas ações durante toda a trajetória profissional.

### **1.1.2. Discentes participantes**

Esta pesquisa foi desenvolvida com 30 alunos da 3ª série A e 31 alunos da 3ª série B do período matutino da E. E. “Prof. Aníbal do Prado e Silva”, no município de Taquaritinga, interior de São Paulo, no Conjunto Residencial Ipiranga.

A maioria dos alunos participantes pertence aos bairros vizinhos e alguns moram na zona rural. É formada por alunos de classe média baixa.

Alguns alunos trabalham no contra-turno (tarde ou noite), auxiliando a família nas despesas da casa.

Estas duas turmas iniciaram-se com 40 alunos, sendo que alguns transferiram para outra localidade ou ainda para o período noturno em razão da entrada no mercado de trabalho, já que estavam na fase final da Educação Básica.

Alguns destes alunos pretendem ingressar na faculdade, mas, devido à importância do auxílio financeiro que proporcionam às suas famílias, a mudança para outra localidade visando o ingresso em faculdade pública torna-se inviável. Mediante estes fatores, muitos optam por faculdades particulares que apresentam convênios com o governo estadual garantindo 100% de gratuidade nos cursos, sendo 50% da mensalidade paga pelo Estado (limitada a um teto de R\$ 310,00 por mês, renovável semestralmente) e o restante é financiado pela Universidade. Em troca os universitários trabalham nos finais de semana nas escolas estaduais no Programa Escola da Família.

Atualmente foi criada outra proposta para viabilizar o ingresso dos alunos em escola particular. Trata-se do FIES, um programa do Ministério da Educação que possibilita o financiamento dos estudos. Diante desta nova perspectiva surgiu o interesse dos alunos em conhecer mais profundamente como funciona o Sistema de Financiamento.

Mediante esta necessidade, incluímos o Sistema de Financiamento em nossos estudos conforme será detalhado no decorrer deste trabalho. A dificuldade dos alunos em relação aos conceitos básicos da matemática financeira também motivou a elaboração desta pesquisa.

## **1.2 Metodologia da Pesquisa: Engenharia Didática**

Este trabalho foi desenvolvido através do método da Engenharia Didática, sendo que esta consiste em uma metodologia de pesquisa e teoria didática com surgimento na década de 80. Um dos principais estudiosos do tema é a francesa Michèle Artigue.

Artigue apud Almouloud; Silva (2012, p. 26) caracteriza a engenharia didática como sendo: "... um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de uma sequência de ensino".

Nesta metodologia, o professor-pesquisador consegue dar significado ao que ensina, pois desenvolve seu trabalho a partir das dificuldades cognitivas dos alunos. Não há ninguém melhor do que o professor para identificar as dúvidas e dificuldades que o aluno apresenta em sala de aula. Portanto, é este professor que investiga os motivos que impedem a aprendizagem, analisa suas próprias ações na sala de aula e cria formas diferentes de ensino que possibilitem o aprendizado do aluno.

O termo "engenharia", de acordo com o dicionário Michaelis, significa "arte de aplicar conhecimentos científicos à invenção"; ou, ainda, a palavra "engenho", segundo o dicionário Aulete, significa "capacidade de criar, de inventar. É do engenho e da perseverança que surgem as invenções".

Assim, o professor-pesquisador, apoiado nesta metodologia, é capaz de tornar a sua sala de aula e seu trabalho docente focos e alvos de pesquisa produzindo produtos para o ensino apoiado na união do conhecimento prático e teórico.

Esta metodologia difere das demais pelo fato de a avaliação acontecer internamente, ou seja, o próprio professor investiga e reflete sobre sua prática didática. Cabe a ele, também, analisar como os conteúdos são tradicionalmente

ensinados, verificando possibilidades e limites para implementação de mudanças. Não há uma avaliação externa de grupos diferentes para verificar sua validade.

Há quatro etapas nesta metodologia de pesquisa.

1. Análises prévias;
2. Análise *a priori*;
3. Experimentação;
4. Análise *a posteriori* e Validação da Proposta.

Na 1ª fase, o professor reflete sobre a história do conteúdo em estudo, seu lugar atual no ensino, quais os conceitos que interagem com ele e contribuem para lhe dar significado, como o conteúdo é adotado no ensino e sua evolução ao longo das mudanças de programa.

A Análise *a priori* consiste na elaboração de um plano de ação diante das análises realizadas e problemas detectados na fase anterior, procurando obter um produto de ensino mais adequado. Nesta etapa há a preparação dos recursos didáticos a serem entregues e coletados dos alunos.

Na fase da experimentação, o professor reflete sobre as reações dos alunos, sua produção, erros e acertos, dúvidas e progressos. Portanto, junto com a experimentação, são iniciadas as fases de Análise *a posteriori* e Validação das Hipóteses. O professor não espera para analisar o trabalho após concluí-lo, pois durante a experimentação coletam-se os materiais trabalhados com os alunos, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações. Esta análise prossegue na fase de Análise *a posteriori* e Validação, quando são questionadas a prática e a validade da experiência.

Nos próximos capítulos serão analisadas detalhadamente cada uma destas fases no presente trabalho.

## Capítulo 2

### 1ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISES PRÉVIAS

A análise prévia foi realizada através da constatação de como a matemática financeira é recente no ensino médio brasileiro e sua evolução ao longo do tempo, ressaltando a sua abordagem atualmente. Foi também analisado o conhecimento dos alunos em relação ao tema.

#### 2.1. Histórico do tema no ensino médio

O estudo da matemática financeira no ensino médio brasileiro é recente. O primeiro contato que tivemos com este conteúdo aconteceu de forma muito superficial no final do ensino superior (1995) e depois com estudos já realizados como docente.

De fato, a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 2º grau (atual Ensino Médio) (Secretaria da Educação, 1992, p. 292) relatava este problema:

O assunto Matemática Financeira não possui tradição no ensino de matemática por não ser ministrado sistematicamente nas escolas do 2º grau. Por causa dessa falta de tradição, talvez haja alguma resistência com relação à sua introdução nos conteúdos atualmente ensinados.

O professor Augusto César Morgado (*in memoriam*) (2002) também relatou de forma bem clara este problema durante uma de suas exposições para professores do Ensino Médio em 2002, gravada e retransmitida em sua homenagem em 2010:

Matemática Financeira é um assunto que inexplicavelmente não costuma ser ensinado no Ensino Médio. Então a gente chega no Brasil a esta situação absurda de um aluno com 11 anos de Matemática, 8 no fundamental e 3 no médio, sai do ensino médio, entra na universidade e não é capaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista com desconto e uma compra a prazo. Ao mesmo tempo ele aprendeu a fazer contas com Matrizes, aprendeu o que são Números Complexos e é incapaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista e uma compra a prazo. Isto é, na minha opinião, uma maluquice total. Matemática Financeira pode e deve ser ensinada no Ensino Médio e a hora adequada é exatamente ligada a

Progressão Geométrica, portanto na 1ª série ou na 2ª série, dependendo do Currículo de cada escola.

Concorda-se com a afirmação do professor Morgado de que o melhor momento para estudar a Matemática Financeira é realmente ao estudar as Progressões Aritmética e Geométrica, como mostra, por exemplo, a atual proposta Curricular do Estado de São Paulo, abordando como primeiro conteúdo na 1ª série do Ensino Médio o estudo das Progressões, seguido do enfoque da Matemática Financeira ligada ao tema. Comparando aos materiais apostilados, que ainda estão defasados em relação a esta abordagem, o avanço trazido pela proposta Curricular atual é ainda mais evidenciado.

Os livros didáticos, quando apresentam o assunto, o fazem ligando-o somente ao estudo das funções ou, o que é pior, completamente desconectados dos conteúdos matemáticos, apresentando-o com fórmulas já prontas, conforme relatado no Guia de Livros Didáticos (Ministério da Educação, 2012, p.31) :

Na classificação dos conteúdos adotada no PNLD 2012, consideramos a matemática financeira no campo das funções pela importância das funções linear e exponencial como modelos para os problemas dessa área. No entanto, apenas uma das coleções aprovadas faz, explicitamente, tais conexões. Na matemática financeira, os conteúdos mais abordados são porcentagem, acréscimo e desconto, juros simples e compostos. Observamos, na abordagem desses tópicos, muita ênfase ao emprego direto de fórmulas, o que não é desejável. Esse é um assunto que deveria instrumentalizar o aluno para a cidadania, e isso pode ser feito por meio da exploração de problemas adequados e atuais.

Faz-se necessária e urgente uma formação direcionada aos professores, pois muitos nem sequer tiveram este conteúdo em sua formação e outros, ainda, o viram com abordagem nem sempre aprofundada.

A seguir, uma análise mais detalhada da atual proposta estadual de São Paulo com relação ao ensino da Matemática financeira.

## **2.2. MATEMÁTICA FINANCEIRA NA ATUAL PROPOSTA CURRICULAR DE SÃO PAULO**

A atual proposta curricular teve início em 2008. Em 2009, com algumas adaptações, foram produzidos cadernos com orientações para professores e cadernos com as atividades propostas aos alunos.

Após o estudo das Progressões Aritmética e Geométrica, na proposta curricular da 1ª série do Ensino Médio há um subtítulo indicado por Aplicações da Matemática Financeira. Começa imediatamente o assunto com a comparação entre juros simples e compostos. Entendemos que é preciso trabalhar o fator de aumento antes do tema; o aluno consegue compreender melhor os cálculos do montante e prestações.

O problema proposto inicialmente é o ilustrado na figura 1.

**Figura 1**

1. Complete:

**Tabela A**  
Capital = C  
Taxa de juros = 5% ao mês

	Evolução do capital a juros simples	Evolução do capital a juros compostos
Inicial	C	C
Depois de 1 mês	1,05.C	1,05.C
Depois de 2 meses	1,10.C	1,05 <sup>2</sup> .C
Depois de 3 meses		
Depois de 4 meses		

Problema proposto inicialmente. **Fonte:** Caderno do Aluno, 1ª série do ensino médio, p. 43.

Este problema inicial consiste em comparar Juro Simples e Composto com um valor genérico C e a fórmula é apresentada diretamente. Método esse que, aliás, entendemos não ser a melhor alternativa, como mostraremos no decorrer deste trabalho. Convém introduzirmos o tema com um problema que estipule um valor inicial (Capital) e que trabalhe a construção de uma tabela mais ampla com o aluno, analisando o que acontece no decorrer do tempo. A fórmula é o final do processo.

A seguir, a alternativa que propomos.

Figura 2

**Problema desencadeador:**

1- Emprestei R\$ 1.000,00 de um amigo e combinei pagar-lhe uma taxa de 10% ao mês. Quanto terei que pagar após 5 meses?

Problema desencadeador. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Desenvolvimento:**

- Montar a tabela (tabela 1), construindo-a com os alunos e analisando mês a mês;
- comparar Juro Simples e Composto (relacionar PA e PG);
- a fórmula será etapa final do processo (geralmente o aluno pergunta se não tem um jeito mais fácil, já que pela tabela torna-se muito trabalhoso quando os prazos são longos);
- a metodologia mais detalhada será apresentada no decorrer do trabalho.

Tabela 1

Tempo	Saldo no início do período	Juros	Saldo no final do período
1	1.000,00	10% de 1.000 = 100	1.100,00
2	1.100,00	10% de 1.000 = 100	1.200,00
3	1.200,00	10% de 1.000 = 100	1.300,00
4	1.300,00	10% de 1.000 = 100	1.400,00
5	1.400,00	10% de 1.000 = 100	1.500,00
Total	-	50% de 1.000 = 500	1.500,00

Juro Simples. **Fonte:** elaborado pelo autor.

Tabela 2

Tempo	Saldo no início do período	Juros	Saldo no final do período
1	1.000,00	10% de 1.000 = 100	1.100,00
2	1.100,00	10% de 1.100 = 110	1.210,00
3	1.210,00	10% de 1.210 = 121	1.331,00
4	1.331,00	10% de 1.331 = 133,10	1.464,10
5	1.464,10	10% de 1.464,10 = 146,41	1.610,51
Total	-	610,51	1610,51

Juro Composto. **Fonte:** elaborado pelo autor.

O 2º e o 3º problemas recomendados no Caderno do Aluno são os apresentados na figura 3.

**Figura 3**

2. Suponha que um cidadão aplique mensalmente, durante 8 meses, uma quantia fixa de R\$ 200,00 a juros simples de 5%. Ao final, depois dos 8 meses de aplicação, quanto terá acumulado essa pessoa? A tabela de capitalização a seguir pode ajudá-lo a organizar o método de resolução:

Matemática - 1ª série - Volume 1

**Tabela B**

Mês	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	Final
Capital	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200					
					200				
						200			
							200		
								200	

3. Em relação ao problema anterior, alterando apenas a forma de incidência da taxa de juros, de simples para compostos, pode ser escrita a seguinte **Tabela C**, que precisa ser completada:

**Tabela C**

Mês	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	Final
Capital	200	$200 \cdot 1,05$	$200 \cdot 1,05^2$	$200 \cdot 1,05^3$	$200 \cdot 1,05^4$	$200 \cdot 1,05^5$	$200 \cdot 1,05^6$	$200 \cdot 1,05^7$	$200 \cdot 1,05^8$
		200	$200 \cdot 1,05$	$200 \cdot 1,05^2$	$200 \cdot 1,05^3$	$200 \cdot 1,05^4$	$200 \cdot 1,05^5$	$200 \cdot 1,05^6$	$200 \cdot 1,05^7$
			200	$200 \cdot 1,05$	$200 \cdot 1,05^2$	$200 \cdot 1,05^3$	$200 \cdot 1,05^4$	$200 \cdot 1,05^5$	$200 \cdot 1,05^6$
				200	$200 \cdot 1,05$	$200 \cdot 1,05^2$	$200 \cdot 1,05^3$	$200 \cdot 1,05^4$	$200 \cdot 1,05^5$
					200				
						200			
							200		
								200	

Problema 2 e 3. **Fonte:** Caderno do Aluno, 1ª série do ensino médio, p. 44.

Interessante a apresentação na tabela. No entanto, consideramos que se for trabalhado o fator de aumento e a representação geométrica antes, utilizando o diagrama das flechas e o fluxo de caixa que será apresentado neste trabalho, a formalização ficará mais compreensível para o aluno.

Da mesma forma o cálculo das prestações fica mais visível se fizermos a representação com o diagrama de flechas.

Observe a seguir, na figura 4, como é solucionado o problema 4 sobre o cálculo da prestação no caderno do professor na proposta estadual:

**Figura 4**

#### **Problema 4**

Uma geladeira cujo preço à vista é de R\$ 1 500,00 será financiada em seis parcelas mensais fixas. Se os juros compostos cobrados no financiamento dessa geladeira são de 3% ao mês, qual é o valor da parcela mensal? (Dado:  $1,03^6 = 1,19$ .)

*O valor futuro da geladeira, em seis meses, será igual  $1\ 500 \cdot 1,03^6 = 1\ 500 \cdot 1,19 = 1\ 785$ .*

*A soma das parcelas fixas, a 3% de juros compostos ao mês, recai em:  $S = P \cdot (1,03 + 1,03^2 + \dots + 1,03^6)$ , onde  $P$  é o valor da parcela fixa mensal. Como  $S = 1\ 785$ , tem-se:  $1\ 785 =$*

$$P \cdot \frac{1,03^6 \cdot 1,03 - 1,03}{1,03 - 1} = P \cdot \frac{1,03(1,03^6 - 1)}{0,03}$$

$$P \cdot 34,33 \cdot (1,03^6 - 1) =$$

$$P \cdot 34,33 \cdot 0,19 =$$

$$1\ 785 = P \cdot 6,5227 \Rightarrow P = 273,65$$

*Portanto, a parcela mensal deverá ser igual a R\$ 273,65.*

Problema 4. **Fonte:** Caderno do professor, p. 49.

Observando o enunciado do problema, constata-se inicialmente que não fica claro se haverá ou não o pagamento da prestação no ato da compra. A resolução acima e de todos os problemas envolvendo o cálculo de prestações nesta proposta estadual é feita considerando o primeiro pagamento no ato da compra. Assim, o aluno pode decorar a forma de resolução sem entender o que está acontecendo efetivamente. Logo, se for proposto um problema para o cálculo da prestação sem entrada, provavelmente o aluno terá dificuldades para resolver ou apresentará a resolução incorreta.

Usando o diagrama de flechas o aluno poderá dispor de vários métodos de resolução, ou seja, ele poderá “levar” as prestações ( $P$ ) e o valor à vista para o tempo 6 e compará-los (figura 5 a seguir) ou ainda comparar todas as prestações e entrada no tempo 5, que será o pagamento da última parcela (figura 6). Outra opção é “transportar” todas as prestações para o tempo 0 e comparar com a entrada (figura 7).

Figura5

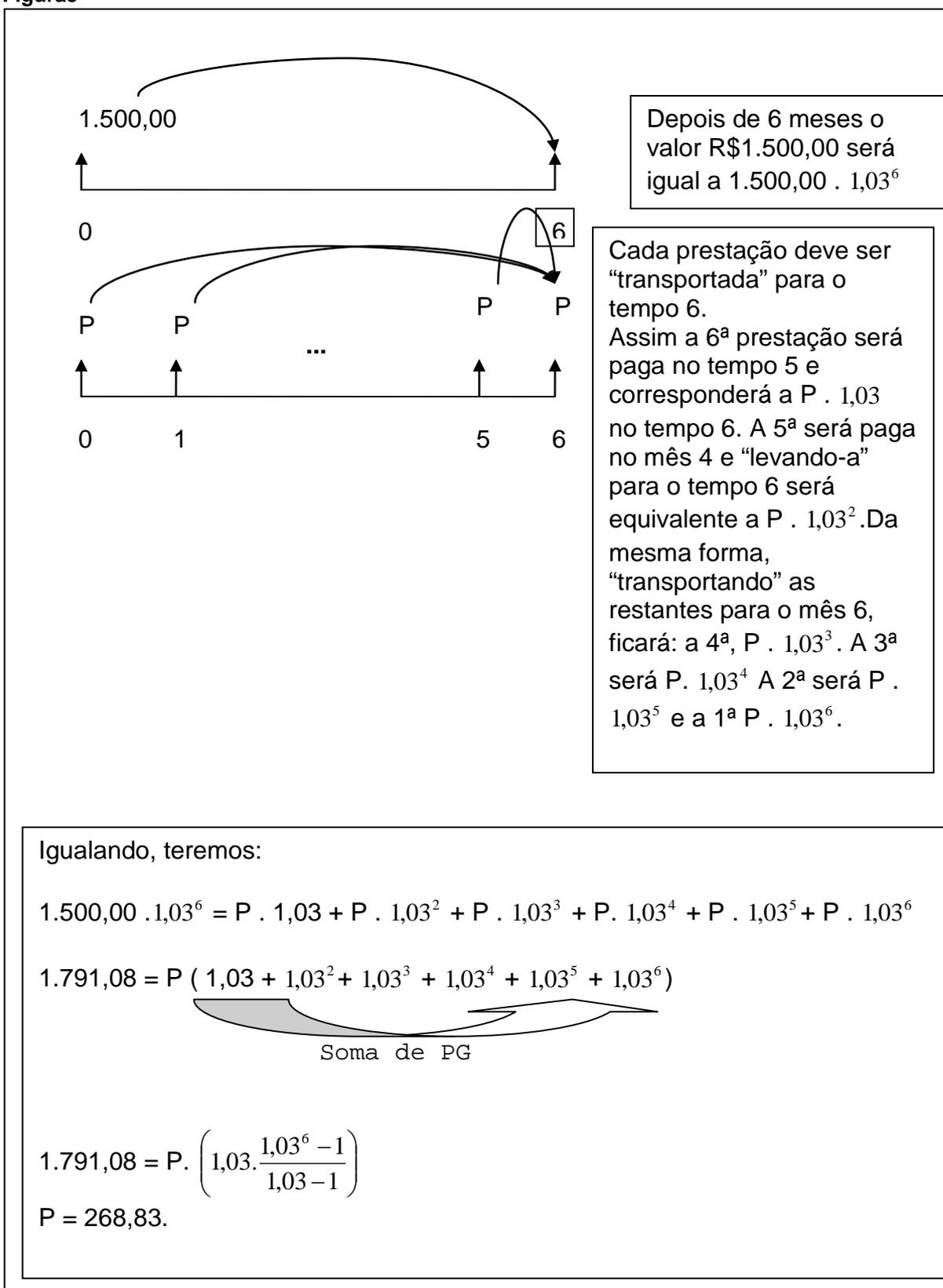


Diagrama de flechas transportando ao tempo 6. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Na resolução da proposta estadual deu um resultado diferente devido às aproximações de duas casas decimais apenas, ou seja, foi considerado para os

cálculos  $1,03^6=1,19$ . O ideal é utilizar calculadora e realizar aproximações com pelo menos 6 casas decimais.

Figura 6

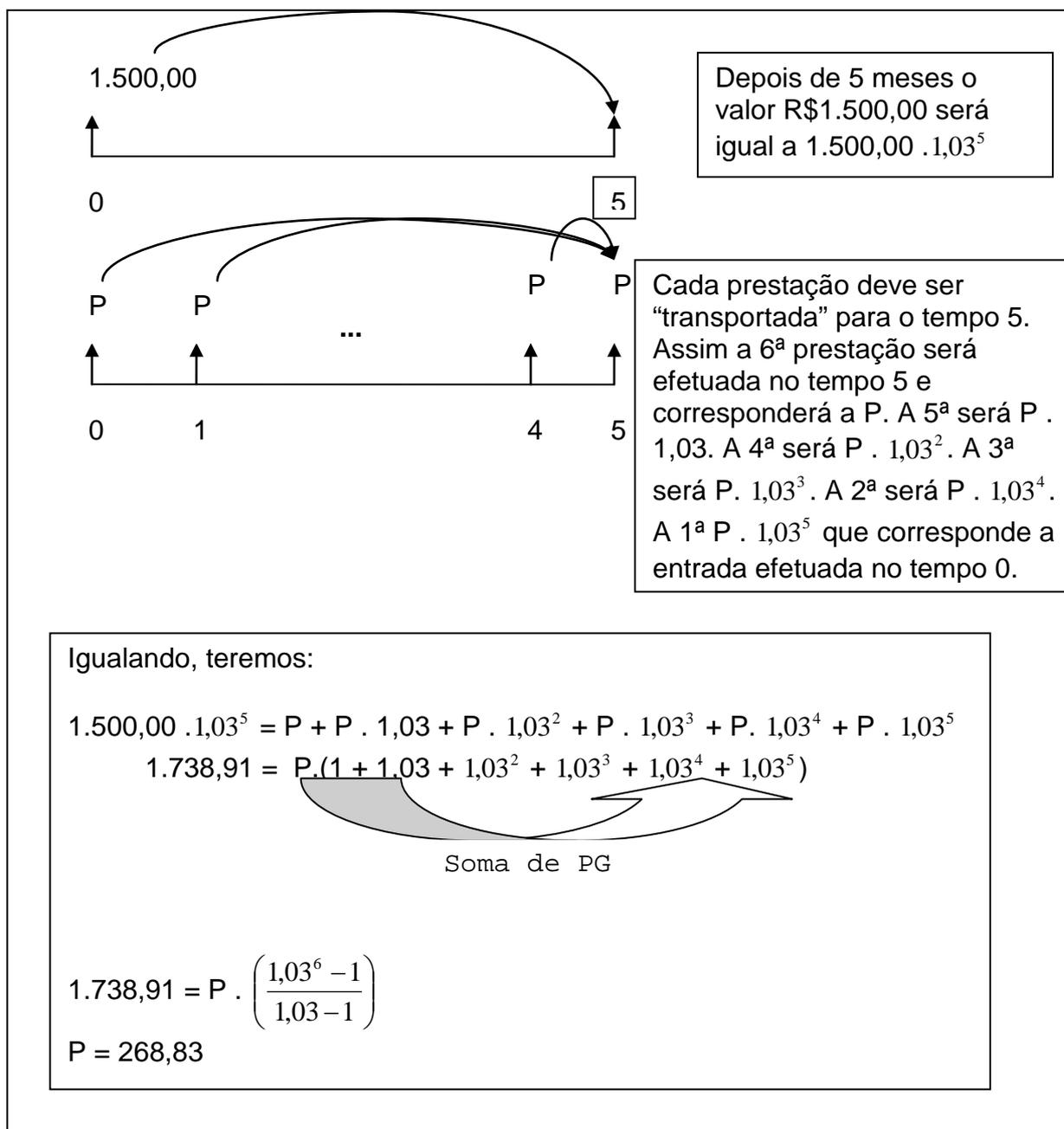


Diagrama de flechas transportando ao tempo 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Figura 7

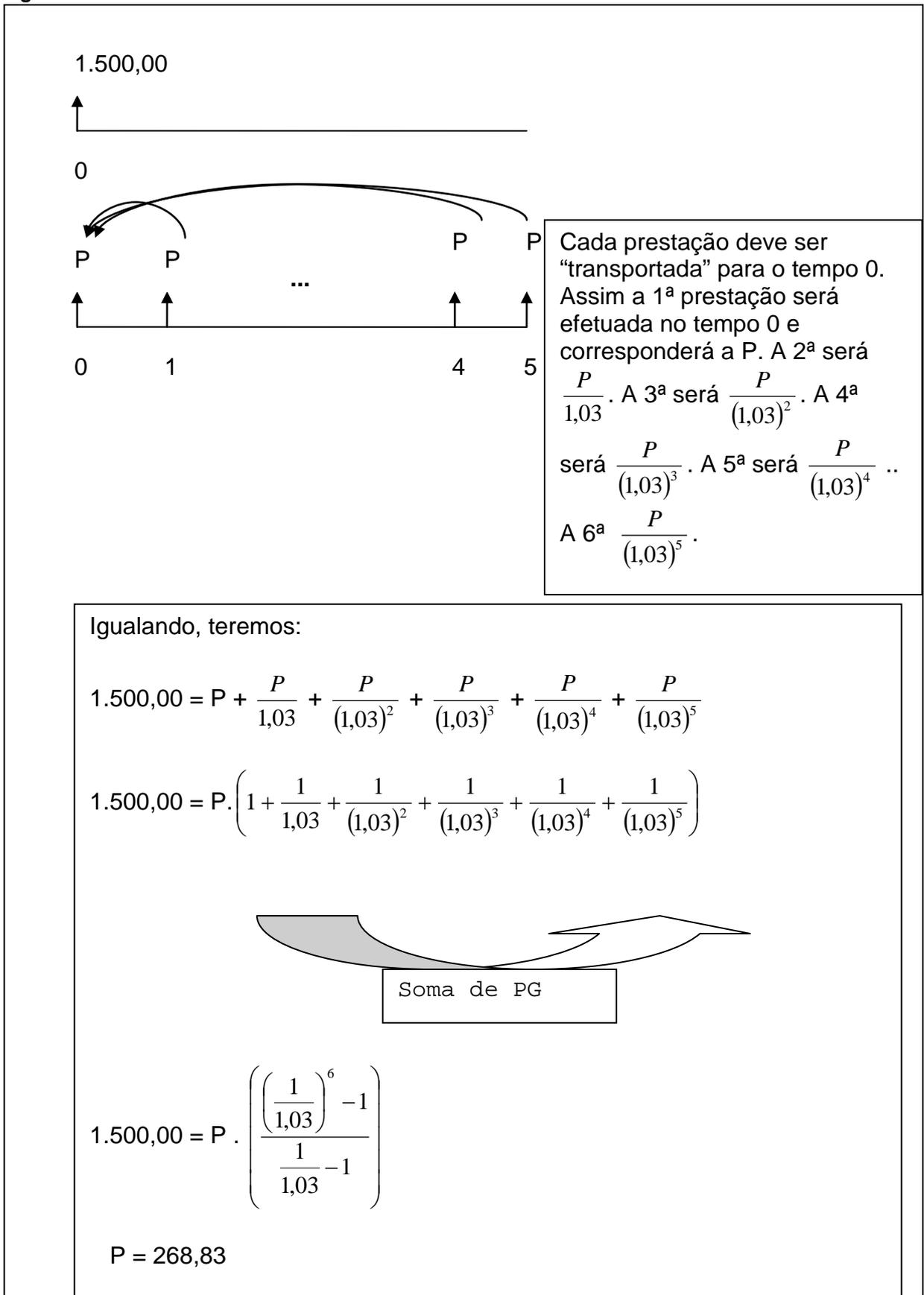


Diagrama de flechas transportando ao tempo 0. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Entendemos que é importante que o aluno saiba as várias formas de resolução e escolha a que melhor convém. Com certeza, construindo o diagrama de flechas, não apresentado no caderno do professor, o aluno não teria problema em calcular se há ou não entrada nos pagamentos, compreendendo melhor os cálculos a serem realizados.

Embora a proposta da Secretaria da Educação incentive o uso das calculadoras, as resoluções no caderno do professor são feitas considerando 2 casas decimais, produzindo diferenças consideráveis nos resultados. Assim, por exemplo, o problema 4, citado anteriormente, no caderno do professor é resolvido com aproximação de duas casas decimais, obtendo como prestação R\$273,65. Realizando os cálculos com 6 ou mais casas decimais, o valor da prestação é igual R\$ 268,83, ou seja, há uma diferença de R\$ 4,82 em cada prestação. Como são 6 prestações haverá uma diferença total de R\$ 28,90. Para evitar este problema, o ideal seria utilizar 4 ou 6 casas decimais, o que torna as contas muito trabalhosas. Percebe-se assim a importância da calculadora. Também deveria ser explicitado o critério de arredondamento, para que sejam eliminadas ou compreendidas as diferenças daí decorrentes.

Na abordagem dos problemas na proposta estadual, sentimos a necessidade de serem incluídas questões envolvendo a tomada de decisões na compra de um produto, por exemplo, quando a pessoa dispõe de várias opções de pagamento de um produto ou ainda precisa decidir se compra à vista ou a prazo dispondo de uma aplicação financeira.

Enfim, a atual proposta da Secretaria da Educação, se comparada aos livros didáticos, apresenta avanços pela ousadia de tratar o assunto vinculando-o com o estudo das progressões aritméticas e geométricas e mesmo ressaltando a importância do uso da calculadora, inclusive científica. No entanto, há ainda algumas mudanças necessárias conforme relato acima.

### **2.3. Conhecimento dos alunos sobre a Matemática Financeira**

Conforme descrito no capítulo 1, constatou-se a dificuldade dos alunos em relação aos conceitos da matemática financeira. Alguns conheciam a fórmula “decorada” para o cálculo do montante na capitalização composta, mas, quando indagados sobre o seu significado, desconheciam completamente a sua origem.

Outros não tinham tido nenhum contato com o tema e sequer diferenciavam juro simples e composto.

Diante da dificuldade dos alunos e da importância do tema para estes, que estão terminando a educação básica e terão em muitos momentos da sua vida que decidir sobre opções de crédito para compra e venda de produtos e serviços, decidiu-se incluir o tema, já que um dos conteúdos da 3ª série do Ensino Médio é justamente o retorno aos estudos das funções, mais especificamente neste caso das funções afins e exponenciais, que estão diretamente relacionadas ao estudo das capitalizações simples e composta.

Aproveitou-se também para revisar as progressões aritmética e geométrica estudadas na 1ª série do ensino médio, associando-as com as funções afins e exponenciais respectivamente.

Foi necessário fazer ajustes para “encaixar” estas atividades concomitantemente com o conteúdo proposto na 3ª série do Ensino Médio. Neste momento as palavras do professor Morgado sobre a incoerência de um aluno que termina o ensino médio sem saber decidir entre uma compra à vista ou a prazo e as constatações expostas no Guia de Livros Didáticos sobre o estudo automático da matemática financeira, apoiado em fórmulas prontas e sem sentido para o aluno, bem como o desconhecimento dos alunos em relação aos termos financeiros como amortização de uma dívida, fizeram com que nos empenhássemos em encontrar formas de abordá-lo. O currículo do Estado de São Paulo (Secretaria da Educação, 2010, p. 49) apresenta de maneira bem colocada um item intitulado “Ensinar é fazer escolhas: mapas e escalas” e neste texto há justamente a seguinte colocação:

(...) As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível arquitetar uma maneira de fazê-lo: quem tem um ‘porquê’ arruma um ‘como’. O significado de um tema é como uma paisagem a ser apresentada aos alunos e, para cada paisagem, é possível escolher uma escala adequada de visualização.

Assim, sem excluir os temas indicados no currículo para a 3ª série do ensino médio, foi necessário adaptar a escala de aprofundamento de cada um deles para incluir a Sequência Didática sobre a Matemática Financeira que será abordada no próximo capítulo.

## Capítulo 3

### 2ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA NO PRESENTE TRABALHO: ANÁLISE A PRIORI

Nesta etapa da pesquisa foi construída uma Sequência Didática composta por 7 atividades, com total de 11 aulas de 50 minutos.

O objetivo primordial destas atividades consistiu em facilitar a compreensão do aluno no estudo da matemática financeira embasada nos conceitos das progressões aritmética e geométrica, bem como nos conceitos de funções afim e exponencial, ou seja, o estudo deste tema não se baseou em apenas decorar fórmulas e aplicá-las. Além disso, trabalhar com questões reais relativas ao tema, envolvendo os alunos na resolução dos problemas.

#### 3.1. Sequência Didática: atividades e objetivos

##### ➤ Primeira Atividade: Fator de aumento e desconto

**Tempo:** 2 aulas

**Objetivos:**

- Analisar a metodologia utilizada pelos alunos na resolução dos problemas envolvendo acréscimos e descontos percentuais.
- Discutir a utilização do fator de aumento (conceito importante no estudo do juro composto, função exponencial).

##### ➤ Segunda Atividade: Aumentos e Descontos Sucessivos

**Tempo:** 1 aula

**Objetivos:**

- Compreender que aumentos sucessivos não correspondem à soma deles; por exemplo, dois aumentos de 20% e 30% não correspondem a um aumento único de 50%.

- Calcular corretamente aumentos e descontos sucessivos.

➤ **Terceira Atividade: Juro Simples e Composto**

**Tempo:** 2 aulas

**Objetivos:**

- Comparar juro simples e composto (relacionar PA e PG), construindo tabelas para entender o processo.
- Deduzir a fórmula para o cálculo de juro composto e simples utilizando-as quando os períodos são longos para facilitar cálculos.
- Resolver problemas envolvendo os dois sistemas.

➤ **Quarta Atividade: Fluxo de Caixa**

**Tempo:** 1 aula

**Objetivo:**

- Representar geometricamente na linha do tempo e com flechas as entradas e saídas de dinheiro, facilitando a resolução dos problemas.

➤ **Quinta Atividade: Comprar à vista ou a prazo?**

**Tempo:** 2 aulas

**Objetivos:**

- Analisar a melhor alternativa de compra dentre várias opções.
- Perceber que a melhor alternativa para uma pessoa pode não ser para outra, dependendo de quanto ela consegue fazer seu dinheiro render.
- Calcular o valor das prestações quando estas são iguais.
- Aplicar corretamente os conceitos de PG na resolução dos problemas.

➤ **Sexta Atividade: Sistemas de Financiamento**

**Tempo:** 2 aulas

**Objetivos:**

- Preencher corretamente a tabela e compreender a evolução da dívida no Sistema de Amortização Francês (SAF) e Sistema de Amortização Constante (SAC).

- Constatar que, no SAF, as prestações são constantes, os juros são decrescentes e a amortização é uma PG.

- Analisar que, no SAC, as amortizações são constantes e os juros, prestação e saldo devedor evoluem no tempo conforme uma PA.

- Comparar os dois sistemas de financiamento.

### ➤ **Sétima Atividade: Análise do FIES (Financiamento Estudantil)**

**Tempo:** 1 aula

**Objetivos:**

- Identificar as características do FIES.

- Verificar que se trata do Sistema de Amortização Francês.

- Analisar a tabela através de uma simulação feita no *site* do FIES.

## **3.2. Hipóteses**

Ao criar estas atividades consideramos que atingiremos as seguintes defasagens detectadas nas análises prévias:

a) Acredita-se que o fator de aumento e desconto (1ª atividade da sequência) e aumentos e descontos sucessivos (2ª atividade) trabalhados juntamente com a visão geométrica (barras retangulares) auxiliam a compreensão do cálculo do Montante na capitalização simples e composta (3ª atividade), evitando o uso de fórmulas decoradas e sem sentido para o aluno. Esta metodologia desperta o interesse dos alunos que encontram significado para o estudo;

b) a construção de tabelas (3ª atividade) apresentando a evolução do montante nos juros simples e compostos auxiliam a percepção da aplicação dos conceitos de progressões aritmética e geométrica estudados anteriormente;

c) o uso da calculadora torna-se essencial durante a resolução dos problemas e o aluno percebe que não basta ter este instrumento para seu uso se não souber realmente os conceitos matemáticos envolvidos na resolução de problemas. Assim a calculadora torna-se apenas ferramenta para agilizar cálculos muito extensos, pois quem tem que pensar mesmo é o aluno;

d) a 4ª atividade (Fluxo de Caixa) auxilia a compreensão e resolução dos problemas envolvendo principalmente a decisão entre várias opções de compra e venda de produtos, cálculo de prestações abordados na 5ª , 6ª e 7ª atividades;

e) embora não seja assunto apresentado em nenhum material didático do ensino médio, é possível e importante abordar com os alunos deste segmento os dois sistemas de financiamento mais utilizados no Brasil, Sistema Francês de Amortização e Sistema de Amortização Constante (5ª Atividade), de uma maneira simples para que o aluno compreenda o processo de cálculo e consiga analisar tabelas de simulações de financiamento, como por exemplo do FIES, objeto de estudo da 6ª atividade.

No próximo capítulo serão apresentadas as aplicações das sete atividades construídas, para comprovação das hipóteses levantadas nesta análise *a priori*.

## Capítulo 4

### 3ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA NO PRESENTE TRABALHO: EXPERIMENTAÇÃO I

A fase de Experimentação consistiu na aplicação das sete atividades construídas durante a análise *a priori* com os alunos do 3º Ano A e 3º Ano B do Ensino Médio da “E. E. Prof. Aníbal do Prado e Silva”.

Foi necessário conciliar o estudo da matemática financeira com os conteúdos da 3ª série do ensino médio, já que, como relatado anteriormente, este conteúdo é previsto na 1ª série do Ensino Médio.

Para conciliá-lo com o planejamento, estas atividades foram aplicadas em duas etapas. As primeiras 3 atividades foram aplicadas no final de setembro e começo de outubro de 2012; e as quatro últimas aconteceram no final de novembro.

Como as duas primeiras atividades, além de sua importância individual, serviram de apoio para a 3ª atividade serão apresentadas neste capítulo. A 4ª e 5ª atividades embasam a 6ª e a 7ª e serão apresentadas no próximo capítulo.

#### 4.1. Primeira Atividade: Fator de aumento e desconto

O objetivo desta atividade foi analisar como os alunos resolviam problemas envolvendo acréscimos e descontos percentuais e trabalhar a resolução com o fator de aumento (conceito importante no estudo do juro composto, função exponencial).

A atividade foi aplicada utilizando-se duas aulas de 50 minutos. Iniciou-se a aula com um problema desencadeador (figura 8), dando tempo para que o aluno o resolvesse.

**Figura 8**

#### **1º Problema desencadeador**

Uma calça que custava R\$ 120,00 sofreu um acréscimo de 5%. Qual será o seu novo valor?

1º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Os alunos resolveram sem interferências do professor, que somente acompanhou o processo. Em seguida, foram discutidas as várias soluções. Na figura 9 há algumas soluções apresentadas pelos alunos durante esta atividade:

**Figura 9**

**Cálculo Mental:**

10% de 120,00 = R\$ 12,00 (o aluno dividiu 120 por 10 encontrando 1/10).

5% de 120,00 = R\$ 6,00.

Preço final da calça:  $120,00 + 6,00 = 126,00$ .

**Usando a fração centesimal:**

5% de 120,00 =  $\frac{5}{100} \cdot 120 = 6,00$ .

$120,00 + 6,00 = 126,00$ .

**Usando a forma decimal:**

$0,05 \cdot 120,00 = 6,00$

Preço final da calça:  $120,00 + 6,00 = 126,00$ .

Resolução do 1º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Interessante o aluno que resolveu através do cálculo mental. Como já havíamos notado em outras oportunidades, ele geralmente não escreve o que faz, mas apresenta rapidamente a resposta. Neste caso incentivou-se o registro.

Percebeu-se que os alunos acharam o valor do aumento e somaram com o valor inicial. Em nenhuma das duas turmas analisadas (aproximadamente 60 alunos) o cálculo foi feito diretamente

Neste momento foi proposto aos alunos o desafio de resolver o problema usando apenas uma operação aritmética, conforme o problema a seguir.

**Figura 10**

**2º Problema desencadeador**

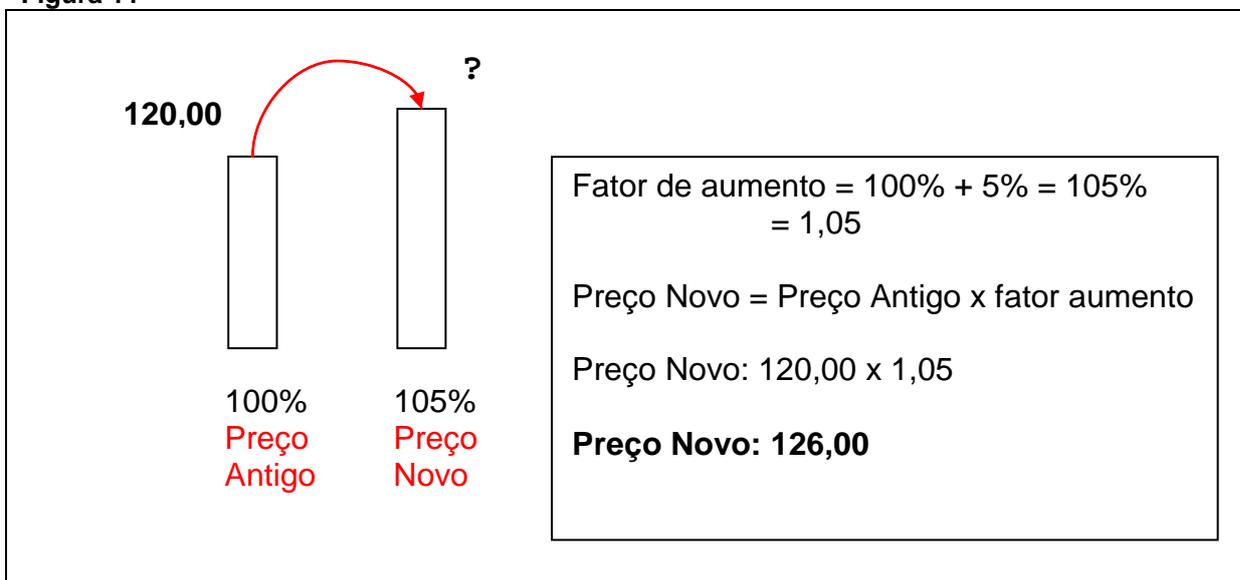
Como resolver o problema 1, utilizando apenas uma operação matemática?

2º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

O fator de aumento foi inserido nesta etapa, utilizando-se a visualização geométrica (barras retangulares). O preço inicial da calça era R\$120,00, o que correspondia a 100% do preço, e com o acréscimo de 5% deseja-

se obter o preço novo, que agora corresponde a 105%, conforme visualização e resolução demonstrado na figura 11.

**Figura 11**



Resolução 2º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

O fator de aumento é importante para compreensão do cálculo do juro composto e da função exponencial em geral. Nos livros didáticos, muitas vezes, as fórmulas aparecem prontas e o aluno não consegue enxergar como esta foi produzida.

**Figura 12**

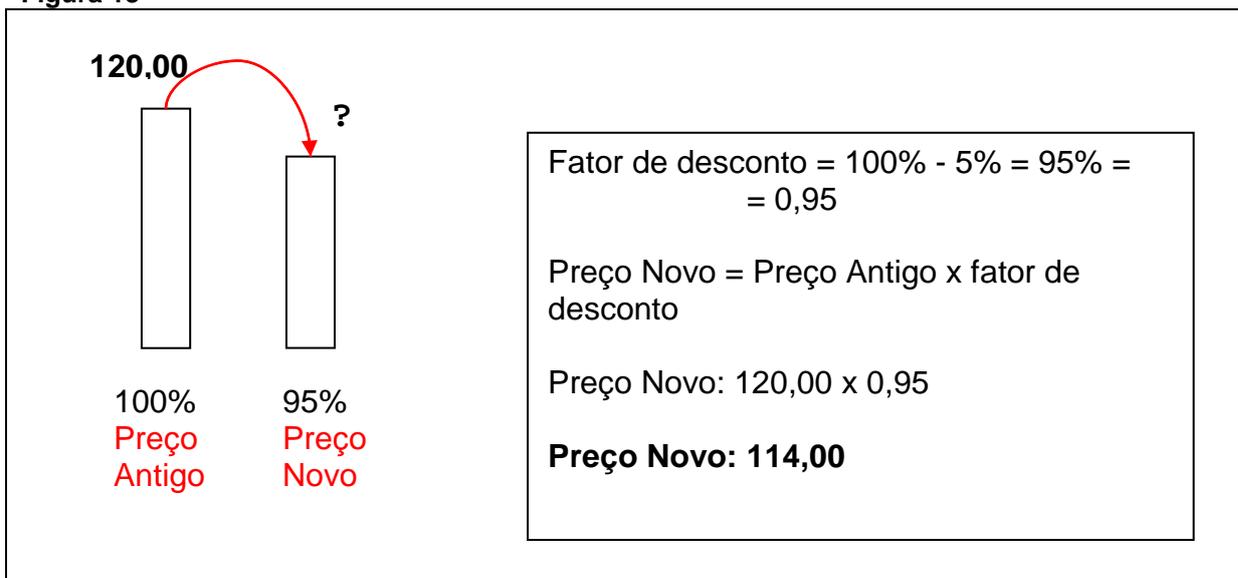
### 3º Problema desencadeador

Supondo agora que a calça que custava R\$ 120,00 está com desconto de 5%. Usando uma única operação matemática, calcule o novo preço.

3º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

O terceiro problema foi discutido com os alunos, que rapidamente compararam com o problema anterior e perceberam que o fator de desconto é obtido utilizando-se a subtração, ou seja, o valor do produto inicial corresponde a 100% e, com desconto de 5%, passará a custar 95% do valor inicial, conforme resolução na figura 13.

Figura 13



Resolução 3º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Figura 14

#### 4º Problema desencadeador

Depois de um aumento de 15%, uma máquina fotográfica passou a custar R\$ 460,00. Qual era o preço antes do aumento?

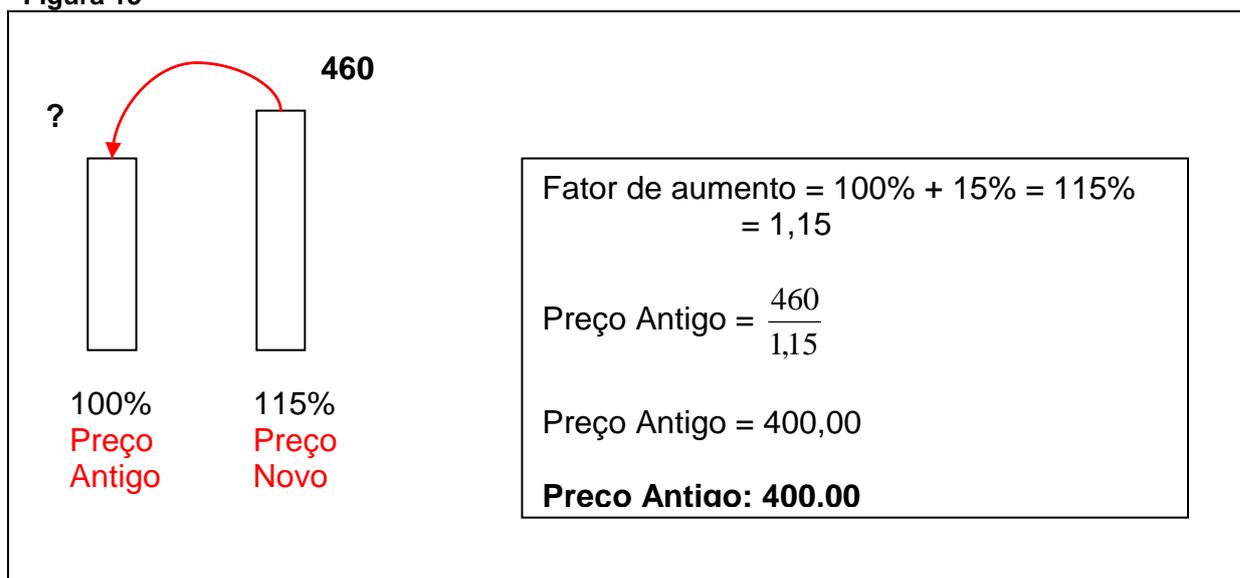
4º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Os alunos resolveram inicialmente sem interferências do professor que somente acompanhou o processo. Apenas dois alunos resolveram corretamente, montando uma equação. O restante dos alunos calculou incorretamente 15% de 460,00 e subtraiu de R\$ 460,00. Este é um erro comum que já se observou em problemas parecidos com outras turmas de alunos.

Para que percebessem o erro, foi recomendado que verificassem o resultado encontrado, ou seja, o valor encontrado pelos alunos foi R\$ 391,00 e fazendo o acréscimo de 15% não se retorna ao valor de R\$ 460,00.

Neste momento, trabalhou-se a operação inversa, ou seja, quando temos o valor inicial, multiplicamos pelo fator de aumento. Neste caso como temos o valor final, então dividimos pelo fator de aumento. É importante apresentar a representação geométrica, pois alguns alunos compreendem melhor visualizando.

Figura 15



Resolução 4º Problema desencadeador – Atividade 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Após discutir estes problemas com os alunos, foram propostos os exercícios conforme apresentados no Apêndice A deste trabalho.

Acompanhou-se a resolução e os alunos praticamente não apresentaram dificuldades. Alguns apresentaram dúvidas no exercício 2, nos dois últimos itens da tabela, devido ao fato de as taxas serem números decimais, mas dificuldades rapidamente sanadas.

#### 4.2. Segunda Atividade: Aumentos e Descontos Sucessivos

Esta atividade teve como duração uma aula de 50 minutos.

Figura 16

**1º Problema desencadeador**

Um produto sofreu um acréscimo de 20%. Na semana seguinte passou por outro reajuste de 10%. Qual a porcentagem total de acréscimo?

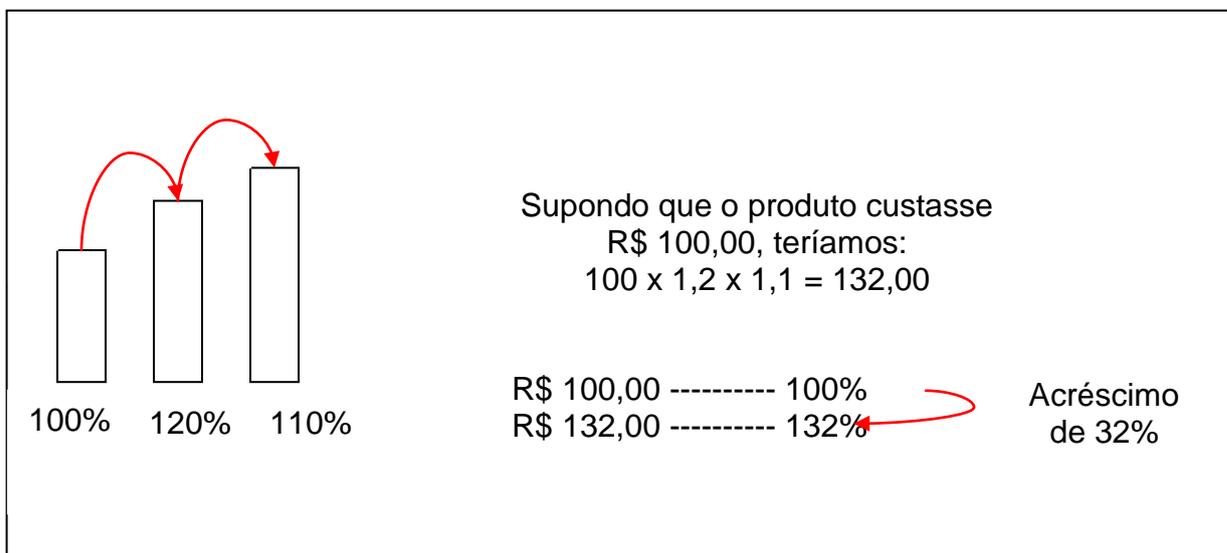
1º Problema desencadeador – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

A metodologia adotada foi questionar oralmente os alunos sobre qual seria a resposta.

A maioria respondeu “Professora, é 30%”, ou seja, simplesmente somou as porcentagens. Alguns ficaram em dúvida e em uma das turmas um aluno fez a colocação (Thiago, 3º A): “Acho que não é assim porque teve um aumento, daí

o produto teve outro aumento em cima do preço novo”. Assim foi discutida a resolução usando o fator de aumento já estudado na atividade anterior (figura 17).

**Figura 17**



Resolução 1º Problema desencadeador – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

**Figura 18**

### 2º Problema desencadeador

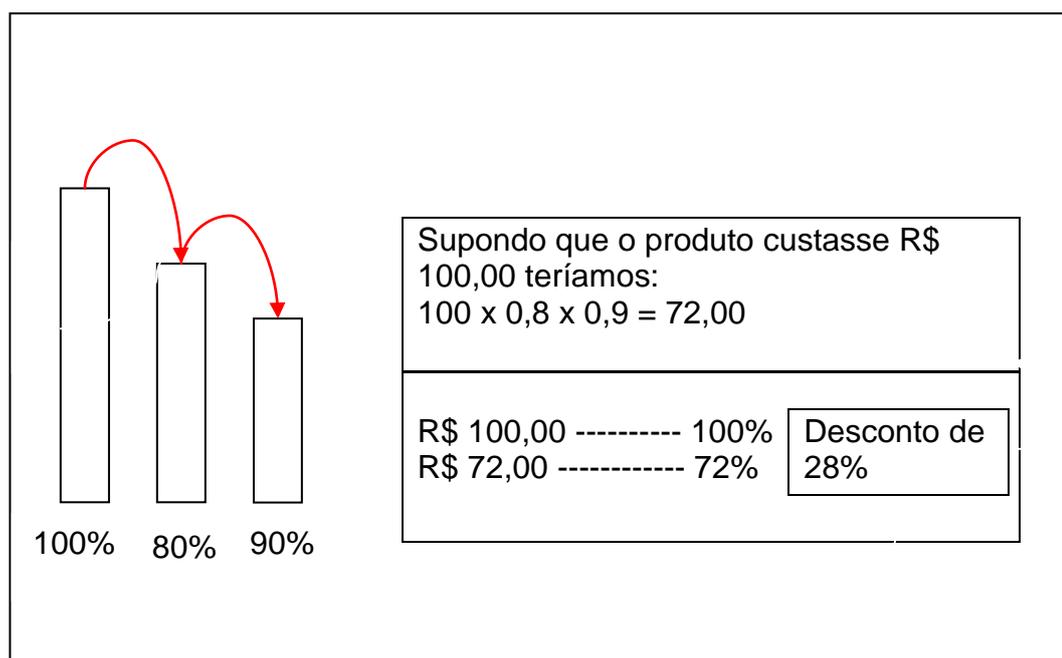
Agora suponha que o produto tenha um desconto de 20% e depois de alguns dias outro desconto de 10%. O desconto total será de 30%, maior do que 30% ou menor do que 30%? Justifique.

2º Problema desencadeador – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Na resolução deste problema, os alunos estavam mais “atentos”, já que tinham se equivocado ao responder precipitadamente o problema 1. Assim, logo alguns afirmaram “o desconto total não é 30%”. Um dos alunos (Massao, 3ºB), respondeu corretamente: “Acho que é menor do que 30% porque da 2ª vez o desconto foi de um valor menor”.

Foi então feita a resolução, utilizando a visualização geométrica (figura 19).

Figura 19



Resolução 2º Problema desencadeador – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor:

Em seguida os alunos resolveram os exercícios contidos no Apêndice B deste trabalho.

Alguns alunos resolveram o exercício 1 não utilizando o fator de aumento, conforme exemplo da figura 20.

Figura 20

1- Aumentos sucessivos de 30% e 20% equivalem a um aumento único de quanto?  
E descontos sucessivos de 30% e 20%?

Aumentos Sucessivos de 30% e 20%

$$\text{Preço Inicial} = 100,00$$

$$1^{\circ} \text{ Aumento} = 30\% \text{ de } 100 = 30,00$$

$$\text{depois do } 1^{\circ} \text{ aumento} = \text{R\$ } 130,00$$

$$2^{\circ} \text{ Aumento} = 20\% \text{ de } 130,00 = 26,00$$

$$\text{depois do } 2^{\circ} \text{ Aumento} = \text{R\$ } 156,00$$

$$\text{Taxa de aumento} = \frac{\text{Dif. Preços}}{\text{Preço Inicial}} \times 100 = \frac{56}{100} \times 100 = 56\%$$

Descontos sucessivos de 30% e 20%

$$\text{Preço Inicial} = 100,00$$

$$1^{\circ} \text{ desconto} = 30\% \text{ de } 100 = 30,00$$

$$\text{dps do } 1^{\circ} \text{ desconto} = 70,00$$

$$2^{\circ} \text{ desconto} = 20\% \text{ de } 70,00 = 14,00$$

$$\text{dps do } 2^{\circ} \text{ desconto} = 70,00 - 14,00 = 56,00$$

$$\text{Taxa de desconto} = \frac{\text{Dif. Preço}}{\text{Preço Inicial}} \times 100$$

$$\frac{44}{100} \times 100 = 44\%$$

Resolução do problema 1 por uma aluna do 3º B – Atividade 2. Fonte: Elaborado pelo autor.

No entanto, quando chegaram ao 2º problema em que o tempo é maior, os alunos sentiram dificuldade em resolvê-lo sem utilizar o fator de aumento e aderiram à forma de resolução que facilita o processo, como exemplo a seguir.

**Figura 21**

2- Uma inflação mensal de 3% ao mês equivale a uma inflação anual de quanto?

Handwritten solution for problem 2:

② Preço Inicial = 100  
 dps do 1º mês =  $100 \times 1,03 = 103$   
 dps de 2º mês =  $100 \times 1,03 \times 1,03 = 106,09$   
 ...  
 dps do 12º mês =  $100 \times (1,03)^{12} = 142,57$   
 =  $100 \times 1,4257 = 142,57$   
 Aumento R\$ 42,57 = 42,57%

Resolução do problema 2 por uma aluna do 3º B – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Observa-se que o aumento de R\$ 42,57 corresponderá a 42,57% pois foi utilizado R\$ 100,00 como o valor inicial, correspondendo a 100%. A aluna foi alertada a registrar de maneira mais detalhada este fato.

Percebeu-se também que alguns alunos ficaram intrigados ao perceber que, no 1º exercício, o colega tinha considerado um valor inicial diferente de 100 reais e o resultado final foi o mesmo de 56%. Resolver o exercício 2 da tarefa através do método de resolução do fator de aumento facilita a compreensão deste fato.

Os problemas desta atividade envolvendo inflação foram resolvidos com o auxílio de uma calculadora simples, como por exemplo, o problema 3 (figura 22).

Figura 22

3 - Uma inflação de 1% ao mês gera uma inflação anual de quanto?  
e semestral? E trimestral

$$100\% + 1\% = 101\%$$

$100 \times (1,01)^{12} = 112,68$	12,68% de aumento
$100 \times (1,01)^6 = 106,15$	06,15% de aumento
$100 \times (1,01)^3 = 103,03$	03,03% de aumento

Resolução do problema 3 por uma aluna do 3º A – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Foi preciso trabalhar com os alunos sobre como solucionar mais rapidamente na calculadora, ou seja, teclando  $1,01 \times 1,01$  e teclar = 12 vezes (caso inflação anual).

Os exercícios 4 e 5 (Apêndice B) ficaram como tarefa. O problema 4 foi facilmente resolvido pelos alunos, depois de resolverem os problemas anteriores, sendo que alguns atribuíram um valor para  $x$  e resolveram conforme exercício 1 acima e outros apenas fizeram  $x \cdot 1,5 \cdot 0,8 = 1,2x$ , ou seja, houve lucro de 20%.

No problema 5, conforme já esperado, os alunos apresentaram dificuldades. Alguns resolveram incorretamente através da média aritmética, ou seja, dividiram 15% por 4 obtendo 3,75% ao mês, por isso sua resolução foi retomada na aula seguinte da maneira demonstrada na figura 23.

**Figura 23**

5- Uma inflação de 15% em 4 meses é gerada por uma inflação mensal média de quanto?

**Sugestão:** lembre-se que a raiz quarta de um número pode ser obtida, na calculadora, apertando duas vezes a tecla da raiz quadrada.

Resolução:

Fator de aumento =  $1 + x$

Depois de 1 mês =  $1+x$

Depois de 2 meses =  $(1 + x) \cdot (1 + x) = (1 + x)^2$

Depois de 3 meses =  $(1+x) \cdot (1+x) \cdot (1+x) = (1 + x)^3$

Depois de 4 meses =  $(1 + x)^4$

Logo, depois de 4 meses temos a equação:

$$(1 + x)^4 = 1,15$$

$$1 + x = \sqrt[4]{1,15}$$

$$x \cong 1,03558 - 1$$

$$x \cong 0,03558 \cong 3,56\%$$

Resolução do problema 5 – Atividade 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Assim a taxa mensal é obtida através da média conhecida como média geométrica, e não pela média aritmética.

### 4.3. Terceira Atividade: Juro Simples e Composto

O objetivo desta atividade foi discutir com os alunos os dois sistemas existentes para o cálculo dos juros. Foram utilizadas 2 aulas de 50 minutos.

Para envolver os alunos nesta discussão, a professora iniciou fazendo o seguinte pedido:

- Preciso de R\$ 1.000,00. Quem pode me emprestar?

Geralmente um aluno se dispõe a tal, participando da “brincadeira”. Esta metodologia desperta o interesse da sala para a discussão do tema que até então não é dito pelo professor.

Na oportunidade, o aluno Jeferson, do 3º B, se dispôs a ajudar e, no 3º A, foi o aluno Gabriel. Para facilitar iremos utilizar como exemplo o aluno Gabriel.

A professora então continua:

- Gabriel, posso lhe pagar uma taxa de juros de 10% ao mês e somente terei condições de pagar depois de 5 meses. Topa?

A seguir a professora construiu com os alunos uma tabela expondo como pretendia pagar explicando da seguinte maneira:

- Bom, no início do período estou devendo R\$ 1.000,00. Há 10% de juros correspondentes ao 1º mês que equivale a R\$ 100,00, portanto no final do 1º mês estarei devendo R\$ 1.100 para Gabriel. Começo o 2º período devendo 1.100,00 e novamente há uma taxa de 10% de juros de R\$ 1.000,00, o que corresponde a R\$ 100,00 e fico com um saldo devedor de 1.200,00 no final do período.

Continuando o processo a tabela foi preenchida conforme modelo a seguir (tabela 3), com os alunos acompanhando e participando da resolução:

**Tabela 3**

<b>Tempo</b>	<b>Saldo no início do período</b>	<b>Juros</b>	<b>Saldo no final do período</b>
1	1.000,00	10% de 1.000 = 100	1.100,00
2	1.100,00	10% de 1.000 = 100	1.200,00
3	1.200,00	10% de 1.000 = 100	1.300,00
4	1.300,00	10% de 1.000 = 100	1.400,00
5	1.400,00	10% de 1.000 = 100	1.500,00
<b>Total</b>	-	50% de 1.000 = 500	1.500,00

Juro Simples – Atividade 3. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Em seguida, a professora comentou que este jeito de calcular foi a forma que pensou ao emprestar dinheiro de Gabriel. Mas Gabriel já pensou diferente diz a professora:

- Olha só como Gabriel pensou. No final do 1º mês a professora me deve R\$ 1.100,00, que corresponde ao empréstimo de R\$ 1.000,00 mais 10% de 1.000,00. Mas no 2º mês, como começa o período com saldo devedor de R\$ 1.100,00, os juros agora incidem sobre os R\$ 1.100,00, e não mais sobre o valor inicial de 1.000,00. Vejamos como ficará a tabela (tabela 4).

Tabela 4

Tempo	Saldo no início do período	Juros	Saldo no final do período
1	1.000,00	10% de 1.000 = 100	1.100,00
2	1.100,00	10% de 1.100 = 110	1.210,00
3	1.210,00	10% de 1.210 = 121	1.331,00
4	1.331,00	10% de 1.331 = 133,10	1.464,10
5	1.464,10	10% de 1.464,10 = 146,41	1.610,51
Total	-	610,51	1610,51

Juro composto – Atividade 3. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

A professora então questionou:

- Qual delas está correta, a forma como eu calculei ou a forma como Gabriel pensou? Vejam que para mim compensa mais a 1ª resolução, já para Gabriel, a 2ª opção é bem melhor.

Foi então discutido que, na verdade, depende do que foi combinado. Existem as duas formas. Geralmente a mais utilizada é a 2ª alternativa de cálculo, mas o sistema judiciário considera ilegal a 2ª alternativa, exceto se esta tiver previsão em lei e estiver estipulada em contrato.

Somente depois deste diálogo foi apresentado que a 1ª situação é caso de juro simples, incidindo juros sempre em cima do valor inicial, e a 2ª é juro composto (juro sobre juro).

Apresentaram-se também os termos técnicos, como:

- **Juro** é a remuneração atribuída ao capital;
- **capital** ou principal é o valor inicial;
- **taxa de juro** é o coeficiente que determina o valor do juro, isto é, a remuneração do capital utilizado durante certo período de tempo;
- **juro simples** é a remuneração calculada unicamente sobre o capital inicial;
- **juro composto** os juros não incidem unicamente sobre o capital inicial, mas sobre o saldo total existente no início de cada período;
- **montante** corresponde à soma do capital mais os juros acumulados num determinado período.

Analisou-se com os alunos que, no cálculo de juros simples, os valores dos juros são constantes (R\$ 100,00 no caso analisado) e o saldo devedor corresponde a uma progressão aritmética (PA) crescente de razão 100, no exemplo analisado. Já o juro composto produz juros e saldo devedor crescentes, segundo uma progressão geométrica (PG) de razão 1,1.

Destacou-se também que no 1º período os juros e o saldo devedor se igualam nos dois regimes de juros. A diferença entre os critérios ocorre em operações com mais de um período de capitalização. Enquanto os juros simples crescem linearmente, constituindo uma PA, os juros compostos evoluem exponencialmente, configurando uma PG.

Quanto maior for o número de períodos de incidência dos juros, maior será a diferença entre a capitalização simples e composta.

Depois de discutir o problema desencadeador, foi proposta aos alunos a resolução do exercício 1 (Apêndice C), que consiste em calcular o montante e os juros de uma aplicação de R\$ 5.000,00, com uma taxa de juros mensal de 1% por um período de 1 ano nos dois regimes de capitalização (juro simples e composto).

Ainda resolvendo o exercício 1, alguns alunos perguntaram se não tinha um jeito mais fácil, uma fórmula para resolver, ao invés de montar a tabela e resolver mês a mês o cálculo do montante. Neste momento, sentiram a necessidade de uma ferramenta matemática para facilitar a resolução do problema e justamente foi com esta finalidade proposto o exercício 2 (Apêndice C), que consiste em resolver o exercício 1 sem a tabela.

Na maioria dos livros didáticos trabalha-se o cálculo dos juros simples com a fórmula decorada “ $J = C \cdot i \cdot t$ ” sendo J os juros, C o capital, i a taxa e t o tempo, e depois soma-se com o montante. Já o juro composto geralmente é estudado calculando-se inicialmente o montante e obtendo os juros através da subtração entre o montante e o capital. Neste trabalho foi abordado primeiramente o cálculo do montante nos dois casos, da seguinte maneira:

- **Juro Simples:**

$$\text{Fator de aumento} = 100\% + 12\% = 112\% = 1,12$$

$$\text{Montante} = 5.000,00 \times 1,12 = 5.600,00.$$

$$\text{Juros Simples} = 600,00.$$

- **Juro Composto:**

Fator de aumento =  $100\% + 1\% = 101\% = 1,01$

Montante:

Depois de 1 mês:  $5000,00 \times 1,01$

Depois de 2 meses:  $5.000,00 \times 1,01 \times 1,01 = 5.000,00 \times (1,01)^2$

Depois de 12 meses:  $5.000,00 \times (1,01)^{12} = 5634,12$ .

Observou-se que alguns alunos encontraram o montante no caso dos juros simples de maneira diferente da apresentada acima. A seguir uma destas resoluções:

Figura 24

Maria aplicou R\$ 5.000,00 em uma caderneta de poupança que paga uma taxa de 1% ao mês. Qual é o montante que Maria terá depois de 1 ano se o regime for:

A) Juros Simples:

$$1\% \text{ de } 5.000 = \frac{1}{100} \times 5.000 = 50,00$$

$$J = 600$$

Montante =  $5.000 + 600 = 5.600$

B) Juros Compostos:

$$100\% + 1\% = 101\% = \frac{101}{100} = 1,01$$

$$M = 5000 \times (1,01)^{12}$$

$$M = 5000 \times 1,126825$$

$$M = 5.634,12$$

Resolução do problema por uma aluna do 3º B – Atividade 3. Fonte: Elaborado pelo autor.

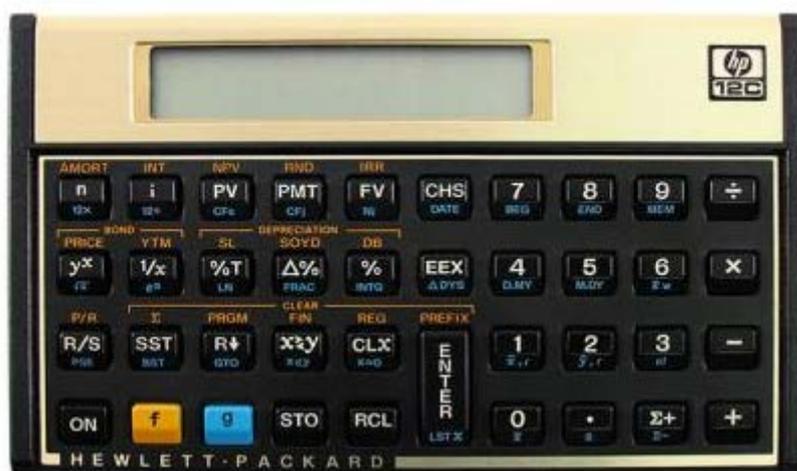
Na resolução acima, percebe-se claramente que, no caso dos juros simples, a aluna calculou os juros correspondentes a um mês e multiplicou o resultado por 12, encontrando os juros do período todo. Finalmente somou os juros com o valor inicial obtendo o montante de R\$ 5.600,00.

Outro aluno resolveu da seguinte maneira: como são 12 meses e a taxa é de 1% ao mês, nos juros simples o total de juros será 12% de 5.000,00 = 600,00 e, somando com o capital inicial de 5.000,00, obtém-se corretamente o montante de R\$ 5.600,00.

Importante observar que, independente das resoluções apresentadas, estas não constituem fórmulas prontas e sim são resultantes da compreensão do conceito explorado na metodologia inicial desta atividade através das tabelas. As fórmulas não constituem o enfoque principal desta proposta, e sim a compreensão dos conceitos envolvidos.

Foi mostrada aos alunos a calculadora financeira HP 12C e, em pequenos grupos, os alunos puderam acompanhar pelo professor a resolução do exercício 1, conferindo a resposta encontrada por eles. É interessante o aluno saber da existência deste instrumento tecnológico, mesmo que não esteja disponível para utilização em sala de aula.

**Figura 25**



Calculadora financeira HP 12C. **Fonte:** <http://epx.com.br/ctb/hp12c.php>.

Para encontrar a resposta do exercício 1, nessa calculadora, basta digitar o valor presente (capital) representado pela tecla PV (*presente value* = Valor Presente), que no exercício corresponde a 5.000, a taxa mensal (i) que é igual a 1% e o tempo, que na calculadora é representada pela letra n (número de períodos) igual a 12. Primeiro, digita-se o valor e depois a tecla correspondente, ou seja,

5000 **PV**

1 **i** (digita-se apenas 1, sem o símbolo de %)

12 **n**

Digitando agora FV (*future value* = valor futuro), obtém-se a resposta do problema, que pode ser apresentada com até 9 casas decimais.

O objetivo foi apenas apresentar este instrumento que contém a fórmula de cálculo em sua memória. Alguns alunos se interessaram bastante e depois conferiram a resposta de outros exercícios realizados com a calculadora.

Foram aplicados 4 problemas como tarefa, sendo 3 deles na forma de testes aplicados em provas do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar de São Paulo).

Os alunos não apresentaram dificuldades nos exercícios da tarefa. Os testes 3 e 5 resolveram corretamente, relacionando o montante no caso dos juros compostos com a função exponencial crescente e, no caso dos juros simples, com a função afim.

Foi ainda analisado com os discentes o gráfico correto que representa a resposta do teste 5, representado a seguir (figura 26).

Figura 26

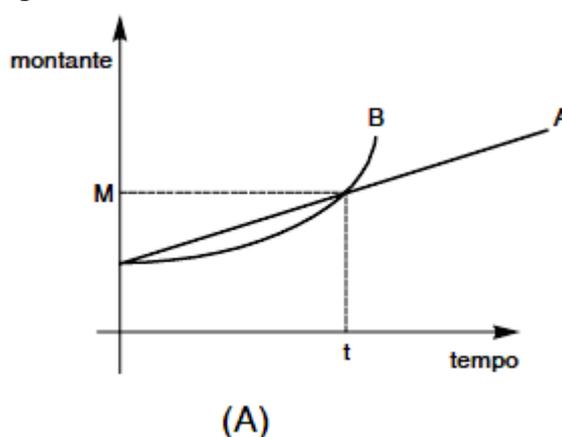


Gráfico correto do teste 5 – Atividade 3. **Fonte:** SARESP 2007.

Observando o gráfico, constata-se que o montante a juros simples é superior ao montante a juros compostos somente se o prazo for menor do que 1 representado no gráfico por  $t$  (um único período), pois somente no tempo 1 os montantes são iguais nos juros simples e compostos. Por este motivo, “os juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere a taxa de juros combinada” (LIMA, 2006, p. 58).

#### 4.4. Análise a posteriori e Validação

Após as três atividades aplicadas aos alunos na primeira etapa da Experimentação, foi possível fazer a análise *a posteriori* respondendo às três primeiras hipóteses apresentadas na análise *a priori*, sendo elas:

- a) Acredita-se que o fator de aumento e desconto (1ª atividade da sequência) e aumentos e descontos sucessivos (2ª atividade) trabalhados juntamente com a visão geométrica (barras retangulares) auxiliam a compreensão do cálculo do Montante na capitalização simples e composta (3ª atividade), evitando o uso de fórmulas decoradas e sem sentido para o aluno. Esta metodologia desperta o interesse dos alunos que encontram significado para o estudo;
- b) a construção de tabelas (3ª atividade) apresentando a evolução do montante nos juros simples e compostos auxiliam a percepção da aplicação dos conceitos de progressões aritmética e geométrica estudados anteriormente e a compreensão do que realmente acontece nos dois sistemas de capitalização;
- c) o uso da calculadora torna-se essencial durante a resolução dos problemas e o aluno percebe que não basta ter este instrumento para seu uso se não souber realmente os conceitos matemáticos envolvidos na resolução de problemas. Assim a calculadora torna-se apenas ferramenta para agilizar cálculos muito extensos, pois quem tem que pensar mesmo é o aluno.

Realmente, a metodologia do estudo do fator de aumento através da visualização com barras verticais, antes do estudo do montante na capitalização simples e composta, proporcionou a dedução da fórmula do montante de maneira natural para o aluno e as tabelas para comparação da capitalização no regime de juro simples e composto proporcionou a compreensão do que ocorre no decorrer do tempo.

Podemos afirmar isto visto que alguns alunos que participaram desta experiência e já tinham estudado juros compostos em séries anteriores apresentavam dúvidas sobre a origem da fórmula  $M = C \cdot (1 + i)^n$  dizendo: “O que é este 1 na fórmula?” ou ainda: “Por que a fórmula é  $(1+i)$  elevado ao tempo?”. Nesta

metodologia a fórmula foi construída, ou seja, a partir do momento em que o aluno compreendeu que quando queremos calcular um valor com acréscimo de 10% basta multiplicá-lo por 1,1 (atividade 1) e que se tivermos dois acréscimos sucessivos de 10% (atividade 2) teremos que multiplicar o valor por  $1,1 \times 1,1 = (1,1)^2$  e se forem 3 aumentos será o valor inicial vezes  $1,1 \times 1,1 \times 1,1 = (1,1)^3$  e assim por diante se forem mais períodos à mesma taxa. Ficou bem claro para o aluno que sendo  $n$  períodos o montante será igual ao valor inicial multiplicado pelo fator de aumento elevado ao tempo  $n$  que foi deduzido e compreendido pelo aluno na atividade 3.

O uso das tabelas também foi muito útil para compreender o que acontece no decorrer do tempo no juro simples e no composto. Pudemos confirmar este fato através de um dos comentários de um aluno durante a construção da tabela para comparar o montante no juro simples e composto: “Nossa, professora, então quem empresta dinheiro de um agiota está perdido, porque terá que pagar juro composto”. Outro ainda disse: “Professora, ficar devendo no cartão de crédito, que hoje cobra uma taxa de 7%, vai ser difícil conseguir pagar depois porque a dívida cresce muito”. Daí foi fácil discutirmos a diferença entre o crescimento linear e exponencial. Logo os conceitos matemáticos foram priorizados e seu sentido retomado e em cada comentário dos alunos e na resolução dos exercícios, percebia-se que estavam compreendendo os conceitos através de suas perguntas e do acompanhamento das resoluções.

O uso da tabela como metodologia inicial da atividade 3 também foi importante, porque alguns alunos não perceberam de imediato que a fórmula para o cálculo do montante estava baseada nas atividades anteriores.

Fazendo o uso das tabelas nos exercícios em que era preciso calcular o montante para vários períodos ficava trabalhoso, o processo e a pergunta dos alunos neste momento foi: “Professora, não tem um jeito mais fácil, uma fórmula para calcular o montante no juro composto?” Geralmente o aluno tem aversão a fórmulas e ainda pergunta se tem que decorá-la. Aqui foi “pedido” um jeito mais fácil. Esta pergunta e interesse em compreender como fazer de um jeito mais simples foi um dos fatores que permitiu concluir o sucesso desta sequência didática até o momento, demonstrando o interesse do aluno no assunto e a sua curiosidade. Como já tinham compreendido o fator de aumento, a fórmula foi apenas consequência e rapidamente compreendida. A maioria resolveu os problemas sem ficar se apoiando

nela e nem foi necessário decorá-la, já que compreenderam o processo de resolução. Isto ficou bem claro nas resoluções dos exercícios. Praticamente todos os alunos resolveram os exercícios propostos nas atividades 1, 2 e 3. Os erros foram sendo discutidos no decorrer dos exercícios e já foram relatados no item anterior.

Interessante que na metodologia adotada na atividade 3 ficou bem claro para o aluno que não adianta ter a calculadora se não souber os conceitos envolvidos na resolução dos problemas. Ficar somando as porcentagens mês a mês para o cálculo do montante, mesmo com a ajuda da calculadora, não é um bom negócio, dá muito trabalho e é bem fácil se perder no caminho. Se for utilizado o fator de aumento e a potência, a calculadora torna-se uma ferramenta bem útil.

Enfim, até esta primeira etapa constatou-se que são válidas as três primeiras hipóteses da análise *a priori*.

## Capítulo 5

### 3ª FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA NO PRESENTE TRABALHO: EXPERIMENTAÇÃO II

Neste capítulo, apresentaremos as 4ª, 5ª, 6ª e 7ª atividades elaboradas na fase de *Análise a priori*. Estas atividades foram aplicadas aos alunos no final de novembro de 2012.

Importante ressaltar que os conceitos trabalhados nas atividades 1, 2 e 3 relatadas no capítulo anterior são fundamentais para a compreensão das atividades deste capítulo. Somente dividiu-se em dois capítulos para facilitar a análise a posteriori e respeitando os dois momentos distintos em que estas foram aplicadas. A 1ª etapa, conforme já dissemos no capítulo anterior, foi aplicada no final de setembro e começo de outubro e as deste capítulo no final de novembro, intercalando com o conteúdo proposto nesta série.

#### 5.1. Quarta Atividade: Fluxo de Caixa

Os dois primeiros problemas desta atividade tiveram como objetivo trabalhar a representação geométrica (diagrama de flechas) dos problemas envolvendo o cálculo do valor futuro em que basta multiplicar o valor atual pelo fator de aumento elevado ao tempo (conceito já trabalhado na atividade 3) e a operação inversa quando temos o valor futuro e pretendemos obter o valor atual, caso em que basta utilizar a operação inversa, ou seja, a divisão do valor futuro pelo fator de aumento elevado ao tempo, conforme resolução da figura 27.

Figura 27

**Atividade 4**  
**Fluxo de Caixa**

1- Foi feito um depósito de R\$ 100.000,00 para a compra de uma casa pelo prazo de 6 meses a uma taxa de 2,5% ao mês. Depois deste tempo será possível comprar a casa no valor de R\$ 115.000,00?

R\$100.000,00

VP

0

$i = 2,5\% \text{ ao mês}$

6

VF

?

fator aumento =  $102,5\% = 1,025$

VP = 100.000

VF =  $100.000 \times (1,025)^6$

VF =  $100.000 \times 1,1596933$

VF = 115.969,33

R: Será possível comprar a casa e ainda irá sobrar R\$ 969,33.

2- Para uma festa de formatura, que acontecerá daqui a 1 ano você precisará de R\$ 5.000,00. Quanto precisará aplicar hoje em uma instituição financeira que paga uma taxa de juros de 1,5 % ao mês?

VF

R\$5.000,00

?

0

$i = 1,5\% \text{ ao mês}$

12

VP

fator de aumento = 1,015

VP =  $\frac{5000}{(1,015)^{12}}$

VP =  $\frac{5000}{1,195618}$

VP = 4.181,94

R: Precisar aplicar R\$ 4.181,94

Resolução dos problemas 1 e 2 por uma aluna do 3ºA – Atividade 4. Fonte: Elaborado pelo autor.

Os problemas 3 e 4 foram inspirados em um fato ocorrido há algum tempo. Um amigo professor procurou, solicitando ajuda, pois tinha feito um

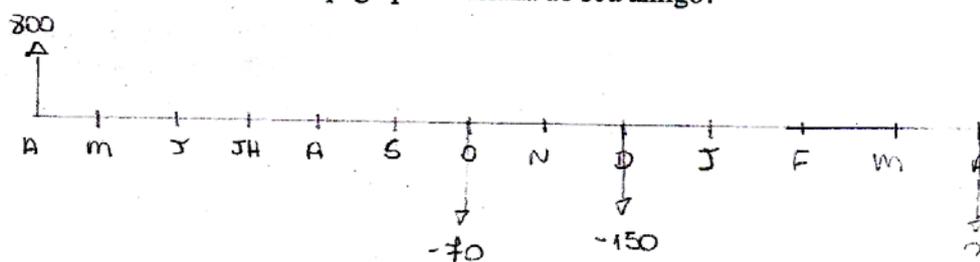
empréstimo e combinou pagar uma certa taxa mensal. No entanto, ele havia feito alguns pagamentos no decorrer do período e, no momento de quitar a dívida, não sabia quanto estava devendo e nem mesmo como calcular este valor.

Na oportunidade, estava trabalhando justamente juro composto com uma turma e desde então foram incluídos problemas do tipo 3 e 4 abaixo, para discuti-los com os alunos.

O fluxo de caixa (entrada e saída de pagamentos) representado geometricamente facilita muito a resolução. Convencionou-se que os valores dos recebimentos são positivos (setas para cima) e dos pagamentos são negativos (setas para baixo), conforme resolução a seguir (figura 28).

Figura 28

3- Em abril, Mariana emprestou de um amigo R\$ 800,00 e prometeu pagá-lo com uma taxa de juros compostos de 4% ao mês. Em outubro, Mariana pagou ao amigo R\$ 70,00. Em dezembro pagou R\$150,00. Depois de 1 ano da data do empréstimo pagou toda a sua dívida. Qual foi o valor final pago por Mariana ao seu amigo?



$$fa = 100\% + 4\% = 104\% = 1,04\%$$

ABRIL  $\rightarrow$  emprestou 800,00

$$\text{OUTUBRO} \rightarrow \text{dev: } 800 \cdot (1,04)^6 = \boxed{1.012,25}$$

$$\text{Pagou } 70,00 \text{ e ficou devendo} \rightarrow 1.012,25 - 70 = \boxed{942,25}$$

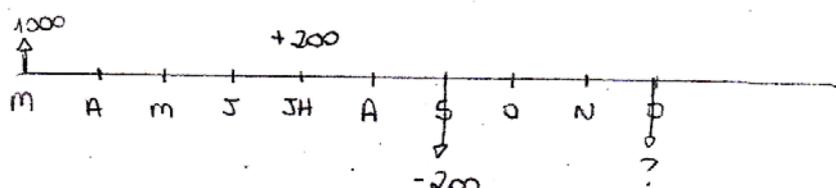
$$\text{DEZEMBRO} \rightarrow \text{dev: } 942,25 \cdot (1,04)^2 = 1.019,13$$

$$\text{Pagou } 150 \rightarrow \text{dev: } 1.019,13 - 150 = 869,13$$

$$\text{ABRIL} \rightarrow \text{dev: } 869,13 \cdot (1,04)^4 = \boxed{1.016,75}$$

R: O valor final foi  $\boxed{1.016,75}$

4- Em março, uma pessoa aplicou R\$ 1.000,00 em uma instituição financeira que paga uma taxa de juro composto de 2% ao mês. Em julho, esta pessoa fez um novo depósito de R\$ 200,00. Em setembro fez um saque de R\$ 200,00. Em dezembro retirou todo dinheiro aplicado, com juros. Qual é este montante?



$$\text{JULHO} \rightarrow \text{terá: } 1.000 \times (1,02)^4 = \boxed{1.082,43}$$

$$+ 200,00$$

$$\hline 1.282,43$$

$$\text{SETEMBRO} \rightarrow \text{terá: } 1.282,43 \times (1,02)^2 = 1.334,24$$

$$- 200,00$$

$$\hline 1.134,24$$

$$\text{DEZEMBRO} \rightarrow \text{terá: } 1.134,24 \times (1,02)^3 = \boxed{1.203,66}$$

Resolução dos problemas 3 e 4 por uma aluna do 3ªA – Atividade 4. Fonte: Elaborado pelo autor.

Os alunos resolveram o problema 3 juntamente com a explicação do professor e o problema 4 resolveram sozinhos, sem grandes dificuldades, com o auxílio de uma calculadora comum.

## **5.2. Quinta Atividade: Comprar à vista ou a prazo?**

Esta atividade foi desenvolvida em 2 aulas de 50 minutos cada, inspirada nos problemas do livro *A Matemática do Ensino Médio*, 2006, aula 38. Seu objetivo foi discutir com os alunos como analisar racionalmente entre várias opções de compra de um produto, conforme fica bem claro no 1º problema desta atividade apresentado a seguir (figura 29).

Figura 29

**Atividade 5**

**Comprar à vista ou a prazo?**

**Problema desencadeador:**

1- Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um aparelho eletrônico: três prestações mensais de R\$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R\$ 100,00 cada. Se Pedro consegue fazer seu dinheiro render 10% ao mês, o que ele deve preferir?

1ª opção

$$VP = 180 + \frac{180}{1,1} + \frac{180}{(1,1)^2}$$

$$VP = 180 + 163,63 + 147,76 = 492,39$$

**VP = 492,39**

2ª opção

$$VP = 100 + \frac{100}{1,1} + \frac{100}{(1,1)^2} + \frac{100}{(1,1)^3} + \frac{100}{(1,1)^4} + \frac{100}{(1,1)^5} =$$

$$100 + 82,64 + 75,13148 + 68,301345 + 62,092132 = 450,24$$

**VP = 450,24**

*Pedro deve preferir pagar em 6x, pois comparando os dois valores na data 0 em 6x o valor é menor.*

Resolução do problema 1 por uma aluna do 3º A – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

O problema 2 teve como objetivo discutir que a melhor opção para compra pode ser diferente de uma pessoa para outra. Tudo depende de quanto a pessoa consegue fazer o seu dinheiro render, ou seja, qual é a taxa de juros que consegue em um investimento. No caso a seguir a melhor opção de compra para

Marcos, que consegue um investimento a 5% ao mês, consiste na compra em 2 parcelas, já para Marta, que tem um investimento de apenas 1% ao mês, a melhor alternativa é comprar à vista.

Figura 30

2- Marcos e Marta têm três opções de pagamento na compra de um celular:

I.) à vista, com 10% de desconto

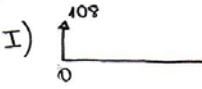
II) em duas prestações mensais iguais, com desconto de 5%, vencendo a primeira um mês após a compra.

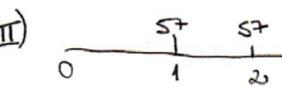
III) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

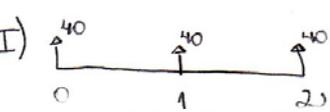
Qual é a melhor opção para Marcos, se o dinheiro vale, para ele 5% ao mês? E para Marta que consegue fazer seu dinheiro render apenas 1%?

Supondo Celular = R\$ 120,00

**marcos**

I) 

II) 

III) 

**marcos**

II) 
$$VP = \frac{57}{1,05} + \frac{57}{(1,05)^2}$$

$$VP = 54,28 + \frac{57}{1,1025}$$

$$VP = 54,28 + 51,70 = \boxed{VP = 105,98}$$

**marcos**

III) 
$$VP = 40 + \frac{40}{1,05} + \frac{40}{(1,05)^2}$$

$$VP = 40 + 38,09 + \frac{40}{1,1025}$$

$$VP = 40 + 38,09 + 36,28 = \boxed{VP = 114,37}$$

**marta**

II) 
$$VP = \frac{57}{1,01} + \frac{57}{(1,01)^2}$$

$$VP = 56,43 + 55,87 = \boxed{VP = 112,30}$$

**marta**

III) 
$$VP = 40 + \frac{40}{1,01} + \frac{40}{(1,01)^2}$$

$$VP = 40 + 39,60 + 39,21 = \boxed{VP = 118,81}$$

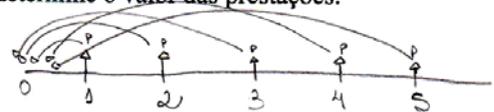
R: Para Marcos compensa a 2ª opção e para Marta é mais vantajosa a 1ª opção.

Resolução do problema 2 por uma aluna do 3º A – Atividade 5. Fonte: Elaborado pelo autor.

No problema 3 foi analisado como calcular a prestação em um financiamento cujas parcelas são iguais.

Figura 31

3- Um computador cujo preço a vista é R\$ 1.200,00, é vendido em 5 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.



$$\frac{P}{1,08} + \frac{P}{(1,08)^2} + \frac{P}{(1,08)^3} + \frac{P}{(1,08)^4} + \frac{P}{(1,08)^5} = 1.200$$

$$P \cdot \left( \frac{1}{1,08} + \frac{1}{(1,08)^2} + \frac{1}{(1,08)^3} + \frac{1}{(1,08)^4} + \frac{1}{(1,08)^5} \right) = 1.200$$

$$P \cdot (0,925925 + 0,8573388 + 0,7938322 + 0,7350303 + 0,6805832) = 1.200$$

$$P \cdot (3,9927095) = 1.200$$

$$P = \frac{1.200}{3,9927095} = 300,54$$

$P = 300,54$

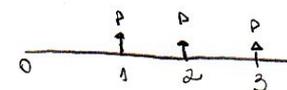
Resolução do problema 3 por uma aluna do 3º A – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

O problema 4 pede para calcular as prestações constantes nos casos de o comprador pagar a 1ª parcela um mês após a compra (item a), no ato da compra (item b) e dois meses após a compra (item c). Calculando o item a, basta retroagir cada prestação em um mês, ou seja, dividir a prestação do item a por 1,05, e no caso do item c, basta postergar o pagamento de cada prestação multiplicando por 1,05 (fator de aumento). Logo não é necessário fazer os cálculos novamente.

Figura 32

4- Um vídeo game é vendido por R\$ 800,00 à vista e pode ser pago em três prestações mensais iguais. Se forem cobrados juros de 5% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo a primeira prestação paga:

- um mês após a compra;
- no ato da compra;
- dois meses após a compra.

a)  fator aumento = 1,05

$$\frac{P}{1,05} + \frac{P}{(1,05)^2} + \frac{P}{(1,05)^3} = 800 \quad P = \left( \frac{1}{1,05} + \frac{1}{(1,05)^2} + \frac{1}{(1,05)^3} \right) = 800$$

$$P = \left( 0,952380 + \frac{1}{1,1025} + \frac{1}{1,157625} \right) = 800$$

$$P = (0,952380 + 0,907029 + 0,863837) = 800$$

$$P = (2,723246) = 800$$

$$P = \frac{800}{2,723246} = \boxed{293,76}$$

b)  $\frac{293,76}{1,05} = \boxed{279,77}$

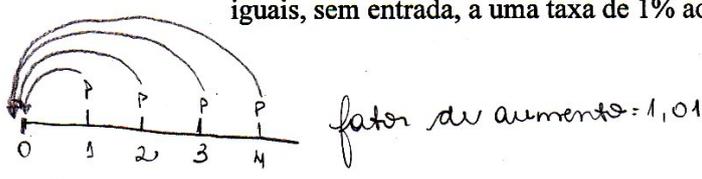
c)  $293,76 \times 1,05 = \boxed{308,44}$

Resolução do problema 4 por uma aluna do 3º A – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

O problema 5 terá seu resultado utilizado na próxima atividade para a montagem da planilha de financiamento da tabela *Price* (detalhada na próxima atividade).

Figura 33

5- Foi feito um financiamento de R\$ 1.000,00 para ser pago em 4 parcelas mensais iguais, sem entrada, a uma taxa de 1% ao mês. Calcule o valor de cada prestação.



fator de aumento = 1,01

$$\frac{P}{1,01} + \frac{P}{(1,01)^2} + \frac{P}{(1,01)^3} + \frac{P}{(1,01)^4} = 1000$$

$$P \cdot \left( \frac{1}{1,01} + \frac{1}{(1,01)^2} + \frac{1}{(1,01)^3} + \frac{1}{(1,01)^4} \right) = 1000$$

$$P \cdot \left( 0,990099 + \frac{1}{1,0201} + \frac{1}{1,030301} + \frac{1}{1,040604} \right) = 1000$$

$$P \cdot (0,990099 + 0,980296 + 0,970590 + 0,960980) = 1000$$

$$P \cdot (3,901965) = 1000$$

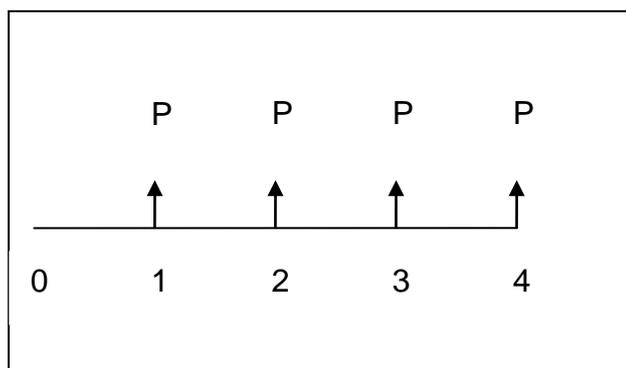
$$P = \frac{1000}{3,901965}$$

$$P = 256,28$$

Resolução do problema 5 por uma aluna do 3º A – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Os alunos resolveram estes problemas com o auxílio de uma calculadora comum, mas, mesmo com este instrumento, os cálculos são demorados para encontrar o valor da prestação. E se tivéssemos um produto financiado em 24 parcelas, por exemplo, os cálculos seriam ainda mais trabalhosos. Por isto, foi trabalhada uma forma de simplificação, que consiste em aplicar a fórmula da soma de uma progressão geométrica durante a resolução, como explicado a seguir usando o problema 5 como modelo.

Figura 34



Resolução do problema 5 – parte 1 – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

“Trazendo” todas as prestações para a data 0 e comparando com o valor financiado na data 0, ou seja, R\$ 1.000,00, teremos:

**Figura 35**

$$\frac{P}{1,01} + \frac{P}{(1,01)^2} + \frac{P}{(1,01)^3} + \frac{P}{(1,01)^4} = 1.000$$

$$P \cdot \left( \frac{1}{1,01} + \frac{1}{(1,01)^2} + \frac{1}{(1,01)^3} + \frac{1}{(1,01)^4} \right) = 1.000$$

Soma de PG de razão  $q = \frac{1}{1,01}$  e 1º termo  $a_1 = \frac{1}{1,01}$

Resolução do problema 5 – parte 2 – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Sabendo que a soma da PG é calculada pela fórmula:

**Figura 36**

$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ sendo } a_1 = q = \frac{1}{1,01}$$

$$S = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$$

Resolução do problema 5 – parte 3 – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Agora calculando  $q = \frac{1}{1,01} \cong 0,990099$  e  $\left(\frac{1}{1,01}\right)^5 \cong 0,951466$  e

substituindo em S, teremos:

$$S \cong 3,901965.$$

Logo

**Figura 37**

$$P \cdot \left( \frac{1}{1,05} + \frac{1}{(1,05)^2} + \frac{1}{(1,05)^3} + \frac{1}{(1,05)^4} \right) = 1.000$$

$$P \cdot 3,901965 = 1.000$$

$$P = \frac{1.000}{3,901965}$$

$$P = 256,28.$$

Resolução do problema 5 – parte 4 – Atividade 5. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

No caso deste problema, que tem apenas 4 parcelas, não é muito vantajoso resolver pela soma da PG, mas, considerando muitas parcelas, fica inviável o cálculo mês a mês.

Depois da resolução dos problemas, foi feita a correção com uma planilha montada pela professora, na qual a fórmula da prestação foi inserida e, para calculá-la, basta digitar o valor presente (financiamento), o tempo e a taxa, aparecendo assim o valor da prestação considerando pagamento postergado (sem entrada). A dedução desta fórmula para o cálculo da Prestação encontra-se no Apêndice H.

Figura 38

1		2	
<b>SAF ou Sistema Price (sem entrada)</b>			
3			
4		R\$ 1.000,00	
5			
6			
7			
8		4	
9			
10			
11			
12		0,01	
13			
14			
15			
16		<b>R\$ 256,28</b>	
17			

Planilha para cálculo da prestação do problema 5 – Atividade 5. Fonte: Elaborado pelo autor.

Fotografia 1



Apresentação aos alunos da planilha SAF.

### 5.3. Sexta Atividade: Sistemas de Financiamento - SAC e SAF

Para esta atividade foram necessárias 2 aulas (50 minutos cada). Inicialmente, analisamos que os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam, basicamente, da forma pela qual o principal (capital) e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital.

Para cada sistema de amortização é construída uma planilha financeira, a qual relaciona, dentro de certa padronização, os diversos fluxos de pagamentos e recebimentos.

### 5.3.1 Definições básicas

- **Amortização:** refere-se exclusivamente ao pagamento do principal (capital emprestado), o qual é efetuado, geralmente, através de parcelas periódicas (mensais, trimestrais etc.);
- **saldo Devedor:** representa o valor da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago ao credor a título de amortização;
- **prestação:** é composta do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Assim:

$$\text{Prestação} = \text{amortização} + \text{encargos financeiros}$$

### 5.3.2 SAF – Sistema Francês de Amortização

O sistema francês de amortização é também conhecido como tabela *Price* (lê-se: praice), pois foi criado por Richard Price, matemático e pensador inglês que viveu entre 1723 e 1791. Leva o nome de sistema francês de amortização por ter sido adotado na França já no século XIX. Este sistema é amplamente adotado no Brasil.

A sua característica fundamental é o fato de as prestações serem iguais ao longo do período.

Após esta teoria foi discutido com os alunos o problema a seguir.

**1º Exemplo:** Maria comprou um terreno por R\$ 10.000,00 para ser pago em 5 meses, sem entrada, à taxa de 10% a.m. Construa uma planilha para este empréstimo segundo o sistema francês ou price.

A tabela 5, a seguir, foi construída.

Tabela 5

Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo devedor
0				
1				
2				
3				
4				
5				
<b>Total</b>				

Sistema Francês de Amortização – Montagem 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

A tabela foi sendo preenchida passo a passo com os alunos.

No SAF, as prestações são constantes e, calculando conforme explicação da atividade 5, chegou-se ao valor de R\$ 2.637,97. Este valor será a prestação nos tempos de 1 a 5. Os juros, prestação e amortização não acontecem na data 0, sendo a célula representada por estes valores completadas com traço. O saldo devedor no tempo 0 é R\$ 10.000,00, conforme tabela 6.

Tabela 6

Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	10.000,00
1		2.637,97		
2		2.637,97		
3		2.637,97		
4		2.637,97		
5		2.637,97		
<b>Total</b>				

Sistema Francês de Amortização – Montagem 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

No 1º mês há juros de 10% de 10.000,00 = 1.000 reais.

Amortização = Prestação – Juros, ou seja, no 1º mês é igual a  $2.637,97 - 1.000,00 = 1.637,97$ .

Saldo Devedor = Saldo devedor do mês anterior – Amortização, isto é,  $10.000 - 1.637,97 = 8.362,03$ .

A tabela fica na forma:

**Tabela 7**

<b>Períodos</b>	<b>Juros</b>	<b>Prestação</b>	<b>Amortização</b>	<b>Saldo devedor</b>
<b>0</b>	-	-	-	10.000,00
<b>1</b>	10% de 10.000= 1.000	2.637,97	1.637,97	8.362,03
<b>2</b>		2.637,97		
<b>3</b>		2.637,97		
<b>4</b>		2.637,97		
<b>5</b>		2.637,97		
<b>Total</b>				

Sistema Francês de Amortização – Montagem 3. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Continuando o processo para os demais períodos, concluímos a tabela:

**Tabela 8**

<b>Períodos</b>	<b>Juros</b>	<b>Prestação</b>	<b>Amortização</b>	<b>Saldo devedor</b>
<b>0</b>	-	-	-	10.000,00
<b>1</b>	10% de 10.000= 1.000	2.637,97	1.637,97	8.362,03
<b>2</b>	10% de 8.362,03 = 836,20	2.637,97	1.801,77	6.560,26
<b>3</b>	10% de 6.560,26 = 656,03	2.637,97	1.981,94	4.578,32
<b>4</b>	10% de 4.578,32 = 457,83	2.637,97	2.180,14	2.398,18
<b>5</b>	10% de 2.398,18 = 239,82	2.637,97	2.398,15	-
<b>Total</b>	3.189,88	13.189,85	≅ 10.000,00	-

Sistema Francês de Amortização – Montagem 4. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Observa-se que há um saldo devedor de 0,03 depois de pagar a 5ª prestação. Isto ocorre devido aos arredondamentos ocorridos durante o processo, sendo discutido com os alunos este fato.

Analisando os dados da tabela, constata-se que no SAF as prestações são constantes, os juros são decrescentes e a amortização é uma progressão geométrica crescente de razão 1,1. De fato, multiplicando 1.637,97 por 1,1 obtemos 1.801,77 que é o termo seguinte da amortização, e, se multiplicarmos este último resultado por 1,1, o resultado será o próximo termo da amortização.

A seguir, na figura 39, a atividade de uma dupla de alunos.

Figura 39

### SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

Os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam, basicamente, da forma pela qual o principal (capital) e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital.

Para cada Sistema de Amortização é construída uma planilha financeira, a qual relaciona, dentro de certa padronização, os diversos fluxos de pagamentos e recebimentos.

#### Definições básicas

- **Amortização:** refere-se exclusivamente ao pagamento do principal (capital emprestado), o qual é efetuado, geralmente, através de parcelas periódicas (mensais, trimestrais, etc).
- **Saldo Devedor:** representa o valor da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago ao credor a título de amortização.
- **Prestação:** é composta do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Assim:

$$\text{Prestação} = \text{amortização} + \text{encargos financeiros}$$

#### SAF – SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO

O sistema francês de amortização é também conhecido como sistema Price (lê-se: praiçe), pois foi criado por Richard Price, matemático e pensador inglês que viveu entre 1723 e 1791.

Este sistema leva o nome de sistema francês de amortização por ter sido adotado na França já no século XIX.

Este sistema é amplamente adotado no Brasil. A sua característica fundamental é o fato das prestações serem iguais ao longo do período.

**1º Exemplo:** Maria comprou um terreno por R\$ 10.000,00 para ser pago em 5 meses, sem entrada à taxa de 10% a.m. Construa uma planilha para este empréstimo segundo o sistema francês ou price.

Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	10.000
1	$10.000 \cdot 10\% = 1.000$	2.637,97	1.637,97	8.362,03
2	$8.362,03 \cdot 10\% = 836,20$	2.637,97	1.801,77	6.560,26
3	$6.560,26 \cdot 10\% = 656,03$	2.637,97	1.981,94	4.578,32
4	$4.578,32 \cdot 10\% = 457,83$	2.637,97	2.180,14	2.398,18
5	$2.398,18 \cdot 10\% = 239,82$	2.637,97	2.398,15	-
<b>Total</b>	3.189,85	13.189,85	10.000 =	-

Sistema Price

Prestações constantes

Amortização Pq de razão 1,1.

Atividade em dupla do sistema francês de amortização. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 5.3.3 SAC – Sistema de Amortização Constante

O SAC é muito utilizado para financiamentos da casa própria. Neste sistema, como o próprio nome diz, um valor constante é amortizado a cada período. Os valores dos juros e do saldo devedor são decrescentes, seguindo o modelo de uma progressão aritmética, e a amortização da dívida é maior no início do financiamento se comparado ao Sistema Francês de Amortização (*Price*), fazendo com que o saldo devedor caia mais rapidamente.

A seguir, o mesmo problema trabalhado no sistema Price foi agora abordado no SAC.

**1º Exemplo:** Maria comprou um terreno por R\$ 10.000,00 para ser pago em 5 meses, sem entrada, à taxa de 10% a.m. Construa uma planilha para este empréstimo segundo o sistema de amortização constante

Tabela 9

Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo devedor

Sistema de Amortização Constante – Montagem 1. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

#### Completando a tabela:

Os cálculos neste sistema são mais simples do que no Price.

Inicia-se o preenchimento da tabela pela Amortização, que é constante em todos os períodos. Para encontrar seu valor, basta dividir o valor financiado pelo tempo, ou seja,

$$\text{Amortização} = 10.000 / 5 = 2.000 \text{ (Tabela 10)}$$

Tabela 10

Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo devedor
0	-		-	10.000,00
1			2.000,00	
2			2.000,00	
3			2.000,00	
4			2.000,00	
5			2.000,00	
<b>Total</b>			10.000,00	

Sistema de Amortização Constante – Montagem 2. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

O valor dos juros é calculado com base no saldo devedor do mês anterior. Assim, no 1º mês consiste em 10% de 10.000,00 = 1.000,00.

A prestação é obtida somando-se os juros do período com a amortização. Logo, no 1º mês a prestação será igual a 1.000,00 + 2.000,00 = 3.000,00.

O saldo devedor é obtido subtraindo a amortização do saldo devedor do mês anterior. No 1º mês será 10.000,00 – 2.000,00 = 8.000,00. Prossegue-se o preenchimento obtendo a tabela:

Tabela 11

Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	10.000,00
1	10% de 10.000 = 1.000,00	3.000,00	2.000,00	8.000,00
2	10% de 8.000 = 800,00	2.800,00	2.000,00	6.000,00
3	10% de 6.000 = 600,00	2.600,00	2.000,00	4.000,00
4	10% de 4.000 = 400,00	2.400,00	2.000,00	2.000,00
5	10% de 2.000 = 200,00	2.200,00	2.000,00	-
<b>Total</b>	3.000,00	13.000,00	10.000,00	-

Sistema de Amortização Constante – Montagem 3. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Analisando o Sistema de Amortização Constante com os alunos, estes rapidamente perceberam que os juros, prestação e saldo devedor evoluem no tempo conforme uma progressão aritmética decrescente, no caso de razão  $-200,00$ .

As tabelas dos dois sistemas foram trabalhadas ao mesmo tempo para efeito de comparação, conforme foto a seguir.

Fotografia 2

SAF (Sistema de Amortização Fixa)					SAC (Sistema de Amortização Constante)				
Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo Devedor	Períodos	Juros	Prestação	Amortização	Saldo Devedor
0	—	—	—	10.000	0	—	—	—	10.000
1	1024,00 = 10%	2024,00	1631,99	8367,03	1	10% de 10.000 = 1000	3000	2.000	8.000
2	1024,00 = 10%	2024,00	1401,99	6965,03	2	10% de 8.000 = 800	2.800	2.000	6.000
3	1024,00 = 10%	2024,00	1171,99	5563,03	3	10% de 6.000 = 600	2.600	2.000	4.000
4	1024,00 = 10%	2024,00	941,99	4161,03	4	10% de 4.000 = 400	2.400	2.000	2.000
5	1024,00 = 10%	2024,00	711,99	2759,03	5	10% de 2.000 = 200	2.200	2.000	—
TOTAL	5120,00	10120,00	5000,00	—	TOTAL	—	—	—	—

Construção das planilhas SAF e SAC durante a explicação.

Os alunos resolveram o seguinte exercício:

Foi feito um financiamento de R\$ 1.000,00 por 4 meses à taxa de 1% ao mês, sem entrada. Calcule o valor da prestação e construa a planilha financeira nos sistemas SAF (prestações constantes) e SAC (amortizações constantes).

A resolução de um dos alunos encontra-se na figura 40.

Figura 40

SAF (sistema Price)				
Períodos	Juros	Prestações	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	1000
1	$1\% \text{ de } 1000 = 10$	256,28	246,28	753,72
2	$1\% \text{ de } 753,72 = 7,53$	256,28	248,73	504,99
3	$1\% \text{ de } 504,99 = 5,04$	256,28	251,24	253,75
4	$1\% \text{ de } 253,75 = 2,53$	256,28	253,75	-
Total	25,12	1025,12	1000	-

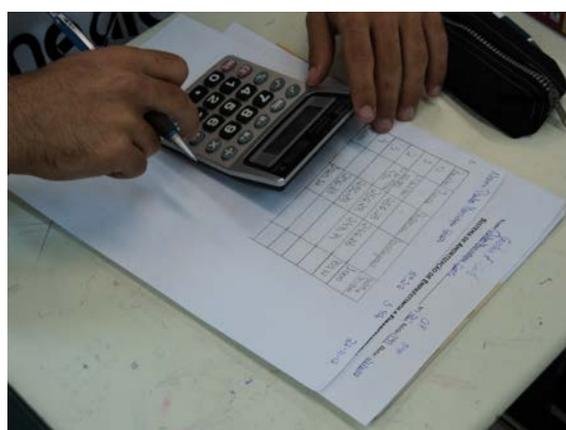
SAC (sistema de amortização constante)				
Períodos	Juros	Prestações	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	1000
1	$1\% \text{ de } 1000 = 10$	260,00	250,00	750
2	$1\% \text{ de } 750 = 7,50$	257,50	250,00	500
3	$1\% \text{ de } 500 = 5,00$	255,00	250,00	250
4	$1\% \text{ de } 250 = 2,50$	252,50	250,00	-
Total	25	1025,00	1000,00	-

SAF (sistema Price)  
 Prestações constantes  
 Amortização PG de razão 1,01

SAC (sistema de amortização constante)  
 Prestações decrescente  $\rightarrow$  PA de razão 2,50.  
 amortização constante  
 Juros  $\rightarrow$  PA de razão 2,50

Planilha financeira nos sistema SAF e SAC construída por um aluno. Fonte: Elaborado pelo autor.

Fotografia 3



Fotos dos alunos durante a atividade.

**Conclusão:**

Ao construir as tabelas, foram analisadas com os alunos as características de cada financiamento, relacionando-os com as progressões aritmética e geométrica, conforme já comentado no texto acima. Além disso, discutiu-se a questão: Em qual deles se paga menos juros? Por quê?

A resposta é simples: analisando as duas tabelas percebe-se que no Sistema de Amortização Constante a amortização inicial é maior do que no Sistema Price, logo o saldo devedor fica menor, o que faz com que os juros incidam sobre um saldo devedor menor. Logo se a pessoa puder decidir entre os dois sistemas e tiver condições de pagar uma prestação maior no começo do financiamento, compensa optar pelo SAC. Além disso, este sistema é vantajoso para a instituição que o promove, pois as prestações são decrescentes e, se uma pessoa tem condições de pagar uma prestação maior no início, é maior a garantia de continuar sendo possível o pagamento, já que estas vão decrescendo ao longo do período.

Este processo de construir a tabela com os alunos tornou o assunto de fácil compreensão.

**5.4. Sétima Atividade: FIES (Fundo de Financiamento Estudantil)**

Nesta atividade foi discutido o funcionamento do FIES, destacando especificamente as características do financiamento, já que os alunos tinham conhecimento do que se tratava devido a divulgação de uma faculdade credenciada.

Conforme definição do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, “o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies) é um programa do Ministério da Educação destinado a financiar a graduação na educação superior de estudantes matriculados em instituições não gratuitas”.

As instituições precisam ser cadastradas no Programa e com avaliação positiva nos processos conduzidos pelo Ministério da Educação. A partir de 2010, o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) passou a ser o agente

operador e a taxa de juros passou a ser 3,4% ao ano. A Caixa Econômica Federal atua como agente financeiro.

Nesta atividade foi feita a simulação de um financiamento estudantil através do site <https://www3.caixa.gov.br/fies/asp/Simulador/Simulador.asp>. Acessando o endereço, foi preciso preencher os dados referentes ao financiamento.

Para efeito de estudo foi considerado um financiamento de 100% de um curso com mensalidade de R\$ 500,00, composto de 6 semestres com nenhum deles concluído e a taxa de 3,4% ao ano, conforme preenchimento a seguir:

Figura 41

**Processo Seletivo:**

**Quantidade de Semestres do Curso:**

**Quantidade de Semestres já Concluídos:**

**Percentual de Financiamento:**

**Taxa de juros a.a. (escolher a taxa de juros conforme seu contrato nos valores abaixo):**

**Tipo de estudante**

**Valor da Mensalidade**  
 (Informar o valor da sua mensalidade deduzidos todos os descontos oferecidos pela instituição de ensino, inclusive os concedidos em virtude de pagamento pontual):

**Prazo de Carência (em meses):**

**Data da assinatura do contrato:**

**Escolha o melhor dia para Vencimento:**

**Pela lei 12.202/2010, publicada no DOU em 14/01/2010, os contratos de FIES, assinados a partir do primeiro semestre 2010, passam a contar com prazo de carência de 18 meses a partir do término do prazo de utilização bem como o prazo de amortização será de até 3 vezes o prazo de utilização. Dessa forma um contrato FIES passa a ter 3 fases distintas:**

**1 - PRAZO DE UTILIZAÇÃO :** Prazo contado a partir do primeiro mês de ingresso no FIES até o último mês do prazo de utilização (considera-se os semestres suspensos ou encerrados sem início de amortização). Nessa fase o estudante paga a cada 3(três) meses prestações de juros de até R\$ 50,00, nos meses MARÇO, JUNHO, SETEMBRO e DEZEMBRO.

**2 - PRAZO DE CARÊNCIA :** O prazo de carência é opcional e pode ser de até 18 meses imediatamente subsequentes ao PRAZO DE UTILIZAÇÃO. Nessa fase as prestações têm a mesma regra do PRAZO DE UTILIZAÇÃO.

**3- PRAZO DE AMORTIZAÇÃO :** Imediatamente subsequentes ao PRAZO DE CARÊNCIA até 3 vezes o PRAZO DE UTILIZAÇÃO mais 12 meses (o simulador adota exatamente 3 (três vezes). Nessa fase o sistema calcula a prestação pela tabela PRICE em função do saldo devedor do contrato no dia da mudança para essa fase, da taxa de juros e do prazo dessa fase.

**Durante as fases PRAZO DE UTILIZAÇÃO e PRAZO DE CARÊNCIA , os juros excedentes ao valor da prestação são incorporados ao saldo devedor do contrato no mês da sua apuração(cálculo).**

**CONTINUAR** **LIMPAR**

Simulação de Financiamento. **Fonte:**<https://www3.caixa.gov.br/fies/asp/Simulador/Simulador.asp>.

Observa-se pelas orientações da tabela acima que este financiamento é composto por 3 fases, chamadas de prazo, sendo a primeira delas a utilização (período do curso) em que o aluno paga somente os juros até o valor máximo de R\$ 50,00 a cada três meses (março, junho, setembro e dezembro) e o excedente é incorporado ao saldo devedor. Nessa fase, as parcelas (mensalidades) vão sendo liberadas e somadas ao saldo devedor. A 2ª fase é da carência (opcional), tem como prazo máximo 18 meses após o término do curso. Nesse período continuam sendo computados os juros e o pagamento de no máximo R\$ 50,00 é feito a cada 3 meses. Mas, como o curso terminou, não são feitas as liberações mensais referentes às mensalidades. Finalmente, após o prazo de carência, inicia-se a amortização (pagamento da dívida).

O sistema de amortização utilizado é o SAF (Sistema Francês de Amortização), no qual as Prestações são iguais.

Clicando em “continuar” após preencher os dados da 1ª tabela, apresentada acima, o simulador apresenta outras 3 tabelas, que estão no Apêndice G. As duas primeiras com os dados do financiamento e a última com toda a evolução do financiamento.

O 1º questionamento feito aos alunos em relação à análise da Tabela 3 (Apêndice G) foi sobre os juros cobrados mensalmente. No financiamento o juro anual corresponde a uma taxa efetiva de 3,4%. Qual é a taxa mensal correspondente?

Foi questionado: “É só dividir 3,4% por 12?” Logo os alunos perceberam que este problema era semelhante a um problema trabalhado na 2ª atividade, que incorretamente haviam pensado em utilizar a média aritmética ao invés da geométrica.

Assim foi feito o cálculo juntamente com eles:

$$\text{taxa mensal} = x$$

$$(1 + x)^{12} = 1,034$$

$$1 + x = \sqrt[12]{1,034}$$

$$x = 1,0027901 - 1$$

$$x = 0,0027901$$

$$x = 0,27901\%.$$

De fato, na 1ª linha da tabela a seguir (Tabela 12), que corresponde à parte da tabela 3 do Apêndice G, os juros cobrados no 1º mês correspondem a 0,27901% de 500,00, resultando em R\$ 1,40.

**Tabela 12**

Fase	Saldo Anterior(R\$)	Juros(R\$)	Prestacao calculada(R\$)	Prestacao cobrada(R\$)	Liberacao de parcela(R\$)	Saldo Atual(R\$)	Número prestacao	Data vencimento
Utilização	500,00	1,40	0,00	0,00	500,00	1.001,40	-	15/08/2012
Utilização	1.001,40	2,79	4,19	4,19	500,00	1.500,00	1	15/09/2012
Utilização	1.500,00	4,19	0,00	0,00	500,00	2.004,19	-	15/10/2012
Utilização	2.004,19	5,59	0,00	0,00	500,00	2.509,78	-	15/11/2012
Utilização	2.509,78	7,00	16,78	16,78	500,00	3.000,00	2	15/12/2012
Utilização	3.000,00	8,37	0,00	0,00	500,00	3.508,37	-	15/01/2013
Utilização	3.508,37	9,79	0,00	0,00	500,00	4.018,16	-	15/02/2013
Utilização	4.018,16	11,21	29,37	29,37	500,00	4.500,00	3	15/03/2013
Utilização	4.500,00	12,56	0,00	0,00	500,00	5.012,56	-	15/04/2013
Utilização	5.012,56	13,99	0,00	0,00	500,00	5.526,55	-	15/05/2013
Utilização	5.526,55	15,42	41,97	41,97	500,00	6.000,00	4	15/06/2013
Utilização	6.000,00	16,74	0,00	0,00	500,00	6.516,74	-	15/07/2013
Utilização	6.516,74	18,18	0,00	0,00	500,00	7.034,92	-	15/08/2013
Utilização	7.034,92	19,63	54,55	50,00	500,00	7.504,55	5	15/09/2013
Utilização	7.504,55	20,94	0,00	0,00	500,00	8.025,49	-	15/10/2013
Utilização	8.025,49	22,39	0,00	0,00	500,00	8.547,88	-	15/11/2013
Utilização	8.547,88	23,85	67,18	50,00	500,00	9.021,73	6	15/12/2013
Utilização	9.021,73	25,17	0,00	0,00	500,00	9.546,90	-	15/01/2014
Utilização	9.546,90	26,64	0,00	0,00	500,00	10.073,54	-	15/02/2014
Utilização	10.073,54	28,11	79,92	50,00	500,00	10.551,65	7	15/03/2014
Utilização	10.551,65	29,44	0,00	0,00	500,00	11.081,09	-	15/04/2014
Utilização	11.081,09	30,92	0,00	0,00	500,00	11.612,01	-	15/05/2014
Utilização	11.612,01	32,40	92,76	50,00	500,00	12.094,41	8	15/06/2014
Utilização	12.094,41	33,74	0,00	0,00	500,00	12.628,15	-	15/07/2014
Utilização	12.628,15	35,23	0,00	0,00	500,00	13.163,38	-	15/08/2014
Utilização	13.163,38	36,73	105,70	50,00	500,00	13.650,11	9	15/09/2014
Utilização	13.650,11	38,09	0,00	0,00	500,00	14.188,20	-	15/10/2014
Utilização	14.188,20	39,59	0,00	0,00	500,00	14.727,79	-	15/11/2014
Utilização	14.727,79	41,09	118,77	50,00	500,00	15.218,88	10	15/12/2014
Utilização	15.218,88	42,46	0,00	0,00	500,00	15.761,34	-	15/01/2015
Utilização	15.761,34	43,98	0,00	0,00	500,00	16.305,32	-	15/02/2015
Utilização	16.305,32	45,49	131,93	50,00	500,00	16.800,81	11	15/03/2015
Utilização	16.800,81	46,88	0,00	0,00	500,00	17.347,69	-	15/04/2015
Utilização	17.347,69	48,40	0,00	0,00	500,00	17.896,09	-	15/05/2015
Utilização	17.896,09	49,93	145,21	50,00	500,00	18.396,02	12	15/06/2015

Tabela parcial gerada pela simulação.

Fonte: <https://www3.caixa.gov.br/fies/asp/Simulador/Simulador.asp>

Observamos ainda que, na 1ª linha da tabela, nenhuma prestação é calculada e nem cobrada neste momento, pois se trata do mês de agosto e, conforme regra do financiamento, os juros são cobrados em apenas 4 meses do ano (março, junho, setembro e dezembro).

É liberada uma nova parcela de R\$ 500,00 que, somando com o saldo anterior, resulta no saldo atual de R\$ 1.001,40.

Na 2ª linha da tabela acima (Tabela 12) novamente são calculados os juros de 0,27901% de R\$ 1.001,40 que é igual a R\$ 2,79. Neste mês de setembro é

pago R\$ 4,19 referente aos juros de agosto e setembro (1ª prestação). É liberada nova parcela de R\$ 500,00 para a faculdade e a dívida (saldo atual) é agora de R\$ 1.500,00. Este processo continua nos próximos meses.

Observa-se que a prestação calculada para ser paga em setembro de 2013 é de R\$ 54,55. Como o valor máximo que pode ser cobrado da prestação durante o curso é de R\$ 50,00, então os R\$ 4,55 excedentes passam a fazer parte do saldo atual, juntamente com a parcela liberada no mês.

O prazo de utilização estende-se até junho de 2015, quando o estudante conclui o curso e paga a 12ª prestação de R\$ 50,00.

Agora observando a Tabela 3, Apêndice G, constata-se que inicia-se o período de carência, no qual o estudante continua pagando parte dos juros (máximo de R\$ 50,00), mas não ocorre a amortização e nem são liberadas novas parcelas, pois o estudante já conclui o curso e não há mais mensalidades a serem pagas.

Depois dos 18 meses de carência, começa o processo de amortização da dívida.

Observa-se, que em 15/12/2016 o saldo atual (devedor) será de R\$ 19.035,78, a taxa de juros cobrada continuará sendo 0,27901% e o período do financiamento na fase de amortização corresponde a 120 meses. Logo com estes dados chega-se a Prestação de R\$ 186,89, que foi calculada mais rapidamente através da planilha construída pelo professor para a atividade 5.

Figura 42

	1	2
1	<b>SAF ou Sistema Price (sem entrada)</b>	
2		
3		
4	Financiamento (valor a vista)	R\$ 19.035,78
5		
6		
7		
8	Tempo	120
9		
10		
11		
12	Taxa Mensal (unitária)	0,0027901
13		
14		
15		
16	<b>Prestação</b>	<b>R\$ 186,89</b>
17		

Planilha para cálculo da prestação do FIES. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Os dados da tabela 3 (Apêndice G) referentes ao período de amortização não apresentaram dificuldades de compreensão para os alunos, já que se trata exatamente do Sistema Price estudado na atividade anterior.

### 5.5. Análise a posteriori

Na análise *a priori* realizada no capítulo 3 foram apresentadas as hipóteses a seguir:

e) A 4ª atividade (Fluxo de Caixa) auxilia a compreensão e resolução dos problemas envolvendo principalmente a decisão entre várias opções de compra e venda de produtos, cálculo de prestações abordados nas 5ª, 6ª e 7ª atividades;

f) embora não seja assunto apresentado em nenhum material didático do ensino médio, é possível e importante abordar com os alunos deste segmento os dois sistemas de financiamento mais utilizados no Brasil: Sistema Francês de Amortização e Sistema de Amortização Constante (6ª Atividade) de uma maneira simples para que o aluno compreenda o processo de cálculo e consiga analisar tabelas de simulações de financiamento, como por exemplo, FIES, objeto de estudo da 7ª atividade.

Durante a fase de experimentação foi possível confirmar a validade destas hipóteses através do acompanhamento dos alunos nas resoluções dos exercícios, seus questionamentos e principalmente através do interesse em solucionar os problemas, mostrando que estavam compreendendo o conteúdo. Observa-se que um dos motivos do desinteresse em solucionar os problemas ocorre justamente pela falta de compreensão do objeto de estudo.

A representação geométrica do fluxo de caixa através da representação das setas foi compreendida rapidamente pelos alunos e sem dúvida esta visualização facilitou a compreensão dos problemas nas atividades 6 e 7 constatadas durante a aula dialogada e também nos momentos dos exercícios.

Os sistemas de financiamento Francês e de Amortização Constante despertaram interesse dos alunos, inclusive alguns comentaram nesta aula que seus pais tinham realizado o financiamento da casa e na aula seguinte disseram que tinham verificado no contrato de qual sistema se tratava.

Um dos alunos disse que tinha feito um curso de informática sobre a planilha de cálculos Excel e que na oportunidade havia uma atividade para construir uma planilha simulando um financiamento e que sua resolução foi automática, seguindo o roteiro, sem compreender o que estava fazendo, e agora, durante estas aulas, tinha se tornado mais claro o assunto.

Conforme explicado na Experimentação II, atividade 6, os dois financiamentos foram apresentados concomitantemente e através de tabela para facilitar a compreensão e a comparação entre eles. Realmente esta metodologia teve resultado muito positivo.

Nestas aulas contamos com o acompanhamento de uma professora auxiliar que comentou como fica muito mais simples a compreensão dos sistemas de amortização se trabalhados desta forma. Na oportunidade, esta professora comentou que cursava o último ano de Licenciatura em Matemática e este assunto estava sendo estudado no seu curso de uma maneira bem mais complexa e que, assistindo à aula, ficaram muito mais claros os conceitos de progressões aritmética e geométrica associados aos sistemas de financiamento. Esta professora nos ajudou durante a resolução dos exercícios pelos alunos e confirmou a eficácia desta

metodologia. Na foto 4, a professora auxiliar, Pamila<sup>1</sup> (em pé), auxiliando os alunos durante os exercícios sobre sistemas de financiamento.

Fotografia 4



Alunos confeccionando a planilha da atividade 7.

Constatou-se que os alunos apresentavam algumas dúvidas no início da construção das tabelas que foram rapidamente sanadas. Enfim, embora os sistemas de financiamento não sejam assunto previsto no ensino médio, é possível abordá-los de uma forma compreensível para os alunos, sendo que aqueles envolvidos no projeto se empolgaram e realizaram a atividade de maneira bem tranquila conforme pode-se constatar nas fotos apresentadas no item 5.3.

A atividade 6 foi fundamental para compreensão do FIES na atividade 7. Foi preciso primeiro entender o Sistema de Amortização Francês (Tabela Price) com uma tabela reduzida, prazo menor de financiamento, para analisar uma tabela extensa como a simulação do financiamento estudantil realizada na última atividade.

Percebeu-se que os alunos compreenderam os cálculos realizados na simulação da tabela durante a análise.

Através de uma aula dialogada, os alunos iam questionando o que não entendiam e também participando dos cálculos, como o da taxa anual de 3,4% que corresponde a uma taxa mensal de 0,27901%. Percebeu-se que haviam compreendido que, neste caso, foi feita a média geométrica e não a aritmética, conforme já relatado no item anterior durante a Experimentação da atividade 7.

---

<sup>1</sup> Citada com autorização.

Os termos financeiros como amortização, prazo de carência, entre outros, passaram a ser entendidos pelos alunos e isto ficou bem claro quando faziam perguntas utilizando-os.

A aula sobre os sistemas de financiamento foi acompanhada também por um professor de Língua Portuguesa. Depois da aula ele comentou que realmente foi muito interessante e que havia conseguido compreender o assunto e a construção das tabelas realmente facilitou a análise.

Enfim, é possível trabalhar os sistemas de financiamento no Ensino Médio. É possível e fundamental aplicar os conhecimentos das progressões aritmética e geométrica no estudo da matemática financeira.

## CONCLUSÃO

Este trabalho é fruto de vários anos de experiência docente, acompanhando a evolução das propostas, analisando os livros didáticos e principalmente percebendo as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos que envolvem a matemática financeira.

O Mestrado Profissional PROFMAT contribuiu para a sistematização e aprofundamentos da matemática financeira, auxiliando a elaboração da sequência didática apresentada neste trabalho.

A disciplina MA 36, Recursos Computacionais no Ensino da Matemática, também contribuiu para a ideia de elaboração de uma planilha para o cálculo das prestações trabalhado na atividade 5 e 7, bem como para o uso da calculadora com os alunos.

Constatou-se que os alunos se envolveram nas atividades propostas e sentiram-se desafiados a solucionar várias questões inclusive a deduzir as fórmulas para o cálculo do montante em capitalizações simples e composta.

Os problemas envolvendo análises das opções de compra e venda de produtos também motivaram os alunos, pois num primeiro momento, utilizando o senso comum, consideravam uma opção mais vantajosa. Era necessário fazer a análise e os cálculos para comprovar o que “achavam” inicialmente como opção mais vantajosa. Fazendo os cálculos percebiam que haviam se equivocado na decisão inicial. Perceberam que uma decisão racional é fundamental para fazer as melhores escolhas financeiramente e que a melhor opção para uma pessoa pode não ser para outra, dependendo de quanto consegue fazer seu dinheiro render.

A metodologia da representação geométrica para compreender o fator de aumento (barras verticais) e a representação geométrica através do fluxo de caixa também foi essencial no processo de ensino aprendizagem.

O cálculo das prestações iguais aplicado intensamente nas transações comerciais também despertou o interesse dos alunos. É comum o vendedor de lojas consultar uma tabela para calcular o valor das prestações, dependendo do número de parcelas escolhidos pelo comprador ou ainda se haverá ou não pagamento antecipado (entrada), sem compreender que aqueles fatores apresentados nas tabelas originaram-se da aplicação dos conceitos da soma de uma progressão

geométrica. Os alunos tiveram oportunidade de compreender como este cálculo é realizado.

O uso da calculadora comum foi fundamental na realização das atividades. O aluno percebeu que não basta ter uma calculadora se não souber os conceitos envolvidos na resolução de uma questão. A calculadora foi utilizada apenas como ferramenta facilitadora dos cálculos deixando ao aluno a parte essencial de analisar o problema e verificar uma forma de resolução.

Foi necessário auxiliar os alunos na utilização de algumas funções da calculadora, como a memória, e também como resolver mais rapidamente as potências. Sentiu-se que algumas atividades seriam facilitadas com o uso da calculadora científica. Conversando com a direção da Escola Estadual sobre isto, foi feita uma pesquisa sobre o custo e, diante do valor encontrado, foi possível adquirir 20 calculadoras científicas que serão muito úteis na aplicação destas atividades para novas turmas a partir de 2013. Estas atividades serão agora trabalhadas com alunos da 1ª série do ensino médio ao estudar as progressões aritmética e geométrica, que entendemos ser o momento ideal.

Entende-se também que foi importante a apresentação da calculadora financeira aos alunos. Saber de sua existência mesmo que não seja possível o uso diretamente é fundamental. Alguns alunos comentaram que já tinham visto a calculadora financeira sendo utilizada em bancos ou lojas e desconheciam os cálculos que estas realizavam.

Também pretendemos acrescentar a este trabalho, em futuras turmas, entrevista dos alunos com pessoa responsável e capacitada pela agência bancária para esclarecer outros financiamentos existentes atualmente, inclusive da casa própria.

Há ainda a possibilidade de desenvolvermos atividades a serem trabalhadas no Excel, como a planilha para demonstração de um financiamento, ou mesmo usar as fórmulas do Excel para encontrar o valor da prestação no sistema Price.

O estudo dos sistemas de financiamento foi aplicado pela primeira vez no ensino médio e foi possível verificar a compreensão dos alunos e o envolvimento deles nas atividades. Para muitos alunos o ensino médio é etapa final dos estudos e outros prosseguirão optando por cursos na área de Humanas ou mesmo da área de Exatas que não abordam os sistemas de financiamento. Este conhecimento é

fundamental em nossa sociedade, repleta de ofertas para financiamento de produtos e serviços. É possível e importante abordar este conceito na Educação Básica.

Enfim, este trabalho apresenta metodologia diferenciada em relação aos materiais didáticos existentes sobre o estudo da matemática financeira e sua aplicação aconteceu de maneira satisfatória, com resultados positivos em duas turmas da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de São Paulo.

Que este trabalho seja motivo de estudos e adaptações por professores que pretendam abordar a matemática financeira com seus alunos de maneira compreensível e principalmente interligada com os conteúdos matemáticos que a embasam.

## Referências

ALMOULOUD, S.A.; SILVA, M.J.F.R. Engenharia didática: evolução e diversidade  
Didactic engineering: evolution and diversity. **Revemat**, Florianópolis, v.07, n. 2, p.  
22-52, 2012. Disponível em  
<<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1883>>. Acesso em:  
dez. 2012.

ARAÚJO, C. R. V. **Matemática Financeira**. 1 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

ASSAF NETO, A. **Matemática Financeira e suas aplicações**. São Paulo: Atlas,  
2002.

AULETE, dicionário. **Definição de engenho**. Disponível em:  
<<http://aulete.uol.com.br/engenho#ixzz2JmdSPPRX>>. Acesso em: jan. de 2013.

BRASIL, Caixa Econômica Federal. **Simulador FIES**. Disponível em: <  
<https://www3.caixa.gov.br/fies/asp/Simulador/Simulador.asp>>. Acesso: Nov. 2012.

BRASIL, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Definição FIES**.  
Disponível em: < <http://sisfiesportal.mec.gov.br/fies.html>>. Acesso: nov., 2012.

BRASIL, Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012:  
Matemática**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2012.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares  
Nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: referencial para a ação investigativa e  
para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23.,  
p.87-119, 2005. Disponível em:  
<<http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=6>>. Acesso em: dez. 2012.

FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO. **Telecurso 2000 Matemática - 2º Grau**. São  
Paulo: Editora Globo, v.2, s/d.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino  
de Matemática (MA36)**. Material Didático PROFMAT – Universidade Federal do Rio  
de Janeiro, Universidade Federal de São Carlos e Universidade Estadual do Rio de  
Janeiro, 2012. p.166.

LIMA, E. L.; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6.ed. Rio de Janeiro, Sociedade  
Brasileira de Matemática, v. 1., 2001.

LIMA, E. L.; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6.ed. Rio de Janeiro, Sociedade  
Brasileira de Matemática, v. 2., 2006.

MICHAELIS,dicionário. **Definição de engenho**. Disponível em:  
<<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=engenharia>>. Acesso em: jan. de 2013.

MORGADO, A.C. **Vídeos: Matemática Financeira**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. Disponível em:  
<<http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010-2>>. Acesso em: jul. de 2012.

NOVAES, R. C. N. **Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio**. 2009. 206p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Médio- 1ª série**. São Paulo: SEE, v. 1, 2009.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio- 1ª série**. São Paulo: SEE, v.1, 2009.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2º Grau**. 3.ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

SARESP. **Leitura e Matemática 2005 – 3ºEM**. Disponível em:<[http://saresp.fde.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas\\_EM\\_2005/3%C2%B0s%C3%A9rie%20EM%20noite.pdf](http://saresp.fde.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas_EM_2005/3%C2%B0s%C3%A9rie%20EM%20noite.pdf)>. Acesso em: nov. 2012.

SARESP. **Matemática e Questionário 2007 – 3ºEM**. Disponível em:  
<[saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/EM%203ª%20série/1\\_Manhã/Prova-MAT-3EM-Manha.pdf](http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/EM%203ª%20série/1_Manhã/Prova-MAT-3EM-Manha.pdf)>. Acesso em: nov. 2012.

VIEIRA - SOBRINHO, J. D. **Matemática Financeira**. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2006.

## Apêndice A

### Atividade 1: Fator de Aumento e Desconto

Tempo: 2 aulas

#### Problema desencadeador 1

Uma calça que custava R\$ 120,00 sofreu um acréscimo de 5%. Qual será o seu novo valor?

#### Problema desencadeador 2

Como resolver o problema 1 utilizando apenas uma operação matemática?

**Problema desencadeador 3**

Supondo agora que a calça que custava R\$ 120,00 está com desconto de 5%. Usando uma única operação matemática, calcule o novo preço.

**Problema desencadeador 4**

Depois de um aumento de 15%, uma máquina fotográfica passou a custar R\$ 460,00. Qual era o preço antes do aumento?

## Exercícios

1- Complete as frases, tornando-as verdadeiras:

a) Um celular de R\$ 250,00 sofreu um aumento de 12%. Para encontrar o novo valor basta multiplicar o antigo por \_\_\_\_\_ obtendo R\$ \_\_\_\_\_.

b) Supondo que o produto teve um desconto de 12%, para encontrar o novo valor basta multiplicar o antigo por \_\_\_\_\_ resultando R\$ \_\_\_\_\_.

2- Complete a tabela:

Taxas	Fator de Aumento		Fator de desconto	
	Taxa percentual	Taxa unitária	Taxa percentual	Taxa unitária
1 %	101%	1,01	99%	0,99
3%				
11%				
20%				
2,4 %				
0,5 %				

3- Um trabalhador obteve um aumento de 15% em seu salário e passou a receber R\$ 690,00. Determine o valor do salário antes do aumento.

## Apêndice B

### 2ª Atividade: Aumentos e Descontos Sucessivos

Tempo: 1 aula

#### Problema desencadeador 1

Um produto sofreu um acréscimo de 20%. Na semana seguinte passou por outro reajuste de 10%. Qual a porcentagem total de acréscimo?

#### Problema desencadeador 2

Agora suponha que o produto tenha um desconto de 20% e, depois de alguns dias, outro desconto de 10%. O desconto total será de 30%, maior do que 30% ou menor do que 30%? Justifique.

### Exercícios

1- Aumentos sucessivos de 30% e 20% equivalem a um aumento único de quanto?  
E descontos sucessivos de 30% e 20%?

2- Uma inflação mensal de 3% ao mês equivale a uma inflação anual de quanto?

3- Uma inflação de 1% ao mês gera uma inflação anual de quanto? E semestral? E trimestral?

4- O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por  $x$  reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda deste produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo,

- (A) prejuízo de 10%
- (B) prejuízo de 5%
- (C) lucro de 20%
- (D) lucro de 25%
- (E) lucro de 30%

5- Uma inflação de 15% em 4 meses é gerada por uma inflação mensal média de quanto?

Sugestão: lembre-se que a raiz quarta de um número pode ser obtida, na calculadora, apertando duas vezes a tecla da raiz quadrada.

## Apêndice C

### 3ª Atividade: Juros Simples e Composto

Tempo: 2 aulas

#### Problema desencadeador:

Emprestei R\$ 1.000,00 de um amigo e combinei pagar-lhe uma taxa de 10% ao mês. Quanto terei que pagar-lhe após 5 meses?

#### Juros Simples

Tempo	Saldo no início do período	Juros	Saldo no final do período
0			
1			
2			
3			
4			
5			
Total			

#### Juro Composto

Tempo	Saldo no início do período	Juros	Saldo no final do período
0			
1			
2			
3			
4			
5			
Total			

### Exercícios

1- Maria aplicou R\$ 5.000,00 em uma aplicação que paga uma taxa de juros de 1% ao mês. Qual é o montante que Maria terá depois de 1 ano se o regime for:

- a) Juro Simples
- b) Juro Composto

2- Como poderíamos resolver o problema 1 sem fazer a tabela?

### Tarefa

1- Resolva este problema, sem a tabela, pelos dois sistemas de juros.

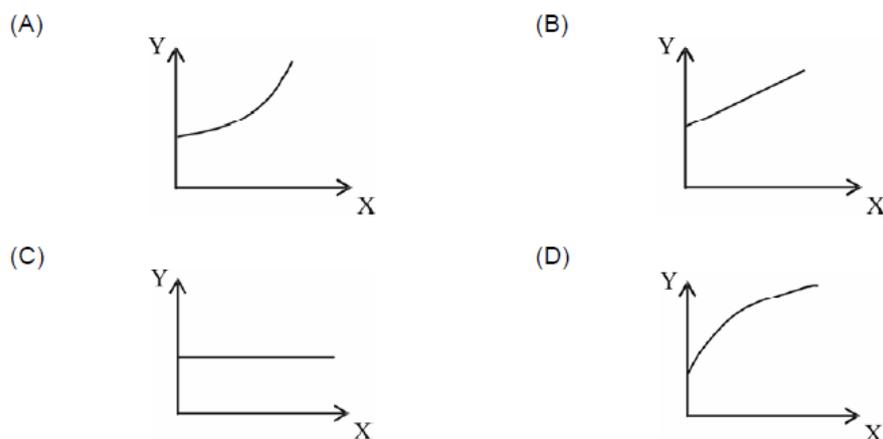
Uma instituição financeira paga uma taxa de 2% ao mês. Qual o montante que Maria terá se aplicar R\$1.200,00, depois de:

- a) 10 meses
- b) 2 anos
- c) 1 ano e meio.

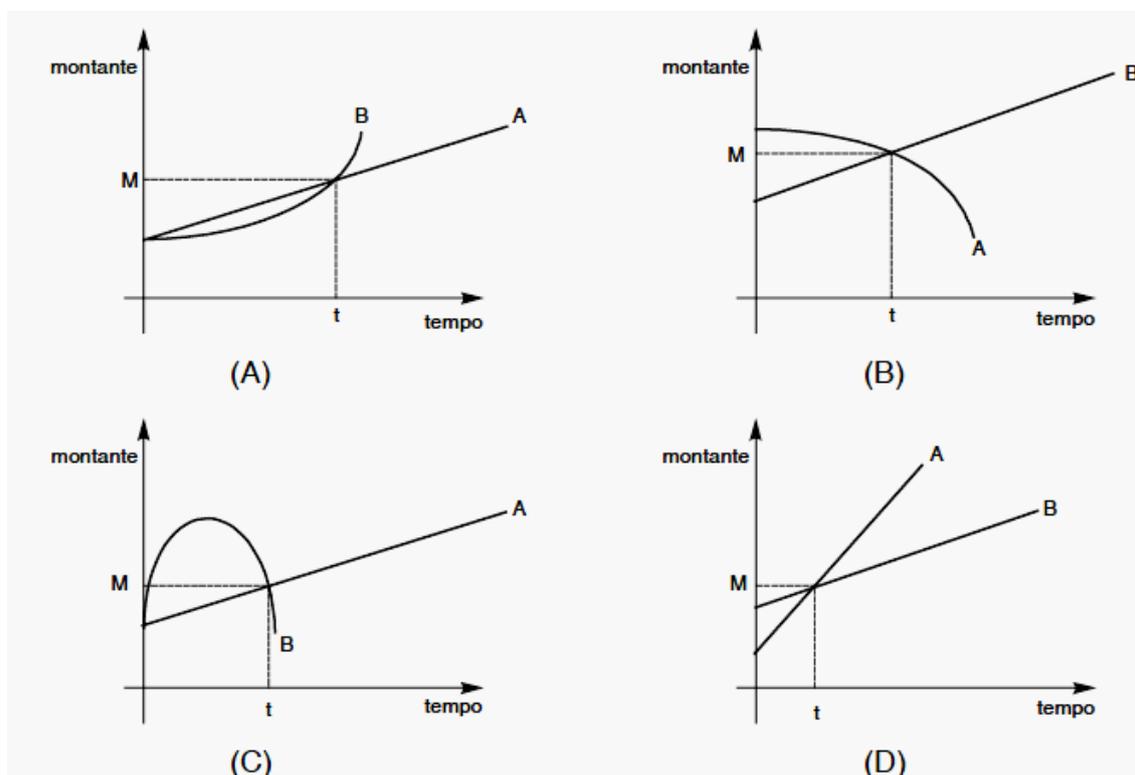
2- (SARESP 2005 - 3º Ensino Médio) Certo investimento rende 1% ao mês. Aplicando 100 reais hoje, em um ano o valor deste investimento será:

- (A)  $100 \cdot (0,1)^{12}$
- (B)  $100 \cdot (0,01)^{12}$
- (C)  $100 \cdot (1,1)^{12}$
- (D)  $100 \cdot (1,01)^{12}$

3- (SARESP 2005 - 3ª Série Ensino Médio- Noite) Um capital foi aplicado a juros compostos de 1% ao mês. O gráfico que melhor traduz a evolução deste capital com o tempo é:



4- (SARESP 2007 - 3ª série Ensino Médio – Manhã) Uma instituição financeira empresta um mesmo capital a cada uma de duas pessoas A e B, por um mesmo período de tempo  $t$ . A pessoa A toma emprestado esse capital em regime de juros simples, e B, em regime de juros compostos, ambas a uma mesma taxa anual. Decorrido o tempo  $t$ , ambas pagam um mesmo montante  $M$  (capital + juros). O gráfico que melhor representa a evolução do montante a ser pago respectivamente por A e B, nessa situação, é



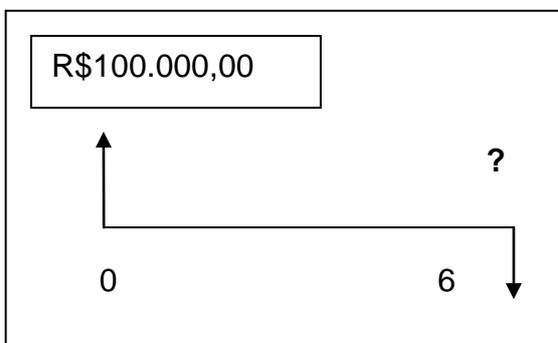
## Apêndice D

Nome: \_\_\_\_\_ Nº: \_\_\_\_\_ Série: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

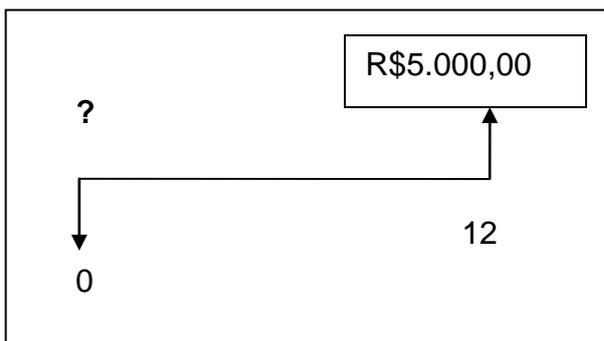
### Atividade 4: Fluxo de Caixa

Tempo: 1 aula

1- Foi feito um depósito de R\$ 100.000,00 para a compra de uma casa pelo prazo de 6 meses a uma taxa de 2,5% ao mês. Depois deste tempo será possível comprar a casa no valor de R\$ 115.000,00?



2- Para uma festa de formatura, que acontecerá daqui a 1 ano você precisará de R\$ 5.000,00. Quanto precisará aplicar hoje em uma instituição financeira que paga uma taxa de juros de 1,5 % ao mês?



3- Em abril, Mariana emprestou de um amigo R\$ 800,00 e prometeu pagar-lhe com uma taxa de juros compostos de 4% ao mês. Em outubro, Mariana pagou ao amigo R\$ 70,00. Em dezembro pagou R\$ 150,00. Depois de 1 ano da data do empréstimo pagou toda a sua dívida. Qual foi o valor final pago por Mariana ao seu amigo?

4- Em março, uma pessoa aplicou R\$ 1.000,00 em uma instituição financeira que paga uma taxa de juro composto de 2% ao mês. Em julho, esta pessoa fez um novo depósito de R\$ 200,00. Em setembro fez um saque de R\$ 200,00. Em dezembro retirou todo dinheiro aplicado, com juros. Qual é este montante?

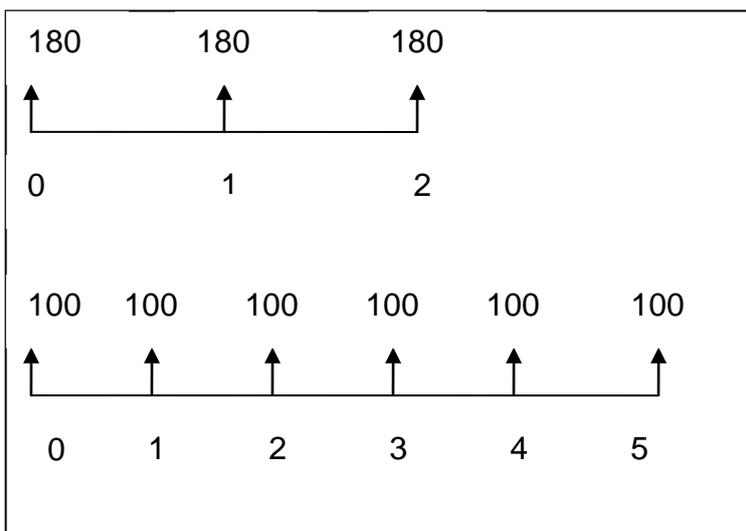
## Apêndice E

Nome: \_\_\_\_\_ Nº: \_\_\_\_ Série: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

### Atividade 5: Comprar à vista ou a prazo?

#### Problema desencadeador:

1- Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um aparelho eletrônico: três prestações mensais de R\$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R\$ 100,00 cada. Se Pedro consegue fazer seu dinheiro render 10% ao mês, o que ele deve preferir?



2- Marcos e Marta têm três opções de pagamento na compra de um celular:

I.) à vista, com 10% de desconto

II) em duas prestações mensais iguais, com desconto de 5%, vencendo a primeira um mês após a compra.

III) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual é a melhor opção para Marcos, se o dinheiro vale, para ele 5% ao mês? E para Marta, que consegue fazer seu dinheiro render apenas 1%?

3- Um computador cujo preço à vista é R\$ 1.200,00 é vendido em 5 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

4- Um vídeo game é vendido por R\$ 800,00 à vista e pode ser pago em três prestações mensais iguais. Se forem cobrados juros de 5% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo a primeira prestação paga:

- a) um mês após a compra;
- b) no ato da compra;
- c) dois meses após a compra.

5- Foi feito um financiamento de R\$ 1.000,00 para ser pago em 4 parcelas mensais iguais, sem entrada, à uma taxa de 1% ao mês. Calcule o valor de cada prestação.

## Apêndice F

Nome: \_\_\_\_\_ Nº: \_\_\_\_\_ Série: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

### Atividade 6

Tempo: 2 aulas

### Sistema de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

Os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam, basicamente, da forma pela qual o principal (capital) e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital.

Para cada sistema de amortização é construída uma planilha financeira, a qual relaciona, dentro de certa padronização, os diversos fluxos de pagamentos e recebimentos.

#### Definições básicas

- **Amortização:** refere-se exclusivamente ao pagamento do principal (capital emprestado), o qual é efetuado, geralmente, através de parcelas periódicas (mensais, trimestrais etc.).
- **Saldo Devedor:** representa o valor da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago ao credor a título de amortização.
- **Prestação:** é composta do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Assim:

$$\text{Prestação} = \text{amortização} + \text{encargos financeiros}$$

#### SAF – Sistema Francês de Amortização

O Sistema Francês de Amortização é também conhecido como Sistema Price (lê-se: praice), pois foi criado por Richard Price, matemático e pensador inglês que viveu entre 1723 e 1791.

Este sistema leva o nome de Sistema Francês de Amortização por ter sido adotado na França já no século XIX.



**Conclusões:**

1- Quais são as características de cada financiamento?

2- Em qual deles se paga menos juros? Por quê?

**Exercício**

Foi feito um financiamento de R\$ 1.000,00 por 4 meses à taxa de 1% ao mês, sem entrada. Calcule o valor da prestação e construa a planilha financeira nos dois sistemas SAF (prestações constantes) e SAC (Amortizações Constantes).

## Apêndice G

### Atividade 7

Simulação de Financiamento realizado no site:

<https://www3.caixa.gov.br/fies/asp/Simulador/Simulador.asp>

**TABELA 1**

<b>Dados Informados</b>	
Processo Seletivo	2º semestre de 2012
Quantidade de Semestres do curso	6
Quantidade de semestres já concluídos	0
Percentual de Financiamento	100%
Tipo de Estudante	Não Bolsista
Valor da Semestralidade (Mensalidade * 6)	R\$ 3.000,00
Prazo de Carência	18 meses
Taxa de Juros	3,4%
Data da Assinatura	10/07/2012
Dia escolhido para vencimento das prestações	15
<b>Dados Calculados</b>	
Quantidade de Semestres a serem financiados	6
Prazo de utilização em meses(meses a serem financiados)	36
Valor do Financiamento(pelos primeiros 6 meses)	R\$ 3.000,00
Valor do financiamento durante todo o prazo de utilização	R\$ 18.000,00
Data de Início do benefício(para efeito da contagem do prazo)	15/07/2012
Data de concessão(para efeito do início dos cálculos de juros)	15/07/2012
Prazo da fase de carência (em meses)	18
Prazo da fase de amortização 2 (em meses)	120
Data de início da fase de amortização 2	15/01/2017
Prazo total do contrato (em meses)	174
Data vencimento do contrato	15/12/2026
<b>VOLTAR</b>	

<https://www3.caixa.gov.br/fies/asp/Simulador/Resultadosimulacao.asp>

TABELA 2

Simulador de um financiamento			
100% da mensalidade financiada*	100%		
	mensalidade	Mensalidade Financiada pelo FIES	Mensalidade não Financiada
1º semestre	500,00	500,00	0,00
2º semestre	500,00	500,00	0,00
3º semestre	500,00	500,00	0,00
4º semestre	500,00	500,00	0,00
5º semestre	500,00	500,00	0,00
6º semestre	500,00	500,00	0,00

<b>Prestação na Fase de Amortização II</b>	186,89
<b>Saldo Devedor no Início da Fase de Amortização II</b>	19.035,78

De acordo com Lei 10.260, o valor máximo a ser cobrado na prestação de juros durante a fase de utilização é de R\$ 50,00. O excedente será incorporado ao saldo devedor (base de cálculo do trimestre seguinte)

TABELA 3

Fase	Saldo Anterior(R\$)	Juros(R\$)	Prestacao calculada(R\$)	Prestacao cobrada(R\$)	Liberação de parcela(R\$)	Saldo Atual(R\$)	Número prestacao	Data vencimento
Utilização	500,00	1,40	0,00	0,00	500,00	1.001,40	-	15/08/2012
Utilização	1.001,40	2,79	4,19	4,19	500,00	1.500,00	1	15/09/2012
Utilização	1.500,00	4,19	0,00	0,00	500,00	2.004,19	-	15/10/2012
Utilização	2.004,19	5,59	0,00	0,00	500,00	2.509,78	-	15/11/2012
Utilização	2.509,78	7,00	16,78	16,78	500,00	3.000,00	2	15/12/2012
Utilização	3.000,00	8,37	0,00	0,00	500,00	3.508,37	-	15/01/2013
Utilização	3.508,37	9,79	0,00	0,00	500,00	4.018,16	-	15/02/2013
Utilização	4.018,16	11,21	29,37	29,37	500,00	4.500,00	3	15/03/2013
Utilização	4.500,00	12,56	0,00	0,00	500,00	5.012,56	-	15/04/2013
Utilização	5.012,56	13,99	0,00	0,00	500,00	5.526,55	-	15/05/2013
Utilização	5.526,55	15,42	41,97	41,97	500,00	6.000,00	4	15/06/2013
Utilização	6.000,00	16,74	0,00	0,00	500,00	6.516,74	-	15/07/2013
Utilização	6.516,74	18,18	0,00	0,00	500,00	7.034,92	-	15/08/2013
Utilização	7.034,92	19,63	54,55	50,00	500,00	7.504,55	5	15/09/2013
Utilização	7.504,55	20,94	0,00	0,00	500,00	8.025,49	-	15/10/2013
Utilização	8.025,49	22,39	0,00	0,00	500,00	8.547,88	-	15/11/2013
Utilização	8.547,88	23,85	67,18	50,00	500,00	9.021,73	6	15/12/2013
Utilização	9.021,73	25,17	0,00	0,00	500,00	9.546,90	-	15/01/2014
Utilização	9.546,90	26,64	0,00	0,00	500,00	10.073,54	-	15/02/2014
Utilização	10.073,54	28,11	79,92	50,00	500,00	10.551,65	7	15/03/2014
Utilização	10.551,65	29,44	0,00	0,00	500,00	11.081,09	-	15/04/2014
Utilização	11.081,09	30,92	0,00	0,00	500,00	11.612,01	-	15/05/2014
Utilização	11.612,01	32,40	92,76	50,00	500,00	12.094,41	8	15/06/2014
Utilização	12.094,41	33,74	0,00	0,00	500,00	12.628,15	-	15/07/2014
Utilização	12.628,15	35,23	0,00	0,00	500,00	13.163,38	-	15/08/2014
Utilização	13.163,38	36,73	105,70	50,00	500,00	13.650,11	9	15/09/2014
Utilização	13.650,11	38,09	0,00	0,00	500,00	14.188,20	-	15/10/2014
Utilização	14.188,20	39,59	0,00	0,00	500,00	14.727,79	-	15/11/2014
Utilização	14.727,79	41,09	118,77	50,00	500,00	15.218,88	10	15/12/2014
Utilização	15.218,88	42,46	0,00	0,00	500,00	15.761,34	-	15/01/2015
Utilização	15.761,34	43,98	0,00	0,00	500,00	16.305,32	-	15/02/2015
Utilização	16.305,32	45,49	131,93	50,00	500,00	16.800,81	11	15/03/2015
Utilização	16.800,81	46,88	0,00	0,00	500,00	17.347,69	-	15/04/2015
Utilização	17.347,69	48,40	0,00	0,00	500,00	17.896,09	-	15/05/2015
Utilização	17.896,09	49,93	145,21	50,00	500,00	18.396,02	12	15/06/2015

Carência	18.396,02	51,33	0,00	0,00	0,00	18.447,35	-	15/07/2015
Carência	18.447,35	51,47	0,00	0,00	0,00	18.498,82	-	15/08/2015
Carência	18.498,82	51,61	154,41	50,00	0,00	18.500,43	13	15/09/2015
Carência	18.500,43	51,62	0,00	0,00	0,00	18.552,05	-	15/10/2015
Carência	18.552,05	51,76	0,00	0,00	0,00	18.603,81	-	15/11/2015
Carência	18.603,81	51,91	155,29	50,00	0,00	18.605,72	14	15/12/2015
Carência	18.605,72	51,91	0,00	0,00	0,00	18.657,63	-	15/01/2016
Carência	18.657,63	52,06	0,00	0,00	0,00	18.709,69	-	15/02/2016
Carência	18.709,69	52,20	156,17	50,00	0,00	18.711,89	15	15/03/2016
Carência	18.711,89	52,21	0,00	0,00	0,00	18.764,10	-	15/04/2016
Carência	18.764,10	52,35	0,00	0,00	0,00	18.816,45	-	15/05/2016
Carência	18.816,45	52,50	157,06	50,00	0,00	18.818,95	16	15/06/2016
Carência	18.818,95	52,51	0,00	0,00	0,00	18.871,46	-	15/07/2016
Carência	18.871,46	52,65	0,00	0,00	0,00	18.924,11	-	15/08/2016
Carência	18.924,11	52,80	157,96	50,00	0,00	18.926,91	17	15/09/2016
Carência	18.926,91	52,81	0,00	0,00	0,00	18.979,72	-	15/10/2016
Carência	18.979,72	52,96	0,00	0,00	0,00	19.032,68	-	15/11/2016
Carência	19.032,68	53,10	158,87	50,00	0,00	19.035,78	18	15/12/2016
Amortização	19.035,78	53,11	186,89	186,89	0,00	18.902,00	19	15/01/2017
Amortização	18.902,00	52,74	186,89	186,89	0,00	18.767,85	20	15/02/2017
Amortização	18.767,85	52,36	186,89	186,89	0,00	18.633,32	21	15/03/2017
Amortização	18.633,32	51,99	186,89	186,89	0,00	18.498,42	22	15/04/2017
Amortização	18.498,42	51,61	186,89	186,89	0,00	18.363,14	23	15/05/2017
Amortização	18.363,14	51,23	186,89	186,89	0,00	18.227,48	24	15/06/2017
Amortização	18.227,48	50,86	186,89	186,89	0,00	18.091,45	25	15/07/2017
Amortização	18.091,45	50,48	186,89	186,89	0,00	17.955,04	26	15/08/2017
Amortização	17.955,04	50,10	186,89	186,89	0,00	17.818,25	27	15/09/2017
Amortização	17.818,25	49,71	186,89	186,89	0,00	17.681,07	28	15/10/2017
Amortização	17.681,07	49,33	186,89	186,89	0,00	17.543,51	29	15/11/2017
Amortização	17.543,51	48,95	186,89	186,89	0,00	17.405,57	30	15/12/2017
Amortização	17.405,57	48,56	186,89	186,89	0,00	17.267,24	31	15/01/2018
Amortização	17.267,24	48,18	186,89	186,89	0,00	17.128,53	32	15/02/2018
Amortização	17.128,53	47,79	186,89	186,89	0,00	16.989,43	33	15/03/2018
Amortização	16.989,43	47,40	186,89	186,89	0,00	16.849,94	34	15/04/2018
Amortização	16.849,94	47,01	186,89	186,89	0,00	16.710,06	35	15/05/2018
Amortização	16.710,06	46,62	186,89	186,89	0,00	16.569,79	36	15/06/2018
Amortização	16.569,79	46,23	186,89	186,89	0,00	16.429,13	37	15/07/2018
Amortização	16.429,13	45,84	186,89	186,89	0,00	16.288,08	38	15/08/2018
Amortização	16.288,08	45,45	186,89	186,89	0,00	16.146,64	39	15/09/2018
Amortização	16.146,64	45,05	186,89	186,89	0,00	16.004,80	40	15/10/2018
Amortização	16.004,80	44,65	186,89	186,89	0,00	15.862,56	41	15/11/2018
Amortização	15.862,56	44,26	186,89	186,89	0,00	15.719,93	42	15/12/2018
Amortização	15.719,93	43,86	186,89	186,89	0,00	15.576,90	43	15/01/2019
Amortização	15.576,90	43,46	186,89	186,89	0,00	15.433,47	44	15/02/2019
Amortização	15.433,47	43,06	186,89	186,89	0,00	15.289,64	45	15/03/2019
Amortização	15.289,64	42,66	186,89	186,89	0,00	15.145,41	46	15/04/2019
Amortização	15.145,41	42,26	186,89	186,89	0,00	15.000,78	47	15/05/2019
Amortização	15.000,78	41,85	186,89	186,89	0,00	14.855,74	48	15/06/2019
Amortização	14.855,74	41,45	186,89	186,89	0,00	14.710,30	49	15/07/2019
Amortização	14.710,30	41,04	186,89	186,89	0,00	14.564,45	50	15/08/2019

Amortização	14.564,45	40,64	186,89	186,89	0,00	14.418,20	51	15/09/2019
Amortização	14.418,20	40,23	186,89	186,89	0,00	14.271,54	52	15/10/2019
Amortização	14.271,54	39,82	186,89	186,89	0,00	14.124,47	53	15/11/2019
Amortização	14.124,47	39,41	186,89	186,89	0,00	13.976,99	54	15/12/2019
Amortização	13.976,99	39,00	186,89	186,89	0,00	13.829,10	55	15/01/2020
Amortização	13.829,10	38,58	186,89	186,89	0,00	13.680,79	56	15/02/2020
Amortização	13.680,79	38,17	186,89	186,89	0,00	13.532,07	57	15/03/2020
Amortização	13.532,07	37,76	186,89	186,89	0,00	13.382,94	58	15/04/2020
Amortização	13.382,94	37,34	186,89	186,89	0,00	13.233,39	59	15/05/2020
Amortização	13.233,39	36,92	186,89	186,89	0,00	13.083,42	60	15/06/2020
Amortização	13.083,42	36,50	186,89	186,89	0,00	12.933,03	61	15/07/2020
Amortização	12.933,03	36,08	186,89	186,89	0,00	12.782,22	62	15/08/2020
Amortização	12.782,22	35,66	186,89	186,89	0,00	12.630,99	63	15/09/2020
Amortização	12.630,99	35,24	186,89	186,89	0,00	12.479,34	64	15/10/2020
Amortização	12.479,34	34,82	186,89	186,89	0,00	12.327,27	65	15/11/2020
Amortização	12.327,27	34,39	186,89	186,89	0,00	12.174,77	66	15/12/2020
Amortização	12.174,77	33,97	186,89	186,89	0,00	12.021,85	67	15/01/2021
Amortização	12.021,85	33,54	186,89	186,89	0,00	11.868,50	68	15/02/2021
Amortização	11.868,50	33,11	186,89	186,89	0,00	11.714,72	69	15/03/2021
Amortização	11.714,72	32,69	186,89	186,89	0,00	11.560,52	70	15/04/2021
Amortização	11.560,52	32,26	186,89	186,89	0,00	11.405,89	71	15/05/2021
Amortização	11.405,89	31,82	186,89	186,89	0,00	11.250,82	72	15/06/2021
Amortização	11.250,82	31,39	186,89	186,89	0,00	11.095,32	73	15/07/2021
Amortização	11.095,32	30,96	186,89	186,89	0,00	10.939,39	74	15/08/2021
Amortização	10.939,39	30,52	186,89	186,89	0,00	10.783,02	75	15/09/2021
Amortização	10.783,02	30,09	186,89	186,89	0,00	10.626,22	76	15/10/2021
Amortização	10.626,22	29,65	186,89	186,89	0,00	10.468,98	77	15/11/2021
Amortização	10.468,98	29,21	186,89	186,89	0,00	10.311,30	78	15/12/2021
Amortização	10.311,30	28,77	186,89	186,89	0,00	10.153,18	79	15/01/2022
Amortização	10.153,18	28,33	186,89	186,89	0,00	9.994,62	80	15/02/2022
Amortização	9.994,62	27,89	186,89	186,89	0,00	9.835,62	81	15/03/2022
Amortização	9.835,62	27,44	186,89	186,89	0,00	9.676,17	82	15/04/2022
Amortização	9.676,17	27,00	186,89	186,89	0,00	9.516,28	83	15/05/2022
Amortização	9.516,28	26,55	186,89	186,89	0,00	9.355,94	84	15/06/2022
Amortização	9.355,94	26,10	186,89	186,89	0,00	9.195,15	85	15/07/2022
Amortização	9.195,15	25,66	186,89	186,89	0,00	9.033,92	86	15/08/2022
Amortização	9.033,92	25,21	186,89	186,89	0,00	8.872,24	87	15/09/2022
Amortização	8.872,24	24,75	186,89	186,89	0,00	8.710,10	88	15/10/2022
Amortização	8.710,10	24,30	186,89	186,89	0,00	8.547,51	89	15/11/2022
Amortização	8.547,51	23,85	186,89	186,89	0,00	8.384,47	90	15/12/2022
Amortização	8.384,47	23,39	186,89	186,89	0,00	8.220,97	91	15/01/2023
Amortização	8.220,97	22,94	186,89	186,89	0,00	8.057,02	92	15/02/2023
Amortização	8.057,02	22,48	186,89	186,89	0,00	7.892,61	93	15/03/2023
Amortização	7.892,61	22,02	186,89	186,89	0,00	7.727,74	94	15/04/2023
Amortização	7.727,74	21,56	186,89	186,89	0,00	7.562,41	95	15/05/2023
Amortização	7.562,41	21,10	186,89	186,89	0,00	7.396,62	96	15/06/2023
Amortização	7.396,62	20,64	186,89	186,89	0,00	7.230,37	97	15/07/2023
Amortização	7.230,37	20,17	186,89	186,89	0,00	7.063,65	98	15/08/2023
Amortização	7.063,65	19,71	186,89	186,89	0,00	6.896,47	99	15/09/2023
Amortização	6.896,47	19,24	186,89	186,89	0,00	6.728,82	100	15/10/2023
Amortização	6.728,82	18,77	186,89	186,89	0,00	6.560,70	101	15/11/2023
Amortização	6.560,70	18,31	186,89	186,89	0,00	6.392,12	102	15/12/2023
Amortização	6.392,12	17,83	186,89	186,89	0,00	6.223,06	103	15/01/2024
Amortização	6.223,06	17,36	186,89	186,89	0,00	6.053,53	104	15/02/2024
Amortização	6.053,53	16,89	186,89	186,89	0,00	5.883,53	105	15/03/2024
Amortização	5.883,53	16,42	186,89	186,89	0,00	5.713,06	106	15/04/2024
Amortização	5.713,06	15,94	186,89	186,89	0,00	5.542,11	107	15/05/2024
Amortização	5.542,11	15,46	186,89	186,89	0,00	5.370,68	108	15/06/2024
Amortização	5.370,68	14,98	186,89	186,89	0,00	5.198,77	109	15/07/2024
Amortização	5.198,77	14,51	186,89	186,89	0,00	5.026,39	110	15/08/2024



## Apêndice H

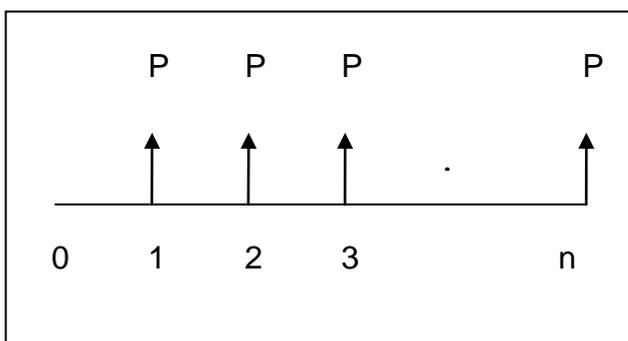
### Fórmula do Cálculo da Prestação em Sequências Uniformes (Sistema Price) sem entrada

Demonstração da fórmula para o cálculo da prestação de  $n$  pagamentos iguais a  $P$ , sendo  $i$  a taxa de juros,  $A$  o valor no instante 0 e  $n$  o número de períodos, no sistema conhecido como SAF (Sistema de Amortização Francês).

Provar que:

$$P = A \cdot \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Demonstração:



Atualizando os valores das Prestações ( $P$ ) na data 0:

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$A = P \left( \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right) \quad (1)$$

A soma entre parênteses corresponde a soma de termos de uma progressão geométrica com 1º termo e razão iguais a  $\frac{1}{1+i}$ . Aplicando a fórmula da soma dos elementos de uma PG, teremos:

$$\left( \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right) = \frac{1}{1+i} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{1}{1+i} \right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right] = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Agora substituindo em **( I )**, obtemos:

$$A = P \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

Logo, conforme queríamos demonstrar:

$$P = A \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$